

НОВАЯ КОМПОНЕНТА СХЕМЫ МОДУЛЕЙ
 $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА
ДВА НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{P}^3$

М.А. ЗАВОДЧИКОВ, А.С. ТИХОМИРОВ 

Представлено В.В. Пржиялковским

Abstract: In this paper we study the Gieseker-Maruyama moduli space $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ of semistable coherent sheaves of rank two with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$ on the projective space $\mathbb{P}^3$. To date, only two irreducible components of this space have been known, and their general points are locally free sheaves. In this paper we find and describe a new irreducible component of the space $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$, a general point of which is a sheaf with the singularity at a disjoint union of a pair of lines and a pair of points. We prove that this component has the expected dimension 27 and is generically reduced as a scheme.

Keywords: (semi)stable coherent sheaves, rank two sheaves, moduli space of semistable sheaves.

ZAVODCHIKOV M.A., TIKHOMIROV A.S. A NEW COMPONENT OF THE MODULI SCHEME $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ OF SEMISTABLE SHEAVES RANK TWO ON THE PROJECTIVE SPACE $\mathbb{P}^3$.

© 2024 Заводчиков М.А., Тихомиров А.С..

Работа Заводчикова М.А. выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Поступила 3 июня 2024 г., опубликована 30 августа 2025 г.

1 Введение

Рассмотрим пространство (схему) модулей Гизекера-Маруямы $M = M_{\mathbb{P}^3}(2; c_1, c_2, c_3)$ полустабильных когерентных пучков без кручения ранга два с классами Черна $c_1 \in \{-1, 0\}$, $c_2 \geq 1$, $c_3 \geq 0$, на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над основным полем $k = \bar{k}$ характеристики 0. Геометрия и география этого пространства наиболее хорошо изучена для малых значений второго класса Черна c_2 . В частности, в случае $c_1 = 0$ найдены все компоненты схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, c_2, 0)$ для $0 \leq c_2 \leq 2$ и целый ряд компонент этой схемы для $3 \leq c_2 \leq 5$ – см. [8], [11]. В случае $c_1 = -1$ к настоящему времени получены следующие результаты. Для $c_2 = 2$ Ч. Алмейда, М. Жардим и А. С. Тихомиров в недавней работе [4] и М. А. Заводчиков в работе [15] описали все компоненты схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, c_3)$ для допустимых значений 0, 2 и 4 класса c_3 . В случае $(c_2, c_3) = (3, 9)$ и $(c_2, c_3) = (4, 16)$ Р. Хартсхорн в [9], а затем М.-Ч. Чанг для $(c_2, c_3) \in \{(3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$ в [6] нашли по одной компоненте схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, c_2, c_3)$ и показали, что общая точка каждой из этих компонент является рефлексивным пучком. Кроме того, недавно Б.Шмидт в статье [14] показал, что схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 3, 9)$ и $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 16)$ исчерпываются вышеуказанными компонентами, найденными Хартсхорном. Далее, для $c_2 = 4$ и $c_3 = 0$ К. Баника и Н. Манолахе [5] доказали, что в схеме $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ имеется только две неприводимые компоненты размерности 27 и 28 соответственно, общие точки которых являются локально свободными пучками. Кроме того, в вышеупомянутой работе Алмейды, Жардима и Тихомирова [4] показано, что схема $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ имеет по крайней мере одну неприводимую рациональную компоненту, общая точка которой является пучком с 0-мерными особенностями.

Настоящая статья является естественным продолжением работы [4] в направлении изучения пространств модулей стабильных пучков ранга два с классом $c_1 = -1$, малым классом c_2 , нулевым классом c_3 и особенностями смешанной размерности. В ней получена новая компонента схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$, общая точка $[\mathcal{E}]$ которой является пучком с особенностями смешанной размерности следующего вида: 1-мерные особенности пучка $\mathcal{E}$ – это пара скрещивающихся прямых, а 0-мерные особенности пучка $\mathcal{E}$ рефлексивны, то есть совпадают с особенностями его рефлексивной оболочки $\mathcal{E}^{\vee\vee}$. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Основная теорема.

Схема модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ полустабильных когерентных пучков ранга два без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ имеет неприводимую приведенную в общей точке компоненту $\overline{M}$ ожидаемой размерности 27. Общий пучок $\mathcal{E}$ из этой компоненты стабилен и включается в точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) \rightarrow 0, \quad (1)$$

где l_1 и l_2 – скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – рефлексивный пучок из $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, 2)$, дважды двойственный к пучку $\mathcal{E}$. При этом

$$\text{Sing}(\mathcal{E}) = \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \sqcup l_1 \sqcup l_2, \quad (2)$$

где $\text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee})$ – пара точек, а $\dim(l_1 \sqcup l_2) = 1$, то есть $\mathcal{E}$ имеет особенности смешанной размерности.

Эта теорема является непосредственным следствием теорем 1 и 2, доказываемых ниже в параграфах 2 и 3 соответственно.

2 Семейство $\mathcal{M}$ стабильных пучков из $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ с особенностями смешанной размерности

Рассмотрим схему R модулей стабильных рефлексивных пучков $\mathcal{F}$ ранга два с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$ на пространстве $\mathbb{P}^3$, включающихся в точные тройки вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2} \rightarrow 0, \quad (3)$$

где m_1 и m_2 – произвольная пара непересекающихся прямых. Заметим, что из этой тройки непосредственно следует, что $h^0(\mathcal{F}(1)) = 1$ и

$$H^0(\mathcal{F}(1)) = \mathbf{k}s_{\mathcal{F}}, \quad \text{где} \quad (s_{\mathcal{F}})_0 = m_1 \sqcup m_2. \quad (4)$$

(Здесь и ниже для всякого рефлексивного пучка $\mathcal{A}$ из R и сечения $s_{\mathcal{A}} \in H^0(\mathcal{A}(1))$ через $(s_{\mathcal{A}})_0$ обозначается схема нулей сечения $s_{\mathcal{A}}$. Эта схема определена корректно – см. [9].)

