

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ВИРТУАЛЬНЫХ И
СИНГУЛЯРНЫХ КОСТ.А. Козловская^{id}, П.П. Соколов*Представлено В.В. Пржиялковским*

Abstract: In the present paper, we study various representations of the virtual braid group VB_n , the singular braid monoid SM_n , and the singular braid group SB_n . We construct a representation of the virtual braid group into the group of automorphisms of the quandle. We prove that this representation generalizes some well-known representations. Using this representation, we construct an invariant of virtual links.

Also we investigate representations of the singular braid monoid SM_n and the singular braid group SB_n by endomorphisms and automorphisms of a free module and a free group. In particular, we find all linear local homogeneous representations of the singular braid monoid that extend the Burau representation of the braid group and find conditions under which these representations can be extended to the group SB_n . We prove that the constructed linear representation is reducible and an irreducible representation is obtained that extends the reduced Burau representation.

Keywords: virtual braid group, singular braid group, Burau representation, knot, link, quandle.

Kozlovskaya, T.A., Sokolov, P.P., REPRESENTATIONS OF VIRTUAL AND SINGULAR BRAID GROUPS.

© 2024 Козловская Т.А., Соколов П.П..

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-287 от 06.04.2022).

Поступила 31 мая 2024 г., опубликована 25 июля 2025 г.

1 Введение

Основная проблема теории узлов – классификация узлов с точностью до эквивалентности. Ключевую роль в ее решении играют инварианты узлов – функции, определенные на множестве узлов, значения которых остаются неизменными на классах эквивалентных узлов. В 1923 году Александер доказал, что для любого зацепления существует коса, замыкание которой эквивалентно исходному зацеплению. Более того, теорема Маркова сводит проблему классификации узлов к ряду алгебраических проблем, связанных с группами кос.

Одно из обобщений теории узлов — теория виртуальных узлов, была введена Л. Х. Кауфманом [1] в конце 1990-х. С теорией виртуальных узлов связаны некоторые ее фактор-теории, которые получаются добавлением некоторых аналогов преобразований Рейдемейстера. На этом пути возникает теория плоских виртуальных узлов, теория узлов со спайками, теория Гауссовых узлов и ряд других. При этом, в основе этих теорий лежат соответствующие аналоги групп кос.

При изучении групп кос широко используются их представления. Используя представление Артина группы кос автоморфизмами свободной группы, можно найти группу соответствующего зацепления. Используя приведенное представление Бурау группы кос, можно найти полином Александера соответствующего узла.

Более сильным инвариантом, по сравнению с группой узла, является фундаментальный квандл узла. Квандлы были введены независимо Д. Джойсом [2] и С. В. Матвеевым [3]. Основным результатом Джойса-Матвеева состоит в том, что фундаментальный квандл характеризует узел с точностью до ориентации узла и объемлющего пространства.

Т. Ито [5] определил квандл с выделенным элементом (Q, h) , где Q – квандл, $h \in Q$. Выделенный элемент h играет ту же роль, что и базисная точка в определении фундаментальной группы многообразия. Для квандлов с выделенным элементом естественным образом определяются морфизмы и строится категория квандлов с выделенным элементом. Т. Ито для каждой косы β построил функтор $I_\beta : \mathcal{QP} \rightarrow \mathcal{Q}$ из категории квандлов с выделенным элементом в категорию квандлов и доказал, что этот функтор является инвариантом зацепления, являющегося замыканием косы β .

В настоящей работе результат Т. Ито обобщается на случай виртуальных зацеплений. Построено представление группы виртуальных кос VB_n автоморфизмами некоторого квандла, что позволяет определить функтор $VI_\beta : \mathcal{QP} \rightarrow \mathcal{Q}$, который является инвариантом виртуального зацепления, являющегося замыканием виртуальной косы β .

Сингулярные узлы были определены В. Васильевым для изучения инвариантов конечного порядка (инвариантов Васильева-Гусарова) классических узлов. Понятие моноида сингулярных кос SM_n было введено независимо Дж. Бэзсом [6] и Дж. Бирман [7]. О. Дашбах и Б. Гемейн

[8, 9] изучали представления моноида сингулярных кос эндоморфизмами свободной группы. Группы сингулярных крашенных кос изучались в работах [10, 11, 12, 13]. В настоящей работе будут построены линейные представления и представление автоморфизмами свободной группы F_n группы сингулярных кос SB_n , продолжающие представления группы кос B_n .

Также О. Дашбах и Б. Гемейн [8, 9] построили линейное представление моноида сингулярных кос SM_n и доказали, что при $n = 3$ это представление точно. В настоящей работе будут найдены все линейные локальные однородные представления моноида SM_n продолжающие представление Бурау группы кос. Среди них будут выбраны представления, продолжающиеся на группу сингулярных кос SB_n .

Хорошо известно, что представление Бурау группы кос приводимо и по нему можно построить так называемое приведенное представление, имеющее размерность на единицу меньше и являющееся неприводимым. Именно оно используется для построения полинома Александера классического узла. В данной работе изучается вопрос о приводимости построенных линейных представлений группы сингулярных кос. Доказано, что построенные продолжения представления группы сингулярных кос приводимы и найдены неприводимые представления, продолжающие приведенное представление Бурау. При этом приведенное представление уже не является ни локальным, ни однородным.

Дадим краткое описание работы.

В параграфе 1 приводятся основные определения и понятия по данной тематике. Во втором параграфе исследовано целое семейство представлений группы виртуальных кос в группы автоморфизмов различных квандлов. В теореме 2.1 построено представление группы виртуальных кос. Вопрос о точности построенного представления исследован в предложении 2.1. В параграфе 3 построены инварианты виртуальных узлов и зацеплений (см. теорему 3.1). В четвертом параграфе рассмотрен подход к построению инварианта по диаграмме виртуального узла. В последнем параграфе найдены линейные локальные однородные представления группы сингулярных кос SB_n , продолжающие представления Бурау. В теореме 6.2 исследована приводимость построенных представлений.

2 Основные определения

Напомним некоторые факты из теории узлов.

Узел K – это образ гладкого вложения окружности S^1 в пространство $\mathbb{R}^3$. n -компонентное зацепление – это несвязное объединение n узлов $K_1 \sqcup K_2 \sqcup \dots \sqcup K_n$. Два узла (зацепления) L и L' называют эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, переводящий L в L' .

Диаграммой узла (зацепления) называют регулярную проекцию узла (зацепления) на некоторую плоскость с указанными проходами и переходами. Движениями Рейдемейстера называются локальные преобразования диаграммы зацепления. Существуют три типа движений Рейдемейстера (см. рис 1, на котором представлены движения Рейдемейстера с точностью до ориентации зацепления и смены прохода и перехода).

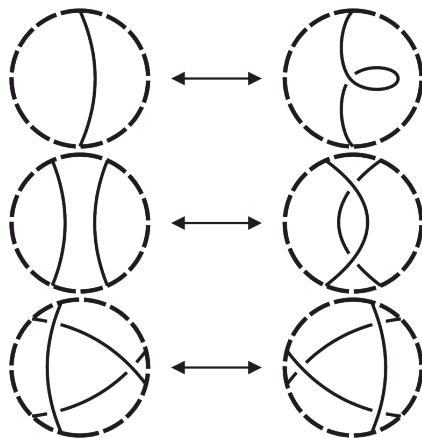


Рис. 1. Движения Рейдемейстера.

Верна теорема Рейдемейстера.

Теорема 1. (Рейдемейстер). *Зацепление L эквивалентно зацеплению L' тогда и только тогда, когда диаграмму зацепления L можно преобразовать в диаграмму зацепления L' посредством применения конечной последовательности движений Рейдемейстера и плоской изотопии.*

Для изучения узлов Э. Артином [14] были введены косы. Группа кос B_n , $n \geq 2$ на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ (см. рис 2). и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2.$$



Рис. 2. Порождающий σ_i и обратный к нему элемент.

Косой называют элемент группы кос. Существует гомоморфизм группы B_n на группу подстановок S_n , переводящий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашенных кос* и обозначается символом P_n . Группа крашенных кос является нормальной подгруппой индекса $n!$ группы кос. Группа P_n порождается элементами a_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, которые выражаются через порождающие группы кос B_n следующим образом:

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2,$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \quad i+1 < j \leq n.$$

Известно [15], что группа P_n разлагается в полупрямое произведение свободных групп:

$$P_n = U_n \rtimes (U_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes (U_3 \rtimes U_2)) \dots), \quad U_i \simeq F_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Группа виртуальных кос VB_n порождается элементами

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ порождают группу кос B_n , а элементы $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ порождают группу подстановок S_n , т.е. VB_n определяется соотношениями группы B_n , соотношениями группы S_n и следующими смешанными соотношениями

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1,$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}.$$

Диаграмма виртуального узла (зацепления) – это плоский четырёх-валентный граф, каждый перекресток которого является либо классическим, либо виртуальным. Виртуальными движениями Рейдемейстера называются локальные преобразования диаграммы виртуального узла (зацепления). Существуют три типа виртуальных движений и одно смешанное (см. рисунок 3).

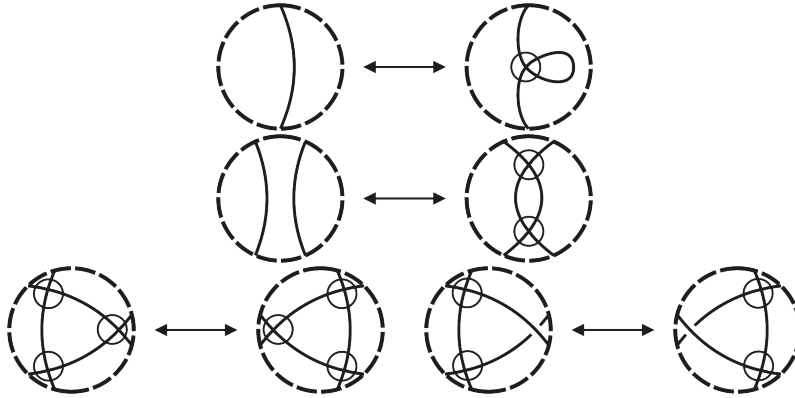


Рис. 3. Виртуальные движения Рейдемейстера.

Две диаграммы виртуальных узлов (зацеплений) называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую конечным числом классических, виртуальных, смешанных движений Рейдемейстера и плоской изотопией.

Напомним определение квандла (см. [2], [3]).

Квандлом называется непустое множество Q с одной бинарной операцией $*$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

(Q1) $q * q = q$ для всех элементов $q \in Q$;

(Q2) для любых $q, r \in Q$, уравнение $x * q = r$ имеет единственное решение $x \in Q$;

(Q3) для любых $q, r, h \in Q$ имеет место равенство $(q * r) * h = (q * h) * (r * h)$.

Квандлом с выделенным элементом называется пара (Q, h) , где Q – квандл и $h \in Q$.

