S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 155–160 (2006) УДК 512.54
MSC 03C20,20A15
MSC 20F05,20F10

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОТ КОММУТИРУЮЩИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е.С. ЕСЫП

Abstract. The objective of this paper is to continue the development of algebraic geometry over groups. We give a classification of coordinate groups of equation systems with commutating variables over free products of Abelian groups.

Основания алгебраической геометрии над группами были сделаны Г. Баумслагом, А. Г. Мясниковым, В.Н. Ремесленниковым и изложены в статье [2]. Там введены категория G-групп, категория алгебраических множеств, категория координатных групп для алгебраических множеств, топология Зарисского для групп, группы нетеровые по уравнениям, радикалы систем уравнений и многие другие понятия и указаны взаимосвязи между ними. Логические основы алгебраической геометрии над группами исследованы в статье А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [3]. В настоящее время наиболее изучены структуры алгебраических множеств и их координатных групп для следующих конкретных классов групп: для свободных групп [5], [4], [6], для свободных метабелевых групп [7], [8] и абелевых групп [3].

В общей ситуации даже для "хорошей"группы G структура алгебраических множеств и их координатных групп является сложной. Поэтому актуальной является локальная задача: исследование алгебраических множеств и их координатных групп для специальных систем уравнений. Основными типами специальных систем уравнений в настоящее время являются следующие: системы

Esyp E.S. Systems of equations in commutating variables for free products of Abelian groups.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00057).

Поступила 01 ноября 2005 г., опубликована 5 мая 2006 г.

уравнений от одной переменной, системы уравнений от коммутирующих переменных, системы невырожденных уравнений.

Системам уравнений от одной переменной над свободной группой посвящены работы Аппеля, Лоренца, Линдона, Чизвелла, Ремесленникова: [9], [10], [11], [12], [1]. Невырожденные системы уравнений над нильпотентными группами без кручения исследованы в диссертации [13].

В статье [14] проводилась классификация координатных групп неприводимых алгебраических множеств, заданных системами уравнений от одной неизвестной для свободных произведений абелевых групп. Для доказательства основной теоремы статьи [14] автор использовал схему доказательства теоремы В. Н. Ремесленникова и Я. Чизвелла [1], в которой дано описание неприводимых координатных групп для систем уравнений от одной неизвестной над свободной группой. В настоящей статье мы продолжаем исследование координатных групп для свободных произведений абелевых групп без элементов порядка 2, а именно для систем уравнений с коммутирующими неизвестными (теорема 1).

Основные понятия алгебраической геометрии над группами были введены в статье [16] Баумслагом, Мясниковым и Ремесленниковым, там можно найти все необходимые определения. Будут использоваться некоторые определения и понятия данные в статье [14].

Дадим определения объектов и понятий, которые являются предметом рассмотрения здесь.

Система уравнений S от неизвестных $x_1, ..., x_n$ называется ситемой с коммутирующими неизвестными, если она содержит в себе все уравнения вида $[x_i, x_j] = 1$, $i, j = 1, ..., n$.

Встатье [14] была доказана теорема 2.1:

Теорема. *Координатная группа любого неприводимого алгебраического множества над неабелевой CSA-группой G вкладывается в ультрастепень ${}^*G$ по некоторому ультрафильтру D. (Координатные группы, ультрастепень и вложение мы рассматриваем в категории G-групп.)*

Обозначим через

$$G = \mathop{*}_{i=1}^{r} A_i \tag{1}$$

– свободное произведение абелевых групп A_i не содержащих элементов второго порядка.

Определение. *Период* $e(A)$ абелевой группы A – это наименьшее целое положительное число m, такое что $mA = 0$. Если такого числа не существует, то период обозначаем символом ∞. $e_p(A)$ – период p-примарной компоненты в примарном разложении группы A.

Определение. Если G – группа (необязательно абелева), $1 \neq g \in G$, то g называется *корневым* элементов, если для любого натурального числа n уравнение $x^n = g$ неразрешимо в G.

