S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 457–464 (2025) УДК 517.956
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.030 MSC 35J05

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.И. Качалов, Д.А. Маслов

Представлено Е.М. Рудым

Abstract: Currently, the theory of linear operators perturbations has become the completed section of functional analysis, and all the main cases are considered when the initial and disturbing operators can be both limited and unlimited. The decisions are looking in the form of rows along the degrees of the small parameter and the question arises of the nature of the convergence of these ranks. In the presented work, the conditions for the existence of the holomorphic according to the parameter of the solutions were found in the case when the perturbing operator is bilinear.

Keywords: asymptotic convergence, analytical families of operators, Banach's closed graph theorem.

1 Введение

Во многих случаях задача линейной теории возмущений выглядит следующим образом:

$$Au + \varepsilon Lu = f, \tag{1}$$

Kachalov, V.I., Maslov, D.A., On the analytical solutions of problems of the nonlinear perturbation theory.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 23-21-00496).

Поступила 12 апреля 2023 г., опубликована 25 апреля 2025 г.

где A и L — линейные операторы, а ε — малый комплексный параметр. В предположении существования решения у невозмущенного уравнения

$$Au = f \tag{2}$$

строится решение уравнения в виде ряда по степеням малого параметра. Вопрос о характере сходимости таких рядов изучен достаточно полно: сходимость может быть асимптотической, так и в обычном смысле [1]. Особо следует подчеркнуть важность понятий аналитических семейств операторов типа Като и типа (A) [1, гл. XII, § 2], [2, 3], дающих условия голоморфной зависимости от малого параметра решений уравнений вида (1), что гарантировало предельный переход, т.е. стремление решения $u(\varepsilon)$ уравнения (1) к решению уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$.

Если же оператор L является нелинейным, то здесь требуется решить три задачи:

1) построить решение в виде ряда по степеням ε;

2) исследовать ряд на сходимость;

3) в случае обычной сходимости ряда установить действительно ли его сумма является решением уравнения (1).

Метод малого параметра заложен в трудах Пуанкаре и вопрос голоморфной зависимости решения от малого параметра в нелинейном случае был решен им же для систем дифференциальных уравнений с помощью теорем о разложении [4].

2 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Au = \varepsilon B(u, Hu) + f, \tag{3}$$

где A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E; $B : E \times E \to E$ — билинейный ограниченный оператор [5, гл. 8, § 32]; H — линейный оператор, который может быть как ограниченным, так и неограниченным; правая часть $f \in E$.

Условие (α). *Оператор A является замкнутым неограниченным с областью определения D_A и имеет непрерывный обратный оператор A^{-1}.*

Будем искать решение уравнения (3) в виде ряда по степеням малого параметра

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^n u_n + \ldots . \tag{4}$$

Коэффициенты этого ряда удовлетворяют следующей серии уравнений (в соответствии с методом неопределенных коэффициентов):

$$
\begin{aligned}
&Au_0 = f,\\
&Au_1 = B(u_0, Hu_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Au_n = \sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Для построения серии уравнений (5) мы воспользовались билинейностью оператора B и правилом Коши перемножения рядов. Пользуясь условием (α), можно найти коэффициенты ряда (4):

$$
\begin{aligned}
&u_0 = A^{-1} f,\\
&u_1 = A^{-1} B(u_0, Hu_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_n = A^{-1}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1})\Big],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В дальнейшем будет использована следующая

Лемма 1. *Пусть последовательность задана рекуррентным образом:* $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0$, $n = 2, 3, \ldots$. *Тогда, производящая функция этой последовательности будет голоморфной в круге радиуса* $1/4$.

Доказательство. Имеем,

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{7}$$

— производящая функция данной последовательности.

Вычислим ее квадрат:

$$
\begin{aligned}
\varphi^2(z) = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) z + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) z^2 + \ldots +\\
+ (a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0) z^{n-1} + \ldots,
\end{aligned}
$$

или

$$\varphi^2(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1} + \ldots.$$

Отсюда вытекает уравнение для $\varphi(z)$:

$$z\varphi^2(z) - \varphi(z) + 1 = 0,$$

решая которое получим, что

$$\varphi(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Голоморфность производящей функции в круге $|z| < 1/4$ очевидна. Разложение функции $\varphi(z)$ в ряд совпадает с рядом (7):

$$\varphi(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + 429z^7 + \ldots .$$

Лемма доказана. □

Замечание 1. *Коэффициенты ряда для $\varphi(z)$ называются числами Каталана и широко используются в дискретной математике* [6, гл. III, § 6].