Для квандлов естественным образом определены понятия гомоморфизма и изоморфизма. Гомоморфизмом φ квандлов $(Q, *_Q)$ и $(R, *_R)$ называется отображение $\varphi : Q \rightarrow R$ сохраняющее операцию, т. е.

$$\varphi(a *_Q b) = \varphi(a) *_R \varphi(b), \quad a, b \in Q.$$

Изоморфизмом φ квандлов $(Q, *_Q)$ и $(R, *_R)$ называется взаимно однозначный гомоморфизм φ .

Распространим понятие гомоморфизма и изоморфизма квандлов на квандлы с выделенными элементами. Гомоморфизмом φ квандлов (Q, h) и (R, r) с выделенными элементами называется гомоморфизм квандлов $(Q, *_Q)$ и $(R, *_R)$, переводящий выделенный элемент h в выделенный элемент r : $\varphi(h) = r$. Изоморфизмом φ квандлов (Q, h) и (R, r) с выделенными элементами называется взаимно однозначный гомоморфизм квандлов с выделенными элементами.

Моноид Баеса–Бирман (см. [6, 7]) или, как его ещё называют, сингулярный моноид SM_n задается порождающими $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ и определяющими соотношениями:

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad |i - j| \geq 2,$$

$$\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i, \quad |i - j| \geq 2,$$

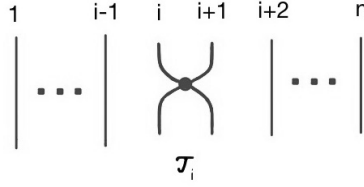
$$\tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} = \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2.$$

При этом элементы σ_i, σ_i^{-1} (см. рис 2) порождают группу кос B_n .

Р. Фенн Э. Кейман и К. Рурки доказали [17], что моноид Баеса–Бирман вкладывается в группу, которую они назвали группой сингулярных кос: $SM_n \rightarrow SB_n$. С каждым порождающим τ_i можно связать сингулярную n -нитевую косу в соответствии с рисунком 4.


 Рис. 4. Порождающий τ_i .

Напомним некоторые известные факты о представлениях группы кос B_n . Эмиль Артин построил представление группы B_n в группу автоморфизмов $Aut(F_n)$ свободной группы $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, где порождающий σ_i задает автоморфизм:

$$\sigma_i: \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_l \mapsto x_l, \end{cases} \quad l \neq i, i+1,$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$. Это представление называется *представлением Артина*. Оно является точным и позволяет решить проблему равенства слов в группе кос. В [14] установлено, что автоморфизм β из $Aut(F_n)$ принадлежит группе кос B_n тогда и только тогда, когда β удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) $\beta(x_i) = a_i^{-1} x_{\pi(i)} a_i, \quad 1 \leq i \leq n,$
- 2) $\beta(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n,$

где π некоторая перестановка множества индексов $\{1, 2, \dots, n\}$.

Также представление Артина позволяет построить (используя подход Магнуса [19]) линейное представление группы кос (представление Бурау) и линейное представление группы крашенных кос (представление Гаснера). Представление Бурау [18], $\rho: B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ переводит порождающий σ_i группы кос B_n в матрицу следующего вида:

$$\varphi(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{n-(i+1)} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Представление Бурау локально, т. е. каждый порождающий переходит в матрицу, которая отличается от единичной матрицы диагональной клеткой порядка 2. Кроме того, представление Бурау также и однородное, т. е. клетки порядка 2 совпадают для всех порождающих. Известно, что все линейные локальные однородные представления группы кос B_n в некотором смысле эквивалентны представлению Бурау.

Напомним, что представление

$$\varphi: B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

называется *локальным*, если

$$\varphi(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array} \right),$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$, где E_m — единичная матрица порядка m , R_i — матрица порядка 2. Локальное представление называется *однородным*, если $R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1}$.

Очевидно, что для локального представления φ сохраняется соотношение дальней коммутативности, т.е. $\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_j) = \varphi(\sigma_j)\varphi(\sigma_i)$ при $|i-j| \geq 2$.

В 1936 году В. Бурау сформулировал вопрос о линейности группы кос (т.е. о ее точной представимости конечномерными матрицами над полем). Отметим, что группа B_2 — бесконечная циклическая, а потому является линейной. В. Магнус доказал линейность B_3 (см. [19]). Долгое время существовало предположение, что представление Бурау является точным, однако, сейчас доказано, что оно неточное при $n \geq 5$. Так в 1991 году Д. Муди (см. [20]) построил нетривиальный элемент, лежащий в ядре представления Бурау группы B_n при $n \geq 9$. В [21] С. Бигелоу снизил эту границу до 5. Вопрос о точности представления Бурау группы B_4 до сих пор остается открытым. Р. Лоуренс построила новые линейные представления группы кос B_n в [22], а Д. Крамер [23] и С. Бигелоу [21] показали, что одно из этих представлений является точным. Следовательно, группы кос B_n , $n \geq 2$, являются линейными.

Представление группы сингулярных кос, продолжающее представление Бурау

$$\varphi: SB_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

называется *локальным*, если

$$\varphi(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array} \right),$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$, где E_m — единичная матрица порядка m , M_i — матрица порядка 2. Локальное представление называется *однородным*, если $M_1 = M_2 = \dots = M_{n-1}$.

В работе Вады [24] построены семь типов локальных представлений группы кос B_n в группу $Aut(F_n)$. Вада высказал предположение, что описаны все возможные локальные представления группы кос B_n в группу $Aut(F_n)$. Это предположение доказал Ито [4]. Из этих семи типов четыре являются точными (см. [25]).

В работе Ю. А. Михальчишиной [26] построены продолжения представлений Вады на группу виртуальных кос VB_n , описаны локальные линейные представления группы B_3 , а также локальные однородные

представления B_n при $n \geq 2$. Исследована связь этих представлений с представлением Бурау.

3 Представление виртуальных кос

Рассмотрим произвольный квандл с выделенным элементом (Q, h) и его свободную степень Q^{*n} . Свободно умножим его на тривиальный квандл $T_1 = \langle \{y\}, *_{T_1} \rangle$, получим $Q^{*n} \star T_1$. Обозначим q_i элемент из i -ой копии Q соответствующий $q \in (Q, h)$. В данных обозначениях h_i – это выделенный элемент в i -й копии Q .

Напомним вторую аксиому квандла: для любых $q, r \in Q$, уравнение $x * q = r$ имеет единственное решение $x \in Q$. Обозначим $x = r \bar{*} q$. Так как решение этого уравнения существует, единственно и определено для любых $q, r \in Q$, мы можем определить операцию деления справа $\bar{*}$ в квандле Q следующим образом:

$$q \bar{*} r = a, \text{ где } a * r = q.$$

Рассмотрим на квандле $Q^{*n} \star T_1$ набор отображений $S_1, \dots, S_{n-1}, V_1, \dots, V_{n-1}$, определенных равенствами:

$$S_i = \begin{cases} q_i \rightarrow q_{i+1} \bar{*} h_i, \\ q_{i+1} \rightarrow q_i * h_i, \\ q_k \rightarrow q_k, \quad k \neq i, i+1, \\ y \rightarrow y. \end{cases}$$

$$V_i = \begin{cases} q_i \rightarrow q_{i+1} * y, \\ q_{i+1} \rightarrow q_i \bar{*} y, \\ q_k \rightarrow q_k, \quad k \neq i, i+1, \\ y \rightarrow y. \end{cases}$$

Так как умножение справа является автоморфизмом квандла, а операторы S_i, V_i – композиции умножений справа с переставлением порождающих, то данные отображения также являются автоморфизмами квандла $Q^{*n} \star T_1$. Заметим, что

$$V_i^{-1} = V_i \quad \text{и} \quad S_i^{-1} = \begin{cases} q_i \rightarrow q_{i+1} \bar{*} h_{i+1}, \\ q_{i+1} \rightarrow q_i * h_{i+1}, \\ q_k \rightarrow q_k, \\ y \rightarrow y. \end{cases} \quad k \neq i, i+1$$

Теорема 2. *Отображение $\tau : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(Q^{*n} \star T_1)$, заданное по правилу*

$$\tau(\sigma_i) = S_i, \quad \tau(\rho_i) = V_i$$

*является представлением группы виртуальных кос автоморфизмами квандла $Q^{*n} \star T_1$.*

Доказательство. По аналогии со статьёй Ито [5], соотношения $S_{i+1}S_iS_{i+1} = S_iS_{i+1}S_i$ и $S_iS_j = S_jS_i$, при $|i - j| \geq 2$ легко проверить прямыми вычислениями.

Прямыми вычислениями проверяются соотношения $V_{i+1}V_iV_{i+1} = V_iV_{i+1}V_i$, $V_i^2 = id$ и $V_iV_j = V_jV_i$, при $|i - j| \geq 2$.

Проверим смешанное соотношение $V_iS_{i+1}V_i = V_{i+1}S_iV_{i+1}$. Действуя на элементы q_i, q_{i+1}, q_{i+2} левой и правой частями смешанного соотношения, получим:

$$\begin{aligned} V_iS_{i+1}V_i(q_i) &= (q_{i+2} * y) \bar{*} h_i, & V_{i+1}S_iV_{i+1}(q_i) &= (q_{i+2} * y) \bar{*} h_i; \\ V_iS_{i+1}V_i(q_{i+1}) &= q_{i+1}, & V_{i+1}S_iV_{i+1}(q_{i+1}) &= q_{i+1}; \\ V_iS_{i+1}V_i(q_{i+2}) &= (q_i * h_i) \bar{*} y, & V_{i+1}S_iV_{i+1}(q_{i+2}) &= (q_i * h_i) \bar{*} y. \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения, заключаем, что отображение τ является представлением группы виртуальных кос автоморфизмами квандла $Q^{*n} \star T_1$. $\square$

Замечание 1. Пусть $\beta \in VB_n$ – произвольный элемент группы виртуальных кос, $y \in T_1 \leq Q^{*n} \star T_1$ – элемент тривиального одноэлементного квандла. Тогда, $\tau(\beta)(y) = y$.

Доказательство. Действительно, каждое из отображений $S_1, \dots, S_{n-1}, V_1, \dots, V_{n-1}$ действует тождественно на y . $\tau(\beta)$ является некоторой композицией данных отображений. Следовательно, $\tau(\beta)(y) = y$. $\square$

Замечание 2. Пусть $\beta \in VB_n$ – элемент группы виртуальных кос. $q_i \in Q^{*n} \star T_1$, причём $q \in Q$. Тогда, выполнено следующее.

- (1) Если элементы $\sigma_{i-1}, \sigma_i, \rho_{i-1}, \rho_i$ не входят в β как в слово, то $\tau(\beta)(q_i) = q_i$, при $i = 2, \dots, n - 2$ для всех $q \in Q$.
- (2) Если элементы σ_1, ρ_1 не входят в β как в слово, то $\tau(\beta)(q_1) = q_1$ для всех $q \in Q$.
- (3) Если элементы σ_{n-1}, ρ_{n-1} не входят в β как в слово, то $\tau(\beta)(q_n) = q_n$ для всех $q \in Q$.