Кроме того, легко видеть, что

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset (s_{\mathcal{F}})_0. \quad (5)$$

Как известно, [6, Lem. 2.4, Thm. 2.5], [9], R – открытое подмножество схемы модулей Гизекера-Маруямы $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 2, 2)$, имеющее размерность 11:

$$\dim R = 11, \quad (6)$$

При этом R является тонким пространством модулей, то есть существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ рефлексивных пучков на $\mathbb{P}^3$ с базой R , рассматриваемое как пучок на $\mathbb{P}^3 \times R$, плоский над R . По определению для произвольной точки $w \in R$ пучок $\mathcal{F}_w := \mathbb{F}|_{\mathbb{P}^3 \times \{w\}}$ является стабильным рефлексивным пучком ранга два с особенностями $\text{Sing}(\mathcal{F}_w)$ в паре точек (возможно, совпавших), то есть с 0-мерным множеством особенностей.

Пусть $G = G(1, 3)$ – грассманиан прямых пространства $\mathbb{P}^3$. Заметим, что в соответствии с теоремой Грауэрта-Мюлиха [10, Part I, Sec. 3] множество

$$G_w = \{l \in G \mid \mathcal{F}_w|_l \cong \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1)\}, \quad w \in R, \quad (7)$$

является открытым плотным подмножеством грассманиана G – см. [10], [6, Lemma 2.4]. Нетрудно видеть, что $\text{Sing}(\mathcal{F}_w) \cap l = \emptyset$ для $w \in R$ и

$l \in G_w$. Рассмотрим множество $\Pi = \{(l_1, l_2) \in \text{Sym}^2 G \mid l_1 \cap l_2 = \emptyset\}$ и подмножество Σ в $R \times \Pi$ вида:

$$\Sigma = \{(w, (l_1, l_2)) \in R \times \Pi \mid l_1, l_2 \in G_w \text{ и } (s_{\mathcal{F}_w})_0 \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset\}. \quad (8)$$

(Напомним, что в этом определении сечение $s_{\mathcal{F}_w}$ есть базисный вектор 1-мерного пространства $H^0(\mathcal{F}_w)$ в соответствии с обозначением (4).) Из [6, Lemma 2.4, formula (3)] непосредственно вытекает, что Σ – плотное открытое подмножество в $R \times \Pi$. Из (6)-(8) следует, что

$$\dim \Sigma = \dim R + \dim \Pi = 19. \quad (9)$$

Кроме того ввиду гладкости и неприводимости R (см. [6]) и Π получаем, что

$$\Sigma \text{ — гладкое многообразие.} \quad (10)$$

Нас будет интересовать множество M данных вида $x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon \rangle)$:

$$\begin{aligned} M &= \{x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon \rangle) \mid (w, (l_1, l_2)) \in \Sigma, \\ &\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon \bmod \text{Aut}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)), \\ &\text{где } \varepsilon : \mathcal{F}_w \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) \text{ — эпиморфизм}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 1.

(i) M является гладким многообразием размерности

$$\dim M = 27, \quad (12)$$

и определен морфизм

$$\varphi : M \rightarrow M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0), \quad x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon_x \rangle) \mapsto [\mathcal{E}_x], \quad (13)$$

где $\mathcal{E}_x := \ker(\varepsilon_x)$ – стабильный пучок.

(ii) Морфизм φ инъективен. Более того, существует открытое плотное подмножество $\mathcal{M}$ замыкания $\overline{\varphi(M)}$ образа многообразия M в схеме $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$, содержащееся в $\varphi(M)$, такое, что для открытого плотного в M подмножества $M_0 := \varphi^{-1}(\mathcal{M})$ морфизм $\varphi_0 := \varphi|_{M_0} : M_0 \rightarrow \mathcal{M}$ является изоморфизмом. Обратный к нему морфизм $\psi = \varphi_0^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow M_0$ дается формулой:

$$\begin{aligned} \psi : [\mathcal{E}] &\mapsto (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon \rangle), \quad \text{где } w = [\mathcal{E}^{\vee\vee}], \quad (l_1, l_2) = \text{Supp}(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}), \\ \text{а } \varepsilon : \mathcal{E}^{\vee\vee} &\rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \text{ — канонический эпиморфизм.} \end{aligned} \quad (14)$$

При этом пучок $\mathcal{E}$ в (14) удовлетворяет (2), и имеет место равенство

$$\dim M_0 = \dim \mathcal{M} = 27. \quad (15)$$

Доказательство. (i) Рассмотрим график инцидентности $\Gamma_\Pi = \{((l_1, l_2), z) \in \Pi \times \mathbb{P}^3 \mid z \in l_1 \sqcup l_2\}$. Вложения $\Sigma \hookrightarrow R \times \Pi$ и $\Gamma_\Pi \hookrightarrow \Pi \times \mathbb{P}^3$ индуцирует вложения $i : \mathbb{P}^3 \times \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times R \times \Pi \simeq \Pi \times \mathbb{P}^3 \times R$ и $j : \Gamma_\Pi \times R \hookrightarrow \Pi \times \mathbb{P}^3 \times R$. Вложения i и j определяют расслоенное произведение

$$\Gamma = (\mathbb{P}^3 \times \Sigma) \times_{\Pi \times \mathbb{P}^3 \times R} (\Gamma_\Pi \times R)$$

с проекцией $p : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \Sigma \xrightarrow{pr_2} \Sigma$, а также $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \Sigma}$ -пучки $\mathbb{F}_\Sigma = i^*(\mathcal{O}_\Pi \boxtimes \mathbb{F})$ и $\mathcal{O}_\Gamma(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_\Sigma|_\Gamma$, плоские над Σ . Для произвольной точки $(w, (l_1, l_2)) \in \Sigma$ ввиду (7) имеем

$$\dim \operatorname{Ext}^k(\mathcal{F}_w, \bigoplus_{j=1}^2 \mathcal{O}_{l_j}(1)) = h^k(\bigoplus_{j=1}^2 (\mathcal{O}_{l_j}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_j}(2))) = \begin{cases} 10, & k = 0, \\ 0, & k \geq 1; \end{cases} \quad (16)$$

более того,

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) \cong \mathbf{k}^{10}, \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}^0(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) &= \{\varepsilon \in \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) \mid \\ \varepsilon : \mathcal{F}_w &\rightarrow \bigoplus_{j=1}^2 \mathcal{O}_{l_j}(1) \text{ — эпиморфизм}\} \text{ — плотное открытое} \end{aligned} \quad (18)$$

подмножество в $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1))$.