Сформулируем и докажем утверждение о голоморфной зависимости от параметра ε решения уравнения (3).

Теорема 1. *Если выполнено условие* (α) *и оператор H является ограниченным, то уравнение* (3) *имеет единственное голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение.*

Доказательство. Пусть $\|A^{-1}\| = q$, $\|B\| = b$, $\|H\| = h$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned}
&\|u_1\| \le qbh\|u_0\|^2,\\
&\|u_2\| \le \|A^{-1}\|\left(\|B(u_0, Hu_1)\| + \|B(u_1, Hu_0)\|\right) \le 2(qbh)^2\|u_0\|^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\|u_n\| \le \|A^{-1}\|\left(\|B(u_0, Hu_{n-1})\| + \|B(u_1, Hu_{n-2})\| + \ldots +\right.\\
&\qquad\left. + \|B(u_{n-2}, Hu_1)\| + \|B(u_{n-1}, Hu_0)\|\right) \le a_n(qbh)^n\|u_0\|^{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, в соответствии с оценками (8), ряд (4) с коэффициентами (6) мажорируется рядом

$$\|u_0\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r^n|\varepsilon|^n), \tag{9}$$

где $r = qbh\|u_0\|$, который сходится, в соответствии с леммой, при каждом фиксированном ε таком, что $|\varepsilon| < 1/(4r)$. А это и означает голоморфность суммы $u(\varepsilon)$ ряда (4) в круге радиуса $1/(4r)$. Далее, так как оператор A^{-1} существует, то $u_n \in D_A$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Также из равенств (6) следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Au_n)\varepsilon^n \tag{10}$$

сходится в указанном круге, поскольку мажорируется рядом типа ряда (9). Итак, ряд (4) сходится, ряд (10) также сходится, что ввиду замкнутости оператора A означает, что $u(\varepsilon) \in D_A$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Au_n)\varepsilon^n = A\sum_{n=0}^{\infty}u_n\varepsilon^n.$$

Следовательно, $u(\varepsilon)$ является решением уравнения (3), голоморфным в точке $\varepsilon = 0$. Единственность такого решения вытекает из способа построения ряда (4).

Теорема доказана. □

Замечание 2. *Как правило, уравнения вида* (3) *описывают стационарные процессы.*

Пример 1. В параллелепипеде

$$\Pi = \{(x, y, z) : 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c\}$$

задано уравнение

$$\Delta u = -f(x,y,z) + \varepsilon \iiint\limits_{\Pi} \mathcal{K}(x,y,z,x',y',z')u^2(x',y',z')\,dx'dy'dz', \tag{11}$$

с однородными краевыми условиями

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=b} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=c} = 0. \tag{12}$$

Здесь, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ — оператор Лапласа. Если $f(x,y,z) \in C(\overline{\Pi}) \cap C^1(\Pi)$, ядро интегрального оператора $\mathcal{K}(x,y,z,x',y',z') \in C(\overline{\Pi} \times \overline{\Pi})$, то задача (11), (12) имеет единственное классическое решение $u(x,y,z,\varepsilon)$, голоморфное в точке $\varepsilon = 0$.

Действительно, билинейный оператор

$$B(u,v) \equiv \iiint\limits_{\Pi} \mathcal{K}(x,y,z,x',y',z')u(x',y',z')v(x',y',z')\,dx'dy'dz',$$

действующий из $C(\overline{\Pi} \times \overline{\Pi})$ в $C(\overline{\Pi})$, является ограниченным; оператор Δ допускает непрерывное обращение с помощью функции Грина [7]

$$G(x,y,z,x',y',z') = \\ = \frac{8}{abc} \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi n x'}{a} \sin\frac{\pi m y}{b} \sin\frac{\pi m y'}{b} \sin\frac{\pi k z}{c} \sin\frac{\pi k z'}{c}}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}.$$

Имеем,

$$u(x,y,z,\varepsilon) = \iiint\limits_{\Pi} G(x,y,z,x',y',z')f(x',y',z')\,dx'dy'dz' - \\ - \varepsilon \iiint\limits_{\Pi} G(x,y,z,x',y',z')\Bigg[\iiint\limits_{\Pi} \mathcal{K}(x',y',z',x'',y'',z'') \cdot \\ \cdot \Bigg(\iiint\limits_{\Pi} G(x'',y'',z'',x''',y''',z''') \cdot \\ \cdot f(x''',y''',z''')\,dx'''dy'''dz'''\Bigg)^2 dx''dy''dz''\Bigg] dx'dy'dz' + \ldots$$

— искомое решение.

