S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 623–634 (2025) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.040 MSC 35Q35

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.В. Бризицкий

Abstract: The global existence of a weak solution to inhomogeneous boundary value problem for the reaction-diffusion–convection equation with variable coefficients is proved. The maximum and minimum principle for the substance's concentration is established. The solvability of the boundary control problem is proved on weak solutions of the boundary value problem under consideration.

Keywords: nonlinear reaction–diffusion–convection equation, variable coefficients, weak solution, maximum principle, boundary control problem, extremum problem.

1 Введение. Постановка краевой задачи

Интерес к исследованию краевых задач и задач управления для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции вызван, в том числе, поиском эффективных механизмов управления соответствующими

Brizitskii, R.V. Boundary control problem for reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

Поступила 25 января 2025 г., опубликована 17 июня 2025 г.

процессами. Выбор более реалистичных моделей, учитывающих нелинейную зависимость коэффициентов в уравнении и граничных условиях модели от концентрации вещества, по всей видимости, предпочтительней и для проверки эффективности используемых управлений. В свою очередь, исследование неоднородных краевых задач позволяет использовать граничное управление, которое легче реализовать. Здесь отметим работы [1, 2, 3, 4, 5], а также статьи [6, 7, 8], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для ряда близких моделей.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассматривается следующая краевая задача:

$$-\mathrm{div}(\lambda(\varphi)\nabla\varphi) + k(\varphi, \mathbf{x})\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi = f \text{ в } \Omega,\ \varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{1}$$

Здесь φ – концентрация (загрязняющего) вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, $\lambda(\varphi) > 0$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi, \mathbf{x}) \geq 0$ – коэффициент реакции, $\mathbf{x} \in \Omega$, f – объемная плотность источников вещества.

На задачу (1) при заданных функциях $\lambda, \mathbf{u}, k, f$ и ψ будем ссылаться ниже, как на задачу 1.

В настоящей работе с использованием принципа Лере–Шаудера доказано глобальное существование слабого решения задачи 1 в случае, когда нелинейность $k(\varphi, \cdot)\,\varphi$ является монотонной. Такой подход является альтернативой применению принципа Шаудера в случае, когда $k(\varphi, \cdot)$ ограничен по соответствующей L^p норме (см. [9] и [10]).

Далее устанавливаются достаточные условия на исходные данные задачи 1, при которых справедлив принцип минимума и максимума для концентрации φ.

Наконец, на слабых решениях задачи 1 доказывается разрешимость задачи управления, роль управления в которой играет функция ψ, имеющая смысл граничного значения концентрации.

Здесь же отметим работы [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для моделей тепломассопереноса, обобщающих приближение Буссинеска. Так же отметим работы [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33], посвященные сложным реологическим моделям динамики жидкости.

2 Разрешимость краевой задачи

Ниже мы будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, $H^0(D) \equiv L^2(D)$, где D обозначает область Ω или ее границу Γ. Соответствующие пространства вектор–функций будем обозначать как $H^s(D)^3$ и $L^2(D)^3$. Скалярные произведения и нормы в пространствах $H^s(D)$ и $H^s(D)^3$ или в $L^2(D)$ и $L^2(D)^3$ обозначаются как $(\cdot,\cdot)_{s,D}$ и $\|\cdot\|_{s,D}$ или $(\cdot,\cdot)_D$ и $\|\cdot\|_D$. Через $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ и $|\cdot|_{1,\Omega}$ обозначим норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ или $H^1(\Omega)^3$.

Введем функциональное пространство для вектора скорости $\mathbf{u}$:

$$Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$$

и функциональное множество

$$L^q(D) = \{h \in L^q(D) : h \geq 0 \text{ п.в. в } D\},\ \ 1 \leq q \leq \infty.$$

Для произвольного гильбертова пространства H через H^* обозначим сопряженное к нему пространство.

