S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 385–394 (2025) УДК 517.5
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.025 MSC 28A80

САМОПОДОБНЫЕ ЛЕСА НА ФРАКТАЛЬНЫХ КВАДРАТАХ

Д.А. Дроздов

Представлено И.В. Подвигиным

Abstract: The existence of nontrivial self-similar k-forests is shown. For this purpose, a method for constructing self-similar forests on fractal squares is described.

Keywords: fractal square, connected component, graph, dendrit, forest

1 Введение

Определение 1 (Hutchinson J. E. (1981), [3]). *Пусть* $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ *— система сжимающих подобий в* $\mathbb{R}^n$. *Непустой компакт* K, *удовлетворяющий уравнению* $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$, *будем называть* аттрактором системы $\mathcal{S}$ *или множеством, самоподобным относительно системы* $\mathcal{S}$.

Полугруппу, порожденную отображениями $\{S_1, \ldots, S_m\}$, обозначим через $\mathcal{G}(\mathcal{S})$.

Drozdov, D.A., Self-similar forests on fractal squares.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0005.

Поступила 25 марта 2025 г., опубликована 25 апреля 2025 г.

Множества $K_i = S_i(K) \subset K$ называют копиями самоподобного множества K. В зависимости от структуры пересечений копий самоподобного множества K, оно может быть связным, несвязным и даже вполне несвязным.

Определение 2. *Пусть* $\Sigma = \{K_i, i \in I\}$ *— конечная система непустых множеств.* Простой граф пересечений $\Gamma = \Gamma(\Sigma)$ *системы* Σ *— это граф с вершинами* $\{K_i : \ i \in I\}$ *с множеством рёбер* $\{e_{ij}\}$*, где* $e_{ij} \neq \varnothing$ *если* $K_i \cap K_j \neq \varnothing$.

Согласно теореме М. Хата [2, Th. 4.6], аттрактор K связен тогда и только тогда, когда его система копий $K_i = S_i(K) \subset K$ обладает связным простым графом пересечений. При этом, если K связен, то он локально связен и линейно связен.

Если самоподобное множество ациклично, то оно является самоподобным дендритом.

Определение 3. *Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг.*

Говорят, что самоподобное множество обладает свойством одноточечного (соотв., конечного) пересечения, если любая пара его копий пересекается не более чем по одной точке (соотв., по конечному числу точек). В этом случае точки множества $P := \{p : \ p \in K_i \cap K_j, \ i, j \in I, i \neq j\}$ играют в самоподобном множестве K особую роль.

Определение 4. *Пусть* K *— самоподобное множество, обладающее свойством конечного пересечения.* Двудольный граф пересечений $\widehat{G} = \widehat{G}(\mathcal{S})$ *системы* $\mathcal{S}$ *— это двудольный граф с долями* $\{K_i : \ i \in I\}$ *и* P*, и с множеством рёбер* $\{(K_i, p) : p \in P \cap K_i\}$.

Множество всех таких $x \in K$, что для некоторого $S \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$, $S(x) \in P$, называется самоподобной границей ∂K множества K.

Приведем критерий, позволяющий обнаруживать самоподобные дендриты с одноточечным пересечением.

Теорема 1 (Tetenov A.V. (2021), [5, Th. 1.7])**.** *Пусть* $K = K(\mathcal{S})$ *— самоподобный континуум со свойством одноточечного пересечения. Если граф пересечений* $\widehat{G}(\mathcal{S})$ *системы* $\mathcal{S}$ *является деревом, то её аттрактор* K *— дендрит.* □

Определение 5. *Пусть* $D = \{d_1, \ldots, d_m\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}^2$*, где* $n \geq 2$*, и* $1 < m < n^2$*.* Фрактальным квадратом *порядка* n *с* множеством единиц D *называют компактное множество* $K \subset \mathbb{R}^2$*, удовлетворяющее уравнению* $K = \dfrac{K + D}{n}$.

