S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 864–873 (2025) УДК 519.21
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.054 MSC 60G50

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ С МАЛЫМ СНОСОМ

В.И. Лотов

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: In contrast to the author's previous work [1], we obtain a limit theorem for the distribution of the crossing number of a strip by trajectories of a random walk with small drift without the requirement of the existence of an exponential moment of the jump distribution (Cramér's condition).

Keywords: random walk, crossing number of a strip, limit theorem, factorization method.

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}Y = 0, \qquad \mathbf{E}Y^2 = \sigma^2 < \infty. \tag{1}$$

Для $\varepsilon > 0$ введем новую последовательность

$$X = X(\varepsilon) = Y - \varepsilon, \quad X_k = X_k(\varepsilon) = Y_k - \varepsilon, \quad k \geq 1,$$

Lotov, V.I., Asymptotic distribution of the crossing number of a strip by random walk with small drift.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

Поступила 12 февраля 2025 г., опубликована 25 июля 2025 г.

и пусть

$$S_n = S_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\varepsilon), \qquad n \geq 1, \qquad S_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение случайную величину $N = N(\varepsilon)$, равную числу пересечений снизу вверх полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n(\varepsilon)), n \geq 0\}$, $-a < 0 < b$.

Для этого определим сначала моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ \colon S_n \leq -a\},$$
$$\tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- \colon S_n \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем всегда $\inf \varnothing = \infty$.

Очевидно, $\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$. Для случайных блужданий с ненулевым сносом число пересечений полосы конечно с вероятностью единица, однако при стремлении сноса к нулю число пересечений неограниченно растет.

Цель данной работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины $N(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon \to 0$.

Нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Традиционным способом построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа.

Один из возможных методов асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации, см. [1] и литературу там. Теоремы такого сорта обычно относят к исследованию переходных явлений. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки, см. [2, §24] и библиографические замечания там.

Настоящая работа продолжает исследования [1], где при соответствующей нормировке была установлена сходимость распределения числа пересечений полосы к экспоненциальному. При этом на скачки случайного блуждания накладывалось условие Крамера о существовании экспоненциального момента. Целью настоящей работы является получение аналогичного результата без условия Крамера.

Приведем формулировку основного результата из [1]. Для этого потребуется ввести ряд обозначений.

Обозначим $\psi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda Y}$ и введем в рассмотрение условие (A) крамеровского типа, включающее следующие два пункта.

(A_1) Распределение Y содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(A_2) Для некоторого $\gamma > 0$ выполняется $\psi(\gamma) + \psi(-\gamma) < \infty$.

Положим также

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : \ S_n \geq 0\}, \qquad \eta_- = \min\{n \geq 1 : \ S_n < 0\},$$

и пусть

$$\chi_\pm = S_{\eta_\pm}, \qquad \rho = \rho(\varepsilon) = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2; \ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+; \ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}.$$

Отметим, что введенные величины зависят от ε. Существование момента $\mathbf{E}\chi_-^2$ обеспечивается условием (1) (см. [3, Th. 3.1]). Для того, чтобы $\mathbf{E}(\chi_+^2; \ \eta_+ < \infty) < \infty$, достаточно выполнения условия $\mathbf{E}\,|Y|^3 < \infty$ ([2, Ch. 4, Th. 10]).

Теорема 1. [1] *Пусть для случайной величины Y, введенной в* (1)*, выполнено условие* (A)*. Тогда для каждого $t \geq 0$*

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \geq t\right) = e^{-t(\rho(\varepsilon)+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что функция $F(y) = \mathbf{P}(Y < y)$ непрерывна и имеет абсолютно непрерывную компоненту, носитель которой содержит некоторую окрестность нуля. Пусть $\mathbf{E}Y = 0$ и $\mathbf{E}\,|Y|^{3+\kappa} < \infty$ для некоторого $\kappa > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \geq t\right) = e^{-t(\rho(0)+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

где $\rho(0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \rho(\varepsilon)$.