Определения координатной группы, алгебраического множества, неприводимого множества стандартные. Они приведены в статье [14]. Пусть заданы две группы $G_1 = \langle X_1 | R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle X_2 | R_2 \rangle$, где X_1 и X_2 - два непересекающихся множества. Для группы $G_3 = \langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle$ мы будем использовать запись $G_3 = \langle G_1, G_2 | R_3 \rangle$. Запись $[G_1, G_2] = 1$ означает множество соотношений $\{[g_1, g_2] = 1 | g_1 \in X_1, g_2 \in X_2\}$. Здесь будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $G = \mathop{*}\limits_{i=1}^{r} A_i$ *– свободное произведение абелевых групп* A_i*, не содержащих элементов второго порядка. Любая координатная группа* G_Y *неприводимого алгебраического множества* $Y \subseteq G^n$*, которое определяется системой уравнений от* n *коммутирующих неизвестных и не определяется системой уравнений от меньшего числа неизвестных,* G*-изоморфна одной из групп*

(a) $G * B$*,*

(b) $\langle G, B | [B, C] = 1 \rangle$*,*

где пара (B, C) *удовлетворяет одному из двух условий:*

(1) $B \simeq \mathbb{Z}^n$*,* $C = \langle w \rangle$*,*

$w \in G \backslash \bigcup\limits_{h \in G, i \in \{1,\dots,r\}} h A_i h^{-1}$ *– корневой элемент.*

(2) $C = A_q$*,* $q \in \{1, ..., r\}$*,* B *- абелева группа с* n *порождающими, такая что* $e(C) = e(C \oplus B)$*,* $e_p(C) = e_p(C \oplus B)$ *для любого простого* p*.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* ${}^*G$ *– ультрастепень группы* G *вида (1). Пусть* $t_1, ..., t_n \in {}^*G$*,* $[t_i, t_j] = 1$*,* $i, j \in \{1, ..., n\}$*. Тогда выполняется одно из условий*

(1) существует элемент $w \in {}^*G$ *бесконечного порядка и* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in {}^*\mathbb{Z}$*, такие что* $t_1 = w^{\alpha_1}, ..., t_n = w^{\alpha_n}$*. Группа, порожденная всеми* ${}^*\mathbb{Z}$*-степенями элемента* w*, изоморфна* ${}^*\mathbb{Z}$*, и* $w \notin \bigcup\limits_{h \in {}^*G, i \in \{1,\dots,r\}} h({}^*A_i)h^{-1}$*.*

(2) $t_1, ..., t_n \in h({}^*A_q)h^{-1}$*, где* $h \in {}^*G$*,* $q \in \{1, ..., r\}$*.*

Замечание. *В группе* ${}^*\mathbb{Z}$ *нет элементов конечного порядка, поэтому любая к. п. подгруппа группы* ${}^*\mathbb{Z}$ *раскладывается в прямую сумму бесконечных циклических групп.*

Группа ${}^*G$ имеет структуру ${}^*\mathbb{Z}$-степенной группы, т. е. для любых $w \in {}^*G \backslash \{1\}$ и $\alpha \in {}^*\mathbb{Z}$ опеределен w^α, лежащий в ${}^*G$. Если $\alpha \in {}^*\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$, то w^α называется *большим.* Кроме того, в ${}^*G$ определена функция длины ${}^*L$ со значениями в ${}^*\mathbb{Z}$. Два элемента $g, h \in {}^*G$ *не сокращаются*, записываем $g \circ h$, если ${}^*L(gh) = {}^*L(g) + {}^*L(h)$. Два элемента $g, h \in {}^*G$ имеют *большое сокращение*, если ${}^*L(g) + {}^*L(h) = {}^*L(gh) + \alpha$, где α – число из ${}^*\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$. По определению функции длины, α положительно.

Доказательство леммы. Пусть $(t_{ik})_{k \in I}$ - координаты некоторого представителя элемента t_i в ультрастепени G^I/D, где $i \in \{1, ..., n\}$. Тогда для некоторого $U \in D$ и для всех $k \in U$ $[t_{ik}, t_{jk}] = 1$. Пусть H_k - подгруппа G, порожденная элементами t_{ik}, $i \in \{1, ..., n\}$. По теореме Куроша $H_k \simeq F * \mathop{*}\limits_{\alpha \in M_k} (h_\alpha A_{i_\alpha} h_\alpha^{-1} \cap H_k)$. Поскольку H_k - абелева, то возможны лишь два случая: H_k - бесконечная циклическая, или $H_k \simeq h_k A_{i_k} h_k^{-1}$. Разобьем множество U на конечное число подмножеств. U_0 - множество индексов $k \in U$, для которых H_k - бесконечная циклическая. U_q - множество индексов $k \in U$, для которых $i_k = q$, где $q \in \{1, ..., r\}$. Имеет место следующее равенство $U = \bigcup\limits_{q=0}^{r} U_q$. Тогда, ввиду конечности r, для некоторого $q \in \{0, ..., r\}$ множество $U_q \in D$. Рассмотрим случай, когда $q = 0$. Для любого $k \in U_0$ существуют $w_k \in G$ и $\alpha_{1k}, ..., \alpha_{nk} \in \mathbb{Z}$ такие что $t_{1k} = w_k^{\alpha_{1k}}, ..., t_{nk} = w_k^{\alpha_{nk}}$. Набор $(w_k)_{k \in U_0}$ определяет некоторый элемент $w \in {}^*G$. Наборы $(\alpha_{1k})_{k \in U_0}, ..., (\alpha_{nk})_{k \in U_0}$ определяют элементы $\alpha_1, ..., \alpha_n \in {}^*\mathbb{Z}$.

