S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 106–114 (2006) УДК 517.95
MSC 13A99

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА МОРАВЕЦ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С ПАРАМЕТРОМ

Н.В. Шустрова

Abstract. The Tricomi problem and other mixed boundary value problem and their generalizations have been studied in papers by mathematicians and mechanicians from different countries. Based on results in [1-4], we construct a solution to generalized Morawetz problem using the method of separated variables.

1. Введение

Задача Трикоми и другие родственные краевые задачи и их обобщения исследовались во многих работах российских и зарубежных математиков и механиков. В данной работе на основании работ [1-4] строится решение обобщенной задачи Моравец методом разделения переменных.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

в области D, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ дугой окружности единичного радиуса $BK = \Gamma(r = 1, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 < \varphi_0 \leq \pi)$ и отрезком $AK(\varphi = \varphi_0, 0 < r < 1)$, а в полуплоскости $y < 0$ ограниченной отрезком AC прямой $y = -k_0 x, 0 < k_0 < 1$ и отрезком CB характеристики $x - y = 1$ уравнения (1).

Shustrova, N.V., The generalized Morawetz problem for Lavrent'ev-Bitsadze equation with spectral parameter.

Поступила 27 октября 2005 г., опубликована 20 марта 2006 г.

Обобщенная задача Моравец (задача М). Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{4}$$

$$k_0 u_x - u_y = 0, \quad (x,y) \in AC, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = f(\varphi), \tag{6}$$

где $\partial u \backslash \partial N$ – производная по нормали, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$; $D_- = D \cap \{y < 0 \wedge x > 0\}$.

3. Задача на собственные значения

Предварительно в области D рассмотрим соответствующую спектральную задачу, которую обозначим M_λ.

Задача M_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2) – (5) и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{6$'$}$$

Введем в области D_- переменные

$$x = p\, ch\theta, \quad y = p\, sh\theta.$$

Уравнение (1) тогда примет вид $u(x,y) = v(\sigma,\theta)$:

$$v_{pp} + \frac{1}{p} v_p - \frac{1}{p^2} v_{\theta\theta} + \lambda v = 0.$$

Разделяя переменные $u(x,y) = v(p,\theta) = P(p)\Theta(\theta)$, получим

$$\Theta''(\theta) - \nu^2 \Theta(\theta) = 0, \tag{7}$$

$$p^2 P''(p) + pP'(p) + (\lambda p^2 - \nu^2) P(p) = 0, \tag{8}$$

где ν - постоянная разделения.

Таким образом, решения уравнения (1) с учетом условия $|P(0)| < +\infty$ имеют вид

$$u_{00}(x,y) = c_{00} + c_{00}^{-}\theta,$$
$$u_{0\nu}(x,y) = (c_{0\nu} e^{\nu\theta} + c_{0\nu}^{-} e^{-\nu\theta}) p^\nu,$$
$$u_{\lambda 0}(x,y) = v_{\lambda 0}(p,\theta) = (c_{\lambda 0} + c_{\lambda 0}^{-}\theta) J_0(\sqrt{\lambda} p),$$
$$u_{\lambda\nu}(x,y) = v_{\lambda\nu}(p,\theta) = (c_{\lambda\nu} e^{\nu\theta} + c_{\lambda\nu}^{-} e^{-\nu\theta}) J_\nu(\sqrt{\lambda} p).$$

В граничном условии (5) перейдем от функции $u(x,y)$ к функции $v(p,\theta)$:

$$\left.\left(u_x \frac{dy}{ds} + u_y \frac{dx}{ds}\right)\right|_{y=-k_0 x} = \left.\frac{P(p)\Theta'(\theta)}{p}\right|_{\theta = arth(-k_0)} = 0.$$