Теорема о замене базы [12, Thm. 1.4], примененная к плоскому морфизму $\mathbb{P}^3 \times \Sigma \xrightarrow{pr_2} \Sigma$ и плоским над Σ пучкам $\mathbb{F}_\Sigma$ и $\mathcal{O}_\Gamma(1)$, и равенства (16) показывают, что пучки $\mathcal{E}xt_{pr_2}^i(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1))$, $i \geq 1$, зануляются, а пучок

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}xt_{pr_2}^0(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1))$$

является локально свободным $\mathcal{O}_\Sigma$ -пучком ранга 10. (Здесь и ниже для проективного морфизма $\mathbb{P}^3 \times \Sigma \xrightarrow{pr_2} \Sigma$ пучки $\mathcal{E}xt_{pr_2}^i(\mathbb{F}_\Sigma, -)$ суть i -ые правые производные функторы от точного слева функтора $pr_{2*}\mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, -) : \operatorname{Coh}(\mathbb{P}^3 \times \Sigma) \rightarrow \operatorname{Coh}(\Sigma)$, где $\operatorname{Coh}(\mathbb{P}^3 \times \Sigma)$ и $\operatorname{Coh}(\Sigma)$ — категории когерентных пучков на $\mathbb{P}^3 \times \Sigma$ и Σ соответственно.)

Пусть $\tilde{Y} = \mathbf{V}(\mathcal{A}^\vee) \xrightarrow{\tilde{\pi}} \Sigma$ — векторное расслоение над Σ , ассоциированное с пучком $\mathcal{A}$. Отсюда ввиду неприводимости Σ следует неприводимость $\tilde{Y}$. Схема $\tilde{Y}$ и проекция $\tilde{\pi}$ с учетом (16), (17) и вышеупомянутой теоремы о замене базы имеют следующее поточечное описание:

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \{y = (w, (l_1, l_2), \varepsilon_y) \mid (w, (l_1, l_2)) \in \Sigma, \\ \varepsilon_y &\in \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1))\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \tilde{Y} &\rightarrow \Sigma, \quad (w, (l_1, l_2), \varepsilon) \mapsto (w, (l_1, l_2), \\ \tilde{\pi}^{-1}(w, (l_1, l_2)) &= \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)). \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть $\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \xrightarrow{j} \tilde{\pi}^* \mathcal{A}$ — канонический мономорфизм, $p_2 : \mathbb{P}^3 \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ — проекция на сомножитель, а $\pi = \operatorname{id} \times \tilde{\pi} : \mathbb{P}^3 \times \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \Sigma$ — индуцированная проекция. Используя (9), находим

$$\dim \tilde{Y} = \dim \Sigma + 10 = 29. \quad (21)$$

На $\mathbb{P}^3 \times \Sigma$ имеем композицию морфизмов

$$\begin{aligned} ev_{\mathcal{A}} : pr_2^* \mathcal{A} &= pr_2^* \mathcal{E}xt_{pr_2}^0(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) = \\ &= pr_2^* pr_{2*} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)) \xrightarrow{ev_{\mathbb{F}}} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_\Gamma(1)), \end{aligned}$$

где $ev_{\mathbb{F}}$ – морфизм вычисления. Она определяет морфизм $ev : pr_2^* \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_{\Sigma} \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma}(1)$ как композицию

$$ev : pr_2^* \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_{\Sigma} \xrightarrow{ev_{\mathcal{A}} \otimes \text{id}} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_{\Sigma}, \mathcal{O}_{\Gamma}(1)) \otimes \mathbb{F}_{\Sigma} \xrightarrow{ev_{\Sigma}} \mathcal{O}_{\Gamma}(1),$$

где ev_{Σ} – морфизм вычисления. На $\mathbb{P}^3 \times \tilde{Y}$ рассмотрим подсхему $\Gamma_{\tilde{Y}} = \Gamma \times_{\Sigma} \tilde{Y}$, пучки $\mathbb{F}_{\tilde{Y}} = \pi^* \mathbb{F}_{\Sigma}$, $\mathcal{O}_{\Gamma_{\tilde{Y}}}(1) = \pi^* \mathcal{O}_{\Gamma}(1)$ и морфизм

$$\tilde{\varepsilon} : \mathbb{F}_{\tilde{Y}} \xrightarrow{p_2^* j \otimes \text{id}} \pi^*(pr_2^* \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_{\Sigma}) \xrightarrow{\pi^* ev} \mathcal{O}_{\Gamma_{\tilde{Y}}}(1). \quad (22)$$

Рассмотрим в $\tilde{Y}$ подмножество

$$Y = \{y = (w, (l_1, l_2), \varepsilon_y) \in \tilde{Y} \mid \varepsilon_y : \mathcal{F}_w \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) - \text{эпиморфизм}\}. \quad (23)$$

В силу (18) имеем:

$$\begin{aligned} \pi &= \tilde{\pi}|_Y : Y \rightarrow \Sigma \quad - \text{расслоение со слоем} \\ \pi^{-1}(w, (l_1, l_2)) &= \text{Hom}^0(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)), \end{aligned} \quad (24)$$