Пусть выполняются следующие условия:

(H.2.1) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(H.2.2) $f \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{u} \in Z$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$;

(H.2.3) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(w,\cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для любого $p \geq 5/3$, где p не зависит от w; и на любом шаре $B_r = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r выполняется неравенство:

$$\|k(w_1,\cdot) - k(w_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|w_1 - w_2\|_{L^4(\Omega)}\ \ \forall w_1, w_2 \in H^1(\Omega).$$

Здесь константа L зависит от r, но не зависит от $w_1, w_2 \in B_r$;

(H.2.4) нелинейность $k(\varphi,\cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0\ \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega);$$

(H.2.5) функция $k(\varphi,\cdot)$ ограничена в том смысле, что существуют положительные константы A и B, зависящие от k, такие, что

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A\|\varphi\|^r_{1,\Omega} + B \text{ для всех } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ при } p \geq 5/3,\ r \geq 0.$$

(H.2.6) функция $\lambda(\tau)$ – непрерывная при $\tau \in \mathbb{R}$ и существуют положительные константы $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ такие, что

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_{\max}\ \ \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что условия (H.2.3)–(H.2.5) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, где $p \geq 5/3$ (подробно см. в [4]).

Напомним также, что по теореме вложения Соболева, пространства $H^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)^3$ вкладываются, соответственно, в $L^s(\Omega)$ и $L^s(\Omega)^3$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, а также с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедливы оценки:

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s\|h\|_{1,\Omega}\ \ \forall h \in H^1(\Omega),$$
$$\|\mathbf{v}\|_{L^s(\Omega)^3} \leq C_s\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\ \ \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \tag{2}$$

Справедлива следующая техническая лемма (подробно см. в [34, 35]).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (H.2.1) *и* (H.2.6), $k_0 \in L^q_+(\Omega)$, $q \geq 5/3$, $\mathbf{u} \in Z$, *тогда существуют положительные константы* δ, γ, *зависящие от* Ω *или от* Ω *и* p, *с которыми выполняются следующие соотношения:*

$$|(\lambda(c)\nabla h, \nabla\eta) \leq \lambda_{\max}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$
$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla h, \eta)| \leq \gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{L^4(\Omega)}\ \ \ \forall c, h, \eta \in H^1(\Omega), \tag{3}$$
$$|(k_0 h, \eta)| \leq \gamma_p\|k_0\|_{L^p(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega}, \|\eta\|_{1,\Omega},\ \ \forall h, \eta \in H^1(\Omega),\ p \geq 5/3, \tag{4}$$
$$(\mathbf{u}\cdot\nabla h, h) = 0,\ (\nabla h, \nabla h) \geq \delta\|h\|^2_{1,\Omega},$$

$$(\lambda(\eta)\nabla h, \nabla h) \geq \lambda_* \|h\|^2_{1,\Omega},\ \lambda_* = \delta\lambda_{\min}\ \forall \eta \in H^1(\Omega),\ h \in H^1_0(\Omega). \tag{5}$$

Будем использовать следующую лемму о лифтинге концентрации φ (см. [35]).

Лемма 2. *При выполнении условия* (H.2.1) *существует такая функция* $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$, *что*

$$\varphi_0|_\Gamma = \psi,\ \|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{6}$$

Здесь C_Γ *– константа, зависящая от* Ω.

Умножим уравнение в (1) на функцию $h \in H^1_0(\Omega)$, применив формулу Грина, приходим к слабой формулировке задачи 1

$$(\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (k(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h) = (f, h)\ \ \forall h \in H^1_0(\Omega),$$
$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{7}$$

Определение 1. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (7), назовем слабым решением задачи 1.

Слабое решение задачи 1 будем искать в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}, \tag{8}$$

где φ_0 – функция из леммы 2, $\tilde{\varphi} \in H^1_0(\Omega)$ – новая неизвестная функция.