Для последующего доказательства повторим ряд необходимых сведений, подробно представленных в [1]. Пусть для $|z| \leq 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$r_{z\pm}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm} \exp\{\lambda\chi_\pm\}; \ \eta_\pm < \infty\right). \tag{2}$$

Хорошо известно следующее представление, называемое часто факторизацией Винера — Хопфа:

$$r_{z+}(\lambda)\, r_{z-}(\lambda) = 1 - z\mathbf{E}\, e^{\lambda X}, \quad |z| \leq 1, \quad \mathrm{Re}\lambda = 0.$$

Обозначим далее через Π множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{3}$$

Как и в ряде работ (см. [1] и ссылки там), вводим операторы A и B следующим образом. Для всякой функции $g \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$(Ag)(z,\lambda) = r_{z-}(\lambda)\big[r_{z-}^{-1}(\lambda)g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\big[r_{z+}^{-1}(\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)},$$

где принято обозначение

$$\Bigg[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y)\Bigg]^{D} = \int_{D} e^{\lambda y} dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$.

Основным инструментом для доказательства теоремы 1 в [1] явилось установленное в [4] представление

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+}\exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty\right) = ((BA)^k e)(z,\lambda), \tag{4}$$

в котором $e(\lambda) = e(z,\lambda) \equiv 1$ и степень оператора понимается как суперпозиция. Отсюда сразу следует

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0). \tag{5}$$

Дальнейшие исследования в [1] сводились к анализу асимптотического поведения правой части (5) при $\varepsilon \to 0$, основываясь на уже известных свойствах операторов A и B при выполнении условия Крамера. Формула (5) также будет использоваться в доказательстве теоремы 2.

Приступим к доказательству этой теоремы. Покажем, как утверждение этой теоремы можно получить без условия существования экспоненциального момента для случайной величины Y.

В соответствии с условием теоремы 2 предполагаем теперь, что функция распределения $F(y) = \mathbf{P}(Y < y)$ непрерывна и имеет абсолютно непрерывную компоненту, носитель которой содержит некоторую окрестность нуля. Этим же свойством обладает распределение случайной величины $X = Y - \varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Введем последовательность срезанных случайных величин $Y^{(n)}$, $n \geq 1$, таких, что $Y^{(n)} = Y$, если $Y \in [-L_n, K_n]$, и $Y^{(n)} = 0$ в противном случае. Числа L_n и K_n выбираются такими, что $L_n \to \infty$, $K_n \to \infty$ и

$$\mathbf{E}\, Y^{(n)} = \mathbf{E}\, Y = 0, \quad \mathbf{E}\, Y^2 - \mathbf{E}\,(Y^{(n)})^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 \leq C\varepsilon$$

при некоторой постоянной $C > 0$. Такой выбор срезок возможен в силу непрерывности функции F. Обозначим

$$X^{(n)} = Y^{(n)} - \varepsilon, \qquad F_n(y) = \mathbf{P}(X^{(n)} < y).$$

Ясно, что $F_n(y) \to F(y+\varepsilon)$ при $n \to \infty$. Введем последовательность независимых случайных величин $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots$, одинаково распределенных с $X^{(n)}$, и пусть $S_k^{(n)} = X_1^{(n)} + \cdots + X_k^{(n)}$. Индекс n у операторов A и

B, у величин $\chi_\pm$, ρ, N и σ будет означать, что эти объекты построены по случайному блужданию $\{S_k^{(n)}, k \geq 1\}$. Это блуждание удовлетворяет условиям теоремы 1, в соответствии с которой при каждом n и $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N_n(\varepsilon)}{\sigma_n^2} \geq t\right) = \exp\{-t(\rho_n(\varepsilon) + a + b)\} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Лемма 1. *В условиях теоремы* 2 *оценка* $O(\varepsilon) = O_n(\varepsilon)$ *в* (6) *выполняется равномерно по* n.

Доказательство. Проанализируем более детально вывод оценки $O(\varepsilon)$ в доказательстве теоремы 1 в [1] применительно к случайному блужданию $\{S_k^{(n)}, k \geq 1\}$ при фиксированном n. Компоненты факторизации тоже будут в этом случае зависеть от n, однако, чтобы избежать громоздких обозначений, на протяжении этой леммы мы сохраним для них прежние обозначения $r_{z\pm}(\lambda)$.