Это определение согласуется с Определением 1 следующим образом. Зададим систему $\mathcal{S} = \{S_d, d \in D\}$ гомотетий $S_d(z) = \frac{z+d}{n}$ (при $d \in D$)

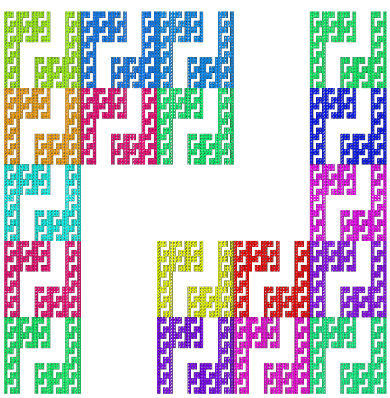
в $\mathbb{R}^2$. Тогда $K = \dfrac{K+D}{n} = \bigcup\limits_{d\in D} S_d(K)$. То есть, аттрактор $K \in \mathbb{R}^2$ этой системы $\mathcal{S}$ и является *фрактальным квадратом*.

В работе [1] автором была изучена структура пересечения копий фрактального квадрата, и получены условия, при которых пересечение копий и самоподобная граница фрактального квадрата конечна, счётна или несчётна, а также получена классификация односвязных фрактальных квадратов по форме главного дерева.

Как правило, произвольное самоподобное множество оказывается либо связным, либо несвязным с бесконечным множеством связных компонент. Построение самоподобных множеств с конечным числом связных компонент является более нетривиальной задачей.

Дж.-С. Сяо [6] получил метод, позволяющий строить несвязные фрактальные квадраты с конечным числом компонент. Один из приводимых им примеров показан на Рисунке 1. Более того, он доказал, что всякий фрактальный квадрат имеет либо конечное, либо несчётное множество связных компонент.

Возникает вопрос, существуют ли такие нетривиальные самоподобные множества, состоящие из конечного числа ациклических компонент. В этой работе доказывается существование таких множеств и приводится метод, позволяющий их строить в классе фрактальных квадратов.



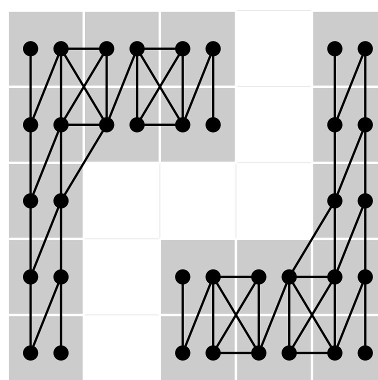


Рис. 1. Фрактальный квадрат с конечным числом неодносвязных компонент и соответствующий ему граф $G_{\mathcal{K}}$.

2 Самоподобные k-леса

Определение 6. *Самоподобным k-лесом мы будем называть самоподобное множество $\mathcal{K}$, являющееся дизъюнктным объединением дендритов $\mathcal{C}_i$ при $i = 1, \ldots, k$:*

$$\mathcal{K} = \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i.$$

Описание семейства самоподобных k-лесов на прямой $\mathbb{R}^1$ дают результаты Протасова и Зайцевой [7, 8] о периодических n-мерных замощениях, если их применить в случае $n = 1$.

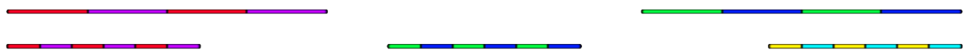


Рис. 2. Тривиальный самоподобный 2-лес (аттрактор четырёх гомотетий) и 3-лес (аттрактор шести гомотетий)

Основным результатом работы является следующая теорема о существовании фрактальных квадратов, являющихся нетривиальными самоподобными k-лесами на плоскости.

Теорема 2. *Для любого натурального $k \geq 2$ и $n = (2k-1)k_1$, где $k_1 \geq k+2$, существует самоподобный k-лес являющийся фрактальным квадратом порядка n.*

Для доказательства укажем метод построения самоподобного k-леса $\mathcal{K} = \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i$ который мы будем строить как фрактальный квадрат порядка n с множеством единиц D.

2.1. Фрактальные квадраты с конечным числом компонент. Для произвольного топологического пространства A, будем обозначать через $C(A)$ совокупность всех связных компонент A.