а значит, ввиду неприводимости $\tilde{Y}$ подмножество Y – плотное открытое в $\tilde{Y}$. Из (21) получаем:

$$\dim Y = 29. \quad (25)$$

Положим $\Gamma_Y = \Gamma_{\tilde{Y}} \times_{\tilde{Y}} Y$, $\mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1) = \mathcal{O}_{\Gamma_{\tilde{Y}}}(1)|_{\Gamma_Y}$, $\mathbb{F}_Y = \mathbb{F}_{\tilde{Y}}|_{\mathbb{P}^3 \times Y}$. По построению на $\mathbb{P}^3 \times Y$ имеем эпиморфизм

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}|_{\mathbb{P}^3 \times Y} : \mathbb{F}_Y \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1). \quad (26)$$

Рассмотрим Quot-схему $\mathcal{Q} := \text{Quot}_{\mathbb{P}^3 \times \Sigma / \Sigma}(\mathbb{F}_{\Sigma}, P) \xrightarrow{q} \Sigma$, где $P = P(m) = 2(m+1)$ – многочлен Гильберта приведенной схемы $l_1 \sqcup l_2$ относительно обильного пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Пусть $[\varepsilon_{\mathcal{Q}} : \mathbb{F}_{\mathcal{Q}} := q^* \mathbb{F}_{\Sigma} \twoheadrightarrow \mathcal{L}]$ – класс универсального фактора на $\mathbb{P}^3 \times \mathcal{Q}$. В силу (26) по универсальности Quot-схемы $\mathcal{Q}$ существует морфизм

$$f : Y \rightarrow \mathcal{Q} \quad (27)$$

и изоморфизмы $\mathbb{F}_Y \cong (\text{id} \times f)^* \mathbb{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1) \cong (\text{id} \times f)^* \mathcal{L}$ такие, что $\varepsilon = (\text{id} \times f)^* \varepsilon_{\mathcal{Q}}$:

$$(\mathbb{F}_Y \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(1)) = (\text{id} \times f)^*(\mathbb{F}_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{Q}}} \mathcal{L}). \quad (28)$$

Пусть $\mathcal{Q}_Y$ – неприводимая компонента схемы $\mathcal{Q}$, содержащая $f(Y)$, и пусть

$$h : \mathcal{Q}_Y \rightarrow \Sigma \quad (29)$$

– естественная проекция. Из (23) и (24) следует, что для произвольной точки $y = (w, (l_1, l_2), \varepsilon) \in Y$ по определению Quot-схемы $\mathcal{Q}$ слой $f^{-1}(f(y))$ есть

$$f^{-1}(f(y)) \cong \text{Aut}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) \cong \mathbf{k}^* \oplus \mathbf{k}^*, \quad (30)$$

а слой проекции h через точку $f(y)$ есть:

$$\begin{aligned} h^{-1}(f(y)) &= h^{-1}(f(w, (l_1, l_2), \varepsilon)) = \\ &= \text{Hom}^0(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) / \text{Aut}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) = \\ &= f(\text{Hom}^0(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1))) = f(\pi^{-1}(w, (l_1, l_2))). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда и из (11) следует, что $f(Y) = Q_Y$ и что Q_Y поточечно совпадает с множеством M . Поэтому, определяя на M схемную структуру равенством

$$M = Q_Y,$$

из (27) и (29)-(31) получаем сюръективные морфизмы

$$f : Y \rightarrow M \quad (32)$$

и

$$h : M \rightarrow \Sigma. \quad (33)$$

Поскольку согласно (31) слой $h^{-1}(x)$ над произвольной точкой $x = (w, (l_1, l_2)) \in \Sigma$ есть гладкое многообразие $\text{Hom}^0(\mathcal{F}_w, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) / \text{Aut}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1))$ размерности 8, не зависящей от x , то есть h - гладкий морфизм с неприводимыми слоями, то отсюда и из (10) следует, что M - гладкое многообразие. Отсюда и из (9) и (33) непосредственно вытекает равенство (12).

Вложение $i : M = Q_Y \hookrightarrow Q$ и морфизм $h : M \rightarrow \Sigma$ определяют на $\mathbb{P}^3 \times M$ подсхему $\Gamma_M = \Gamma \times_{\Sigma} M$ такую, что $\Gamma_Y = \Gamma_M \times_M Y$, и плоские над M пучки $\mathbb{F}_M = (\text{id} \times i)^* \mathbb{F}_Q$ и $\mathcal{O}_{\Gamma_M}(1) = (\text{id} \times i)^* \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\Gamma}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\Sigma}} \mathcal{O}_M$. При этом универсальный фактор $\varepsilon_Q : \mathbb{F}_Q \rightarrow \mathcal{L}$ на $\mathbb{P}^3 \times Q$ индуцирует фактор-морфизм

$$\varepsilon_M = (\text{id} \times i)^* \varepsilon_Q : \mathbb{F}_M \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_M}(1). \quad (34)$$

Обозначим

$$\mathbb{E}_M = \ker(\varepsilon_M), \quad \mathcal{E}_x = \mathbb{E}_M|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_M|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}}, \quad x \in M, \quad (35)$$

так что точна тройка $0 \rightarrow \mathbb{E}_M \rightarrow \mathbb{F}_M \xrightarrow{\varepsilon_M} \mathcal{O}_{\Gamma_M}(1) \rightarrow 0$. Так как пучки $\mathbb{F}_M$ и $\mathcal{O}_{\Gamma_M}(1)$ - плоские над M , то пучок $\mathbb{E}_M$ в (35) - также плоский над M .