Доказательство. 1). Пусть β – такой элемент, что $\sigma_{i-1}, \sigma_i, \rho_{i-1}, \rho_i$ не входят в β как в слово. Тогда, $\tau(\beta)$ – это некоторая композиция отображений $S_1, \dots, S_{n-1}, V_1, \dots, V_{n-1}$, за исключением отображений $S_{i-1}, S_i, V_{i-1}, V_i$.

По определению, все отображения, кроме $S_{i-1}, S_i, V_{i-1}, V_i$ действуют тождественно на q_i . Из последнего очевидно следует, что $\tau(\beta)(q_i) = q_i$.

2). Пусть σ_1, ρ_1 не входят в β как в слово. Тогда, $\tau(\beta)$ – некоторая композиция операторов $S_2, \dots, S_{n-1}, V_2, \dots, V_{n-1}$. Каждый из этих операторов действует тождественно на элементы $q_1, q \in Q$. Следовательно, $\tau(\beta)(q_1) = q_1$ для всех $q \in Q$.

3). Пусть σ_{n-1}, ρ_{n-1} не входят в β как в слово. Тогда, $\tau(\beta)$ – некоторая композиция операторов $S_1, \dots, S_{n-2}, V_1, \dots, V_{n-2}$. Каждый из этих операторов действует тождественно на элементы $q_n, q \in Q$. Следовательно, $\tau(\beta)(q_n) = q_n$ для всех $q \in Q$. $\square$

Предложение 1. (*О точности τ*). Представление τ точно на подгруппе $B_n \leq VB_n$ и подгруппе $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle \leq VB_n$ и неточно на всей группе VB_n , при $n \geq 4$.

Доказательство. Докажем точность на B_n . Пусть даны группы G и H . Свободное произведение групп G и H будем обозначать $G \star_{\mathbf{Gr}} H$.

Пусть дан квандл R . Ассоциированной группой для квандла R называют группу $Ass(R) = \langle R \mid r^{-1}qr = q *_R r \rangle$.

Зафиксируем $Q = T_1$ – одноэлементный квандл. В этом случае $\tau: VB_n \rightarrow Aut(T_1^{\star n} \star T_1)$. Рассмотрим ассоциированную группу для квандла $T_1^{\star n} \star T_1$:

$$Ass(T_1^{\star n} \star T_1) = F_n \star_{\mathbf{Gr}} \mathbb{Z},$$

где $F_n = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$, $\mathbb{Z} = \langle y \rangle$. Тогда представление τ индуцирует представление

$$\tau': VB_n \rightarrow Aut(F_n \star_{\mathbf{Gr}} \mathbb{Z}),$$

заданное по правилу

$$\tau'(\sigma_i) = \begin{cases} h_i \rightarrow h_i h_{i+1} h_i^{-1}, \\ h_{i+1} \rightarrow h_i, \\ h_k \rightarrow h_k, \\ y \rightarrow y, \end{cases} \quad k \neq i, i+1,$$

$$\tau'(\rho_i) = \begin{cases} h_i \rightarrow y^{-1} h_{i+1} y, \\ h_{i+1} \rightarrow y h_i y^{-1}, \\ h_k \rightarrow h_k, \\ y \rightarrow y. \end{cases} \quad k \neq i, i+1,$$

Другими словами, следующая диаграмма является коммутативной для всех $q \in T_1^{\star n} \star T_1$.

$$\begin{array}{ccc} VB_n & \xrightarrow{\tau(\cdot)(q)} & T_1^{\star n} \star T_1 \\ id \downarrow & & \downarrow Ass \\ VB_n & \xrightarrow{\tau'(\cdot)(q)} & Ass(T_1^{\star n} \star T_1) \end{array}$$

Это представление было определено в [27] (см. также [28]), где было доказано, что оно продолжает представление группы Артина B_n . Следовательно, ограничение τ на B_n является точным. Также легко заметить, что τ' , а потому и τ точно на $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$.

Покажем, что представление τ не является точным на группе VB_4 . Для этого возьмем виртуальную косу $\beta = (\rho_3 \sigma_2 \rho_1 \sigma_2^{-1})^3$, построенную в [29]. Прямым вычислением проверяется, что $\tau(\beta) = id$. $\square$

4 Инвариант виртуальных зацеплений

В работе [33] была доказана теорема, аналогичная теореме Маркова, утверждающая, что два виртуальных зацепления эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им косы связаны конечной последовательностью виртуальных преобразований Маркова.

Для виртуальной косы $\beta \in VB_n$ определим квандл $VI_\beta(Q, h)$ как фактор-квандл квандла $Q^{*n} \star T_1$ по множеству соотношений

$$\{\tau(\beta)(q) = q \mid q \in Q^{*n} \star T_1\}.$$

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 3. *Для виртуальной косы $\beta \in VB_n$ квандл $VI_\beta(Q, h)$ является инвариантом виртуального узла (зацепления) $cl(\beta)$, полученного замыканием виртуальной косы β .*

Доказательство. Заметим сначала, что по аксиомам (Q2), (Q3) умножение и деление справа в кванdle на произвольный элемент – это внутренний автоморфизм.

Пусть Q – квандл, $a \in Q$. Рассмотрим отображение $x \mapsto x * a$. Тогда, по аксиоме (Q3) выполнено $(x * y) * a = (x * a) * (y * a)$. По аксиоме (Q2) это отображение взаимно однозначно.

Для доказательства теоремы нужно проверить, что при виртуальных преобразованиях Маркова квандл $VI_\beta(Q, h)$ переходит в изоморфный квандл. Для виртуальных кос имеем следующие преобразования Маркова:

- (1) $\beta \longleftrightarrow \sigma_k \beta \sigma_k^{-1}$,
- (2) $\beta \longleftrightarrow \beta \sigma_n$,
- (3) $\beta \longleftrightarrow \rho_k \beta \rho_k$,
- (4) $\beta \longleftrightarrow \beta \rho_n$,
- (5) $\beta \longleftrightarrow \beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}$,
- (6) $\beta \longleftrightarrow \beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} \rho_{n-1} \rho_n$.

Изоморфность квандлов при преобразованиях 1 и 2 устанавливается в полном соответствии со статьёй Т. Ито [5].

1) Проверим третье виртуальное преобразование Маркова. Квандл $VI_\beta(Q, h)$ определяется системой соотношений

$$\{\tau(\beta)(q) = q \mid q \in Q^{*n} \star T_1\}.$$

Подействуем на обе части этих соотношений автоморфизмом $\tau(\rho_k)$. Имеем

$$\begin{aligned} \{\tau(\beta)(q) = q \mid q \in Q^{*n} \star T_1\} &= \{\tau(\beta \rho_k)(q) = \tau(\rho_k)(q) \mid q \in Q^{*n} \star T_1\} = \\ &= \{\tau(\rho_k \beta \rho_k)(q) = q \mid q \in Q^{*n} \star T_1\}. \end{aligned}$$

При этом мы использовали такой факт: если подействовать автоморфизмом $\tau(\rho_k)$ на $q \in Q^{*n} \star T_1$ дважды, то получим тождественный автоморфизм. Следовательно, квандл $VI_\beta(Q, h)$ изоморфен квандлу $VI_{\rho_k \beta \rho_k}(Q, h)$.

2) Проверим четвёртое виртуальное преобразование Маркова. Докажем, что квандлы $VI_{\beta\rho_n}(Q, h)$ и $VI_{\beta}(Q, h)$ изоморфны. По замечанию 2 параграфа 3 очевидно, что

$$\tau(\beta)(q_i) = q_i \Leftrightarrow \tau(\beta\rho_n)(q_i) = q_i, \text{ при } i = 1, \dots, n-1.$$

Также, по замечанию 2, верно следующее равенство: $\tau(\beta)(q_{n+1}) = q_{n+1}$. Рассмотрим $\tau(\beta\rho_n)(q_{n+1})$.

$$\tau(\beta\rho_n)(q_{n+1}) = \tau(\beta)(q_n \bar{*} y) = \tau(\beta)(q_n) \bar{*} \tau(\beta)(y) = \tau(\beta)(q_n) \bar{*} y$$

Последнее равенство, в цепочке выше, получено с помощью замечания 1 параграфа 3. В итоге получили следующее равенство:

$$\tau(\beta\rho_n)(q_{n+1}) = \tau(\beta)(q_n) \bar{*} y \quad (4.1)$$

Рассмотрим теперь $\tau(\beta\rho_n)(q_n)$. По определению представления τ верно равенство $\tau(\beta\rho_n)(q_n) = \tau(\beta)(q_{n+1} * y)$.

По замечанию 1 верно $\tau(\beta)(q_{n+1} * y) = \tau(\beta)(q_{n+1}) * y$.

По замечанию 2 верно $\tau(\beta)(q_{n+1}) * y = q_{n+1} * y$.

Таким образом, имеем равенство:

$$\tau(\beta\rho_n)(q_n) = q_{n+1} * y. \quad (4.2)$$

Рассмотрим соотношение $\tau(\beta\rho_n)(q_{n+1}) = q_{n+1}$. Умножив (4.1) справа на y получим следующую эквивалентность:

$$\tau(\beta\rho_n)(q_{n+1}) = q_{n+1} \Leftrightarrow \tau(\beta)(q_n) = q_{n+1} * y.$$

Рассмотрим соотношение $\tau(\beta\rho_n)(q_n) = q_n$. Из равенства (4.2) имеем:

$$\tau(\beta\rho_n)(q_n) = q_{n+1} * y = q_n.$$

По определению, множество определяющих соотношений в кванdle $VI_{\beta\rho_n}(Q, h)$ имеет следующий вид:

$$\{\tau(\beta\rho_n)(q_1) = q_1, \dots, \tau(\beta\rho_n)(q_n) = q_n, \tau(\beta\rho_n)(q_{n+1}) = q_{n+1}\},$$

где q_i пробегает все элементы i -й копии квандла Q в кванdle $Q^{\star n+1} \star T_1$.

По замечанию 2 и определению $\tau(\rho_n)$ очевидно, что данное множество эквивалентно множеству

$$\{\tau(\beta)(q_1) = q_1, \dots, \tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}, \tau(\beta\rho_n)(q_n) = q_n, \tau(\beta\rho_n)(q_{n+1}) = q_{n+1}\}.$$

Воспользуемся (4.1) и (4.2).

$$\{\tau(\beta)(q_1) = q_1, \dots, \tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}, q_{n+1} * y = q_n, \tau(\beta)(q_n) \bar{*} y = q_{n+1}\}.$$

Домножим последнее соотношение на y справа и сразу подставим предпоследнее соотношение. Получим множество

$$\{\tau(\beta)(q_1) = q_1, \dots, \tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}, \tau(\beta)(q_n) = q_n, q_{n+1} * y = q_n\}.$$

Так как последнее множество соотношений мы получили действием автоморфизма (умножение на y справа), то оно эквивалентно изначальному множеству соотношений.

