S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 443–456 (2025) УДК 517.53
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.029 MSC 30H99; 30H15, 30H50

СРАВНЕНИЕ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕВАНЛИННЫ И ДЖРБАШЯНА

Е.Г. Родикова, К.В. Кислакова

Представлено Е.М. Рудым

Abstract: The central concept of R. Nevanlinna's theory of meromorphic functions is the concept of characteristic function. In complex analysis, classes of functions of bounded type and Nevanlinna-Dzhrbashyan classes, introduced in R. Nevanlinna's monograph, are well known. These classes and their analytic subclasses played an important role in the development of the theory of functions of a complex variable. In 1964, M. Dzhrbashyan attempted to generalize R. Nevanlinna's harmonious theory by introducing a new characteristic function and classes of meromorphic functions with bounded α-characteristic. It turned out that the introduced classes are wider than the Nevanlinna-Dzhrbashyan classes. Developing Nevanlinna's theory, F.A. Shamoyan in 1999 introduced and studied classes of meromorphic functions with R. Nevanlinna characteristic from L^p-weighted spaces. The connection between Shamoyan's classes and Dzhrbashyan's weight classes is studied in this paper.

Keywords: analytic functions, Nevanlinna's characteristic, Dzhrbashyan's α-characteristic, differential operator.

Rodikova, E.G., Kislakova, K.V., Comparison of weight classes of analytical functions in a circle with restrictions on the Nevanlinna and Dzhrbashyan characteristics.

Поступила 30 октября 2024 г., опубликована 25 апреля 2025 г.

1 Введение

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D, $h(D)$ — множество всех функций, гармонических в D, $a^+ = \max(0, a)$, $a^- = \max(0, -a)$, $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через $T(r, f)$ характеристику Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$ [3], а через $T_\alpha(r, f)$ – α-характеристику М.М. Джрбашяна [1]:

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$T_\alpha(r,f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi, \alpha > -1,$$

где Γ — функция Эйлера.

Отметим, что α-характеристика была введена М.М. Джрбашяном в 1964 г. при обобщении им теории Р. Неванлинны, краеугольным камнем которой является понятие характеристичекой функции: $\lim\limits_{\alpha \to -1} T_\alpha(r, f) = T(r, f)$.

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ и функций $f, g : E \to \mathbb{R}$ будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta)$, $\zeta \in E$, если существует постоянная $C > 0$, для которой $f(\zeta) \le Cg(\zeta)$ для всех $\zeta \in E$.

При любом $\alpha > -1$ справедливо неравенство:

$$\sup_{0<r<1} T_\alpha(r,f) \lesssim \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T(r,f) dr,$$

поэтому введённый М. Джрбашяном класс аналитических функций в круге, имеющих там ограниченную α- характеристику, шире класса Неванлинны-Джрбашяна $S_\alpha = \{f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T(r,f)dr < +\infty\}$, введённого Р. Неванлинной в [3].

Обозначим Ω – множество всех измеримых положительных функций на $\Delta = (0, 1]$, для которых существуют числа m_ω, q_ω из Δ, M_ω такие, что (см. [8, с. 7])

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega,\ r \in \Delta,\ \lambda \in [q_\omega, 1]. \tag{1}$$

Простейшими примерами таких функций могут служить $\omega(t) = t^\gamma \left(\ln \ldots \ln \frac{c}{t}\right)^\beta$, $t \in \Delta$, $\gamma > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Обозначим через L^p_ω, $0 < p < +\infty$ весовое пространство измеримых в D функций g таких, что

$$\left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta \right)^p r dr \right)^{1/p} < +\infty,$$

$A^p_\omega = L^p_\omega \bigcap H(D)$, $h^p_\omega = L^p_\omega \bigcap h(D)$.

Пусть $\omega \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Введём в рассмотерение следующие классы функций:

$$N^p_{\omega,\alpha} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p_\alpha(r,f) dr < +\infty \right\},$$

$$S^p_{\omega,\beta} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\beta \omega(1-r) T^p(r,f) dr < +\infty \right\}.$$

Впервые классы $S^p_{\omega,0}$ были введены и исследованы Ф.А. Шамояном в 1999 г. в работе [5] как обобщение хорошо известных в научной литературе классов Неванлинны-Джрбашяна [3]. Классы $N^p_{\omega,\alpha}$ при $\omega(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$, были введены и исследованы в работе первого автора [4].