Ограничивая эту тройку на $\mathbb{P}^3 \times \{x\}$, где $x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon_x \rangle) \in M$ - произвольная точка, и учитывая, что пучки $\mathbb{E}_M$, $\mathbb{F}_M$, $\mathcal{O}_{\Gamma_M}(1)$ - плоские над M , а также что по построению $\mathcal{O}_{\Gamma_M}(1)|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}} = \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)$, получаем на $\mathbb{P}^3 \times \{x\} \simeq \mathbb{P}^3$ точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_x \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{F}_w \xrightarrow{\varepsilon_x} \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) \rightarrow 0, \quad x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon_x \rangle) \in M, \quad (36)$$

и равенство

$$\mathcal{E}_x = \ker(\varepsilon_x). \quad (37)$$

Легко видеть, что пучок $\mathcal{E}_x$ стабилен по Гизекеру. Действительно, поскольку $[\mathcal{F}_w] \in R$, то по определению схемы R пучок $\mathcal{F}_w$ - стабильный по Гизекеру рефлексивный пучок с классами Черна

$$c_1(\mathcal{F}_w) = -1, \quad c_2(\mathcal{F}_w) = c_3(\mathcal{F}_w) = 2, \quad (38)$$

Стабильность пучка $\mathcal{F}$ означает, он не содержит подпучков $\mathcal{F}'$ ранга 1 с $c_1(\mathcal{F}') \geq 0$. Тем самым, ввиду тройки (36) пучок $\mathcal{E}_x$ также имеет $c_1(\mathcal{E}_x) = -1$, а значит, не содержит подпучков $\mathcal{E}'$ ранга 1 с $c_1(\mathcal{E}') \geq 0$, и потому стабилен по Гизекеру. При этом из (36) и (38) получаем, что $c_1(\mathcal{E}_x) = -1$, $c_2(\mathcal{E}_x) = 4$, $c_3(\mathcal{E}_x) = 0$, так что $[\mathcal{E}_x] \in M(2; -1, 4, 0)$. Поэтому плоский над M пучок $\mathbb{E}_M$ и среднее равенство в (35) определяют морфизм

$$\varphi : M \rightarrow M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0), \quad x \mapsto [\mathbb{E}_M|_{\mathbb{P}^3 \times \{x\}}] = [\mathcal{E}_x],$$

который ввиду (37) совпадает с (13).

(ii) Покажем, что тройка (36) влечет изоморфизм

$$\mathcal{F}_w \cong \mathcal{E}_x^{\vee\vee}. \quad (39)$$

Действительно, поскольку $\text{codim}_{\mathbb{P}^3}(l_1 \cup l_2) = 2$, то $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = 0$, $i = 0, 1$, (см., например, [10, Prop. 1.1.6]). Поэтому применяя к тройке (36) функтор $\mathcal{E}xt^i(-, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, получаем изоморфизм $\text{can}^\vee : \mathcal{F}_w^\vee \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_x^\vee$ и, как следствие, двойственный изоморфизм $\text{can}^{\vee\vee} : \mathcal{E}_x^{\vee\vee} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_w^{\vee\vee}$. С другой стороны, рефлексивность пучка $\mathcal{F}_w$ означает канонический изоморфизм $c_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_w \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_w^{\vee\vee}$. Искомый изоморфизм (39) есть композиция $(\text{can}^{\vee\vee})^{-1} \circ c_{\mathcal{F}}$.

Докажем теперь инъективность морфизма φ . Она означает, что для произвольной точки $x = (w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon_x \rangle) \in M$ и точки $[\mathcal{E}_x] = \varphi(x)$ верно равенство $\varphi^{-1}([\mathcal{E}_x]) = \{x\}$, то есть данные $(w, (l_1, l_2), \langle \varepsilon_x \rangle)$, составляющие точку x , определяются классом изоморфизма $[\mathcal{E}]$ пучка $\mathcal{E} := \mathcal{E}_x$ однозначно. Действительно, точка $w = [\mathcal{F}_w] \in R$ определяется согласно (39) как $[\mathcal{F}_w] = [\mathcal{E}^{\vee\vee}]$. Пара прямых (l_1, l_2) , или, что то же, их дизъюнктное объединение $l_1 \sqcup l_2$ определяется согласно тройке (36) как носитель пучка $\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1) = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ является подпучком пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ посредством канонического мономорфизма $\mathcal{E}_x \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}^{\vee\vee}$. Наконец, $\langle \varepsilon_x \rangle$ определяется по классу изоморфизма $[\mathcal{E}]$ однозначно как класс эпиморфизма $\varepsilon_x : \mathcal{F}_w = \mathcal{E}^{\vee\vee} \twoheadrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}^{\vee\vee} \twoheadrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$ – канонический эпиморфизм. Это доказывает инъективность φ и формулу (14).

Для нахождения множества $\mathcal{M}$ с требуемыми свойствами заметим, что образ $\varphi(M)$ как конструктивное множество содержит некоторое плотное в $\overline{\varphi(M)}$ открытое подмножество $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см., например, [2, Proposition 2.31]). Как образ при морфизме φ плотного открытого в M множества $\varphi^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$, являющегося гладким многообразием (поскольку M – гладкое многообразие) $\widetilde{\mathcal{M}}$ также является многообразием, то есть приведенной неприводимой схемой. Поэтому $\widetilde{\mathcal{M}}$ содержит гладкое плотное подмножество $\mathcal{M}$, и для $M_0 = \varphi^{-1}(\mathcal{M})$ морфизм $\varphi_0 = \varphi|_{M_0} : M_0 \rightarrow \mathcal{M}$ ввиду инъективности φ есть биективный морфизм гладких многообразий, а значит, изоморфизм – см., например, [3, Ch.2, §4, Th 2.16].

Равенство (2) в силу тройки (36) вытекает из (5) и условия $(s_{\mathcal{E}^{\vee\vee}})_0 \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset$ в (8), накладываемого на точку $w \in \Sigma$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Имеют место равенства $\dim \overline{\mathcal{M}} = \dim \mathcal{M} = 27$, где $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\varphi(\mathcal{M})}$ – замыкание $\mathcal{M}$ в схеме модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$. Тем самым, ввиду стабильности пучков $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$ верно неравенство*

$$\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \dim T_{[\mathcal{E}]} M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0) \geq \dim_{[\mathcal{E}]} \mathcal{M} \geq 27, \quad (40)$$

$[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}.$

3 Вычисление касательного пространства $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ к схеме модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ в точках $[\mathcal{E}]$ семейства $\mathcal{M}$

В этом параграфе мы доказываем теорему 2 о том, что семейство пучков $\mathcal{M}$, построенное выше, является гладким открытым подмножеством неприводимой компоненты схемы модулей Гизекера-Маруямы $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$.