Заметим также, что последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$q_{n+1} = q_n \bar{*} y.$$

Построим отображение

$$\phi: VI_{\beta\rho_n}(Q, h) \longrightarrow VI_{\beta}(Q, h)$$

по правилу:

$$\phi(q_{n+1}) = q_n \bar{*} y, \quad \phi(q_i) = q_i, \quad \phi(y) = y.$$

Нетрудно видеть, что ϕ – изоморфизм квандлов $VI_{\beta\rho_n}(Q, h)$ и $VI_{\beta}(Q, h)$.

3) Проверим пятое виртуальное преобразование Маркова. Докажем, что квандлы $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$ и $VI_{\beta}(Q, h)$ изоморфны.

По определению, множество определяющих соотношений в квандле $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$ имеет следующий вид:

$$\{\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_i) = q_i, i = 1, \dots, n+1, q \in Q\},$$

По замечанию 2 очевидно, что $\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_i) = \tau(\beta)(q_i)$, где $q \in Q$, $i = 1, \dots, n-2$.

Таким образом, осталось подействовать автоморфизмом $\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_i)$ на элементы q_{n-1}, q_n, q_{n+1} .

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_{n-1}) = \tau(\beta)((q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y), \quad (4.3)$$

$$\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_n) = \tau(\beta)((q_n * h_{n+1}) \bar{*} (h_{n-1} \bar{*} y)), \quad (4.4)$$

$$\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_{n+1}) = \tau(\beta)((q_{n-1} * h_{n-1}) \bar{*} y). \quad (4.5)$$

Рассмотрим (4.3). Так как $\beta \in VB_n$, то по замечаниям 1 и 2 автоморфизм $\tau(\beta)$ действует тождественно на элемент $(q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y$.

$$\tau(\beta)((q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y) = (q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y. \quad (4.6)$$

Таким образом, соотношения $\tau(\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1})(q_i) = q_i, i = n-1, n, n+1$ в квандле $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$ эквивалентны следующим:

$$(q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y = q_{n-1}, \quad (4.3.1)$$

$$\tau(\beta)((q_n * h_{n+1}) \bar{*} (h_{n-1} \bar{*} y)) = q_n, \quad (4.4.1)$$

$$\tau(\beta)((q_{n-1} * h_{n-1}) \bar{*} y) = q_{n+1}. \quad (4.5.1)$$

Рассмотрим (4.3.1) при $q = h$. Получим

$$(q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y = q_{n-1} \Big|_{q=h} \Rightarrow h_{n+1} * y = h_{n-1}. \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в (4.5.1):

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \tau(\beta)((q_{n-1} * h_{n-1}) \bar{*} y) = \tau(\beta)((((q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y) * (h_{n+1} * y)) \bar{*} y) = \dots \\ &= \tau(\beta)((((q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * h_{n+1}) * y) \bar{*} y) = \tau(\beta)(q_{n+1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Теперь подставим равенство (4.7) в (4.4.1):

$$q_n = \tau(\beta)((q_n * h_{n+1}) \bar{*} (h_{n-1} \bar{*} y)) = \tau(\beta)((q_n * h_{n+1}) \bar{*} h_{n+1}) = \tau(\beta)(q_n). \quad (4.9)$$

Таким образом из соотношений (4.3.1), (4.4.1), (4.5.1) в кванdle $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$ можно получить следующие:

$$(q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y = q_{n-1}, \quad (4.3.2)$$

$$\tau(\beta)(q_n) = q_n, \quad (4.4.2)$$

$$\tau(\beta)(q_{n+1}) = q_{n+1}. \quad (4.5.2)$$

Аналогично, прямыми вычислениями проверяется, что соотношения (4.3.1), (4.4.1), (4.5.1) следуют из соотношений (4.3.2), (4.4.2), (4.5.2). Таким образом, данные два набора соотношений эквивалентны в кванdle $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$.

Так как $\beta \in VB_n$, то по замечаниям 1 и 2 очевидно выполнено

$$\tau(\beta)((q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y) = (q_{n+1} \bar{*} h_{n+1}) * y.$$

Следовательно, из (4.3.2) соотношение $\tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}$ выполнено в кванdle $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$.

$$\tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}. \quad (4.6.2)$$

Поделим (4.3.2) справа на y , а потом домножим справа на h_{n+1} . Получим

$$q_{n+1} = (q_{n-1} \bar{*} y) * h_{n-1} \quad (4.7.2).$$

Нетрудно заметить, что соотношений (4.6.2) и (4.7.2) достаточно для того, чтобы $\tau(\beta)(q_{n+1}) = q_{n+1}$.

Таким образом, соотношения (4.3.2), (4.4.2), (4.5.2) эквивалентны следующим:

$$\tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}, \quad (4.3.3)$$

$$\tau(\beta)(q_n) = q_n. \quad (4.4.3)$$

$$q_{n+1} = (q_{n-1} \bar{*} y) * h_{n-1}. \quad (4.5.3)$$

Построим отображение

$$\phi: VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h) \longrightarrow VI_{\beta}(Q, h)$$

по правилу:

$$\phi(q_{n+1}) = (q_{n-1} \bar{*} y) * h_{n-1}, \quad \phi(q_i) = q_i, \quad \phi(y) = y.$$

Из (4.3.3), (4.4.3), (4.5.3) очевидно, что ϕ — изоморфизм квандлов $VI_{\beta\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}}(Q, h)$ и $VI_{\beta}(Q, h)$.

4) Проверим шестое виртуальное преобразование Маркова. Обозначим $\gamma = \rho_n\rho_{n-1}\sigma_n\rho_{n-1}\sigma_n^{-1}\rho_{n-1}\rho_n$. Рассмотрим два квандла $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ и $VI_{\beta}(Q, h)$.

По определению, множество определяющих соотношений в квандле $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ имеет следующий вид:

$$\{\tau(\beta\gamma)(q_i) = q_i, i = 1, \dots, n+1, q \in Q\},$$

По замечанию 2 очевидно, что $\tau(\beta\gamma)(q_i) = \tau(\beta)(q_i)$ при $i = 1, \dots, n-2$.

Подействуем $\tau(\beta\gamma)$ на q_{n-1}, q_n, q_{n+1} . Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\tau(\beta\gamma)(q_{n-1}) = \tau(\beta)(q_{n-1}), \quad (4.10)$$

$$\tau(\beta\gamma)(q_n) = \tau(\beta)((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1}, \quad (4.11)$$

$$\tau(\beta\gamma)(q_{n+1}) = \tau(\beta)((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y). \quad (4.12)$$

Из равенств выше можно заключить, что в квандле $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ соотношения $\tau(\beta\gamma)(q_i) = q_i$, при $i = n-1, n, n+1$ эквивалентны следующим соотношениям:

$$\tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}, \quad (4.10.1)$$

$$\tau(\beta)((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1} = q_n, \quad (4.11.1)$$

$$\tau(\beta)((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y = q_{n+1}. \quad (4.12.1)$$

Из (4.10.1), в частности, следует что $\tau(\beta)(h_{n-1}) = h_{n-1}$, так как соотношение (4.10.1) выполнено для всех элементов $q \in Q$. Следовательно, оно выполнено и для выделенного элемента $h \in Q$.

Используя (4.10), (4.11) и замечания 1 и 2 можно провести цепочку равенств для соотношения $q_n = \tau(\beta\gamma)(q_n)$:

$$\begin{aligned} q_n &= \tau(\beta\gamma)(q_n) = \tau(\beta)((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1} = \dots \\ \dots &= \tau(\beta)((q_{n+1} * y) * y) * \tau(\beta)(h_{n-1}) = \tau(\beta)((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1} = \dots \\ \dots &= ((\tau(\beta)(q_{n+1}) * y) * y) * h_{n-1} = ((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, в квандле $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ выполнено соотношение

$$q_n = ((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1}. \quad (4.13)$$

Поделим справа последнее соотношение последовательно на элемент h_{n-1} и два раза на y . Получим:

$$q_{n+1} = ((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y. \quad (4.14)$$

Подставим (4.13) в (4.11.1). Получим следующее соотношение:

$$q_n = \tau(\beta)((q_{n+1} * y) * y) * h_{n-1} = \tau(\beta)(q_n).$$

Подставим (4.14) в (4.12.1). Получим следующее соотношение:

$$q_{n+1} = \tau(\beta)((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y = \tau(\beta)(q_{n+1}).$$

Таким образом, из соотношений (4.10.1), (4.11.1), (4.12.1), (4.13) в квандле $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ следуют соотношения

$$\tau(\beta)(q_{n-1}) = q_{n-1}, \quad (4.10.2)$$

$$\tau(\beta)(q_n) = q_n, \quad (4.11.2)$$

$$\tau(\beta)(q_{n+1}) = q_{n+1}. \quad (4.12.2)$$

$$q_{n+1} = ((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y. \quad (4.14)$$

То, что из соотношений (4.10.2), (4.11.2), (4.12.2), (4.14) следуют соотношения (4.10.1), (4.11.1), (4.12.1), (4.13) проверяется аналогично прямыми вычислениями.

Заметим, что по замечанию 2, соотношение (4.12.2) тривиально и имеет вид $q_{n+1} = q_{n+1}$.

Таким образом, изначальное множество порождающих соотношений в квандле $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ эквивалентно следующему:

$$\{q_{n+1} = ((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y, \tau(\beta)(q_i) = q_i, i = 1, \dots, n, q \in Q\},$$

Построим отображение

$$\phi : VI_{\beta\gamma}(Q, h) \longrightarrow VI_{\beta}(Q, h)$$

по правилу

$$\phi(q_{n+1}) = ((q_n \bar{*} h_{n-1}) \bar{*} y) \bar{*} y, \quad \phi(q_i) = q_i, \quad \phi(y) = y.$$

Нетрудно видеть, что ϕ – искомый изоморфизм квандлов $VI_{\beta\gamma}(Q, h)$ и $VI_{\beta}(Q, h)$.

Таким образом, мы показали, что $VI_{\beta}(Q, h)$ является инвариантом виртуального узла (зацепления) $cl(\beta)$. $\square$

Предложение 2. *Инвариант VI_{β} обобщает фундаментальный квандл зацепления и группу зацепления.*

Доказательство. Пусть $K = cl(\beta)$ для некоторой косы $\beta \in VB_n$. Рассмотрим тривиальный одноэлементный квандл $T_1 = (\{h\}, *_{T_1})$, считая его единственный элемент отмеченным. Тогда представление

$$\tau : VB_n \longrightarrow Aut(T_1^{*(n)} \star T_1)$$

примет следующий вид:

$$\tau(\sigma_i) = \begin{cases} h_i \rightarrow h_{i+1} \bar{*} h_i, \\ h_{i+1} \rightarrow h_i, \\ h_k \rightarrow q_k, \\ y \rightarrow y. \end{cases} \quad k \neq i, i+1$$

$$\tau(\rho_i) = \begin{cases} h_i \rightarrow h_{i+1} * y, \\ h_{i+1} \rightarrow h_i \bar{*} y, \\ h_k \rightarrow h_k, \\ y \rightarrow y. \end{cases} \quad k \neq i, i+1$$

и соответствующий квандл будет иметь следующее представление:

$$VI_{\beta}(T_1, h) = \langle h_1, \dots, h_n, y \mid \tau(\beta)(h_i) = h_i \rangle.$$

Нетрудно видеть, что это и есть фундаментальный квандл зацепления.