В работе [7] установлено, что при $\omega(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$, классы $N^p_{\omega,\alpha}$ и $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ совпадают для всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$. Мы распространяем этот результат на произвольные весовые функции $\omega \in \Omega$:

Теорема 1. *Классы $N^p_{\omega,\alpha}$ и $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ совпадают при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.*

Как следствие доказанной теоремы, мы найдём условия, при которых класс $N^p_{\omega,\alpha}$ инвариантен относительно оператора дифференцирования.

2 Формулировка и доказательство вспомогательных утверждений

Для доказательства основного результата нам потребуется вспомогательное утверждение, являющееся следствием теоремы 2, установленной в работе [7].

Теорема 2. *При всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$ справедливо следующее вложение: $S^p_{\omega,(\alpha+1)p} \subset N^p_{\omega,\alpha}$.*

Обозначим Z_f – множество всех нулей нетривиальной функции $f \in H(D)$, $n(r) = card\{z_k : |z_k| < r\}$ — количество точек последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ в круге $|z| < r < 1$ с учётом их кратностей.

Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_1^{+\infty} \subset D$, $0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1$, $k = 1, 2, ...$ (см. [1], также [8, с. 97]).

Из теоремы 4.1 и леммы 4.2 монографии [8] следует:

Теорема 3. *Если $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$ для произвольной функции $f \in S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$, то*

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r) n^p(r) (1-r)^{(\alpha+2)p} dr < +\infty. \tag{2}$$

Обратно, если (2) *выполняется, то можно построить произведение Джрбашяна* $\pi_\beta(z, z_k)$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, *из класса* $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$.

Следуя М.М. Джрбашяну (см. [1]), определим также функцию

$$n_\alpha(r) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)} \int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \cdot \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + \frac{n(0)}{\Gamma(\alpha+2)} (\ln r - k_\alpha), \quad (3)$$

где $n(0)$ — кратность нуля в точке $z = 0$, $k_\alpha = \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\alpha > -1$.

Аналогичным образом, как в работе Е.Г. Родиковой [4], можно установить следующее утверждение:

Теорема 4. *Если* $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$ *для произвольной функции* $f \in N^p_{\omega,\alpha}$, *то*

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r) n^p_\alpha(r) dr < +\infty. \quad (4)$$

Обратно, если (4) *выполняется, то можно построить произведение Джрбашяна* $\pi_\beta(z, z_k)$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, *из класса* $N^p_{\omega,\alpha}$ *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$.

При доказательстве этой теоремы существенную роль играет следующее утверждение:

Лемма 1. *Из сходимости интеграла* (4) *следует сходимость интеграла* (2).

Доказательство. Для краткости обозначим

$$I_N = \int\limits_0^1 \omega(1-r) n^p_\alpha(r) dr,$$

$$I_S = \int\limits_0^1 \omega(1-r) n^p(r) (1-r)^{(\alpha+2)p} dr.$$

По определению

$$\begin{aligned} I_N &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^p \int\limits_0^1 \omega(1-r) r^{-(\alpha+1)p} \left(\int\limits_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt\right)^p dr = \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^p \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha+1} \frac{n(ur)}{u} du\right)^p dr. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл снизу.

$$
\begin{aligned}
I_N &\geq \int\limits_{1/3}^{1} \omega(1-r) \left(\int\limits_{1-\frac{1-r}{2r}}^{1} (1-u)^{\alpha+1} n(ur)du \right)^p dr \geq \\
&\geq \tilde{c}_\alpha \int\limits_{1/3}^{1} n^p \left(\frac{3r-1}{2} \right) \omega(1-r)(1-r)^{(\alpha+2)p} dr = \\
&= c_\alpha \int\limits_{0}^{1} n^p(\rho) \omega(1-\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p} d\rho = I_S.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получаем, что если $I_N < +\infty$, то и $I_S < +\infty$. Лемма доказана. $\square$

Из теоремы 4 следует

Теорема 5. *Всякая функция $f \in N^p_{\omega,\alpha}$ с нулями в точках последовательности $\{z_k\}$, $f(0) \neq 0$, представима в виде:*

$$
f(z) = \pi_\beta(z, z_k) \cdot \exp g(z), \tag{5}
$$

где $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, $\exp g(z) \in N^p_{\omega,\alpha}$ при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

3 Доказательство основных результатов статьи

Доказательство. Докажем теорему 1. Итак, для того чтобы установить включение $S^p_{\omega,(\alpha+1)p} \supset N^p_{\omega,\alpha}$, нам достаточно показать, что функция $G(z) = \exp g(z) = \exp(u(z) + iv(z))$ из представления (5), принадлежит классу $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

Для этого нужно установить оценку

$$
\int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)} T^p(r, G) dr \lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p_\alpha(r, G) dr. \tag{6}
$$