Подставляя (8) в (7), прибавим к обеим частям (7) слагаемое $-(k(\varphi_0, \cdot)\varphi_0, h)$. Получим

$$(\lambda(\tilde{\varphi}+\varphi_0)\nabla\tilde{\varphi}, \nabla h) + (\lambda(\tilde{\varphi}+\varphi_0)\nabla\varphi_0, \nabla h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) +$$
$$+ (k(\tilde{\varphi}+\varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi}+\varphi_0) - k(\varphi_0, \cdot)\varphi_0, h) =$$
$$= \langle l, h\rangle \equiv (f, h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - (k(\varphi_0, \cdot)\varphi_0, h)\ \ \forall h \in H^1_0(\Omega). \tag{9}$$

С учетом свойства (H.2.5) получаем

$$\|l\|_{-1,\Omega} \leq M_l \equiv \|f\|_\Omega + \gamma C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\psi\|_{1/2,\Gamma} +$$
$$+ \gamma_p C_\Gamma \|k(\varphi_0, \cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)} \|\psi\|_{1/2,\Gamma} \leq$$
$$\|f\|_\Omega + C_\Gamma[\gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p(AC^r_\Gamma \|\psi\|^r_{1/2,\Gamma} + B)]\|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{10}$$

Для доказательства разрешимости задачи (9) применим принцип Лере–Шаудера. Введем нелинейный оператор G по формуле:

$$(\lambda(\tilde{\varphi}+\varphi_0)\nabla G(\tilde{\varphi}), \nabla h) = \langle \tilde{l}, h\rangle \equiv (\lambda(\tilde{\varphi}+\varphi_0)\nabla\varphi_0, \nabla h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) +$$
$$+ (k(\tilde{\varphi}+\varphi_0, \cdot)(\tilde{\varphi}+\varphi_0) - k(\varphi_0, \cdot)\varphi_0, h) - \langle l, h\rangle\ \ \forall h \in H^1_0(\Omega). \tag{11}$$

Введем билинейную по v и η форму a по формуле:

$$a_\lambda(v, \eta) = (\lambda(c)\nabla v, \nabla\eta)\ \ \forall c, v, \eta \in H^1(\Omega).$$

Из теоремы Лакса–Мильграма и (11) вытекает, что для любой функции $\tilde{\varphi} \in H^1_0(\Omega)$ существует единственная функция $s \in H^1_0(\Omega)$, для которой выполняется следующее равенство:

$$a_\lambda(s, h) = \langle \tilde{l}, h\rangle\ \ \forall h \in H^1_0(\Omega).$$

В таком случае, оператор G, определенный формулой (11), отображает $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ и ставит в соответствие каждой функции $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ элемент $G(\tilde{\varphi}) \in H_0^1(\Omega)$.

Для доказательства существования решения задачи (9) достаточно доказать существование решения $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ операторного уравнения:

$$\tilde{\varphi} + G(\tilde{\varphi}) = 0 \text{ в } H_0^1(\Omega). \tag{12}$$

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{\varphi}_n\} \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}^* \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^p(\Omega) \text{ при } n \to \infty,\ p < 6. \tag{13}$$

Вычитая (11) при $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_n \in H_0^1(\Omega)$ из (11) при $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^* \in H_0^1(\Omega)$, будем иметь

$$\begin{gathered}(\lambda(\tilde{\varphi}_n + \varphi_0)\nabla(G(\tilde{\varphi}^*) - G(\tilde{\varphi}_n)), \nabla h) = \\ = -((\lambda(\tilde{\varphi}_n+\varphi_0)-\lambda(\tilde{\varphi}^*+\varphi_0))\nabla G(\tilde{\varphi}^*), \nabla h)+((\lambda(\tilde{\varphi}_n+\varphi_0)-\lambda(\tilde{\varphi}^*+\varphi_0))\nabla\varphi_0, \nabla h)+ \\ +(\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}_n), h)+ \\ +((k(\tilde{\varphi}^*+\varphi_0,\cdot)- k(\tilde{\varphi}_n+\varphi_0,\cdot))(\tilde{\varphi}_n+\varphi_0), h)+(k(\tilde{\varphi}^*+\varphi_0,\cdot)(\tilde{\varphi}^*-\tilde{\varphi}_n), h).\end{gathered} \tag{14}$$