Отсюда

$$\left.\Theta'(\theta)\right|_{\theta = arth(-k_0)} = 0.$$

Следовательно, решение краевой задачи (2), (3), (5) в D_- имеет вид $\left(K = \frac{1-k_0}{1+k_0}\right)$:

$$u_{00}(x,y) = c_{00},$$

$$u_{0\nu}(x,y) = c_{0\nu}\sigma^{\nu}\left(e^{\nu\theta} + K^{\nu}e^{-\nu\theta}\right),$$

$$u_{\lambda 0}(x,y) = c_{\lambda 0}J_0(\sqrt{\lambda}p),$$

$$u_{\lambda\nu}(x,y) = c_{\lambda\nu}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}p)\left(e^{\nu\theta} + K^{\nu}e^{-\nu\theta}\right).$$

Отсюда при $y = 0$ получим:

$$u_{00}(x,0) = c_{00}, \tag{9}$$

$$u_{0\nu}(x,0) = c_{0\nu}x^{\nu}\left(1 + K^{\nu}\right), \tag{10}$$

$$u_{\lambda\nu}(x,0) = v_{\lambda\nu}(p,0) = c_{\lambda\nu}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}x)\left(1 + K^{\nu}\right), \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_{\lambda 0}(x,0)}{\partial N} = 0, \ 0 < x < 1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_{\lambda\nu}(x,0)}{\partial N} = c_{0\nu}\nu x^{\nu-1}\left(1 - K^{\nu}\right), \ 0 < x < 1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_{\lambda\nu}(x,0)}{\partial N} = \frac{c_{\lambda\nu}\nu J_{\nu}(\sqrt{\lambda}x)}{x}\left(1 - K^{\nu}\right), \quad 0 < x < 1. \tag{14}$$

В области D_+ введем полярные координаты $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$, $0 < \varphi < \varphi_0, \quad 0 < r < 1$. В уравнении (1) разделим переменные, представляя функцию $u(x,y)$ в виде $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$:

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0,$$

где $\mu-$ постоянная разделения. Отсюда при $\lambda \neq 0, \ \mu = 0$ имеем:

$$\Phi_{\lambda 0}(\varphi) = c^{+}_{\lambda 0} + c^{*}_{\lambda 0}\varphi,$$

$$R_{\lambda 0}(r) = a^{+}_{\lambda 0}J_0(\sqrt{\lambda}r) + a^{*}_{\lambda 0}Y_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Пусть теперь $\lambda \neq 0, \ \mu \neq 0$. Тогда

$$\Phi_{\lambda\mu}(\varphi) = c^{+}_{\lambda\mu}sin\mu\varphi + c^{*}_{\lambda\mu}cos\mu\varphi,$$

$$R_{\lambda\mu}(r) = a^{+}_{\mu}J_{\mu}(\sqrt{\lambda}r) + c^{*}_{\mu}Y_{\mu}(\sqrt{\lambda}r),$$

откуда с учетом ограниченности решения в нуле, получим

$$u_{0,0}(x,y) = c^{+}_{00} + c^{*}_{00}\varphi,$$

$$u_{0\mu}(x,y) = (c^{+}_{0\mu}sin\mu\varphi + c^{*}_{0\mu}cos\mu\varphi)r^{\mu},$$

$$u_{\lambda 0}(x,y) = (c^{+}_{\lambda 0} + c^{*}_{\lambda 0}\varphi)J_0(\sqrt{\lambda}r),$$

$$u_{\lambda\mu}(x,y) = v_{\lambda\mu}(r,\varphi) = (c^{*}_{\lambda\mu}sin\mu\varphi + c^{*}_{\lambda\mu}cos\mu\varphi)J_{\mu}(\sqrt{\lambda}r).$$

Отсюда при $y = 0$ найдем:

$$u_{00}(x,0) = c_{00}, \tag{15}$$

$$u_{0\mu}(x,0) = c^{*}_{0\mu}x^{\mu}, \tag{16}$$

$$u_{\lambda 0}(x,0) = c_{\lambda 0}J_0(\sqrt{\lambda}x), \tag{17}$$

$$u_{\lambda\mu}(x,0) = v_{\lambda\mu}(r,0) = c^{*}_{\lambda\mu}J_{\mu}(\sqrt{\lambda}x). \tag{18}$$