Пусть $\omega_1(1-r) = \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)}$. Обозначим

$$
A(G) = \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt \right)^+ d\varphi \right)^p dr < +\infty, \tag{7}
$$

$$
B(G) = \int\limits_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |G(re^{i\theta})| d\theta \right)^p dr. \tag{8}
$$

Требуемую оценку можно переписать в эквивалентном виде:

$$
B(G) \lesssim A(G).
$$

Учитывая, что функция $u_\alpha(z)=\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi})dt$ является гармонической в D (см. [2, с. 596]), и применяя теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u_\alpha(re^{i\varphi})d\varphi=u_\alpha(0)=\frac{u(0)}{\alpha+1}.$$

Поэтому, используя равенство

$$u_\alpha(re^{i\varphi})=\max\left(u_\alpha(re^{i\varphi}),0\right)-\max\left(-u_\alpha(re^{i\varphi}),0\right)= \\ =u_\alpha^+(re^{i\varphi})-u_\alpha^-(re^{i\varphi}),$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(rte^{i\varphi})dt\right)^- d\varphi= \\ =\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(rte^{i\varphi})dt\right)^+ d\varphi-u_\alpha(0).$$

Из последнего равенства и из (7) получаем

$$\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(rte^{i\varphi})dt\right|d\varphi\right)^p dr\le 2A(G)<+\infty.$$

Таким образом, функция $u_\alpha(z)$ принадлежит классу h^p_ω, $0<p<+\infty$. По теореме 2.8 (см. [8]) гармоническая функция $v_\alpha(z)$, сопряженная с u_α, тоже принадлежит классу h^p_ω. Следовательно, функция $G_\alpha(z)=u_\alpha(z)+iv_\alpha(z)$, $z\in D$, принадлежит классу A^p_ω, т.е.

$$\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr<+\infty. \tag{9}$$

Итак, установлено, что из сходимости интеграла $A(G)$ следует сходимость (9). Теперь покажем, что из (9) следует, что интеграл $B(G)$ сходится.

Используя представление (7), нетрудно заметить, что

$$G_\alpha(z)=\int\limits_0^1(1-t)^\alpha\ln G(tz)dt,\ z\in D, \tag{10}$$

где выбрана однозначная ветвь логарифмической функции, положительная на положительной полуоси.

Пусть $\tilde{G} = \ln G(w) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k w^k,\ w \in D$, тогда

$$\begin{aligned} G_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \int\limits_0^1 (1-t)^\alpha t^k dt = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)} a_k z^k = \frac{1}{\alpha+1} D^{-(\alpha+1)} \tilde{G}(z),\ z \in D. \end{aligned}$$

По свойству интегро-дифференциальных операторов (см. [2, с. 594])

$$\tilde{G}(z) = (\alpha+1) D^{\alpha+1} G_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{D}} \frac{G_\alpha(t)}{(1-\bar{t}z)^{\alpha+2}} dm_2(t).$$

По теореме 2.2 [8],

$$G_\alpha(t) = \frac{\gamma+1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma G_\alpha(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}t)^{\gamma+2}} dm_2(\zeta),$$

где γ — произвольное, такое, что $\gamma > \frac{\alpha_\omega+1}{p} + 1$. С учётом этого представления аналогичным образом, как в [7, с. 155], получим:

$$\left|\tilde{G}(z)\right| \lesssim \int\limits_{\mathbf{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma |G_\alpha(\zeta)|}{|1-\bar{\zeta}z|^{\gamma+3+\alpha}} dm_2(\zeta).$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p dr < +\infty, \tag{11}$$

если (9) сходится; тогда и $B(G)$ также будет сходиться, ввиду того, что $a^+ \leq |a| = a^+ + a^-$ при всех $a \in \mathbb{R}$.

Оценим интеграл

$$J(r) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Учитывая хорошо известную оценку (см., например [8, с. 37]), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi \lesssim \int_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^{\gamma}\,|G_\alpha(\zeta)|}{(1-r|\zeta|)^{\gamma+\alpha+2}}dm_2(\zeta)=$$

$$=\left(\int_0^1\frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)$$

$$=\int_0^r\ldots+\int_r^1\ldots=I_1(r)+I_2(r).$$

Предположим сначала, что $1<p<+\infty$. Учитывая неравенство $(a+b)^p\le 2^p(a^p+b^p)$, справедливое при всех неотрицательных значениях a,b,p, получим:

$$\int_0^1\omega_1(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr\lesssim\left(\int_0^1\omega_1(1-r)I_1^p(r)dr+\int_0^1\omega_1(1-r)I_2^p(r)dr\right). \tag{12}$$