Теорема 2.

Для произвольного пучка $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \leq 27$. Как следствие, семейство пучков $\mathcal{M}$, построенное выше, есть гладкое плотное открытое подмножество неприводимой компоненты $\overline{\mathcal{M}}$ схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$. Эта компонента $\mathcal{M}$ имеет ожидаемую размерность 27.

Доказательство этой теоремы предварим вспомогательными леммами 1-3.

Рассмотрим точную тройку (36), в которой обозначено $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x$ и использован изоморфизм $\mathcal{F}_w = \mathcal{E}^{\vee\vee}$ из (39):

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow L \rightarrow 0, \quad L := \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1). \quad (41)$$

Стабильные по Гизекеру пучки $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ не имеют кручения, а L является $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -пучком кручения, поэтому

$$\text{Hom}(L, \mathcal{E}) = 0 = \text{Hom}(L, \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (42)$$

Применяя к тройке (41) функтор $\text{Hom}(-, \mathcal{E})$ и учитывая первое равенство (42), получим точную последовательность

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(L, \mathcal{E}) \rightarrow \\ \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}xt^2(L, \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (43)$$

Для доказательства теоремы 2 нам необходимо найти размерности различных групп, входящих в последовательность (43). Мы получим эти результаты в нижеследующих леммах 1-3.

Лемма 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbf{k}, \quad (44)$$

$$\text{Hom}(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) = 0, \quad (45)$$

$$\mathcal{E}xt^1(L, \mathcal{E}) = \mathbf{k}^2. \quad (46)$$

Доказательство. Пучок $\mathcal{E}$ стабилен согласно утверждению (i) теоремы 1 и, значит, является простым [10, Cor. 1.2.8], то есть получаем равенство (44).

Докажем равенство (45). Действительно, пучок $[\mathcal{E}^{\vee\vee}] \in R$ – стабильный, а значит, простой, то есть любой ненулевой эндоморфизм пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – изоморфизм. Поэтому любой ненулевой морфизм $\tau : \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{E}$ ввиду инъективности морфизма $\mathcal{E} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}^{\vee\vee}$ дает ненулевую композицию $\mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\text{can} \circ \tau} \mathcal{E}^{\vee\vee}$, которая тем самым является изоморфизмом. Как следствие, can – также изоморфизм, вопреки тройке (41). Таким образом, имеем равенство (45).

Далее, к точной тройке (41) применим функтор $\text{Hom}(L, -)$; с учетом второго равенства (42) получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, L) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(L, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(L, \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (47)$$

Так как прямые l_1 и l_2 не пересекаются, то

$$\begin{aligned} \text{Hom}(L, L) &= \text{Hom}(\mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) = \\ &= \text{Hom}(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}(1)) \oplus \text{Hom}(\mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{O}_{l_2}(1)) \cong \mathbf{k}^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Найдем $\mathcal{E}xt^1(L, \mathcal{E}^{\vee\vee})$. Для этого рассмотрим точные тройки

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{I}_{l_i}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{l_i}(1) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{I}_{l_i}(1) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (49)$$

Применим к ним функтор $\text{Hom}(-, \mathcal{E}^{\vee\vee})$, получим точные последовательности

$$\text{Hom}(\mathcal{I}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (50)$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{I}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2}, \mathcal{E}^{\vee\vee}) = H^0(\mathcal{E}^{\vee\vee})^{\oplus 2}. \quad (51)$$

Так как пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ стабилен, то $H^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$, поэтому (51) влечет

$$\text{Hom}(\mathcal{I}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0. \quad (52)$$

С другой стороны, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = H^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}(-1)) = 0$ (см. [6, Tab. 2.6.1]). Отсюда и из (50) и (52) следует, что $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{l_i}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$, и поэтому

$$\mathcal{E}xt^1(L, \mathcal{E}^{\vee\vee}) = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) \oplus \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0. \quad (53)$$

Из (47) и равенств (48) и (53) вытекает (46). $\square$

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) \leq 20. \quad (54)$$

Доказательство. Рассмотрим точную тройку (3), в которой в качестве $\mathcal{F}$ возьмем пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ из тройки (41):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2} \rightarrow 0 \quad (55)$$

Напомним, что по определению M (см. (11)) имеем $(m_1 \sqcup m_2) \cap (l_1 \sqcup l_2) = \emptyset$, откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_{m_i}, L) &= \mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_{m_i}, \mathcal{O}_{l_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(1)) = 0, \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ \mathcal{E}xt^j(L, \mathcal{O}_{m_i}(-4)) &= 0, \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (56)$$

Кроме того, согласно [6, Tab. 2.6.1] верны равенства

$$h^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1)) = 1, \quad h^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1)) = 0. \quad (57)$$

Применяя к (55) функтор $\text{Hom}(-, \mathcal{E})$ и учитывая второе равенство (42), получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}, \mathcal{E}) \rightarrow \\ \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (58)$$

Заметим, что тройка (41), подкрученная на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{l_1}(2) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(2) \rightarrow 0,$$

с учетом изоморфизмов $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) \cong H^0(\mathcal{E}(1)) = 0$, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) \cong H^1(\mathcal{E}(1))$ и равенств (57) дает неравенство

$$5 \leq \dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) = \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{E}) + 5 \leq 6. \quad (59)$$

Покажем, что

$$\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}, \mathcal{E}) = 15. \quad (60)$$

Для этого применим функтор $\text{Hom}(-, \mathcal{E})$ к точной тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2} \rightarrow 0, \quad (61)$$

получим точную последовательность

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}, \mathcal{E}) \rightarrow \\ \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (62)$$

Согласно [6, Tab. 2.6.1] имеем $h^i(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$, $i \neq 1$, $h^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 1$. Кроме того, $h^0(L) = 4$, $h^{\geq 1}(L) = 0$. Поэтому, переходя к когомологиям тройки (41), находим: $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}) = h^1(\mathcal{E}) = 5$, $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{E}) = h^1(\mathcal{E}) = 0$. Подставляя эти равенства в (62), выводим, что для получения равенства (60) достаточно проверить равенства