При этом выполняются следующие равенства $t_1 = w^{\alpha_1}, ..., t_n = w^{\alpha_n}$. Итак, получили, что при $q = 0$ выполняется случай (1) леммы. Докажем вторую часть условия (1). Рассмотрим равенство $w^\alpha = 1$, $\alpha \neq 0$, где w^α – ${}^*\mathbb{Z}$-степень. Из этого равенства следует, что для некоторого множества индексов из ультрафильтра элементы w_k имеют конечный порядок, что противоречит условию на w. Если $w \in \bigcup\limits_{h \in {}^*G, i \in \{1,...,r\}} h({}^*A_i)h^{-1}$, то $U_i \in D$, для некоторого $i \in \{1, ..., r\}$. Предположим, что $q \in \{1, ..., r\}$. Для любого $k \in U_q$ существуют $a_{1k}, ..., a_{nk} \in A_q$, такие что $t_{1k} = h_k a_{1k} h_k^{-1}, ..., t_{nk} = h_k a_{nk} h_k^{-1}$. Набор $(h_k)_{k \in U_q}$ определяет элемент $h \in {}^*G$. Наборы $(a_{1k})_{k \in U_q}, ..., (a_{nk})_{k \in U_q}$ определяют элементы $a_1, ..., a_n \in {}^*A_q$. Для этих элементов выполняются равенства $t_1 = h a_1 h^{-1}, ..., t_n = h a_n h^{-1}$. Отсюда следует, что при $q \in \{1, ..., r\}$ выполняется случай (2) леммы. □

Лемма 2. *Пусть G - группа вида (1). ${}^*G$ - ультрастепень группы G по неглавному ультрафильтру. Имеет место вложение ${}^*A_q < {}^*G$, $q \in \{1, ..., r\}$. Возьмем произвольный элемент $h \in {}^*G$. Для элемента h возможны два случая:*

1. Существует $h_1 \in G$, такой что $h \in h_1({}^*A_q)$. Тогда группа $gr(G, h({}^*A_q)h^{-1})$, порожденная G и $h({}^*A_q)h^{-1}$, равна $\langle G, H | \, [A_q, H] = 1 \rangle$, где $H \simeq_G h({}^*A_q)h^{-1}$.

2. Для любого $h_1 \in G$, $h \notin h_1({}^*A_q)$. Тогда $gr(G, h({}^*A_q)h^{-1}) = G * h({}^*A_q)h^{-1}$.

Доказательство. *Случай 1* следует из более общего равенства:

$$gr({}^*A_1, ..., {}^*A_r) = {}^*A_1 * ... * {}^*A_r,$$

доказанного в [1], лемма 5.7. Достаточно рассмотреть группу $h_1^{-1} h({}^*A_q) h^{-1} h_1$.

Случай 2. Пусть для любого $h_1 \in G$, $h \notin h_1({}^*A_q)$. Предположим, что в группе $gr(G, h({}^*A_q)h^{-1})$ имеется соотношение $w = g_1(h \circ a_1 \circ h^{-1}) g_2 (h \circ a_2 \circ h^{-1}) ... g_l (h \circ a_l \circ h^{-1}) = 1$, где $g_1, ..., g_l \in G \backslash \{1\}$, $a_1, ..., a_l \in {}^*A_q \backslash \{1\}$. Слово w каким-то образом сокращается. Поскольку h - большой элемент, т. е. принадлежит ${}^*G \backslash G$, то должны быть, соответствено большие сокращения. Заметим, что большое сокращение может быть в случае, когда $h \in h_2 \circ ({}^*A_s) \circ h_3$, для некоторого $s \in \{1, ..., r\}$, $h_2, h_3 \in G$. Но в этом случае $h^{-1} g_i h = h_3^{-1} \circ v_i \circ h_3$, где $v_i \in A_s$, и, следовательно, $w \neq 1$. Поэтому $h \notin h_2 \circ ({}^*A_s) \circ h_3$. Так как w полностью сокращается, то в некотором подслове $a_{i-1} \circ h^{-1} \cdot g_i \cdot h \circ a_i$ либо h^{-1} либо $g_i h$ полностью сокращается. Тогда проведем следующие вычисления $g_i h = g_{i1} \circ h_i$, $h = g_{i2}^{-1} * h_i$, $g_i = g_{i1} \circ g_{i2}$, имея ввиду замечание, сделанное выше, $h_i^{-1} * g_{i2} \cdot g_{i1} \circ h_i = \begin{cases} h_i^{-1} \cdot g_{i3} \circ h_i \\ h_i^{-1} * g_{i3} \cdot h_i \end{cases} = \begin{cases} h_i^{-1} \cdot g_{i3} \circ h_i \\ h_{i2}^{-1} \circ g_{i4} \cdot h_{i2} \end{cases}$. Отсюда следует, ввиду большого сокращения, что $\begin{cases} h_i = g_{i3}^\gamma \\ \\ h_{i2} = g_{i4}^\gamma \end{cases}$.