Рассмотрим функтор $Ass : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbf{Gr}$ из категории квандлов в категорию групп, заданный равенством

$$Ass((Q, *)) = \langle Q \mid a * b = b^{-1}ab, \quad a, b \in Q \rangle.$$

Тогда группа $Ass(VI_\beta(T_1, h))$ является группой зацепления $K = cl(\beta)$. $\square$

5 Построение инварианта по диаграмме зацепления

В настоящем параграфе мы покажем как построить инвариант виртуального узла (зацепления), определенный в предыдущем параграфе, используя диаграмму этого узла (зацепления).

Пусть D – ориентированная диаграмма виртуального узла (зацепления). Удалим из нее виртуальные перекрестки вместе с их малыми окрестностями. Компоненты связности полученной диаграммы, будем называть *большими дугами* диаграммы D и обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Обозначим $\mathcal{A}(D)$ – множество больших дуг диаграммы D . *Малой дугой* диаграммы D будем называть ветвь диаграммы (ребро графа) от одного перекрестка (классического или виртуального) до следующего перекрестка (классического или виртуального). Множество малых дуг будем обозначать $\mathcal{SA}(D)$. Очевидно, что это множество (как и множество больших дуг) конечно. Из определения следует, что большая дуга является объединением нескольких малых дуг. Множество малых дуг, входящих в большую дугу A будем обозначать символом $\mathcal{SA}(A)$. Так как большие и малые дуги ориентированы, то можно говорить о начальной и конечной точках каждой дуги.

ПРИМЕР. Рассмотрим узел Кишино, представленный своей диаграммой на рисунке 5. Эта диаграмма содержит 12 малых дуг:

$$a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2, d, e, f, g_1, g_2, k$$

и 8 больших:

$$A = a_1 \cup a_2 \cup a_3, B = b, C = c_1 \cup c_2, D = d, E = e, F = f, G = g_1 \cup g_2, K = k.$$

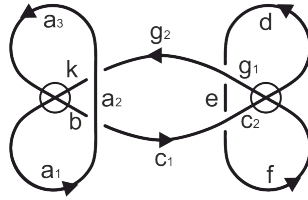


Рис. 5. Диаграмма узла Кишино.

Пусть для диаграммы D множество больших дуг $\mathcal{A}(D)$ состоит из n дуг: $\mathcal{A}(D) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Свободное произведение квандлов $Q^{\star n} \star T_1$

будем записывать в виде

$$Q^{*n} \star T_1 = Q_{A_1} \star Q_{A_2} \star \dots \star Q_{A_n} \star T_1.$$

Так же как в работе [5], определим отображение:

$$\varphi: \mathcal{SA}(D) \times Q \longrightarrow Q^{*n} \star T_1$$

по правилам

- (1) Если малая дуга a_0 содержит начальную точку некоторой большой дуги A , то $\varphi(a_0, q) = q_A$.
- (2) Предположим, что в классический перекресток входят малые дуги a и b , а выходят a' и c (см. рисунок 6) причём так, что малые дуги a и a' являются частями большой дуги A . Предположим, что значение $\varphi(a, q)$ определено. Тогда значение $\varphi(a', q)$ определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(a', q) = \varphi(a, q) \bar{*} h_A, & \text{если перекресток положительный,} \\ \varphi(a', q) = \varphi(a, q) * h_A, & \text{если перекресток отрицательный.} \end{cases}$$

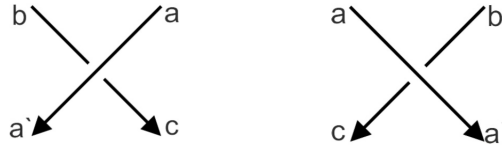


Рис. 6. Положительный и отрицательный перекрестки.

Таким образом, значение $\varphi(a, q)$ определено на всех малых дугах $a \in \mathcal{SA}(D)$ и элементах квандла $q \in Q$. Определим соотношения на перекрёстках.

- (3) Для классических перекрёстков введём следующие соотношения

$$\varphi(c, q) = \varphi(b, q) * h_A, \text{ если перекресток положительный,}$$

$$\varphi(c, q) = \varphi(b, q) \bar{*} h_A, \text{ если перекресток отрицательный.}$$

для каждого $q \in Q$.

- (4) Каждому виртуальному перекрёстку (рис. 7)

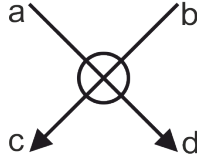


Рис. 7. Виртуальный перекресток.

сопоставим два соотношения:

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) * y, \quad \varphi(c, q) = \varphi(b, q) \bar{*} y, \quad q \in Q.$$

Рассмотрим произвольный перекрёсток x диаграммы виртуального узла (зацепления) D . Сопоставим перекрёстку x и каждому элементу q квандла Q соотношение $R(x, q)$.

$$R(x, q) = \begin{cases} \varphi(c, q) = \varphi(b, q) * h_A, & \text{если перекрёсток } x \text{ положительный,} \\ \varphi(c, q) = \varphi(b, q) \bar{*} h_A, & \text{если перекрёсток } x \text{ отрицательный,} \\ \varphi(d, q) = \varphi(a, q) * y, & \text{если перекрёсток } x \text{ виртуальный,} \\ \varphi(c, q) = \varphi(b, q) \bar{*} y, & \text{если перекрёсток } x \text{ виртуальный.} \end{cases}$$

Сопоставим диаграмме D и квандлу с выделенным элементом (Q, h) фактор-квандл $VI_D(Q, h)$, определённый следующим образом:

$$VI_D(Q, h) = \langle q_{A_i}, y, (A_i \in \mathcal{A}(D), q \in Q) \mid R(x, q), x - \text{перекрёсток } D, q \in Q \rangle.$$

Теорема 4. $VI_D(Q, h)$ является инвариантом диаграммы D виртуального узла (зацепления).

Доказательство. Пусть даны две диаграммы виртуальных узлов (зацеплений) D_1 и D_2 такие, что D_1 можно перевести в D_2 применением конечного числа классических, виртуальных и смешанного движений Рейдемейстера.

Нужно показать, что в таком случае, квандл $VI_{D_1}(Q, h)$ изоморфен квандлу $VI_{D_2}(Q, h)$. Для этого достаточно проверить каждое движение отдельно. Для классических движений этот факт устанавливается по аналогии с тем, как в работе [5].

Рассмотрим первое виртуальное движение Рейдемейстера (см. рис. 8).



Рис. 8. Первое виртуальное движение Рейдемейстера.

Согласно определению $\varphi(b, q) = \varphi(a, q) * y$, $\varphi(c, q) = \varphi(b, q) \bar{*} y = \varphi(a, q)$. Следовательно, новый квандл будет изоморфен исходному.

Рассмотрим два случая второго виртуального движения Рейдемейстера. Первый случай с сонаправленными дугами (см. рис. 9)



Рис. 9. Второе виртуальное движение Рейдемейстера.

Согласно определению $\varphi(b, q) = \varphi(a, q) * y$, $\varphi(c, q) = \varphi(b, q) \bar{*} y = \varphi(a, q)$. С другой стороны, $\varphi(e, q) = \varphi(d, q) * y$, $\varphi(f, q) = \varphi(e, q) \bar{*} y = \varphi(d, q)$. Следовательно, новый квандл будет изоморфен исходному.



Рис. 10. Второе виртуальное движение Рейдемейстера.

Рассмотрим второй случай с разнонаправленными дугами (см. рис. 10)

Согласно определению $\varphi(e, q) = \varphi(f, q) \bar{*} y$, $\varphi(d, q) = \varphi(e, q) * y = \varphi(f, q)$. С другой стороны, $\varphi(b, q) = \varphi(a, q) \bar{*} y$, $\varphi(c, q) = \varphi(b, q) * y = \varphi(a, q)$. Следовательно, новый квандл будет изоморфен исходному.

Рассмотрим три случая третьего виртуального движения Рейдемейстера. Случай когда все дуги сонаправлены проиллюстрирован на рисунке 11.



Рис. 11. Третье виртуальное движение Рейдемейстера.

Рассмотрим дуги a, d, e в левой и правой частях рисунка 11. В обоих случаях будут верны равенства

$$\varphi(e, q) = \varphi(d, q) * y = (\varphi(a, q) * y) * y.$$

Аналогично, для дуг c, t, k будут верны равенства

$$\varphi(k, q) = \varphi(y, q) \bar{*} y = (\varphi(c, q) \bar{*} y) \bar{*} y.$$

Рассмотрим, теперь, дуги b, f, g в левой части рисунка 11. Для них будут верны равенства

$$\varphi(g, q) = \varphi(f, q) \bar{*} y = (\varphi(b, q) \bar{*} y) * y = \varphi(b, q).$$

Аналогично для тех же дуг в правой части рисунка 11

$$\varphi(g, q) = \varphi(f, q) * y = (\varphi(b, q) * y) \bar{*} y = \varphi(b, q).$$

Таким образом, значения функции φ совпали для левой и правой диаграммы. Следовательно, новый квандл будет изоморфен исходному.

Случай когда центральная дуга имеет обратное направление проиллюстрирован на рисунке 12.



Рис. 12. Третье виртуальное движение Рейдемейстера.

Рассмотрим дуги a, d, e на обеих диаграммах. В левой части рисунка будут верны равенства

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) * y, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) \bar{*} y = \varphi(a, q).$$

Аналогично, в правой части будут верны равенства

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) \bar{*} y, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) * y = \varphi(a, q).$$

Рассмотрим дуги c, t, k . В левой части будут равенства

$$\varphi(t, q) = \varphi(c, q) * y, \varphi(k, q) = \varphi(t, q) \bar{*} y = \varphi(c, q).$$

В правой части

$$\varphi(t, q) = \varphi(c, q) \bar{*} y, \varphi(k, q) = \varphi(t, q) * y = \varphi(c, q).$$

Наконец, рассмотрим дуги b, f, g . Для левой части будут верны равенства

$$\varphi(f, q) = \varphi(b, q) * y, \varphi(g, q) = \varphi(f, q) \bar{*} y = \varphi(b, q).$$

В правой части

$$\varphi(f, q) = \varphi(b, q) \bar{*} y, \varphi(g, q) = \varphi(f, q) * y = \varphi(b, q).$$

Значения функции φ совпали в левой и правой частях, следовательно новый квандл будет изоморфен исходному.