Сравнивая формулы (15)-(18) соответственно с формулами (9)-(11), полученными из гиперболической части, имеем $c^{*}_{\lambda\mu} = \left(1 + K^{\nu}\right)c_{\lambda\nu}, \ \nu = \mu$. Вычислим производную по нормали

$$\frac{\partial u_{00}(x,0)}{\partial y} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u_{0\mu}(x,0)}{\partial y} = c^+_{0\mu}\mu x^{\mu-1}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_{\lambda\mu}(x,0)}{\partial y} = \frac{c^*_{\lambda\mu}\mu J_\mu(\sqrt{\lambda}x)}{x}, \quad 0 < x < 1. \tag{21}$$

Сравнивая формулы (19)-(21) с формулами (12)-(14), полученными из гиперболической части, имеем: $c^+_{\lambda\mu} = (1-K^\mu)\,c_{\lambda\nu}, \;\; \nu=\mu$. Значит, решение уравнения (1) в D_+, удовлетворяющее условиям "склейки"при $y=0$ имеет вид:

$$u_{00}(x,y) = c_{00},$$
$$u_{0\mu}(x,y) = c_{0\mu}r^\mu((1-K^\mu)sin\mu\varphi + (1+K^\mu)cos\mu\varphi),$$
$$u_{\lambda 0}(x,y) = c_{\lambda 0}J_0(\sqrt{\lambda}r),$$
$$u_{\lambda\mu}(x,y) = c_{\lambda\mu}J_\mu(\sqrt{\lambda}r)((1-K^\mu)sin\mu\varphi + (1+K^\mu)cos\mu\varphi).$$

Эти формулы можно также переписать в виде

$$u_{00}(x,y) = c_{00},$$
$$u_{0\mu}(x,y) = c_{0\mu}\sqrt{2(1+K^{2\mu})}r^\mu sin\left(\mu\varphi + arctg\frac{1+K^\mu}{1-K^\mu}\right),$$
$$u_{\lambda 0}(x,y) = c_{\lambda 0}J_0(\sqrt{\lambda}r),$$
$$u_{\lambda\mu}(x,y) = c_{\lambda\mu}\sqrt{2(1+K)^{2\mu}}J_\mu(\sqrt{\lambda}r)sin\left(\mu\varphi + arctg\frac{1+K^\mu}{1-K^\mu}\right).$$

В граничном условии (4) перейдем от функции $u(x,y)$ к функции $v(r,\varphi)$

$$\left(u_x\frac{dy}{ds} - u_y\frac{dx}{ds}\right)\Bigg|_{AK} = -\frac{R(r)\Phi'(\varphi_0)}{r} = 0.$$

Отсюда $\Phi'(\varphi_0) = 0$, значит, $\Phi'_{\lambda\mu}(\varphi_0) = cos\left(\mu\varphi_0 + arctg\frac{1+K^\mu}{1-K^\mu}\right) = 0$, т.е. μ_n являются положительными корнями уравнения

$$\mu_n = \left(n - \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}arctgK^{\mu_n}\right)\frac{\pi}{\varphi_0}, \quad n=1,2,..., \quad \mu_0 = 0.$$

В граничном условии $(6')$ перейдем от функции $u(x,y)$ к функции $v(r,\varphi)$

$$\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_\Gamma = R'(1)\Phi(\varphi) = 0.$$

Значит,

$$R'_{0\mu_n}(1) = \mu_n r^{\mu_n} = 0,$$
$$R'_{\lambda\mu_n}(1) = \sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Из теории бесселевых функций [5] известно, что функции $zJ'_\mu(z)$ при $\mu > -1$ имеют только вещественные нули. Тогда обозначая через $\alpha_{n,m} - m-$ый корень последнего уравнения, получим собственные значения задачи M_λ :

$$\lambda_{mn} = \alpha^2_{mn}, \quad n = 0,1,..., \quad m = 1,2,...$$

Таким образом, при $\lambda = \lambda_{mn}$ найдем собственные функции задачи M_λ, и, учитывая, что в области D_- аргумент $\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, получим