Определение 7. *Рассмотрим фрактальный квадрат $\mathcal{K} = \dfrac{\mathcal{K}+D}{n}$. Тогда будем называть множество единиц $D' \subset D$ связным, если простой граф пересечений системы $\Sigma(D') = \{K_d = S_d(\mathcal{K}), d \in D'\}$ связен.*

В силу определения 7 множество D распадается на систему связных компонент $C(D) = \{D_1, \ldots, D_k\}$. Обозначим символами $F_i = \bigcup\limits_{d \in D_i} S_d(\mathcal{K})$ объединения копий из этих компонент.

Рассмотрим систему множеств $F_{d,i} = S_d(F_i)$, где $d \in D$ а $i = 1, ..., k$. Пусть $G_{\mathcal{K}}$ — простой граф пересечений этой системы. Примеры такого графа можно увидеть на Рисунках 1 и 4.

В наших рассуждениях мы будем опираться на следующую теорему, которая связывает между собой число компонент множества единиц D, число компонент аттрактора $\mathcal{K}$ и число компонент графа $G_{\mathcal{K}}$.

Теорема 3 (J.-C. Xiao (2021), [6, Th. 1.4])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – фрактальный квадрат с множеством единиц D, для которого $\#C(D) \geq 2$. $\#C(\mathcal{K}) = \#C(D)$ тогда и только тогда, когда $\#C(D) = \#C(G_{\mathcal{K}})$.* □

Докажем теперь Теорему 2. Для этого среди фрактальных квадратов с k связными компонентами будем выделять примеры, в которых $\#(F_{d_1,i_1} \cap F_{d_2,i_2}) \leq 1$ для любых $F_{d_1,i_1}, F_{d_2,i_2} \in \mathcal{K}$, а граф $G_{\mathcal{K}}$ будет ацикличным. Для этого в параграфе 2.2 будем задавать у $\mathcal{K}$ самоподобную границу $\partial\mathcal{K}$ специального вида, в параграфах 2.3 и 2.4 покажем условия, при которых граф $G_{\mathcal{K}}$ будет ацикличным, а в параграфе 2.5 мы покажем, что получившийся фрактальный квадрат является самоподобным k-лесом.

2.2. Выбор самоподобной границы. Рассмотрим фрактальный квадрат $\mathcal{K}$, состоящий из k связных компонент. Из Теоремы 3 следует, что для него выполняются равенства $\{\mathcal{C}_i = F_i : 1 \le i \le k\}$. Сформулируем условия **(a), (b), (c)**, достаточные для того, чтобы такой фрактальный квадрат $\mathcal{K}$ являлся самоподобным k-лесом.

Первые два требования заключаются в следующем:

(a) $\mathcal{K}$ имеет самоподобную границу вида $\partial\mathcal{K} = \{A, B, A', B', A_i, B_i : i = 1, \ldots, k+1\}$, где
- $A = (0,0)$ и $B = (1,1)$;
- $A' = (0, y')$ и $B' = (1, y')$ для некоторого $0 < y' < 1$;
- $\{A_i = (x_i, 0),\ B_i = (x_i, 1) :\ i = 1, \ldots, k+1,\ 0 < x_i < 1\}$

(b) $\{A', A, A_1, B_1, B_2\} \subset \mathcal{C}_1$, $\{A_i, B_{i+1}\} \subset \mathcal{C}_i$ для $i = 2, \ldots, k-1$, $\{B', B, A_k, A_{k+1}, B_{k+1}\} \subset \mathcal{C}_k$.