Оценим каждый из этих интегралов по отдельности.

$$\int_0^1\omega_1(1-r)I_2^p(r)dr=\int_0^1\omega_1(1-r)\left(\int_r^1\frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr\le$$

$$\le\int_0^1\omega_1(1-r)\frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}}\left(\int_r^1(1-\rho^2)^{\gamma}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr\lesssim$$

$$\lesssim\int_0^1\omega(1-r)(1-r)^{-p(\gamma+1)}\left(\int_r^1(1-\rho)^{\gamma}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr$$

Во внутреннем интеграле применим неравенство Гёльдера с весом $(1-\rho)^{\gamma}$:

$$\left(\int_r^1(1-\rho)^{\gamma}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p\le\int_r^1(1-\rho)^{\gamma}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d\rho\times$$

$$\times\left(\int_r^1(1-\rho)^{\gamma}d\rho\right)^{p/q},$$

где $q=\frac{p}{p-1}$; следовательно,

$$\left(\int_r^1(1-\rho)^{\gamma}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p\le(1-r)^{(\gamma+1)(p-1)}\int_r^1(1-\rho)^{\gamma}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d\rho.$$

Таким образом, получаем

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr =$$

$$= \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{-p(\gamma+1)} \left(\int_r^1 (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{-(\gamma+1)} \int_r^1 (1-\rho)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p d\rho dr.$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем:

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-\rho) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p d\rho.$$

Используя тот факт, что является интеграл $\psi(\rho) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi$ является монотонно растущей функцией от ρ как среднее значение субгармонической функции на окружности, приступим к оценке интеграла

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr.$$

Имеем:

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p dr \le$$

$$\le \int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(r e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p \cdot \left(\int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} d\rho \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(r e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p \left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} \right)^p dr =$$

$$= \int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(r e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr.$$

Итак, (12) принимает вид:

$$\int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr \lesssim$$
$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr.$$

Теорема доказана при $1 < p < +\infty$.

Перейдем к установлению аналогичной оценки при $0 < p \le 1$. Снова используем разбиение внутреннего интеграла на части (12).

Оценим $I_2(r)$:

$$I_2(r) = \int_r^1 \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho \le$$
$$\le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{\gamma+\alpha+2}}\int_r^1 (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho.$$

Предположим, что $r_n \le r < r_{n+1}$, где $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда

$$I_2(r) \lesssim (1-r)^{-(\gamma+\alpha+2)} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty}\int_{r_k}^{r_{k+1}}(1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho.$$

Учитывая неравенство $(a+b)^p \le (a^p + b^p)$, справедливое при всех неотрицательных значениях a, b и $0 < p \le 1$, получим:

$$I_2^p(r) \le (1-r)^{-p(\gamma+\alpha+2)} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\int_{r_k}^{r_{k+1}}(1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p =$$
$$= (1-r)^{-p(\gamma+\alpha+2)} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} J_k,$$

где

$$J_k = \left(\int_{r_k}^{r_{k+1}}(1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p,\ \ n \le k < +\infty,\ k \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к оценке интегралов J_k при фиксированном k. Учитывая, что функция $\psi(\rho) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi$ - монотонно растущая по ρ, получаем

$$J_k \leq \frac{1}{(\gamma+1)^p} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(r_{k+1} e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p \left[\frac{1}{2^{k(\gamma+1)}} - \frac{1}{2^{(k+1)(\gamma+1)}} \right]^p =$$

$$= \left(\frac{2^{\gamma+1}-1}{2^{\gamma+1}(\gamma+1)} \right)^p \cdot \frac{1}{2^{k(\gamma+1)p}} \cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(r_{k+1} e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p =$$

$$= c^{(1)}_{\gamma,p} \cdot \frac{1}{2^{k(\gamma+1)p}} \cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(r_{k+1} e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p =$$

$$= \frac{c^{(1)}_{\gamma,p}}{c^{(2)}_{\gamma,p}} \left(\int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} d\rho \right) \cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(r_{k+1} e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p,$$

где $c^{(2)}_{\gamma,p} = \frac{2^{(\gamma+1)p}-1}{2^{2(\gamma+1)p}(\gamma+1)p}$. Продолжим оценку, вновь учитывая, что функция $\psi(\rho)$ - монотонно растущая:

$$J_k \leq \tilde{c}_{\gamma,p} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p d\rho,$$

где $\tilde{c}_{\gamma,p} = \frac{c^{(1)}_{\gamma,p}}{c^{(2)}_{\gamma,p}}$ не зависит от k.