$$u_{nm}(x,y) = c_{nm}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)})\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}} + K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right),$$

$$(x,y)\in D_-,$$

$$u_{nm}(x,y)=c_{nm}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)})(sin\mu_n\varphi+cos\mu_n\varphi+K^{\mu_n}(cos\mu_n\varphi-sin\mu_n\varphi)),$$

$$(x,y)\in D_+,$$

если же $\lambda\neq\lambda_{mn}$, то система собственных функций имеет вид

$$u_\lambda(x,y)=c_0J_0(\sqrt{\lambda}r)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}+K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right),$$

$$(x,y)\in D_-,$$

$$u_\lambda(x,y)=c_0J_0(\sqrt{\lambda}r)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}}r)}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}(sin\mu_n\varphi+cos\mu_n\varphi+K^{\mu_n}(cos\mu_n\varphi-sin\mu_n\varphi)),$$

$$(x,y)\in D_+,$$

где коэффициенты f_n есть коэффициенты разложения по системе $\{\Phi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}=\{sin\mu_n\varphi+cos\mu_n\varphi)+K^{\mu_n}(cos\mu_n\varphi-sin\mu_n\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$.

При $\lambda=0$ собственной функцией задачи M_λ является константа.

Заметим, что собственные функции при $\lambda=\lambda_{nm}$ можно также записать в виде:

$$u^*_{nm}(x,y)=\frac{(-1)^{n+1}c^*_{nm}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{\sqrt{2(1+K^{2\mu})}}\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}+K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right),$$

$$(x,y)\in D_-,$$

$$u^*_{nm}(x,y)=c^*_{nm}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)})cos(\mu_n(\varphi-\varphi_0)),$$

$$(x,y)\in D_+,$$

при $\lambda\neq\lambda_{nm}$

$$u^*_\lambda(x,y)=C_0J_0(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}g^*_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{\sqrt{2(1+K^{2\mu})}\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}+K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right),$$

$$(x,y)\in D_-,$$

$$u^*_\lambda(x,y)=C_0J_0(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^*_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)})}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}cos(\mu_n(\varphi-\varphi_0)),$$

$$(x,y)\in D_+,$$

где коэффициенты g^*_n есть коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ по системе функций $\{cos(\mu_n(\varphi-\varphi_0))\}_{n=1}^{\infty}$.

Вначале определим вид коэффициентов f_n разложения по системе функций $\Phi_n(\varphi)=sin\mu_n\varphi+cos\mu_n\varphi+K^{\mu_n}(cos\mu_n\varphi-sin\mu_n\varphi)$, $n=1,2,...$, и для этого предварительно докажем лемму 1 и теорему 1.

Лемма 1. *Система функций* $\{\Phi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ *образует базис в* $L_2(0,\varphi_0)$.

Действительно, аналогично работе [1], рассмотрим следующую систему функций ($\alpha = \frac{\pi\varphi}{\varphi_0}$, $\alpha \in (0, \pi)$, $\chi_n = \mu_n \frac{\varphi_0}{\pi}$)

$$\Phi_n(\alpha) = sin\chi_n\alpha + cos\chi_n\alpha + K^{\chi_n \frac{\pi}{\varphi_0}}(cos\chi_n\alpha - sin\chi_n\alpha),\ n = 1, 2, ...$$

Пусть мы имеем разложение некоторой функции $f(\alpha)$ по заданной системе функций $\{\Phi_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{2}} \left[sin\chi_n\alpha + cos\chi_n\alpha + K^{\chi_n\pi/\varphi_0}(cos\chi_n\alpha - sin\chi_n\alpha)\right],$$

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{2}} \Phi_n(\alpha). \tag{22}$$

Обозначим через $h_k(\alpha)$ биортогональную систему к системе синусов $\{sin(k - 3/4)\alpha + \frac{\pi}{4})\}_{k=1}^{\infty}$. Умножим равенство (22) на $h_k(\alpha)$ и проинтегрируем от 0 до π :

$$\int_0^\pi f(\alpha)h_k(\alpha)d\alpha = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{2}} \Phi_n(\alpha)h_k(\alpha)d\alpha.$$