Случай когда нецентральная дуга имеет обратное направление проиллюстрирован на рисунке 13.



Рис. 13. Третье виртуальное движение Рейдемейстера.

Для дуг a, d, e в левой части будут верны равенства

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) \bar{*} y, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) * y = \varphi(a, q).$$

В правой

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) * y, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) \bar{*} y = \varphi(a, q).$$

Для дуг b, f, g в левой и правой частях будут верны равенства

$$\varphi(f, q) = \varphi(b, q) \bar{*} y, \varphi(g, q) = (\varphi(f, q) \bar{*} y) \bar{*} y.$$

Для дуг c, t, k в левой и правой частях будут верны равенства

$$\varphi(t, q) = \varphi(c, q) * y, \varphi(k, q) = \varphi(t, q) * y = (\varphi(c, q) * y) * y.$$

Значения функции φ совпали в левой и правой частях, следовательно новый квандл будет изоморфен исходному.

Рассмотрим три случая смешанного виртуального движения Рейдемейстера. Случай, когда все дуги сонаправлены проиллюстрирован на рис. 14.



Рис. 14. Смешанное виртуальное движение Рейдемейстера.

Рассмотрим левый рисунок. Для него $\varphi(g, q) = \varphi(b, q)$, $\varphi(t, q) = \varphi(c, q) \bar{*} y$, $\varphi(t', q) = \varphi(t, q) \bar{*} h_t = (\varphi(c, q) \bar{*} y) \bar{*} h_t$ и $\varphi(e, q) = (\varphi(a, q) * h_t) * y$.

Для правого рисунка, $\varphi(g, q) = \varphi(b, q)$, $\varphi(c', q) = \varphi(c, q) \bar{*} h_c$, $\varphi(k, q) = (\varphi(c, q) \bar{*} h_c) \bar{*} y$ и $\varphi(e, q) = (\varphi(a, q) * y) * h_c$.

Слева и справа все копии квандлов совпадают, кроме Q_t и Q_c . Построим изоморфизм $\chi : q_t \mapsto q_c \bar{*} y$, тогда $(\varphi(c, q) \bar{*} y) \bar{*} h_t \xrightarrow{\chi} (\varphi(c, q) \bar{*} h_c) \bar{*} y$ и $(\varphi(a, q) * h_t) * y \xrightarrow{\chi} (\varphi(a, q) * y) * h_c$.

Рассмотрим случай когда одна нецентральная дуга имеет обратное направление как на рис. 15.



Рис. 15. Смешанное виртуальное движение Рейдемейстера.

Рассмотрим дуги a, d, e в обеих частях рисунка. В левой части будут верны равенства

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) \bar{*} y, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) \bar{*} h_t = (\varphi(a, q) \bar{*} y) \bar{*} h_t.$$

В правой

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) \bar{*} h_c, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) \bar{*} y = (\varphi(a, q) \bar{*} h_c) \bar{*} y.$$

Рассмотрим в левой части набор дуг c, t, t' . Для них будут верны равенства

$$\varphi(t, q) = \varphi(c, q) \bar{*} y, \varphi(t', q) = \varphi(t, q) * h_t = (\varphi(c, q) \bar{*} y) * h_t.$$

Рассмотрим аналогичный набор дуг в правой части: c, c', k . Для них будут верны равенства

$$\varphi(c', q) = \varphi(c, q) * h_c, \varphi(k, q) = \varphi(c', q) \bar{*} y = (\varphi(c, q) * h_c) \bar{*} y.$$

Рассмотрим, наконец, набор дуг b, f, g . В обеих частях рисунка будут верны равенства

$$\varphi(f, q) = \varphi(b, q) * y, \varphi(g, q) = \varphi(f, q) * y = (\varphi(b, q) * y) * y.$$

Надо показать изоморфность двух квандлов. Построим изоморфизм $\chi : q_c \mapsto q_t * y$.

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\begin{aligned} (\varphi(a, q) \bar{*} h_c) \bar{*} y &\stackrel{\chi}{\mapsto} (\varphi(a, q) \bar{*} y) \bar{*} h_t, \\ (\varphi(c, q) * h_c) \bar{*} y &\stackrel{\chi}{\mapsto} (\varphi(c, q) \bar{*} y) * h_t, \\ (\varphi(b, q) * y) * y &\stackrel{\chi}{\mapsto} (\varphi(b, q) * y) * y. \end{aligned}$$

Таким образом, квандлы построенные по эквивалентным диаграммам изоморфны.

Рассмотрим случай когда центральная дуга имеет обратное направление как на рис. 16.



Рис. 16. Смешанное виртуальное движение Рейдемейстера.

Данный случай полностью аналогичен первому, за исключением того, что соотношения на виртуальных перекрёстках перевернулись. Для набора дуг b, f, g слева и справа будут верны равенства $\varphi(g, q) = \varphi(b, q)$.

Рассмотрим дуги ct, t' на левом рисунке. Для них будут верны равенства

$$\varphi(t, q) = \varphi(c, q) * y, \varphi(t', q) = \varphi(t, q) * h_t = (\varphi(c, q) * y) \bar{*} h_t$$

Рассмотрим аналогичный набор дуг c, c', k на правом рисунке. Для них будут верны равенства

$$\varphi(c', q) = \varphi(c, q) \bar{*} h_c, \varphi(k, q) = (\varphi(c, q) \bar{*} h_c) * y$$

Рассмотрим, теперь, дуги a, d, e . На левом рисунке будут верны равенства

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) * h_t, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) \bar{*} y = (\varphi(a, q) * h_t) \bar{*} y$$

На правом рисунке будут верны равенства

$$\varphi(d, q) = \varphi(a, q) \bar{*} y, \varphi(e, q) = \varphi(d, q) * h_c = (\varphi(a, q) \bar{*} y) * h_c$$

Для того чтобы показать изоморфность двух квандлов, построим изоморфизм $\chi : q_t \mapsto q_c * y$.

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\begin{aligned} (\varphi(c, q) * y) \bar{*} h_t &\stackrel{\chi}{\mapsto} (\varphi(c, q) \bar{*} h_c) * y, \\ (\varphi(a, q) * h_t) \bar{*} y &\stackrel{\chi}{\mapsto} (\varphi(c, q) \bar{*} y) * h_c, \\ (\varphi(b, q) &\stackrel{\chi}{\mapsto} \varphi(b, q). \end{aligned}$$

Таким образом, квандлы построенные по эквивалентным диаграммам изоморфны.

Инвариантность относительно смешанного движения с отрицательным классическим перекрёстком доказывается аналогично. Таким образом доказано, что VI_D действительно инвариант диаграммы виртуального узла (зацепления).

□

Рассмотрим несколько примеров построения инварианта VI .

ПРИМЕР. Покажем, что квандл $VI_D(Q, h)$ отличает виртуальное зацепление Хопфа H с одним виртуальным перекрёстком от тривиального двухкомпонентного зацепления. В качестве квандла Q выберем тривиальный одноэлементный квандл $T_1 = \langle \{h\}, * \rangle$. Рассмотрим диаграмму зацепления Хопфа с размеченными дугами и заданной ориентацией.

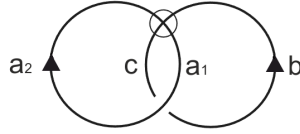


Рис. 17. Диаграмма виртуального зацепления Хопфа.

Как было отмечено выше, $\mathcal{A}(H) = \{A, B, C\}$. При этом все большие дуги, кроме A , содержат только один элемент, который обозначается такой же буквой латинского алфавита, но строчной. Дуга A состоит из следующих малых дуг: $\mathcal{SA}(A) = \{a_1, a_2\}$. Таким образом нам надо рассмотреть квандл $T_1^{\star 3} \star T_1$, где $T_1^{\star 3}$ определён следующим образом

$$T_1^{\star 3} = T_{1A} \star T_{1B} \star T_{1C},$$

где T_{1A}, T_{1B}, T_{1C} – это тривиальные одноэлементные квандлы сопоставленные дугам A, B, C соответственно.

Чтобы найти квандл зацепления Хопфа, нужно написать соотношения по всем перекрёсткам. По определению φ и соотношениям на перекрёстках имеем

$$\begin{aligned} \varphi(a_2, q) &= q_A \bar{*} h_A, \quad \varphi(a_1, q) = (q_A \bar{*} h_A) * y = q_A, \\ \varphi(b, q) &= q_C * h_A = q_B, \\ \varphi(c, q) &= q_B \bar{*} y = q_C. \end{aligned}$$

Так как мы зафиксировали тривиальный одноэлементный квандл $T_1 = \langle \{h\}, * \rangle$, то подставим h вместо q . Получим

$$\begin{aligned} \varphi(a_2, q) &= h_A \bar{*} h_A = h_A, \quad \varphi(a_1, q) = h_A * y = h_A, \\ \varphi(b, q) &= h_C * h_A = h_B, \\ \varphi(c, q) &= h_B \bar{*} y = h_C. \end{aligned}$$

Таким образом, надо профакторизовать квандл $T_1^{\star 3} \star T_1$ по множеству соотношений написанных выше. Используя преобразования, Титце мы можем упростить их и получить следующее множество соотношений:

$$h_A * y = h_A, (h_C * h_A) \bar{*} y = h_C.$$

Видно, что можно избавиться от порождающего h_B , так как он лежит в кванdle $Q_A \star Q_C$. Таким образом, мы получили представление квандла $VI_H(T_1, h)$

$$VI_H(T_1, h) = \langle h_A, h_C, y \mid h_A * y = h_A, (h_C * h_A) \bar{*} y = h_C \rangle.$$

Поддействуем на квандл $VI_H(T_1, h)$ функтором из категории квандлов в категорию групп $Ass : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbf{Gr}$, получим группу

$$G = Ass(VI_H(T_1, h)) = \langle h_A, h_C, y \mid y^{-1}h_Ay = h_A, h_C^{h_Ay^{-1}} = h_C \rangle.$$

Рассмотрим фактор по первому коммутанту $G/[G, G]$. Получим группу со следующим представлением:

$$G/[G, G] = \langle h_A, h_C, y \mid y^{-1}h_Ay = h_A, h_C^{h_Ay^{-1}} = h_C, [G, G] = 1 \rangle.$$

которая, очевидно, изоморфна группе

$$\langle h_A, h_C, y \mid h_A = h_A, h_C = h_C, [G, G] = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^3.$$

Для тривиального двухкомпонентного зацепления с диаграммой Tr_2 значение $VI_{Tr_2}(T_1, h)$ равно $\langle x_1, x_2, y \mid \rangle$ – свободный двухпорождённый квандл. Если мы рассмотрим группу $Ass(VI_{Tr_2}(T_1, h))$, то это будет свободная трёхпорождённая группа $\mathbb{F}_3$.