3 Случай неограниченной билинейной части уравнения

Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$Av = f + \varepsilon B(v, Hv) \tag{13}$$

в случае, когда оператор H неограничен. Сформулируем и докажем соответствующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполнено условие (α) и оператор H является замкнутым неограниченным с областью определения $D_H \supset D_A$, то уравнение (13) имеет единственное голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение $v(\varepsilon)$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $T = HA^{-1}$. Он является замкнутым, как произведение замкнутого оператора на ограниченный, определен на всем пространстве E ввиду выполнения условия (α) и того факта, что $\operatorname{Im} A^{-1} \subset D_H$. По теореме Банаха о замкнутом графике, оператор $T : E \to E$ является непрерывным [5, гл. III, § 15].

Так же, как и в предыдущем случае, будем искать решение уравнения (13) в виде ряда по степеням ε:

$$v(\varepsilon) = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^n v_n + \ldots . \tag{14}$$

После подстановки ряда (14) в это уравнение, с учетом оператора T, получим следующую серию уравнений:

$$\begin{aligned}
&Av_0 = f,\\
&Av_1 = B(A^{-1}(Av_0), T(Av_0)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Av_n = \sum_{k=0}^{n-1} B(A^{-1}(Av_k), T(Av_{n-k-1})),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{15}$$

Докажем методом математической индукции, что при $n = 1, 2, \ldots$

$$\|Av_n\| \le a_n \|T\|^n b^n q^n \|f\|^{n+1}. \tag{16}$$

Здесь $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность из леммы, $b = \|B\|$, $q = \|A^{-1}\|$.

При $n = 1$ неравенство (16), очевидно, выполняется. Предположим, что неравенство выполняется при $n = m$. Получим оценку для Av_{m+1}:

$$\|Av_{m+1}\| \le \|A^{-1}\|\,\|B\|\,\|T\| \sum_{k=0}^{m} \|Av_k\|\,\|Av_{m-k}\| \le$$

$$\le qb\|T\| \sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} \|T\|^k \|T\|^{m-k} b^k b^{m-k} \|f\|^{k+1} \|f\|^{m-k+1} q^k q^{m-k} =$$

$$= a_{m+1} q^{m+1} b^{m+1} \|T\|^{m+1} \|f\|^{m+2}.$$

Таким образом, неравенство (16) при $n = m + 1$ выполнено и, следовательно, доказано.

Из формул (16) вытекает оценка для коэффициентов v_n:

$$\|v_n\| \le a_n b^n q^{n+1} \|T\|^n \|f\|^{n+1},$$

а, значит, ряд (14) сходится в окрестности радиуса $1/(4bq\|T\|\,\|f\|)$ точки $\varepsilon = 0$. Теорема доказана. $\square$

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-2}(x)y'' + \varepsilon y y' + p_m(x)y = f(x),\\ &y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(m-1)}(0) = 0, \quad x \in [0, X], \end{aligned}$$

в предположении, что функции $p_1(x), \ldots, p_{m-2}(x), p_m(x), f(x)$ непрерывны на отрезке $[0, X]$. С помощью оператора

$$L_m = \frac{d^m}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + p_{m-2}(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_m(x),$$

действующего в пространстве $C[0, X]$, с областью определения $D_{L_m} = \{w(x) \in \in C^m[0, X],\ w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(m-1)}(0) = 0\}$, данное уравнение примет следующий вид:

$$L_m y = \widetilde{B}(y, \widetilde{H}y) + f, \tag{17}$$

где $\widetilde{B}(u, v) = -uv$ — билинейный оператор, определенный на $C[0, X] \times C[0, X]$, $\widetilde{H} = \frac{d}{dx}$ — неограниченный оператор, с областью определения $D_{\widetilde{H}} = \{w(x) \in \in C^1[0, X],\ w(0) = 0\} \supset D_{L_m}$.