Вернёмся к оценке $I_2^p(r)$:

$$I_2^p(r) \leq \frac{\tilde{c}_{\gamma,p}}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \sum_{k=n}^{+\infty} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p d\rho,$$

где $\tilde{c}_{\gamma,p}$ не зависит от k.

Таким образом,

$$I_2^p(r) \lesssim \frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \int\limits_{r}^{1} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p d\rho.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_2^p(r)dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{p(\gamma+1)}} \int\limits_r^1 (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p d\rho dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{p(\gamma+1)}} \left[\int\limits_r^1 \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p d(1-\rho)^{(\gamma+1)p} \right] dr.$$

Проинтегрировав по частям во внутреннем интеграле, получим:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_2^p(r)dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr.$$

Для доказательства теоремы остается получить аналогичную оценку для интеграла

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_1^p(r)dr =$$

$$= \int\limits_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p dr.$$

Снова используя монотонность функции $\psi(\rho)$ на Δ, имеем

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_1^p(r)dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{(\alpha+1)p} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p \left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}} d\rho \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr.$$

Итак, при $0 < p \le 1$ (12) принимает вид:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_1^p(r)dr + \int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_2^p(r)dr\right) \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr.$$

Таким образом, при всех $0 < p < +\infty$ установлено:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr,$$

то есть из сходимости (9) следует сходимость (11), откуда и следует требуемая оценка (6).

Теорема доказана полностью. □

С помощью доказанной теоремы многие результаты, установленные для классов $S^p_{\omega,0} = S^p_\omega$ легко переносятся на классы $N^p_{\omega,\alpha}$. В частности, справедливо следующее утверждение:

Следствие 1. *Пусть $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$, $\omega \in \Omega$. Класс $N^p_{\omega,\alpha}$ инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^1 \omega(t)t^{(\alpha+1)p}\ln^p \frac{1}{t}dt < +\infty$.*

Доказательство. Отметим, что если $\omega \in \Omega$, то $\omega_1(t) = \omega(t)t^{(\alpha+1)p}$ также будет принадлежать классу Ω. По теореме 1 классы $N^p_{\omega,\alpha}$ и $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ совпадают при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, то есть класс $N^p_{\omega,\alpha}$ эквивалентен классу $S^p_{\omega_1} = \{f \in H(D) : \int_0^1 \omega_1(1-r)T^p(r,f)dr < +\infty\}$. Но по теореме 1, п.1) работы [6] (см. также [8, с. 149], теорема 4.6) класс $S^p_{\omega_1}$ инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^1 \omega_1(t)\ln^p \frac{1}{t}dt < +\infty$, откуда и следует требуемое утверждение. □

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за внимательное чтение рукописи и ценные замечания.

References

[1] M.M. Dzhrbashyan, *Parametric representation of certain general classes of meromorphic functions in the unit circle*, Sov. Math., Dokl., **5** (1964), 1058–1062. Zbl 0143.09801

[2] M.M. Dzhrbashyan, *Integral transformations and representations of functions in the complex domain*, Nauka, Moscow, 1966. Zbl 0154.37702

[3] R. Nevanlinna, *Unique analytic functions*, Springer, Berlin, 1936. Zbl 0014.16304

[4] E.G. Rodikova, *Factorization representation and the description of zero sets for the class of holomorphic functions in a disk*, Sib. Èlectron. Math. Izv., **11** (2014), 52–63. Zbl 1325.47041

[5] F.A. Shamoyan, *Parametric representation and description for the root sets of weighted classes of holomorphic functions in the disc*, Sib. Math. J., **40**:6 (1999), 1211–1229. Zbl 0968.30029

[6] F.A. Shamoyan, I.S. Kursina, *On invariance of some classes of holomorphic functions under integrodifferential operators*, J. Math. Sci., New York, **107**:4 (2001), 4097–4107. Zbl 1134.30326

[7] F.A. Shamoyan, V.A. Bednazh, O.V. Karbanovich, *On classes of analytic functions in a disk with a characteristic R. Nevanlinna and α-characteristic of weighted L^p spaces*, Sib. Èlectron. Math. Izv., **12** (2015), 150–167. Zbl 1345.30084

[8] F.A. Shamoyan, *Weighted spaces of analytic functions with mixed norm*, Bryansk State University, Bryansk, 2014.

Eugenia Gennadevna Rodikova
Bryansk State University,
str. Bezhitskaya, 14,
241036, Bryansk, Russia
Email address: evheny@yandex.ru

Kseniya Vasilevna Kislakova
Bryansk State University,
str. Bezhitskaya, 14,
241036, Bryansk, Russia
Email address: k.kislakova25@gmail.com