Используя лемму 1, неравенство Гельдера, учитывая свойства (H.2.3), из (14) выводим неравенство:

$$\begin{gathered}|(\lambda(\tilde{\varphi}_n + \varphi_0)\nabla(G(\tilde{\varphi}^*) - G(\tilde{\varphi}_n)), \nabla h)| \le \\ \le \|((\lambda(\tilde{\varphi}_n + \varphi_0) - \lambda(\tilde{\varphi}^* + \varphi_0))\nabla G(\tilde{\varphi}^*)\|_\Omega \|h\|_{1,\Omega}+ \\ +\|((\lambda(\tilde{\varphi}_n + \varphi_0) - \lambda(\tilde{\varphi}^* + \varphi_0))\nabla\varphi_0\|_\Omega \|h\|_{1,\Omega}+ \\ +\gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}^*\|_{L^4(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega}+ \\ +[\gamma_p L(\|\tilde{\varphi}_n\|_{1,\Omega} + \|\varphi_0\|_{1,\Omega})\|\tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}_n\|_{L^4(\Omega)}+ \\ +C_6\|k(\tilde{\varphi}^* + \varphi_0,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}_n\|_{L^5(\Omega)}]\|h\|_{1,\Omega}.\end{gathered} \tag{15}$$

Полагая $h = G(\tilde{\varphi}^*) - G(\tilde{\varphi}_n)$ в (15) и учитывая (5), приходим к оценке

$$\begin{gathered}\lambda_*\|G(\tilde{\varphi}^*) - G(\tilde{\varphi}_n)\|_{1,\Omega} \le \|((\lambda(\tilde{\varphi}_n + \varphi_0) - \lambda(\tilde{\varphi}^* + \varphi_0))\nabla G(\tilde{\varphi}^*)\|_\Omega+ \\ +\|((\lambda(\tilde{\varphi}_n + \varphi_0) - \lambda(\tilde{\varphi}^* + \varphi_0))\nabla\varphi_0\|_\Omega+ \\ +\gamma\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}^*\|_{L^4(\Omega)}+ \\ +\gamma_p L(\|\tilde{\varphi}_n\|_{1,\Omega} + \|\varphi_0\|_{1,\Omega})\|\tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}_n\|_{L^4(\Omega)}+ \\ +C_6\|k(\tilde{\varphi}^* + \varphi_0,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}_n\|_{L^5(\Omega)}.\end{gathered} \tag{16}$$

По теореме о мажоранте Лебега и в силу (13), оценка (16) означает непрерывность и компактность оператора $G : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.

Наряду с (12) рассмотрим операторное уравнение:

$$\tilde{\varphi}_w + wG(\tilde{\varphi}_w) = 0 \text{ в } H_0^1(\Omega),\ \ w \in (0, 1]$$

и вариационное равенство:

$$\begin{gathered}(\lambda(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0)\nabla\tilde{\varphi}_w, \nabla h) + w(\lambda(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0)\nabla\varphi_0, \nabla h) + w(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_w, h)+ \\ w(k(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0,\cdot)\,(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0) - k(\varphi_0,\cdot)\varphi_0, h) = w\langle l, h\rangle\ \ \forall h \in H_0^1(\Omega).\end{gathered} \tag{17}$$

Полагая $h = \tilde{\varphi}_w$ в (17), и учитывая (5) и условие монотонности (Н.2.4), приходим к оценке

$$\|\tilde{\varphi}_w\|_{1,\Omega} \le wM_{\tilde{\varphi}},\ M_{\tilde{\varphi}} \equiv C_*(\lambda_{\max} C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma} + \|l\|_{-1,\Omega})\ \ w \in (0,1]. \quad (18)$$

Ясно, что из (18) вытекает оценка

$$\|\tilde{\varphi}_w\|_{1,\Omega} \le M_{\tilde{\varphi}}. \quad (19)$$

Тогда в силу теоремы Лере–Шаудера, существует решение $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ операторного уравнения (12), эквивалентного задаче (9), для которого справедлива оценка (19).

В таком случае, существует слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи (7), где $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0$ и справедлива оценка:

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \le M_\varphi \equiv M_{\tilde{\varphi}} + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \quad (20)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (Н.2.1)–(Н.2.6). *Тогда существует слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1 и справедлива априорная оценка (20).*

3 Принцип максимума и минимума

Пусть выполняется условие:

(Н.3.1) $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω, $\psi_{\min} \le \psi \le \psi_{\max}$ п.в. на Γ.