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) = 0, \quad (63)$$

$$\dim \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) = 10. \quad (64)$$

Проверим равенство (63). Рассмотрим точную последовательность, вытекающую из спектральной последовательности локальных и глобальных Ext-ов $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) \implies \mathcal{E}xt^\bullet(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\text{Hom}(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \rightarrow \\ H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) &\rightarrow H^2(\text{Hom}(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})) \end{aligned} \quad (65)$$

Так как стабильный пучок $\mathcal{E}$ не имеет кручения, а $\mathcal{O}_{m_1}$ – пучок кручения, то $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = 0$, и из (65) вытекает изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \cong H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})). \quad (66)$$

Далее, применяя к тройке (41) функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, -)$ и учитывая (56), получаем изоморфизм пучков

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee}). \quad (67)$$

Заметим, что, согласно [10, Prop. 1.1.6.i)],

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = 0. \quad (68)$$

Применяя к точным тройкам (55) и (61) функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, -)$ и пользуясь (68) и изоморфизмом $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}) \cong \mathcal{O}_{m_1}$, получаем мономорфизм

$$0 \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}) \quad (69)$$

и изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{I}_{m_1 \sqcup m_2}) \cong \mathcal{O}_{m_1} \quad (70)$$

соответственно. С другой стороны, поскольку $\text{Supp}(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee})) \subset \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee})$, то $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}^{\vee\vee}) \leq \dim \text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 0$. Отсюда и из (70) вытекает, что морфизм β в (69) – нулевой и $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = 0$. Поэтому $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = 0$ в силу (66). По той же причине $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) = 0$ и, значит, верно равенство (63).

Перейдем к проверке равенства (64). Для этого вычислим $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E})$. По двойственности Серра-Гротендика имеем

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))^\vee. \quad (71)$$

Рассмотрим точную последовательность, вытекающую из спектральной последовательности локальных и глобальных Ext-ов для пары пучков

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))) &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow \\ H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))) &\rightarrow H^2(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))). \end{aligned} \quad (72)$$

Применяя к тройке (41) функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{m_1}(-4))$ и учитывая последние равенства (56), получаем равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &= \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)), \\ \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &= \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)). \end{aligned} \quad (73)$$

Рассмотрим цепочку изоморфизмов

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1}) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \cong \det N_{m_1/\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}_{m_1}(2), \quad (74)$$

в которой $N_{m_1/\mathbb{P}^3}$ – нормальное расслоение к прямой m_1 в $\mathbb{P}^3$, изоморфное $\mathcal{O}_{m_1}(1)^{\oplus 2}$, средний изоморфизм доказан в [13, р. 50]), а левый изоморфизм легко проверяется (например, достаточно воспользоваться Corollary 2.2a из работы [1]). Кроме того, имеем соотношения $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{O}_{m_1}(-3)$, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathcal{O}_{m_1}(-4)) = 0$,

$\mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) = 0$, $j \geq 1$ (см. [7, Ch. III, Prop. 6.3.(b)]), $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))$, $i \geq 0$, $\mathcal{I}_{m_1}|_{m_1} \cong \mathcal{O}_{m_1}(-1)^{\oplus 2}$. Применяя функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{m_1}(-4))$ к (55), (61) и точной тройке $0 \rightarrow \mathcal{I}_{m_1 \cup m_2} \rightarrow \mathcal{I}_{m_1} \rightarrow \mathcal{O}_{m_2} \rightarrow 0$ и используя (74) и вышеуказанные соотношения, получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{m_1}(-3) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (75)$$

и изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1} \oplus \mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \\ \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{O}_{m_1}(-2), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m_1 \cup m_2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m_1}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \\ \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{m_1}(-1)^{\oplus 2}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{O}_{m_1}(-3)^{\oplus 2} \end{aligned} \quad (77)$$

соответственно. Подставляя (76) и (77) в (75), получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{m_1}(-3)^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{m_1}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{m_1}(-2) \\ &\rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Поскольку пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}|_{m_1}$ – локально свободный пучок ранга 2 вне 0-мерного множества $\text{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \cap m_1$, то пучок $\mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) - \mathcal{O}_{m_1}$ -пучок ранга 2. Тем самым, $\text{Im}(\psi)$ является $\mathcal{O}_{m_1}$ -пучком кручения. Следовательно, как подпучок пучка $\mathcal{O}_{m_1}(-3)$ он является нулевым пучком. Поэтому из (78) и (73) вытекают изоморфизмы

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{O}_{m_1}(-3)^{\oplus 2}, \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) &\cong \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{m_1}(-4)) \cong \mathcal{O}_{m_1}(-2)/\mathcal{O}_{m_1}(-3) \cong \mathbf{k}_x, \\ x \in m_1. \end{aligned} \quad (80)$$

Подставляя (79) и (80) в (72) получаем $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_1}, \mathcal{E}) \stackrel{SD}{\cong} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{m_1}(-4))^{\vee} \cong \mathbf{k}^5$, где SD – двойственность Серра-Гротендика. Аналогично $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{m_2}, \mathcal{E}) \cong \mathbf{k}^5$. Как следствие последних изоморфизмов получаем равенство (64), а тем самым, и равенство (60). Подставляя теперь (59) и (60) в (58), получаем неравенство (54). Лемма 2 доказана. $\square$

Лемма 3. Верно равенство

$$\dim \mathcal{E}xt^2(L, \mathcal{E}) = 8. \quad (81)$$

Доказательство. Напомним, что поскольку $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$, то из определения $\mathcal{M}$ (см. (7)-(11) и теорему 1.(ii)) следует, что пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ локально свободен вдоль l_1 , причем

$$\mathcal{E}^{\vee\vee}|_{l_1} \cong \mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-1), \quad (82)$$