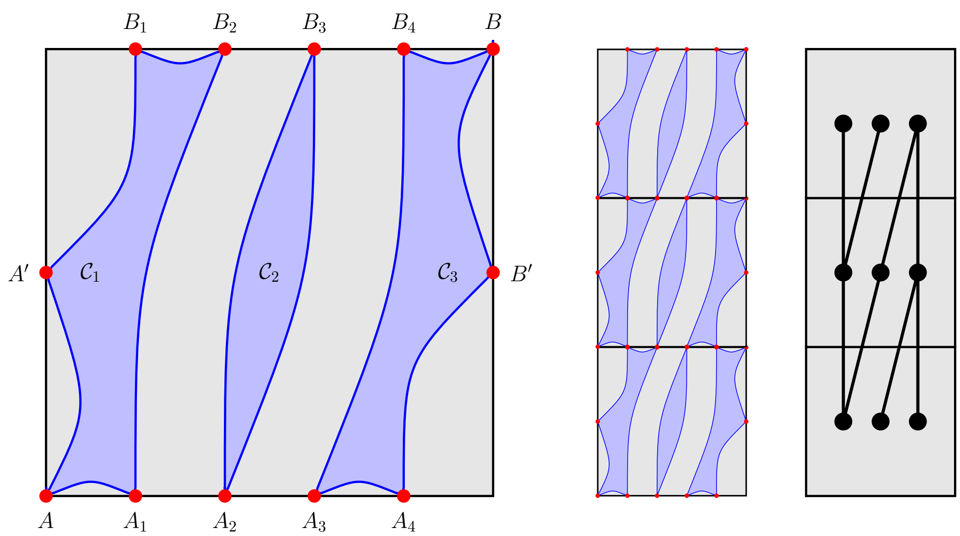


Рис. 3. Слева точки из $\partial\mathcal{K}$ и содержащие их компоненты. Справа k-башня и соотв. ей фрагмент графа $G_{\mathcal{K}}$.

На Рисунке 3 схематично показаны точки из $\partial\mathcal{K}$ и содержащие их компоненты.

Условия **(a)** и **(b)** обеспечивают следующий характер пересечения копий и лежащих в них компонент:

Для всякой пары $\{d, d+(1,1)\} \subset D$ пересечение одноточечное:

$$\frac{\mathcal{K}+d}{n} \cap \frac{\mathcal{K}+d+(1,1)}{n} = \frac{\mathcal{C}_k+d}{n} \cap \frac{\mathcal{C}_1+d+(1,1)}{n} = \\ = \frac{B+d}{n} = \frac{A+d+(1,1)}{n}.$$

Для всякой пары $\{d, d+(0,1)\} \subset D$ пересечение $(k+1)$-точечное:

$$\frac{\mathcal{K}+d}{n} \cap \frac{\mathcal{K}+d+(0,1)}{n} = \frac{\{B_1,\ldots,B_{k+1}\}+d}{n} = \frac{\{A_1,\ldots,A_{k+1}\}+d+(0,1)}{n}$$

где каждая пара совпадающих точек лежит в пересечении образов компонент $\mathcal{C}_i$ множества $\mathcal{K}$:

$$\frac{\mathcal{C}_i+d}{n} \cap \frac{\mathcal{C}_{i+1}+d+(0,1)}{n} = \frac{B_i+d}{n} = \frac{A_i+d+(0,1)}{n} \text{ для } 1 \le i \le k-1$$

Для всякой пары $\{d, d+(1,0)\} \subset D$ пересечение одноточечное:

$$\frac{\mathcal{K}+d}{n} \cap \frac{\mathcal{K}+d+(1,0)}{n} = \frac{\mathcal{C}_k+d}{n} \cap \frac{\mathcal{C}_1+d+(1,0)}{n} = \\ = \frac{B'+d}{n} = \frac{A'+d+(1,0)}{n}.$$

Последним условием для $\mathcal{K}$ будет то, что

(c) Граф $G_{\mathcal{K}}$ ацикличен.

Для выполнения этого условия мы будем строить компоненты в виде так называемых m-башен:

2.3. Описание m-башни.

Определение 8. *Для фрактального квадрата $\mathcal{K}$ порядка n с множеством единиц D мы будем обозначать символом $T_m(d_i)$ и называть m-башней (или башней с высотой m) с основанием $d_i \in D$ множество вида*

$$T_m(d_i) = \frac{d_i+\mathcal{K}}{n} \cup \frac{d_i+(0,1)+\mathcal{K}}{n} \cup \cdots \cup \frac{d_i+(0,m-1)+\mathcal{K}}{n}.$$

Очевидно, что $T_m(d_i) \subset \mathcal{K}$ если и только если $\{d_i, d_i+(0,1), \ldots, d_i+(0,m-1)\} \subset D$.

Отметим, что, при выполнении условий **(a)** и **(b)**, для каждого натурального $m \ge k$ башня $T_m(d_i)$ будет связным множеством. Более того, при $m > k$ такая башня $T_m(d_i)$ всегда будет содержать нестягиваемую в ней петлю.