или

$$f_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{kn}, \tag{23}$$

где

$$a_{kn} = \int_0^\pi \left(\frac{\Phi_n(\alpha)}{\sqrt{2}} - sin((n - 3/4)\alpha + \pi/4)\right) h_k(\alpha)d\alpha,$$

$$a_{kn} = \int_0^\pi I_n(\alpha)h_k(\alpha)d\alpha,$$

$$I_n(\alpha) = \frac{\Phi_n}{\sqrt{2}} - sin((n - 3/4)\alpha + \pi/4). \tag{24}$$

Оценим теперь двойной ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{kn}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi I_n(\alpha)h_k(\alpha)d\alpha\right)^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi I_n^2(\alpha)d\alpha\right), \tag{25}$$

где M - постоянная из неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F, h_k)^2 \leq M\|F\|^2, \tag{26}$$

которое справедливо, так как система $\{sin(n - 3/4)\alpha) + \frac{\pi}{4}\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса [6]. Оценим коэффициенты полученного ряда (25):

$$I_n^2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(cos\chi_n\alpha + sin\chi_n\alpha) - sin((n - 3/4)\alpha + \pi/4) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}K^{\mu_n}(cos\chi_n\alpha - sin\chi_n\alpha)\}^2 \leq$$

$$\leq 2\{sin(\chi_n\alpha + \pi/4) - sin((n - \frac{3}{4}\alpha) + \pi/4)\}^2 + 2K^{2\mu_n} \leq$$

$$\leq 2 \cdot 4sin^2(\frac{\chi_n\alpha - (n - 3/4)\alpha}{2}) + 2K^{2\chi_n} < 8\left(\frac{1}{\pi}arctgK^{\chi_n\pi/\varphi_0}\right)^2 \frac{\pi^2}{4} +$$

$$+2K^{2\chi_n\pi/\varphi_0} \leq 4K^{2\chi_n\pi/\varphi_0}.$$

Пусть число k_0 достаточно близко к единице $1 > k_0 > k_0^*$ и пусть $\varphi = \pi$. Тогда, обозначая μ_1^* первый положительный корень уравнения $cos(\mu\pi + \frac{\pi}{4} + arctgK^{*\mu}) = 0$, получим следующую оценку:

$$I_n^2 \le 4K^{2(n-1+\mu_1^*)}. \tag{27}$$

Подставляя эту оценку в (25), имеем

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}^2 \le M\pi 6 \sum_{n=0}^{\infty} K^{2(n+\mu_1^*)\pi/\varphi_0} =$$

$$= 4M\pi K^{2\mu_1^*} \left(1 - K^2\right)^{-1}. \tag{28}$$

Из (28) понятно, что если k_0 достаточно близко к единице, то $\sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}^2 < 1$, и поэтому бесконечная система уравнений (23) однозначно разрешима относительно C_k, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 < \infty. \tag{29}$$

Докажем теперь сходимость ряда (22) в $L_2(0,\pi)$. Так как справедливо неравенство (29), то ряд (22) будет, очевидно, сходится в $L_2(0,\pi)$, если сходится в $L_2(0,\pi)$ следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{2}} \Phi_n(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin((n-3/4)\alpha + \frac{\pi}{4}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_n(\alpha). \tag{30}$$

Первый ряд в правой части сходится в $L_2(0,\pi)$ в силу базисности Рисса системы синусов $\{sin((n-3/4)\alpha + \frac{\pi}{4})\}$. Оценим последний в правой части ряд по критерию Коши, используя оценку (27):

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=m}^{m+N} C_n I_n(\alpha) \right)^2 d\alpha \le \sum_{n=m}^{m+N} C_n^2 \sum_{n=m}^{m+N} \int_0^{\pi} I_n^2(\alpha) d\alpha \le$$

$$\le \sum_{n=m}^{m+N} C_n^2 \sum_{n=m}^{m+N} 4\pi \left(1 - \left(\frac{1-k_0}{1+k_0} \right)^{2(n-1+\mu_1^*)} \right).$$

Из полученного неравенства ясно, что при k_0, достаточно близком к единице, ряд (30), а следовательно и ряд (22) сходятся в $L_2(0,\pi)$.