Остаётся доказать, что G не изоморфна $\mathbb{F}_3$. В самом деле, G содержит подгруппу, порождённую элементами $\langle h_A, h_C \rangle$ изоморфную $\mathbb{Z}^2 = \langle a, c \mid ac = ca \rangle$. Достаточно рассмотреть отображение $\psi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow G$, определённое по правилу $\psi(a) = h_A$, $\psi(c) = h_C$.

Отображение ψ , очевидно, продолжается до гомоморфизма. Более того, ψ инъективно. Допустим обратное. Пусть $1_{\mathbb{Z}^2} \neq x \in \mathbb{Z}^2$ и $\psi(x) = 1_G$. Тогда $x = a^{k_1}c^{k_2}$. В свою очередь $\psi(x) = h_A^{k_1}h_C^{k_2} = 1_G$. Тогда $G/[G, G]$ не свободная абелева трёхпорождённая. Пришли к противоречию – следовательно $\mathbb{Z}^2 \leq G$.

Допустим теперь, что $G \simeq \mathbb{F}_3$, при этом $\xi : G \longrightarrow \mathbb{F}_3$ – изоморфизм. Тогда $\xi(h_A)\xi(h_C) = \xi(h_C)\xi(h_A)$. Следовательно, $\xi(h_A)$ и $\xi(h_C)$ являются некоторыми степенями элемента $w \in \mathbb{F}_3$. $\xi(h_A) = w^{t_1}$, $\xi(h_C) = w^{t_2}$. Тогда образ ξ – группа, порождённая не более чем двумя элементами. Противоречие.

ПРИМЕР. Покажем, что квандл $VI_\beta(Q, h)$ отличает виртуальный трилистник от тривиального узла. В качестве квандла Q выберем тривиальный одноэлементный квандл $T_1 = \langle \{h\}, * \rangle$. Виртуальный трилистник является замыканием трёхнитевой виртуальной косы $\sigma_1\sigma_1\rho_1$. Прямым вычислением проверяется, что автоморфизм $\tau(\sigma_1\sigma_1\tau_1) = S_1S_1V_1$ квандла $T_1^{\star 3} = \langle y, h_1, h_2 \rangle$ действует по следующему правилу:

$$\tau(\rho_i) = \begin{cases} h_1 \rightarrow (h_2 * y) \bar{*} ((h_1 \bar{*} y) \bar{*} (h_2 * y)), \\ h_2 \rightarrow (h_1 \bar{*} y) \bar{*} (h_2 * y), \\ y \rightarrow y. \end{cases}$$

Таким образом, квандл $VI_{\sigma_1\sigma_1\rho_1}(T_1, h)$ будет иметь следующее представление:

$$\langle y, h_1, h_2 \mid h_1 = (h_2 * y) \bar{*} ((h_1 \bar{*} y) \bar{*} (h_2 * y)), h_2 = (h_1 \bar{*} y) \bar{*} (h_2 * y) \rangle.$$

Воспользуемся преобразованием Титце и упростим первое соотношение:

$$\langle y, h_1, h_2 \mid h_1 = (h_2 * y) \bar{*} h_2, h_2 = (h_1 \bar{*} y) \bar{*} (h_2 * y) \rangle.$$

Преобразуем второе соотношение следующим образом:

$$\langle y, h_1, h_2 \mid h_1 = (h_2 * y) \bar{*} h_2, h_1 = (((h_2 \bar{*} y) * h_2) * y) * y \rangle.$$

В итоге получили квандл, в котором $h_1 \in \langle y, h_2 \rangle$ и выполнено одно соотношение. Представлением этого квандла будет:

$$\langle y, h_2 \mid (h_2 * y) \bar{*} h_2 = (((h_2 \bar{*} y) * h_2) * y) * y \rangle.$$

Рассмотрим группу $Ass(VI_{\sigma_1\sigma_1\rho_1}(T_1, h))$

$$\langle y, h_2 \mid h_2 y^{-1} h_2 y h_2^{-1} = y^{-2} h_2^{-1} y h_2 y^{-1} h_2 y^2 \rangle.$$

Тот факт, что данная группа не изоморфна $\mathbb{F}_2$ был установлен в работе [28].

С другой стороны, тривиальное зацепление задаётся замыканием двухнитевой косы σ_1 . Группа $VI_{\sigma_1}(T_1, h)$ будет изоморфна $\mathbb{F}_2$.

6 Линейные представления группы SB_n

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ выберем число t трансцендентное над полем $\mathbb{Q}$. Справедлива

Теорема 5. *Всякое линейное локальное однородное представление*

$$\varphi: SB_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C}),$$

продолжающее представления Бирау группы B_n определено на порождающих следующим образом:

$$\varphi(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array} \right),$$

$$\varphi(\tau_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t+at & t-at & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array} \right),$$

где $a \neq \frac{t}{t+1}$.

Доказательство. Покажем, что φ – представление, т. е. выполняются соотношения группы SB_n . Соотношения группы кос выполняются в силу того, что ограничение φ на группу B_n является представлением Бурау.

Оставшиеся соотношения:

$$\begin{aligned}\varphi(\tau_i)\varphi(\tau_j) &= \varphi(\tau_j)\varphi(\tau_i), \quad |i-j| \geq 2, \\ \varphi(\sigma_i)\varphi(\tau_j) &= \varphi(\tau_j)\varphi(\sigma_i), \quad |i-j| \geq 2, \\ \varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\tau_i) &= \varphi(\tau_{i+1})\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1}), \\ \varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i)\varphi(\tau_{i+1}) &= \varphi(\tau_i)\varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-2,\end{aligned}$$

проверяются непосредственными вычислениями.

Проверим эти соотношения для $n = 3$.

Рассмотрим соотношение: $\varphi(\sigma_1)\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_1)\varphi(\sigma_1)$.

$$\varphi(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \varphi(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1-t+at & t-at & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_1)\varphi(\tau_1) &= \begin{pmatrix} -at^2+t^2-t+1 & at^2-t^2+t & 0 \\ at-t+1 & -at+t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi(\tau_1)\varphi(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} -at^2+t^2-t+1 & at^2-t^2+t & 0 \\ at-t+1 & -at+t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Проверим второе соотношение : $\varphi(\sigma_2)\varphi(\tau_2) = \varphi(\tau_2)\varphi(\sigma_2)$.

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi(\tau_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t+at & t-at \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}, \\ \varphi(\sigma_2)\varphi(\tau_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -at^2+t^2-t+1 & at^2-t^2+t \\ 0 & at-t+1 & -at+t \end{pmatrix}, \\ \varphi(\tau_2)\varphi(\sigma_2) &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -at^2+t^2-t+1 & at^2-t^2+t \\ 0 & at-t+1 & -at+t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Рассмотрим смешанное соотношение: $\varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1)\varphi(\tau_2) = \varphi(\tau_1)\varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1)$.

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} -t+1 & t & 0 \\ -t+1 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1)\varphi(\tau_2) &= \begin{pmatrix} -t+1 & at^2-t^2+t & -at^2+t^2 \\ -t+1 & -at+t & at \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\varphi(\tau_1)\varphi(\sigma_2)\varphi(\sigma_1) : \begin{pmatrix} -t+1 & at^2-t^2+t & -at^2+t^2 \\ -t+1 & -at+t & at \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим последнее соотношение: $\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)$.

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} -t+1 & -t^2+t & t^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)\varphi(\tau_1) &= \begin{pmatrix} -t+1 & -t^2+t & t^2 \\ at-t+1 & -at+t & 0 \\ -a+1 & a & 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi(\tau_2)\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} -t+1 & -t^2+t & t^2 \\ at-t+1 & -at+t & 0 \\ -a+1 & a & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Покажем, что всякое локальное однородное представление имеет вид из формулировки теоремы.

Предположим, что $M_1 = \begin{pmatrix} u & v \\ q & a \end{pmatrix}$, где $u, v, q, a \in \mathbb{C}$. Применим определяющие соотношения моноида сингулярных кос, тогда $v = qt$, $u = q - tq + a$ и $q + a = 1$. Получим, что $u = 1 - t(1 - a)$, $v = t(1 - a)$, $q = 1 - a$. Таким образом, мы нашли все локальные однородные представления моноида сингулярных кос SM_n .

Для того, чтобы представление давало представление группы сингулярных кос необходимо, чтобы все матрицы $\phi(\tau_i)$ были обратимы. Так как $\det(\varphi(\tau_i)) = a(t+1) - t$, то при $a \neq \frac{t}{t+1}$ матрица $\varphi(\tau_i)$ обратима и φ дает представление группы SB_n . $\square$

Хорошо известно, что представление Бурау приводимо и по нему можно построить приведенное представление Бурау $B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$, которое уже неприводимо. Следующая теорема показывает, что аналогичный результат справедлив и для построенного выше представления группы SB_n .

Теорема 6. Пусть $n \geq 3$ и $\varphi^r(\sigma_1), \dots, \varphi^r(\sigma_{i-1}), \varphi^r(\tau_1), \dots, \varphi^r(\tau_{i-1})$ – квадратные матрицы порядка $n-1$ над полем $\mathbb{C}$, заданные равенствами

$$\begin{aligned} \varphi^r(\sigma_1) &= \left(\begin{array}{cc|c} -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-3} \end{array} \right), \quad \varphi^r(\sigma_{n-1}) = \left(\begin{array}{c|cc} E_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{array} \right), \\ \varphi^r(\sigma_i) &= \left(\begin{array}{c|ccc|c} E_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n-i-2} \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^r(\tau_1) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1+t(a-1) & t(1-a) & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-3} \end{array} \right), \\ \varphi^r(\tau_{n-1}) &= \left(\begin{array}{c|cc} E_{n-3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & t(1-a) \\ 0 & 0 & t(a-1)+a \end{array} \right), \\ \varphi^r(\tau_i) &= \left(\begin{array}{c|ccc|c} E_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & t(1-a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t(a-1)+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n-i-2} \end{array} \right),\end{aligned}$$

при $1 < i < n-1$. Тогда для всех $i = 1, \dots, n-1$ имеют место равенства

$$C^{-1}\varphi(\sigma_i)C = \begin{pmatrix} \varphi^r(\sigma_i) & 0 \\ *_{i-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1}\varphi(\tau_i)C = \begin{pmatrix} \varphi^r(\tau_i) & 0 \\ *_{i-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$*_{i-1}$ – строка длины $n-1$, равная нулевой строке при $i < n-1$ и равная $(0, \dots, 0, 1)$ при $i = n-1$.

Отображение

$$\sigma_i \mapsto \varphi^r(\sigma_i), \quad \tau_i \mapsto \varphi^r(\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

определяет неприводимое представление группы SB_n .

Доказательство. Доказательство теоремы следует тем же идеям, что и доказательство соответствующей теоремы для группы кос (см., например, [30, параграф 3.3]).