Здесь $f_{\min}, f_{\max}, \psi_{\min}, \psi_{\max}$ – неотрицательные числа.

Будем считать, что коэффициент реакции имеет следующий вид:

(Н.3.2) $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $a(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$, причем $0 < a_{\min} \le a(\mathbf{x}) \le a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω и функциональные уравнения

$$k_1(s)\, s = f_{\max}/a_{\min}, \quad s \in (0, +\infty), \quad (21)$$

$$k_1(t)\, t = f_{\min}/a_{\max}, \quad t \in (0, +\infty) \quad (22)$$

имеют, по крайней мере, по одному (положительному) корню s_* и t_*.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (Н.2.1)–(Н.2.6) *и* (Н.3.1), (Н.3.2). *Тогда для концентрации φ справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \le \varphi \le M \ \text{п.в. в}\ \Omega,$$

$$M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \quad (23)$$

Здесь M_1 – минимальный (положительный) корень уравнения (21), а m_1 – максимальный (положительный) корень уравнения (22).

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \le M$ п.в. в Ω. С этой целью введем функцию $\tilde{\varphi} = \max\{\varphi - M, 0\}$. Ясно, что принцип максимума или оценка $\varphi \le M$ п.в. в Ω справедливы тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi} = 0$ п.в. в Ω.

Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество области Ω, в котором $\varphi > M$. Из [36, p. 152] и [37] вытекает, что $\nabla\tilde{\varphi} = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi}) = (\lambda(\tilde{\varphi}+M)\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi})_{Q_M} = (\lambda(\tilde{\varphi}+M)\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}),$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \tilde{\varphi}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = 0,$$

$$(k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M} = (k(\tilde{\varphi}+M,\cdot)(\tilde{\varphi}+M), \tilde{\varphi})_{Q_M},$$

с учетом которых, подставляя $h = \tilde{\varphi}$ в (9), получаем

$$(\lambda(\tilde{\varphi}+M)\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\tilde{\varphi}+M,\cdot)(\tilde{\varphi}+M), \tilde{\varphi})_{Q_M} = (f, \tilde{\varphi}). \quad (24)$$

В силу (H.2.4) для функций $\varphi_1 = \tilde{\varphi}+M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ справедливо равенство:

$$0 \le (k(\tilde{\varphi}+M,\cdot)(\tilde{\varphi}+M) - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M} =$$
$$= (k(\tilde{\varphi}+M,\cdot)(\tilde{\varphi}+M) - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi}), \quad (25)$$

поскольку $\tilde{\varphi} = 0$ в $\Omega \setminus Q_M$.

С учетом этого вычтем $(k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})$ из обеих частей (24). Будем иметь, что

$$(\lambda(\tilde{\varphi}+M)\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\tilde{\varphi}+M,\cdot)(\tilde{\varphi}+M) - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M} =$$
$$= (f - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M}. \quad (26)$$

В силу леммы 1 и (25), из (26) получаем оценку

$$\lambda_*\|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 \le (f_{\max} - a_{\min}k_1(M)M, \tilde{\varphi})_{Q_M}. \quad (27)$$

Из (27) вытекает, что если параметр M выбран из условия (23), то $\tilde{\varphi} = 0$ п.в. в Ω.

Для доказательства принципа минимума введем функцию $\tilde{w} = \min\{\varphi - m, 0\}$. Рассуждая, как и для функции $\tilde{\varphi}$, заключаем, что $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$. Пусть в измеримом открытом множестве $Q_m \subset \Omega$ справедливо неравенство $\varphi < m$.