С другой стороны, при $1 \le m < k$ башня $T_m(d_i)$ будет состоять из $k-m+1$ непересекающихся связных компонент. Как следствие, для односвязности башни $T_m(d_i)$ необходимо $m = k$.

Исходя из этого, потребуем от $\mathcal{K}$ следующее:

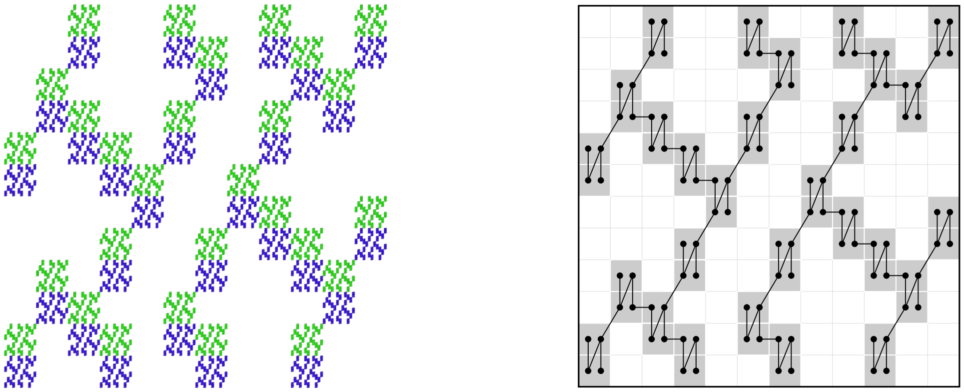


Рис. 4. Самоподобный 2-лес, состоящий из 2-башен, и его граф $G_{\mathcal{K}}$

(c.1) Для каждой копии $\frac{\mathcal{K}+d_i}{n}$, где $d_i \in D$, существует основание $d_j \in D$ такой башни $T_k(d_j) \subset \mathcal{K}$, что $\frac{\mathcal{K}+d_i}{n} \subset T_k(d_j)$. Множество всех оснований таких k-башен обозначим как $\hat{D}$.

(c.2) В $\mathcal{K}$ нельзя выделить $(k+1)$-башню.

Если самоподобная граница $\partial\mathcal{K}$ задана согласно условию **(a)**, то двудольный граф $\hat{G}(\mathcal{K})$ попарных пересечений k-башен в $\mathcal{K}$ ацикличен, только если для любых $d_i, d_j \in \hat{D}$ $\#(T_k(d_i) \cap T_k(d_j)) \le 1$. Такое пересечение башен будет одноточечным, только если $d_i, d_j \in \{(1,k), (-1,-k), (-1,k-1), (1,1-k)\}$, то есть башни должны соседствовать определённым образом. Соответствующие примеры допустимого соседства башен показаны на Рисунке 5 справа. Во всех остальных случаях пересечение башен будет либо пустым, либо неодноточечным.

2.4. Требования к порядку n фрактального квадрата $\mathcal{K}$. Потребуем, чтобы

(c.3) $n \ge (2k-1)\cdot k_1$, где $k_1 \ge k+2$.

При выполнении **(a, b, c.1, c.2)** условие **(c.3)** также необходимо для ацикличности графа $G_{\mathcal{K}}$. Действительно, рассмотрим в компоненте $\mathcal{C}_1$ связную цепочку $T_k(d_1) \cup \ldots \cup T_k(d_m)$ k-башен, соединяющую точки A_1 и B_1 (см. Рисунок 5 слева). Каждая башня $T_k(d_j)$ содержит в себе образ $b_j = \dfrac{B+d_j+(0,k-1)}{n}$ точки B. Если $\#(T_k(d_i) \cap T_k(d_j)) = 1$, то $d_i, d_j \in \{(1,k), (-1,-k), (-1,k-1), (1,1-k)\}$, поэтому мы можем построить ломаную с множеством вершин $\{A_1, b_1, \ldots, b_m, B_1\}$ со звеньями, конгруэнтными векторам $\alpha = (\frac{1}{n}, \frac{k}{n}), \beta = (-\frac{1}{n}, \frac{k-1}{n}), -\alpha$, и $-\beta$. Тогда существуют целые a, b такие, что $an\alpha + bn\beta = (0,n)$, откуда

$$\begin{cases} a = b \\ ak + b(k-1) = n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2ak - a = n \quad \Rightarrow \quad n \,\vdots\, (2k-1)$$