и, кроме того,

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) = \mathcal{E}xt^2(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) = 0, \quad (83)$$

а также $\mathcal{T}or_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}, \mathcal{O}_{l_1}) = 0$. Поэтому ограничивая точную тройку (41) на l_1 , получаем точные тройки

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \ker(r) \rightarrow \mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-1) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_{l_1}(1) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}) \rightarrow \mathcal{E}|_{l_1} \rightarrow \ker(r) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Верхняя тройка (84) влечет изоморфизм $\ker(r) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-2)$. Подставляя его в нижнюю тройку (84) и используя соотношение $\mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}) \cong N_{l_1/\mathbb{P}^3}^{\vee}(1) \cong \mathcal{O}_{l_1}^{\oplus 2}$, где $N_{l_1/\mathbb{P}^3}^{\vee}$ - конормальное расслоение к l_1 в $\mathbb{P}^3$, изоморфное $\mathcal{O}_{l_1}(-1)^{\oplus 2}$, получаем $\mathcal{E}|_{l_1} = \mathcal{O}_{l_1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-2)$. Отсюда находим $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}|_{l_1}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-3)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{l_1}(-1)$ и, тем самым,

$$h^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))) = 4. \quad (85)$$

Далее, по аналогии с (74) имеем $\mathcal{E}xt^2(L, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-2)$. Отсюда и из точной последовательности, полученной применением к тройке (41) функтора $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{l_1}(-3))$, вытекает изоморфизм $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{E}xt^2(L, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \cong \mathcal{O}_{l_1}(-2)$. Тем самым, $h^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))) = 0$. Подставляя это равенство вместе с (85) в точную последовательность $0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3)))$, аналогичную (72), получаем изоморфизм $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{l_1}(1), \mathcal{E}) \xrightarrow{SD} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{l_1}(-3))^{\vee} \cong \mathbf{k}^4$. Аналогично, $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{l_2}(1), \mathcal{E}) \cong \mathbf{k}^4$, откуда вытекает (81). Лемма 3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Подставляя в (43) полученные в леммах 1-3 соотношения (44), (45), (46), (54) и (81), получаем требуемое неравенство $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \leq 27$ для $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$. Сравнивая это неравенство с (40), получаем равенство $\dim T_{[\mathcal{E}]\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0) = \dim T_{[\mathcal{E}]\mathcal{M}} = 27$. Тем самым, ввиду неприводимости $\mathcal{M}$ замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ схемы $\mathcal{M}$ в схеме модулей $\mathbb{M}_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$ является неприводимой компонентой размерности 27 схемы $\mathbb{M}_{\mathbb{P}^3}(2; -1, 4, 0)$, а $\mathcal{M}$ - гладким плотным открытым подмножеством в $\overline{\mathcal{M}}$. При этом размерность 27 является ожидаемой (по теории деформации), то есть совпадает с виртуальной размерностью $\text{vdim} \mathcal{M}$, вычисляемой для $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$ по формуле Римана-Роха $\text{vdim} \mathcal{M} = 1 - \chi(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, где $\chi(E, E) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \dim \mathcal{E}xt^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Действительно, поскольку $c_1(\mathcal{E}) = -1$, $c_2(\mathcal{E}) = 4$, то, как известно [8], [9], [11], $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 6 - 8c_2(\mathcal{E}) = -26$, откуда $\text{vdim} \mathcal{M} = 1 - (-26) = 27$. $\square$

References

- [1] I.V. Artamkin, *Deforming torsion-free sheaves on an algebraic surface*, Math. USSR, Izv., **36**:3 (1991), 449–485. Zbl 0723.14011

- [2] D. Mumford, *Algebraic geometry I. Complex projective varieties*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976. Zbl 0356.14002
- [3] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry, v. 1: Varieties in projective space*, 3rd ed., Springer, Heidelberg, 2013. Zbl 1273.14004
- [4] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov. Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on the projective space, *Adv. Math.*, **402** (2022), Article ID 108363. Zbl 1522.14020
- [5] C. Bănică, N. Manolache. *Rank 2 stable vector bundles on $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 4$* , *Math. Z.*, **190** (1985), 315–339. Zbl 0566.14010
- [6] M.-C. Chang. *Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications*, *Trans. Am. Math. Soc.*, **284**:1 (1984), 57–89. Zbl 0558.14015
- [7] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, Berlin, 1977. Zbl 0367.14001
- [8] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$* , *Math. Ann.* **238** (1978), 229–280. Zbl 0411.14002
- [9] R. Hartshorne, *Stable reflexive sheaves*, *Math. Ann.* **254** (1980), 121–176. Zbl 0431.14004
- [10] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves. 2nd ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Zbl 1206.14027
- [11] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, *Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$* , *Ann. Mat. Pura Appl.*, **196**:4 (2017), 1573–1608. Zbl 1481.14020
- [12] H. Lange, *Universal families of extensions*, *J. Algebra*, **83**:1 (1983), 101–112.
- [13] Ch. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Birkhäuser, Boston - Basel - Stuttgart, 1980. Zbl 0438.32016
- [14] B. Schmidt, *Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space*, *Mat. Contemp.*, **47** (2020), 228–270. Zbl 1549.14024
- [15] M. A. Zavodchikov, *Components of the Moduli Scheme of Stable Rank 2 Torsion Free Sheaves with Chern Classes $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ on Three-Dimensional Projective Space*, *Yaroslavl Pedagogical Vestnik*, **3**:1 (2012), 70–89 (Russian).

MIKHAIL ALEXANDROVICH ZAVODCHIKOV, ALEXANDER SERGEEVICH TIKHOMIROV
 YAROSLAVL STATE UNIVERSITY, NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY HIGHER SCHOOL
 OF ECONOMICS (HSE)

ST. SOYUZNAYA, 144, ST. USACHEVA, 6
 150008, YAROSLAVL, RUSSIA, 119048, MOSCOW, RUSSIA
 Email address: zav-mikhail@yandex.ru, astikhomirov@mail.ru