Рассуждая, как и выше, приходим к соотношению

$$(\lambda(\tilde{w}+m)\nabla\tilde{w}, \nabla\tilde{w}) + (k(\tilde{w}+m,\cdot)(\tilde{w}+m) - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} =$$
$$= (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m},$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_*\|\tilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \le (f_{\min} - a_{\max}k_1(m)m, \tilde{w})_{Q_m} \le 0. \quad (28)$$

Из вышесказанного и (23) вытекает, что $\tilde{w} = 0$. ■

Замечание 2. Для степенных коэффициентов реакции параметры M_1 и m_1 легко вычисляются. Например, для $k(\varphi) = |\varphi|$ получаем, что $M_1 = f_{\max}^{1/2}$ и $m_1 = f_{\min}^{1/2}$.

4 Задача граничного управления

В данном разделе рассмотрим задачу граничного управления и докажем ее разрешимость на слабых решениях задачи 1. Будем считать, что управление ψ может изменяться в некотором множестве K. Введем функциональное пространство $Y = H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ и определим оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)\colon H^1(\Omega) \times K \to Y$, действующий по формулам:

$$\langle \Phi_1(\varphi, \psi), h \rangle = (\lambda(\varphi)\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + \\ +((\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi, h) - (f, h) \;\; \forall h \in H_0^1(\Omega) \\ \Phi_2(\varphi, \psi) = \varphi|_\Gamma - \psi \in H^{1/2}(\Gamma) \tag{29}$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде $\Phi(\varphi, \psi) = 0$.

Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $\psi \in K$, сформулируем задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, \psi) := \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\psi\|^2_{1/2,\Gamma} \to \min, \\ \Phi(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in H^1(\Omega) \times K, \tag{30}$$

где $I\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал.

Через

$$Z_{\rm ad} := \{(\varphi, \psi) \in H^1(\Omega) \times K : \; \Phi(\varphi, \psi) = 0 \text{ и } J(\varphi, \psi) < \infty\}$$

обозначим множество допустимых пар задачи (30) и предположим, что выполняются следующие условия:

(H.4.1) $K \subset H^{1/2}(\Gamma)$ – непустое выпуклое замкнутое множество;

(H.4.2) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$ и K – ограниченное множество, или $\mu_i > 0$, $i = 0, 1$, и функционал I ограничен снизу.

Ниже приведем примеры функционалов качества:

$$I_1(\varphi) := \|\varphi - \varphi^d\|^2_Q, \quad I_2(\varphi) := \|\varphi - \varphi^d\|^2_{1,Q}.$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (или $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданные в подобласти $Q \subset \Omega$ функции.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (H.2.1)–(H.2.6) *и* (H.4.1), (H.4.2), *функционал* $I\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *слабо полунепрерывен и множество допустимых пар* $Z_{\rm ad}$ *не пусто. Тогда задача* (30) *имеет, по крайней мере, одно решение* $(\varphi, \psi) \in H^1(\Omega) \times K$.

Доказательство. Пусть $\{(\varphi_m, \psi_m)\} \subset Z_{\rm ad}$ – минимизирующая последовательность для функционала J, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, \psi_m) = \inf_{(\varphi,\psi)\in Z_{\rm ad}} J(\varphi, \psi) =: J^*.$$

Из вышесказанного и условий теоремы 4.1 вытекает оценка

$$\|\psi_m\|_{1/2,\Gamma} \leq c_1.$$

Здесь и ниже c_i обозначают константы, независящие от m.

Из теоремы 2.1 вытекает оценка

$$\|\varphi_m\|_{1,\Omega} \le c_2.$$

Следовательно, существуют слабые пределы:

$$\varphi^* \in H^1(\Omega), \quad \psi^* \in H^{1/2}(\Gamma)$$

некоторых подпоследовательностей $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_m\}$. Соответствующие подпоследовательности будем так же обозначать $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_m\}$.