Как известно, оператор L_m непрерывно обратим и

$$L_m^{-1} g = \int\limits_0^x \mathcal{K}(x, \xi) g(\xi)\, d\xi,$$

где ядро $\mathcal{K}(x, \xi)$ построено по фундаментальной системе решений однородного уравнения $L_m y = 0$ [5, гл. III, § 12]. В итоге, имеем решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) = &\int\limits_0^x \mathcal{K}(x, x_1) f(x_1)\, dx_1 - \\ &- \varepsilon\Bigg[\int\limits_0^x \mathcal{K}(x, x_1)\mathcal{K}(x_1, x_1) f(x_1)\bigg(\int\limits_0^{x_1} \mathcal{K}(x_1, x_2) f(x_2)\, dx_2\bigg) dx_1 + \\ + \int\limits_0^x \mathcal{K}(x, x_1)&\bigg(\int\limits_0^{x_1} \mathcal{K}'_{x_1}(x_1, x_2) f(x_2)\, dx_2 \int\limits_0^{x_1} \mathcal{K}(x_1, x_2) f(x_2)\, dx_2\bigg) dx_1\Bigg] + \ldots . \end{aligned}$$

Замечание 3. *Если не выполнено условие $D_H \supset D_A$, то уравнение (13) является сингулярно возмущенным и в общем случае его решение не является голоморфным по ε. Для решения таких уравнений разработаны различные методы [8, 9, 10, 11], но все они являются асимптотическими в том смысле, что ряды, представляющие решения сходятся* *асимптотически при $\varepsilon \to 0$. Более того они, как правило, имеют следующий вид:*

$$v(\varepsilon) = v_0(\varepsilon^{-1}) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}) + \ldots + \varepsilon^n v_n(\varepsilon^{-1}) + \ldots . \tag{18}$$

Среди основных методов выделяется метод регуляризации С.А. Ломова [12, 13], в рамках которого впервые найдены условия обычной сходимости рядов вида (18). При этом $v(\varepsilon)$ называется псевдоголоморфным решением.

References

[1] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators*, Academic Press, New York, 1978. Zbl 0401.47001

[2] V.A. Mehrabov, *Two-dimensional periodic Pauly operator. Expansion into the layer*, News of Baku University: series of natural sciences, **3** (2014), 10–18.

[3] Kh.K. Ishkin, *On analytic properties of Weyl function of Sturm–Liouville operator with a decaying complex potential*, Ufa Math. J., **5**:1 (2013), 36–55.

[4] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw–Hill Inc., New York, 1955. Zbl 0064.33002

[5] V.A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka, Moskow, 1980. Zbl 0517.46001

[6] V.N. Sachkov, *Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics*, MTSNMO, Moscow, 2004.

[7] A.V. Bitsadze, *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1976. Zbl 0499.35001

[8] S.A. Lomov, *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. Translations of Mathematical Monographs*, AMS, Providence, 1992. Zbl 0782.34063

[9] A.B. Vasilieva, V.F. Butuzov, *Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations*, Nauka, Moskow, 1973.

[10] S. Malek, *On Boundary Layer Expansions For a Singularly Perturbed Problem With Confluent Fuchsian Singularities*, Mathematics, **8**:2 (2020), 189.

[11] V.Y. Glizer, *Asymptotic Analysis of Spectrum and Stability for One Class of Singularly Perturbed Neutral-Type Time Delay Systems*, Axioms, **10**:4 (2021), 325.

[12] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Moscow Publishing House University, Moskow, 2011.

[13] V.I. Kachalov, S.A. Lomov, *Smoothness of solutions of differential equations with respect to a singular parameter*, Sov. Math. Dokl., **37**:2 (1988), 465–467. Zbl 0703.34063

Vasiliy Ivanovich Kachalov
National Research University MPEI,
st. Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moskow, Russia
Email address: vikachalov@rambler.ru

Dmitry Alexandrovich Maslov
National Research University MPEI,
st. Krasnokazarmennaya, 14,
111250, Moskow, Russia
Email address: maslovdma@mpei.ru