Получили, что $h = h_1 * h_2^\gamma$, $h_1 \in G$,$h_2 \in G \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i$, $\gamma \in {}^*\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$, h_2 – корневой элемент. Тогда в случае большого сокращения тройки элементов с центральным элементом с индексом j имеем следующее равенство $a_{j-1} \circ h_2^{-\gamma} * h_1^{-1} \cdot g_j \cdot h_1 * h_s^\gamma \circ a_j = \begin{cases} a_{j-1} \cdot h_2^{n_j} \circ a_j \\ a_{j-1} \circ h_2^{n_j} \cdot a_j \end{cases}$ Проведем подобные сокращения для всех троек, для которых это возможно. После таких сокращений слово w примет вид $g_1 \cdot h_1 * h_2^\gamma \cdot w_1 \cdot h_2^{-\gamma} * h_1^{-1} \cdot g_{j_1} \cdot h_1 * h_2^\gamma \cdot w_2 \cdot h_2^{-\gamma} * h_1^{-1} \cdot g_{j_2} \cdot ...... \cdot h_1 * h_2^\gamma \cdot w_{l'} \cdot h_2^{-\gamma} * h_1^{-1}$, где w_i - это слово вида $a_{j_i} h_2^{n_{j_i+1}} a_{j_i+1} h_2^{n_{j_i+2}} \cdot ... \cdot a_{j_i+l_i}$. Так как $h_2 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i$, то для него возможны два случая: 1. $h_2 = a \circ b$, где $a \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i \backslash A_q$. 2. $h_2 = a \circ b$, где $a \in A_q$, В первом случае в слове w нет других больших сокращений. Поэтому $w \neq 1$. Рассмотрим второй случай. Предполагаем, что $w = 1$, тогда в некоторой тройке $h_2^{\gamma} \cdot w_k \cdot h_2^{-\gamma}$ происходит большое сокращение, тогда $w_k = h_2^m$. Запишем это равенство подробно $a_{j_k}(a \circ b)^{n_{j_k+1}} a_{j_k+1}(a \circ b)^{n_{j_k+2}} \cdot \ldots \cdot a_{j_k+l_k} = (a \circ b)^m$. Беря разные комбинации знаков степеней, проверяем, что это невозможно, если в группе G нет элементов второго порядка. В группе G нет элементов второго порядка, так как порядки элементов группы G - это объединение порядков групп A_i, $i \in \{1, ..., r\}$, а в последних нет элементов второго порядка по условию теоремы. Получили противоречие. □

В статье [17] А. Г. Мясниковым и В. Н. Ремесленниковым была доказана следующая теорема:

Теорема D2. *Пусть A – абелева группа. Тогда конечно порожденная A-группа B – координатная группа некоторого алгебраического множества над A тогда и только тогда, когда B удовлетворяет следующим условиям:*

(1) $B \simeq A \oplus B$, где C – конечно порожденная абелева группа;

(2) $e(A) = e(B)$ и $e_p(A) = e_p(B)$ для любого простого p.

Из этой теоремы следует

Лемма 3. *Пусть A - абелева группа. Любая к. п. подгруппа B ультрастепени ${}^*A$ удовлетворяет следующему условию: $e(A) = e(A \oplus B)$ и $e_p(A) = e_p(A \oplus B)$ для любого простого p.*

Доказательство. Любая к. п. подгруппа B ультрастепени ${}^*A$ содержится в к. п. A-подгруппе B', для которой выполняется условие: $e(A) = e(B')$ и $e_p(A) = e_p(B')$ для любого простого p, по теореме D2 и теореме (2.1, [1]), сформулированной в начале статьи. Следовательно, группа B удовлетворяет условию: $e(A) = e(A \oplus B)$ и $e_p(A) = e_p(A \oplus B)$ для любого простого p. □