Из компактности вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ при $s < 6$, вытекает, что

$$\varphi_m \to \varphi^* \in H^1(\Omega) \text{ слабо в } H^1(\Omega)$$

$$\text{и сильно в } L^s(\Omega),\ s < 6,\ \text{при } m \to \infty,$$

$$\psi_m \to \psi^* \text{ слабо в } H^{1/2}(\Gamma) \text{ при } m \to \infty. \tag{31}$$

Ясно, что $\Phi_2(\varphi^*, \psi^*) = 0$. Покажем, что $\Phi_1(\varphi^*, \psi^*) = 0$ или

$$(\lambda(\varphi^*)\nabla\varphi^*, \nabla h) + (k(\varphi^*, \cdot)\varphi^*, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi^*, h) = (f, h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{32}$$

Для этого заметим, что пара (φ_m, ψ_m) удовлетворяет тождеству

$$(\lambda(\varphi_m)\nabla\varphi_m, \nabla h) + (k(\varphi_m, \cdot)\varphi_m, h) +$$

$$+ (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_m, h) = (f, h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{33}$$

Перейдем в (33) к пределу при $m \to \infty$. Единственное линейное слагаемые в (33) стремятся к соответствующему слагаемому в (32). Для нелинейного слагаемого $(\lambda(\varphi_m)\nabla\varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство:

$$(\lambda(\varphi_m)\nabla\varphi_m, \nabla h) - (\lambda(\varphi^*)\nabla\varphi^*, \nabla h) =$$

$$= ((\lambda(\varphi_m) - \lambda(\varphi^*))\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda(\varphi^*)\nabla h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{34}$$

Поскольку $\lambda(\varphi^*) \in L^\infty(\Omega)$, то из (31) вытекает, что

$$(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda(\varphi^*)\nabla h) \to 0 \text{ при } m \to \infty \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{35}$$

По теореме Лебега о мажорантой сходимости имеем

$$|((\lambda(\varphi_m) - \lambda(\varphi^*))\nabla\varphi_m, \nabla h)| \le \|(\lambda(\varphi_m) - \lambda(\varphi^*))\nabla h\|_\Omega \|\nabla\varphi_m\|_\Omega \le$$

$$\le c_2\|((\lambda(\varphi_m) - \lambda(\varphi^*))\nabla h)\|_\Omega \to 0 \text{ при } m \to \infty\ \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{36}$$

Тогда из (34)–(36) следует, что

$$(\lambda(\varphi_m)\nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda(\varphi^*)\nabla\varphi^*, \nabla h) \text{ при } m \to \infty \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Наконец, мы имеем (см. [25]):

$$(k(\varphi_m, \cdot)\varphi_m, h) \to (k(\varphi^*, \cdot)\varphi^*, h) \text{ при } m \to \infty \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен на $H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$, то $J(\varphi^*, \psi^*) = J^*$.

5 Заключение

В настоящей работе доказано глобальное существование слабого решения неоднородной краевой задачи для уравнения реакции–диффузии–конвекции с переменными коэффициентами. Это позволило для данной краевой задачи рассмотреть задачу граничного управления, доказав ее разрешимость. В следующих работах для экстремальной задачи будет выведена система оптимальности, на основе которой будет проведен качественный анализ оптимальных решений. Так же в работе установлен принцип максимума и минимума для концентрации вещества.

References

[1] R.V., Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, *Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **12** (2015) 447–456. Zbl 1515.35096

[2] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016) 352–360. Zbl 1433.49004

[3] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Boundary control problem for a nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Comp. Math. Math. Phys., **58**:12 (2018) 2053–2063. Zbl 1433.35436

[4] R.V. Brizitskii, V.S. Bystrova, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction–diffusion–convection equation*, Diff. Equ., **57**:5 (2021) 615–629. Zbl 1467.35154

[5] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Optimal control problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients*, Nonlinear Anal., Real World Appl., **75** (2024) 103979. Zbl 1528.35112

[6] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Diffusion approximation of the radiative–conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **57** (2018) 290–298. Zbl 1510.80023

[7] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, A. Astrakhantseva, *Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation*, J. Inv. Ill-Posed Probl., **29**:3 (2021) 467–476. Zbl 1473.35564

[8] A.E. Kovtanyuk, A.Y. Chebotarev, N.D. Botkin, V.L. Turova, I.N. Sidorenko, R. Lampe, *Continuum model of oxygen transport in brain*, J. Math. Analys. Appl., **474**:2 (2019) 1352–1363. Zbl 1416.35276

[9] G.V. Alekseev, O.V. Soboleva, *Inhomogeneous boundary value problems for the generalized Boussinesq model of mass transfer*, Mathematics, **12**:3 (2024) 391.