Аналогично выделим в компоненте $\mathcal{C}_i$ связную цепочку $T_k(d_1) \cup \ldots \cup T_k(d_m)$ k-башен, соединяющую точки A_i и B_{i+1}, строим ломаную с множеством вершин $\{A_i = (0, x_i), b_1, \ldots, b_m, B_{i+1} = (1, x_{i+1})\}$ со звеньями, конгруэнтными векторам $\alpha, \beta n, -\alpha,$ и $-\beta$. Тогда существуют целые a, b такие, что $an\alpha + bn\beta = (t_i, n)$ при $t_i = n(x_{i+1} - x_i)$, откуда

$$\begin{cases} a - b = t_i \\ (t_i + b)k + b(k-1) = n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (2k-1)b - t_i k = n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_i k \vdots (2k-1) \quad \Rightarrow \quad t_i \vdots (2k-1)$$

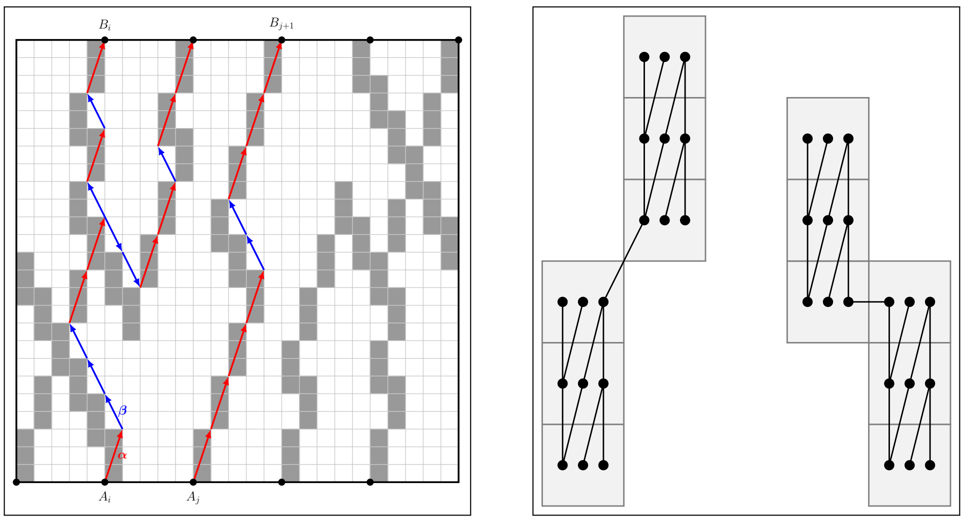


Рис. 5. Ломаные, соединяющие пары точек $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_j, B_{j+1}\}$ (слева) и допустимые виды соседства башен (справа)

С учётом того, что аналогичных цепочек в можно выделить по одной в компонентах $\mathcal{C}_i, i = 2, ...k-1$ и по две в компонентах $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_k$ (в том числе цепочки между точками A, B_1 и между A_k, B), справедлива оценка $n \geq (2k-1)(k+2)$.

Значит если выполняются **(a, b, c.1, c.2)**, то выполнение требования **(c)** возможно только при **(c.3)**.

2.5. Получение самоподобного k-леса. Рассмотрим теперь увеличенную в N раз башню: $\mathcal{T}_k = n \cdot T_k(0)$. Заметим, что тогда

$$\mathcal{T}_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} \big(\mathcal{K} + (0, i)\big).$$

Для $\mathcal{K}$ из Рисунка 4 такая башня $\mathcal{T}_k$ показана на Рисунке 6 слева. Поскольку $\mathcal{K}$ состоит только из башен $\{T_k(d_j) = T_k(0) + d_j/n : d_j \in \hat{D}\}$, то и T_k состоит из образов башни $T_k(0)$. Это означает, что множество T_k является самоподобным. Граф $G(\mathcal{K})$ попарных пересечений k-башен