Ряд (22) сходится к функции $f(\alpha)$, так как если равенство (22) умножить на $h_k(\alpha)$ и проинтегрировать по интервалу $(0,\pi)$, то получим с учетом (23) значение f_k. В силу полноты системы $h_k(\alpha)$ получаем, что ряд (22) сходится к функции $f(\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(\alpha) \in C^{\alpha}[0,\pi]$, $f(\pi) = 0$, тогда ряд (22) равномерно сходится к функции $f(\alpha)$ на $[0,\pi]$.*

Используя формулу (23), запишем ряд (22) в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k \Phi_k(\alpha)}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \Phi_k(\alpha)}{\sqrt{2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(\alpha)}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{kn}.$$

Оценим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \{sin\chi_n\alpha + cos\chi_n\alpha + K^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}} (cos\chi_n\alpha - sin\chi_n\alpha)\}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\{sin\chi_n\alpha + cos\chi_n\alpha - \frac{1}{2}sin[\chi_n\alpha - arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}} - \frac{1}{2}sin[\chi_n\alpha + arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}]+$$

$$+\frac{1}{2}cos[-\chi_n\alpha + arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}] + \frac{1}{2}cos[\chi_n\alpha + arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}]\}^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\{sin\left(\frac{arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}\right) + cos\left(\frac{arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}\right)\}^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\{cos\left(\frac{arccosK^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}\right) -$$

$$-sin\left(\frac{arccosK^{\frac{\lambda_n\pi}{\varphi_0}}}{2}\right)\}^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\{\sqrt{\frac{1-K^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}} + \sqrt{\frac{1+K^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}}\}^2+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\{\sqrt{\frac{1+K^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}} - \sqrt{\frac{1-K^{\frac{\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2}}\}^2 =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^{\frac{2\chi\pi}{\varphi_0}}}{2+2\sqrt{1-K^{\frac{2\chi_n\pi}{\varphi_0}}}} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^{\frac{2\chi_n\pi}{\varphi_0}}}{2-2\sqrt{1-K^{\frac{2\chi_n\pi}{\varphi_0}}}}.$$

Из этой оценки и следует равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k^2(\alpha)$. Учитывая теперь, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq M||f||^2,$$

а также учитывая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn}C_n$ сходится, получим, что ряд (22) также равномерно сходится. Теорема 1 доказана.

Вид коэффициентов g_n^* разложения функции $f(\varphi)$ по системе функций $cos(\mu_n(\ \varphi-\varphi_0))_{n=1}^{\infty}$ можно определить аналогично доказанным выше лемме 1 и теореме 1, но только здесь в качестве функции $h_k(\alpha)$ надо взять биортогональную систему к системе синусов $\{sin(k-3/4)\alpha+\frac{\pi}{2})\}_{k=1}^{\infty}$.

4. Обобщенная задача Моравец для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральным параметром

Теперь для уравнения (1) построим решение обобщенной задачи Моравец (2)-(6).

Теорема 2. *Пусть функция $f(\alpha) \in C^{\alpha}[0,\pi]$, $f'(\pi)=0$, тогда при $\lambda \neq \lambda_{mn}$ решение обобщенной задачи Моравец имеет вид*

$$u(x,y) = u_\lambda(x,y)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}} + K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right),\ (x,y)\in D_-,$$

$$u_\lambda(x,y) = u_\lambda+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n\sqrt{2(1+K^{2\mu})}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)})}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}sin\left(\mu_n\varphi + arctg\frac{1+K^{\mu_n}}{1-K^{\mu_n}}\right),$$

$$(x,y)\in D_+, \qquad (32)$$

при $\lambda = 0$ решением обобщенной задачи Моравец является функция

$$u(x,y) = c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n((x+y)^{\mu_n} + K^{\mu_n}(x-y)^{\mu_n}),\ (x,y)\in D_-,$$

$$u_\lambda(x,y) = c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sqrt{2(1+K^{2\mu})} r^{\mu_n} sin\left(\mu_n\varphi + arctg\frac{1+K^{\mu_n}}{1-K^{\mu_n}}\right),\ (x,y)\in D_+,$$