[10] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of inhomogeneous boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer*, J. Dyn. Control Syst., **29**:4 (2023) 1809–1828. Zbl 1530.35208

[11] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Differ. Equations., **124**:2 (1996) 389–406. Zbl 0879.35122

[12] T. Kim, *Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions*, Appl. Math., **67**:5 (2022) 593–613. Zbl 1538.35299

[13] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. Anal. Appl., **368**:2 (2010) 444–468. Zbl 1189.35243

[14] E.S. Baranovskii, M.A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, Int. J. Differ. Equ., **2016** (2016) Article ID 9428128. Zbl 1352.49004

[15] R. Duan, A. Guo, C. Zhu, *Global strong solution to compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosity and temperature dependent heat conductivity*, J. Differ. Equations, **262** (2017) 4314–4335. Zbl 1367.35106

[16] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov, *Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow*, Fluids **4**:3 (2019) Article ID 133.

[17] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, *Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain*, Differ. Equ. **56**:3 (2020) 304–314. Zbl 1440.35262

[18] E.S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodriguez, L. Vasquez, *Control problem related to 2D Stokes equations with variable density and viscosity*, Symmetry **13**:11 (2021) Article ID 2050.

[19] E.S. Baranovskii, *Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids*, J. Optim. Theory Appl. **189**:2 (2021) 623–645. Zbl 1466.49002

[20] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model*, J. Dyn. Control Syst. **27**:2 (2021) 379–402. Zbl 1460.35277

[21] Z.Y. Saritskaia, *Boundary value problem for nonlinear mass–transfer equations under Dirichlet condition*, Sib. Èlektron. Mat. Izv.. **19**:1 (2022) 360–370. Zbl 1498.35262

[22] G.V. Alekseev, R.V. Brizitskii, *Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients*, Symmetry **14**:12 (2022) Article ID 2580.

[23] R.V. Brizitskii, *Boundary value and control problems for mass transfer equations with variable coefficients*, J. Dyn. Control Syst. **30** (2024) 24. Zbl 1544.35119

[24] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problem for the stationary mass transfer model with variable coefficients*, Appl. Math. Optim., **90**:2 (2024) 46. Zbl 1556.35237

[25] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Boundary value and control problems for the stationary heat transfer model with variable coefficients*, J. Dyn. Control Syst., **30**:3 (2024) 26. Zbl 1544.35119

[26] E.S. Baranovskii, *Strong solutions of the incompressible Navier-Stokes-Voigt model*, Mathematics. **8**:2 (2020) Article ID 181.

[27] M. Ruzicka, V. Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat–Bingham fluids*, Math. Methods Appl. Sc. **40**:7 (2017) 2746–2761. Zbl 1365.35126

[28] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **262** (2018) 25–37.

[29] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi–component viscous compressible fluids*, Izv. Math., **82**:1 (2018) 140–185. Zbl 1423.76385

[30] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three–dimensional motion of two-component viscous compressible heat–conducting fluids*, Izv. Math. **85**:4 (2021) 755–812. Zbl 1479.35688

[31] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial–boundary value problem for the equations of one–dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech. **21** (2019), 9. Zbl 1411.76150

[32] D.A. Prokudin, *On stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one–dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathematics, **11** (2023) Article ID 3065.

[33] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, *Control problem for a magneto–micropolar flow with mixed boundary conditions for the velocity field*, J. Dyn. Control Syst., **25**:4 (2019), 599–618. Zbl 1428.35385

[34] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, Berlin. Springer–Verlag, 1986. Zbl 0585.65077

[35] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat–mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Nauchiy Mir: Moscow, 2010 (in Russian).

[36] D. Gilbarg, M. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1998; p. 490.

[37] H. Berninger, *Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany. **2009**. 169–176. Zbl 1284.76350

Roman Victorovich Brizitskii
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island
690922, Vladivostok, Russia
Email address: mlnwizard@mail.ru