Обозначим $\varphi_n(\lambda) := \mathbf{E}\exp\{\lambda X^{(n)}\}$ и пусть числа $\lambda_\pm^{(n)}(z)$ являются вещественными решениями уравнения $1 - z\varphi_n(\lambda) = 0$ для z, близких к единице, $z \leq 1$, $\lambda_-^{(n)}(z) \leq 0 \leq \lambda_+^{(n)}(z)$. Кроме того, $\lambda_-^{(n)}(1) = 0$, $\lambda_+^{(n)}(1) = h_n > 0$ вследствие условия $\mathbf{E}\,X^{(n)} < 0$. В доказательстве теоремы 1 в [1] установлено, что сходимость выражений при $\varepsilon \to 0$ эквивалентна сходимости при $h_n \to 0$ и порядок малости при $h_n \to 0$ совпадает с порядком малости при $\varepsilon \to 0$. В связи с этим в [1] первоначально исследовалась асимптотика при $h_n \to 0$. Будем следовать такому же порядку действий. При этом дополнительно заметим, что в разложении

$$1 = \varphi_n(h_n) = \varphi_n(0) + h_n\varphi_n'(0) + \frac{h_n^2}{2}\varphi_n''(0) + \dots$$

$$= 1 - h_n\varepsilon + \frac{h_n^2}{2}\mathbf{E}\,(X^{(n)})^2 + O(h_n^3), \qquad h_n \to 0,$$

порядок малости $O(h_n^3)$ имеет место равномерно по n вследствие условия

$$\mathbf{E}\,|X^{(n)}|^{3+\kappa} \leq \mathbf{E}\,|X|^{3+\kappa} < \infty.$$

Поэтому равномерно по n

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{E}\,(X^{(n)})^2}{2}\,h_n + O(h_n^2) = \frac{\sigma_n^2}{2}\,h_n + O(h_n^2), \quad h_n \to 0. \tag{7}$$

Это означает, в частности, что при стремлении $\varepsilon \to 0$ величина h_n также стремится к нулю с тем же порядком малости, который один и тот же для всех $n \geq 1$.

Вывод оценки $O(\varepsilon)$ в (6) основывался в [1] на получении равномерных (по h и одновременно по ε) оценок для коэффициентов в главных членах асимптотики при $h \to 0$ величин

$$r_{1+}(0), \qquad r_{1-}(h), \qquad \lim_{z\to 1}\psi_{z+}(0), \qquad \lim_{z\to 1}\psi_{z-}(h), \tag{8}$$

где
$$\psi_{z\pm}(\lambda) = r_{z\pm}^{-1}(\lambda) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_\pm(z)) r'_{z\pm}(\lambda_\pm(z))}.$$
Нам теперь потребуется доказать равномерность этих оценок по n применительно к случайному блужданию $\{S_k^{(n)}, k \geq 1\}$.