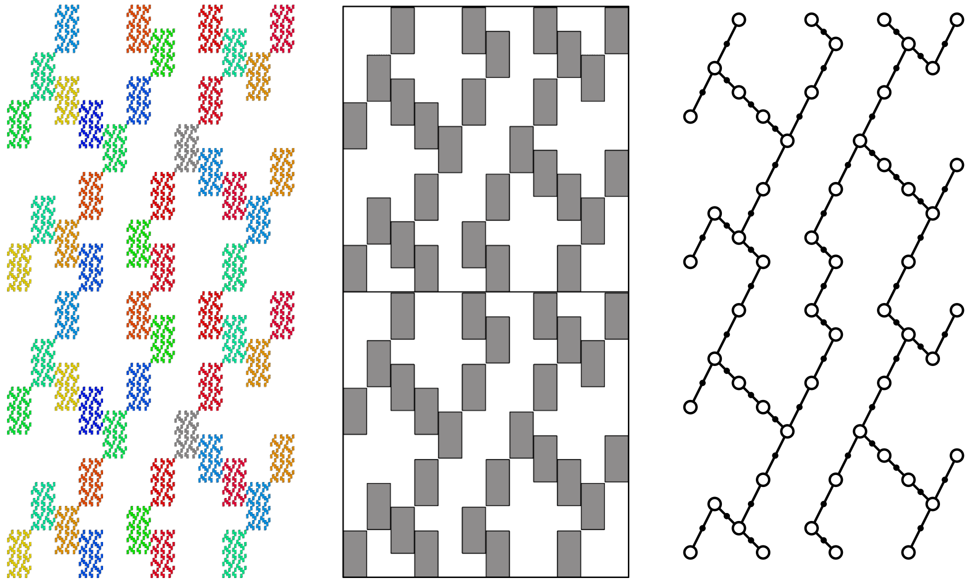


Рис. 6. Самоподобный дендрит (слева), являющийся аттрактором системы гомотетий, переводящих прямоугольник в систему маленьких прямоугольников (в центре). Справа показан его двудольный граф пересечений.

в $\mathcal{K}$ ацикличен, поэтому двудольный граф $\hat{G}(\mathcal{T}_k)$ попарных пересечений образов k-башни $T_k(0)$ в $\mathcal{T}_k$ ацикличен и связен (пример такого графа показан на Рисунке 6 справа). Тогда, согласно Теореме 1, такое $\mathcal{T}_k$ — самоподобный дендрит. А поскольку

$$\mathcal{T}_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{j=1}^{k} \Big(\mathcal{C}_j + (0, i)\Big),$$

то все компоненты $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{K}$ являются дендритами.

Это означает, что фрактальный квадрат $\mathcal{K}$ с k связными компонентами, удовлетворяющий условиям **(a, b, c)**, является самоподобным k-лесом. При этом такой k-лес может быть реализован только на фрактальных квадратах порядка $n \geq (2k-1) \cdot k_1$, где $k_1 \geq k+2$. Тем самым Теорема 2 доказана.

References

[1] D. Drozdov, A. Tetenov, *On the classification of fractal square dendrites*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl., **7**:3 (2023), 79–96.

[2] M. Hata, *On the structure of self-similar sets*, Japan J. Appl. Math., **2**:2 (1985), 381–414. Zbl 0608.28003

[3] J. Hutchinson, *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J., **30**:5 (1981), 713–747. Zbl 0598.28011

[4] D.U. Mekhontsev, *IFStile*, software, (2016–2025).
[5] A. Tetenov, *Finiteness properties for self-similar continua*, preprint, arXiv:2003.04202, 2021.
[6] J.-C. Xiao, *Fractal squares with finitely many connected components*, Nonlinearity, **34**:4 (2021), 1817–1836. Zbl 1466.28013
[7] T.I. Zaitseva, V.Yu. Protasov, *Self-affine 2-attractors and tiles*, Sb. Math., **213**:6 (2022), 794–830. Zbl 1526.37021
[8] T.I. Zaitseva, *Simple tiles and attractors*, Sb. Math., **211**:9 (2020), 1233–1266. Zbl 1460.37016

Dmitry Alekseevich Drozdov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: dimalek97@yandex.ru