Рассмотрим матрицы $\varphi(\sigma_i), \varphi(\tau_i) \in GL_n(\mathbb{C}), i = 1, \dots, n-1$ и проверим справедливость равенств (6.1). Очевидно, что эти равенства равносильны равенствам:

$$\varphi(\sigma_i)C = C \begin{pmatrix} \varphi^r(\sigma_i) & 0 \\ *_{i-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\tau_i)C = C \begin{pmatrix} \varphi^r(\tau_i) & 0 \\ *_{i-1} & 1 \end{pmatrix},$$

которые проверяются непосредственными вычислениями. Таким образом, отображение

$$\sigma_i \rightarrow \varphi^r(\sigma_i), \quad \tau_i \rightarrow \varphi^r(\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

задает представление $\varphi^r: SB_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{C})$. Учитывая, что приведенное представление Бурау является неприводимым, заключаем, что и представление φ^r также является неприводимым. $\square$

7 Представления моноида SM_n автоморфизмами свободной группы

В [31] построены представления моноида сингулярных кос SM_n в множество эндоморфизмов $End(F_n)$ свободной группы F_n , продолжающие представления Артина $B_n \rightarrow Aut(F_n)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_i) : \begin{cases} x_i \rightarrow x_i x_{i+1} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1}, \\ x_{i+1} \rightarrow x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_j \rightarrow x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} & \Phi_1(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \rightarrow x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \rightarrow x_i, \\ x_j \rightarrow x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} \\ \Phi_2(\tau_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1} x_i x_{i+1}, \\ x_j \mapsto x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} & \Phi_2(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_j \mapsto x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} \\ \Phi_3(\tau_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1} x_i, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{-1} x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}^2, \\ x_j \mapsto x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} & \Phi_3(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_j \mapsto x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} \\ \Phi_{4,n}(\tau_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{-1} (x_i^{-1} x_{i+1})^n, \\ x_{i+1} \mapsto (x_{i+1}^{-1} x_i)^{n+1} x_{i+1}, \\ x_j \mapsto x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} & \Phi_{4,n}(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_j \mapsto x_j, j \neq i, i+1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $n \geq 1$.

Возникает вопрос о продолжении этих представлений на группу сингулярных кос. Пусть $T_n = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ – подгруппа группы SB_n , порожденная элементами $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. 1) Представление Φ_1 определяет представление $SB_n \rightarrow Aut(F_n)$. Это представление не является точным. В частности, оно содержит нормальное замыкание элементов $\sigma_i^2 \tau_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ограничение Φ_1 на группу $T_n = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ является точным представлением.

2) Представление Φ_2 определяет представление $SB_n \rightarrow Aut(F_n)$. Это представление не является точным. В частности, оно содержит нормальное замыкание элементов $\sigma_i^2 \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ограничение Φ_2 на группу T_n является точным представлением.

3) Представление Φ_3 не может быть продолжено до представления $SB_n \rightarrow Aut(F_n)$ группы сингулярных кос.

4) Отображение $\Phi_{4,n}(\tau_1) : F_2 \rightarrow F_2$ не является автоморфизмом группы $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$, а потому $\Phi_{4,n}$ не является представлением $SB_n \rightarrow Aut(F_n)$.

Доказательство. 1) Легко проверить, что $\Phi_1(\tau_i) = \Phi_1(\sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Вторая часть утверждения следует из того, что если взять подгруппу группы B_n , порожденную элементами σ_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, то все

нетривиальные соотношения этой подгруппы следуют из соотношений:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = e, \quad |i - j| > 1.$$

Следовательно, эта группа изоморфна T_n . Поскольку ограничение Φ_1 на B_n точное и $\Phi_1(\tau_i) = \Phi_1(\sigma_i^2)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$, то получаем, что ограничение Φ_1 на T_n является точным представлением.

2) Легко проверить, что $\Phi_1(\tau_i) = \Phi_1(\sigma_i)^{-2}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Вторая часть следует из доказанного результата 1) отображение $\sigma_i \mapsto \sigma_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, индуцирует автоморфизм группы B_n .

3) Достаточно доказать, что $\Phi_3(\tau_1)$ не является автоморфизмом $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ и, следовательно, не имеет обратного. Для доказательства этого факта воспользуемся следующим результатом А. И. Мальцева: если $F_2 = \langle x, y \rangle$ — свободная группа ранга 2 и $u, v \in F_2$, то $F_2 = \langle u, v \rangle$ тогда и только тогда, когда существует $w \in F_2$ такое, что

$$[x, y] = w^{-1}[u, v]w \quad \text{или} \quad [x, y] = w^{-1}[v, u]w.$$

Если $\Phi_3(\tau_1)$ — автоморфизм, то $u = x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1$ и $v = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^2$ порождает группу $\langle x_1, x_2 \rangle$, но

$$[u, v] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-2} x_1^{-1} x_2 x_1^2 x_2,$$

$$[v, u] = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^{-1} x_1 x_2^2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1.$$

4) Отображение $\Phi_{4,n}(\tau_1)$ индуцирует отображение $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} -n & n+1 \\ n+1 & -n \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель этой матрицы $-2n-1$ не равен ± 1 при $n \geq 1$, то $\Phi_{4,n}(\tau_1)$ не является автоморфизмом. □

В [32] построены некоторые представления группы T_n в группу $\text{Aut}(F_n)$. Возникает естественный вопрос: какие из этих представлений можно продолжить до представлений группы SB_n ?

References

- [1] L. Kauffman, *Virtual knot theory*, Eur. J. Comb., **20**:7 (1999), 663–690. Zbl 0938.57006
- [2] D.A. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra, **23** (1982), 37–65. Zbl 0474.57003
- [3] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Math. USSR, Sb., **47** (1984), 73–83. Zbl 0523.57006
- [4] T. Ito, *The classification of Wada-type representations of braid groups*, J. Pure Appl. Algebra, **217**:9 (2013), 1754–1763. Zbl 1282.20038
- [5] T. Ito, *A functor-valued extension of knot quandles*, J. Math. Soc. Japan, **64**:4 (2012), 1147–1168. Zbl 1283.57012
- [6] J.C. Baez, *Link invariants of finite type and perturbation theory*, Lett. Math. Phys., **26**:1 (1992), 43–51. Zbl 0792.57002

- [7] J.S. Birman, *New points of view in knot theory*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser., **28**:2 (1993), 253–287. Zbl 0785.57001
- [8] O. Dasbach, B. Gemein, *The word problem for the singular braid monoid*, Preprint, 1998, arXiv:math/9809070.
- [9] O. Dasbach, B. Gemein, *A faithful representation of the singular braid monoid on three strands*, Preprint, 1998, arXiv:math/9806050.
- [10] V.G. Bardakov, T.A. Kozlovskaya, *On 3-strand singular pure braid group*, J. Knot Theory Ramif., **29**:10 (2020), Article ID 2042001. Zbl 1508.20037
- [11] V.G. Bardakov, T.A. Kozlovskaya, *Singular braids, singular links and subgroups of camomile type*, Preprint, 2023, arXiv:2212.08267.
- [12] K. Gongopadhyay, T. Kozlovskaya, O. Mamonov, *On some decompositions of the 3-strand singular braid group*, Topology Appl., **283** (2020), Article ID 107398. Zbl 1485.20096
- [13] T.A. Kozlovskaya, *Structure of 4-strand singular pure braid group*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **19**:1 (2022), 18–33. Zbl 1540.20065
- [14] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen Hamburg, **4** (1925), 47–72. JFM 51.0450.01
- [15] A.A. Markoff, *Foundations of the algebraic theory of tresses*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **16** (1945), 3–53. Zbl 0061.02507
- [16] V. Bardakov, P. Bellingeri, *Combinatorial properties of virtual braids*, Topology Appl., **156**:6 (2009), 1071–1082. Zbl 1196.20044
- [17] F. Fenn, E. Keyman, C. Rourke, *The singular braid monoid embeds in a group*, J. Knot Theory Ramifications, **7**:7 (1998), 881–892. Zbl 0971.57011
- [18] W. Burau, *Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, Abh. Math. Sem. Hamburg, **11**:1 (1935), 179–186. MR3069652
- [19] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience Publishers, New York etc., 1996. Zbl 0138.25604
- [20] J.A. Moody, *The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n* , Bull. Am. Math. Soc., New Ser., **25**:2 (1991), 379–384. Zbl 0751.57005
- [21] S.J. Bigelow, *Braid groups are linear*, J. Amer. Math. Soc., **14**:2 (2001), 471–486. Zbl 0988.20021
- [22] R.J. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebra*, Comm. Math. Phys., **135**:1 (1990), 141–191. Zbl 0716.20022
- [23] D. Krammer, *Braid groups are linear*, Ann. Math. (2), **155**:1 (2002), 131–156. Zbl 1020.20025
- [24] M. Wada, *Group invariants of links*, Topology, **31**:2 (1992), 399–406. Zbl 0758.57008
- [25] V. Shpilrain, *Representing braids by automorphisms*, Int. J. Algebra Comput., **11**:6 (2001), 773–777. Zbl 1024.20036
- [26] Yu.A. Mikhalechishina, *Local representations of braid groups*, Sib. Math. J., **54**:4 (2013), 666–678. Zbl 1279.20048
- [27] V.G. Bardakov, *Virtual and welded links and their invariants*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **2** (2005), 196–199. Zbl 1100.57006
- [28] V.G. Bardakov, P. Bellingeri, *Groups of virtual and welded links*, J. Knot Theory Ramifications, **23**:3 (2014), Article ID 1450014. Zbl 1294.57004
- [29] O. Chterental, *Virtual braids and virtual curve diagrams*, J. Knot Theory Ramifications, **24**:13 (2015), Article ID 1541001. Zbl 1337.57013
- [30] C. Kassel, V. Turaev, *Braid groups*, Grad. Texts in Math., **247**, Springer, New York, 2008. Zbl 1208.20041
- [31] K. Bataineh, M. Elhamdadi, M. Hajij, W. Youmans, *Generating sets of Reidemeister moves of oriented singular links and quandles*, J. Knot Theory Ramifications, **27**:14 (2018), Article ID 1850064. Zbl 1414.57004

- [32] V. Bardakov, I. Emel'yanenkov, M. Ivanov, T. Kozlovskaya, T. Nasybullov, A. Vesnin, *Virtual and universal braid groups, their quotients and representations*. J. Group Theory, **25**:4 (2022), 679–712. Zbl 1497.20042
- [33] C. Carmen, D. Abigayle, P. Rita, S. Erica, *Alexander- and Markov-type theorems for virtual trivalent braids*, preprint arXiv:1804.09919v2, 2018.

TATYANA ANATOLEVNA KOZLOVSKAYA
REGIONAL SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER OF TOMSK STATE
UNIVERSITY,
36 LENIN AVE.,
634050, TOMSK, RUSSIA
Email address: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

PAVEL PETROVICH SOKOLOV
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
PIROGOVA STREET, 1,
630030, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: p.sokolov@g.nsu.ru