Установлено в [1], что при $h_n \to 0$
$$r_{1+}(0) = -h_n r'_{1+}(h_n) + \frac{h_n^2}{2} r''_{1+}(h_n) + O(h_n^3), \tag{9}$$
$$r_{1-}(h_n) = h_n r'_{1-}(0) + \frac{h_n^2}{2} r''_{1-}(0) + O(h_n^3). \tag{10}$$
Эти формулы легко получаются из разложений аналитических функций $r_{z\pm}(\lambda)$ соответственно в точках $\lambda_\pm^{(n)}(z)$, где принято во внимание, что $r_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)) = 0$, $r_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)) = 0$:
$$r_{z+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+^{(n)}(z))\, r'_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_+^{(n)}(z))^2}{2}\, r''_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)) + \ldots,$$
$$r_{z-}(\lambda) = (\lambda - \lambda_-^{(n)}(z)) r'_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_-^{(n)}(z))^2}{2}\, r''_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)) + \ldots.$$
Эти же разложения приводят к формулам
$$\psi_{z+}(\lambda) = -\frac{r''_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z))}{2(r'_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)))^2} +$$
$$+(\lambda - \lambda_+^{(n)}(z))\left(\frac{(r''_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)))^2}{4(r'_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)))^3} - \frac{r'''_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z))}{6(r'_{z+}(\lambda_+^{(n)}(z)))^2}\right) + O((\lambda - \lambda_+^{(n)}(z))^2),$$
$$\psi_{z-}(\lambda) = -\frac{r''_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z))}{2(r'_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)))^2} +$$
$$+(\lambda - \lambda_-^{(n)}(z))\left(\frac{(r''_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)))^2}{4(r'_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)))^3} - \frac{r'''_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z))}{6(r'_{z-}(\lambda_-^{(n)}(z)))^2}\right) + O((\lambda - \lambda_-^{(n)}(z))^2),$$
откуда следует
$$\lim_{z\to 1} \psi_{z+}(0) = -\frac{r''_{1+}(h_n)}{2(r'_{1+}(h_n))^2} - h_n\left(\frac{(r''_{1+}(h_n))^2}{4(r'_{1+}(h_n))^3} - \frac{r'''_{1+}(h_n)}{6(r'_{1+}(h_n))^2}\right) + O(h_n^2), \tag{11}$$
$$\lim_{z\to 1} \psi_{z-}(h_n) = -\frac{r''_{1-}(0)}{2(r'_{1-}(0))^2} + h_n\left(\frac{(r''_{1-}(0))^2}{4(r'_{1-}(0))^3} - \frac{r'''_{1-}(0)}{6(r'_{1-}(0))^2}\right) + O(h_n^2). \tag{12}$$
Коэффициенты разложений (9)–(12) можно выразить через моменты перескоков $\chi_\pm^{(n)}$. Из (2) следует
$$r_{1+}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+^{(n)}\};\ \eta_+^{(n)} < \infty\right), \qquad r_{1-}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_-^{(n)}\}\right).$$

Нас интересуют главные члены разложений, поэтому при $h_n \to 0$ получаем, к примеру,

$$r'_{1+}(h_n) = -\mathbf{E}(\chi_+^{(n)} e^{h_n \chi_+^{(n)}};\ \eta_+^{(n)} < \infty) = -\mathbf{E}(\chi_+^{(n)};\ \eta_+^{(n)} < \infty) + O(h_n),$$

$$r'_{1-}(0) = -\mathbf{E}(\chi_-^{(n)} e^{h_n \chi_-^{(n)}}) = -\mathbf{E}(\chi_-^{(n)}) + O(h_n).$$

Точно так же нетрудно выразить через моменты перескоков главные члены оставшихся величин из (8).

Распределение F_n имеет моменты любого порядка, каждый из них ограничен равномерно по ε. В силу этого обстоятельства и сходимости $F_n(y) \to \mathbf{P}(Y^{(n)} < y)$ при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость компонент факторизации и моментов перескоков $\chi_\pm^{(n)}$ любого порядка к соответствующим компонентам факторизации и моментам перескоков для случайного блуждания с нулевым сносом, у которого скачки распределены одинаково с $Y^{(n)}$. Эти факты следуют из теорем 1 и 2 в [5] и формул (18) и (22) там же.

Таким образом, интересующие нас главные коэффициенты разложений для величин (8) при $h_n \to 0$ (и одновременно при $\varepsilon \to 0$) определяются различными функционалами от первых моментов перескоков $\chi_\pm^{(n)}$, относящихся к случайному блужданию $\{S_k^{(n)}, k \geq 1\}$. Вследствие (7) и указанной сходимости компонент факторизации и моментов перескоков порядок малости остаточных членов в полученных выражениях сохраняется равномерно по n.