где коэффициенты f_n есть коэффициенты разложения в ряд функции $f(\varphi)$ по системе синусов $\{sin\mu_n\varphi + cos\mu_n\varphi) + K^{\mu_n}(cos\mu\varphi - sin\mu\varphi),\ \ n = 1,2,\ldots$.

На основании асимтотической формулы [7, с. 217]: $J_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad n \longrightarrow \infty$ ряд (32) и ряды из производных любого порядка при любом $r \le r_0 < 1$ сходятся равномерно, так как для достаточно больших n справедлива оценка

$$\left|\frac{f_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} sin(\mu_n\varphi + arctg\frac{1+K^{\mu_n}}{1-K^{\mu_n}})\right| \le M\cdot\frac{r^{\mu_n}}{\mu_n}, \quad M = const > 0.$$

Ряд (32) на $D_+\cup AB$ допускает почленное дифференцирование по переменной r и производная ряда по r при $r=1$ есть разложение в ряд функции $f(\varphi)$ по системе функций $\Phi_n(\alpha)$, поэтому ряд (32) сходится равномерно в $\overline{D}$.

Заметим, что если выполнены условия теоремы 2, то решение обобщенной задачи Моравец при $\lambda = 0$ можно записать в следующем виде:

$$u(x,y) = c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(-1)^{n+1}}{\sqrt{2(1+K^{2\mu})}}((x+y)^{\mu_n} + K^{\mu_n}(x-y)^{\mu_n}),\ (x,y)\in D_-,$$

$$u_\lambda(x,y) = c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\mu_n} cos(\mu_n(\varphi-\varphi_0)),$$
$$(x,y)\in D_+,$$

при $\lambda \ne \lambda_{mn}$ решение обобщенной задачи Моравец имеет вид

$$u(x,y) = u^*_\lambda(x,y) +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}g_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{\sqrt{2(1+K^{2\mu})}\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}} + K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right),$$
$$(x,y)\in D_-,$$
$$u(x,y) = u^*_\lambda(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)})}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} cos(\mu_n(\varphi-\varphi_0)),\ (x,y)\in D_+,$$

где коэффициенты g^*_n есть коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ по системе функций $\{cos(\mu_n(\varphi-\varphi_0))\}_{n=1}^{\infty}$.

Автор выражает большую благодарность профессору Камилю Басировичу Сабитову за постановку задачи, за руководство и помощь в работе.

Список литературы

[1] Е.И. Моисеев, *О решении вырождающихся уравнений с помощью биортогональных рядов*, Дифференциальные уравнения, **Т. 26, № 1** (1990), 94–103.

[2] К.Б. Сабитов, А.А. Карамова, *Спектральные свойства задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применение*, Известия РАН: Серия математическая, **№ 4** (2001), 133–150.

[3] К.Б. Сабитов, А.А. Гималтдинова, *Об одной газодинамической задаче для уравнений смешанного типа*, Дифференциальные уравнения, **Т. 38, № 1** (2001), 111–116.

[4] К.Б. Сабитов, С.Л. Хасанова, *Спектральные свойства решения задачи с производной по нормали в граничном условии для уравнений смешанного типа и их применение*, Известия вузов. Математика, **№ 6** (2003), 64–76.

[5] Дж.Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, I, Москва, 1949.

[6] Е.И. Моисеев, *О базисности одной системы синусов*, Дифференциальные уравнения, **Т. 23, №1** (1987), 177–179.

[7] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Часть 2, *Трансцендентные функции*, Физматгиз, Москва, 1963.

Наталья Вячеславовна Шустрова
Стерлитамакская педагогическая академия,
пр. Ленина 37,
453103, Стерлитамак, Россия
E-mail address: SNV2006@*mail.ru*