Впрочем, можно установить сходимость моментов перескоков и не прибегая к результатам общего характера из [5], а воспользоваться явным видом зависимости компонент факторизации от ε в нашем случае. Действительно, хорошо известны следующие формулы: для $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$r_{z-}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_k^{(n)}\};\ S_k^{(n)} < 0\right)\right\},$$

$$r_{z+}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_k^{(n)}\};\ S_k^{(n)} \geq 0\right)\right\}.$$

Пусть $Y_i^{(n)} = X_i^{(n)} + \varepsilon, \quad T_k^{(n)} = Y_1^{(n)} + \cdots + Y_k^{(n)}$, тогда приведенные выше формулы для компонент факторизации можно переписать в виде

$$r_{z-}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda(T_k^{(n)} - k\varepsilon)\};\ T_k^{(n)} < k\varepsilon\right)\right\},$$

$$r_{z+}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda(T_k^{(n)} - k\varepsilon)\};\ T_k^{(n)} \geq k\varepsilon\right)\right\}.$$

Из этих представлений становится ясным, что при $\varepsilon \to 0$ компоненты факторизации $r_{z\pm}(\lambda)$ и их производные по λ стремятся соответственно к компонентам факторизации и их производным, построенным по случайному блужданию $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$ с нулевым сносом. Моменты перескоков $\chi_\pm^{(n)}$ известным образом находятся с помощью дифференцирования функций $r_{1\pm}(\lambda)$, и они также сходятся при $\varepsilon \to 0$ к соответствующим моментам перескоков для случайного блуждания $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$.

Из сходимости первых двух моментов перескоков, участвующих в определении величины $\rho_n(\varepsilon)$, вытекает сходимость $\rho_n(\varepsilon) \to \rho_n(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Более того, функции $r_{z\pm}(\lambda)$ дифференцируемы по ε. Рассматривая их разложения (а также разложения их производных) по ε в окрестности нуля, нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по n

$$\mathbf{E}\,\chi_-^{(n)}(\varepsilon) = \mathbf{E}\,\chi_-^{(n)}(0) + O(\varepsilon),$$

$$\mathbf{E}\left(\chi_+^{(n)}(\varepsilon);\ \eta_+^{(n)}(\varepsilon) < \infty\right) = \mathbf{E}\,\chi_+^{(n)}(0) + O(\varepsilon),$$

и так же обстоит дело со вторыми моментами. Отсюда простыми вычислениями убеждаемся, что $\rho_n(\varepsilon) = \rho_n(0) + O(\varepsilon)$ равномерно по n.

Таким образом, коэффициенты первых членов разложений (9)–(12) при фиксированном n и $h_n \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) мало отличаются от соответствующих величин, вычисленных по случайному блужданию $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$, и порядок этой малости является равномерным по n.

Далее будем устремлять $n \to \infty$. Наряду с условием $\mathbf{E}\,|Y|^{3+\kappa} < \infty$ при всех $n \geq 1$ выполняется также $\mathbf{E}\,|Y^{(n)}|^{3+\kappa} \leq C < \infty$. Данное моментное ограничение и сходимость $\mathbf{P}(Y^{(n)} < x) \to \mathbf{P}(Y < x)$ при $n \to \infty$ вновь позволяют в силу соотношений (18) и (22) из [5] утверждать сходимость при $n \to \infty$ первых двух моментов для перескоков случайного блуждания $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$ к соответствующим моментам для перескоков случайного блуждания со скачками, одинаково распределенными с Y.

В итоге заключаем, что при малых ε и больших n коэффициенты первых двух членов разложений (9)–(12) мало отличаются от соответствующих величин, вычисленных по случайному блужданию, скачки которого распределены одинаково с Y. Отсюда следует равномерность по n оценки $O_n(\varepsilon)$ в (6) при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана. □

Приведенные выше рассуждения позволяют также переписать (6) в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N_n(\varepsilon)}{\sigma_n^2} \geq t\right) = \exp\{-t(\rho_n(0) + a + b)\} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{13}$$

Продолжаем доказательство теоремы 2. Наряду с (6) имеем в силу (5)

$$\mathbf{P}(N_n(\varepsilon) \geq k) = \lim_{z \to 1}((B_n A_n)^k e)(z, 0).$$

Далее можно воспользоваться следующим утверждением, установленным в [6].

Теорема 3. *Пусть F_n слабо сходится к F при $n \to \infty$ и F непрерывна. Пусть также последовательность функций $g_n \in \Pi$ такова, что*

$g_n(\lambda) \to g(\lambda) \in \Pi$, и в представлении (3) функция G непрерывна на множестве $[b, \infty)$. Тогда при $|z| < 1$ и $\mathrm{Re}\lambda = 0$ выполняется

$$(B_n g_n)(z, \lambda) \to (Bg)(z, \lambda), \qquad n \to \infty.$$

Если функция G непрерывна на множестве $(-\infty, -a]$, то

$$(A_n g_n)(z, \lambda) \to (Ag)(z, \lambda), \qquad n \to \infty.$$

Применение этой теоремы влечет при всех $k \geq 1$ и $z \in (1-\delta, 1)$ соотношение

$$((B_n A_n)^k e)(z, 0) \to ((BA)^k e)(z, 0), \qquad n \to \infty. \tag{14}$$

Действительно, для $g \in \Pi$ функция $(Ag)(z, \lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$, а $(Bg)(z, \lambda)$ в свою очередь аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < 0$, что с запасом обеспечивает условия непрерывности на функцию g в теореме. Поэтому при $n \to \infty$

$$(A_n e)(z, 0) \to (Ae)(z, 0),$$
$$(B_n A_n e)(z, 0) \to (BAe)(z, 0),$$
$$(A_n B_n A_n e)(z, 0) \to (ABAe)(z, 0),$$

и т.д., то есть при любом $k \geq 1$ выполняется (14).

В силу (4) величины $((B_n A_n)^k e)(z, 0)$ и $((BA)^k e)(z, 0)$ являются непрерывными неубывающими функциями переменной $z \in (1-\delta, 1)$, то есть одновременно

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \lim_{z \to 1} ((BA)^k e)(z, 0) = \sup_{z \in (\delta, 1)} ((BA)^k e)(z, 0),$$

$$\mathbf{P}(N_n(\varepsilon) \geq k) = \lim_{z \to 1} ((B_n A_n)^k e)(z, 0) = \sup_{z \in (\delta, 1)} ((B_n A_n)^k e)(z, 0),$$

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \sup_{z \in (\delta, 1)} ((BA)^k e)(z, 0) = \sup_{z \in (\delta, 1)} \lim_{n \to \infty} ((B_n A_n)^k e)(z, 0)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sup_{z \in (\delta, 1)} ((B_n A_n)^k e)(z, 0) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(N_n(\varepsilon) \geq k).$$

Положим

$$t = \frac{2\varepsilon k}{\sigma^2}, \quad t_n = \frac{2\varepsilon k}{\sigma_n^2} = t(1 + O(\varepsilon)).$$

Используя (13) и лемму 1, получаем в итоге при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(N_n(\varepsilon) \geq k) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma_n^2} N_n(\varepsilon) \geq t_n \right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \big(\exp\{-t_n(\rho_n(\varepsilon) + a + b)\} + O_n(\varepsilon) \big)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \big(\exp\{-t(1 + O(\varepsilon))(\rho_n(0) + O(\varepsilon) + a + b)\} + O_n(\varepsilon) \big)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \exp\{-t(\rho_n(0) + a + b)\} + O(\varepsilon) = \exp\{-t(\rho(0) + a + b)\} + O(\varepsilon).$$

Здесь использованы условие $\sigma_n^2 = \sigma^2 + O(\varepsilon)$, установленное выше соотношение $\rho_n(\varepsilon) = \rho_n(0) + O(\varepsilon)$, а также сходимость $\rho_n(0) \to \rho(0)$ при $n \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

References

[1] V.I. Lotov, *Transient phenomena in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2 (2024), 1152–1166.

[2] A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York etc., 1976. Zbl 0319.60057

[3] A. Gut, *Stopped random walks*, Springer, New York etc., 1988. Zbl 0634.60061

[4] V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117–121. Zbl 0716.60086

[5] A.A. Mogul'skii, *Absolute estimates for moments of certain boundary functionals*, Theory Probab. Appl., **18**:2 (1973), 340–347. Zbl 0298.60031

[6] V.I. Lotov, *Properties of factorization operators in boundary crossing problems for random walks*, Izv. Math., **83**:5 (2019), 1050–1065. Zbl 1423.60074

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: lotov@math.nsc.ru