Доказательство теоремы 1. По теореме, сформулированной в начале статьи (теорема 2.1, [14]), любая координатная группа над группой G вкладывается в ультрастепень ${}^*G$. Опишем все G-конечнопорожденные подгруппы H группы ${}^*G$ с коммутирующими G-порождающими $t_1, ..., t_n$. По лемме 1 эти элементы удовлетворяют одному из двух условий:

(1) существует элемент $w \in {}^*G$ бесконечного порядка и $\alpha_1, ..., \alpha_n \in {}^*\mathbb{Z}$, такие что $t_1 = w^{\alpha_1}, ..., t_n = w^{\alpha_n}$. Группа, порожденная всеми ${}^*\mathbb{Z}$-степенями элемента w, изоморфна ${}^*\mathbb{Z}$, и $w \notin \bigcup\limits_{h \in {}^*G, i \in \{1,...,r\}} h({}^*A_i)h^{-1}$.

(2) $t_1, ..., t_n \in h({}^*A_q)h^{-1}$, где $h \in {}^*G$, $q \in \{1, ..., r\}$.

В случае (1) группа H G-изоморфна одной из групп

(a) $G * B$,

(b) $\langle G, B |\, [B, C] = 1 \rangle$,

где пара (B, C) удовлетворяет условию:

$B \simeq \mathbb{Z}^n$, $C = \langle w \rangle$, $w \in G \backslash \bigcup\limits_{h \in G, i \in \{1,...,r\}} hA_ih^{-1}$.

Доказательство этого случая аналогично случаю, где на месте группы G стоит свободная группа.

Случай (2). В этом случае группа $B = gr(t_1, ..., t_n)$ содержится в $h({}^*A_q)h^{-1}$. Из леммы 2 следует, что $H = gr(G, B)$ G-изоморфна одной из групп

(a) $G * B$,

(b) $\langle G, B |\, [B, C] = 1 \rangle$, где пара (B, C) удовлетворяет условию: $C = A_q$, B - абелева группа ранга n, изоморфная некоторой подгруппе группы ${}^*A_q$.

Из леммы 3 следует, что для пары (B, C) верны следующие равенства: $e(C) = e(C \oplus B)$, $e_p(C) = e_p(C \oplus B)$ для любого простого p. $\square$

Список литературы

[1] Chiswell I. M., Remeslennikov V. N. Equations in Free Groups with One Variable. J. Group Theory, 2000, **3**, No. 4, 455–466.

[2] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. J. Algebra, 1999, **219**, 16–79.

[3] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups II. Logical foudations. J. Algebra, 2000, **234**, 225–276.

[4] Ремесленников В. Н. $\exists$-свободные группы. Сибирский математический журнал, 1989, **30**, No. 6, 153–157.

[5] Kharlampovich O., Myasnikov A. Irreducible affine varieties over a free group I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz. J. Algebra, 1998, **200**, 472–516.

[6] Kharlampovich O., Myasnikov A. Irreducible affine varieties over a free group II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups. J. Algebra, 1998, **200**, No. 2, 517–570.

[7] Chapius O. $\forall$-free metabelian groups. J. Symbolic Logic, 1997, **62**, No. 1, 159–174.

[8] Remeslennikov V., Stohr R. On quasivariety generated by a free noncyclic metabelian group. Preprint, Manchester, UMIST, 2001.

[9] Appel K. I. One-variable equations in free groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, **19**, 912–918.

[10] Лоренц А. А. Решения систем уравнений с одним неизвестным в свободных группах. Докл. АН СССР, 1963, **148**, No. 6, 1253–1256.

[11] Лоренц А. А. О представлениях множеств решений систем уравнений в с одним неизвестным в свободной группе. Докл. АН СССР, 1968, **178**, No. 2, 290–292.

[12] Lyndon R. C. Equations in free groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **96**, 445–457.

[13] Федосеева Ю. М. Алгебраические множества над абелевыми и нильпотентными группами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Омск, ОмГУ, 1998.

[14] Есып Е.С. Системы уравнений от одной неизвестной для свободных произведений абелевых групп. Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр., Омск, ОмГУ, 2001, N 7, 28-45. *http://iitam.omsk.net.ru/~esyp/my_papers/esyp.msm.pdf*

[15] Lyndon R. C., Schutzenberger M. P. The equation $a^M = b^N c^P$ in free group. Michigan Math. J., **9**, 289–298.

[16] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. Journal of Algebra, 1999, **219**, 16–79.

[17] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups II. Logical Foundations. Journal of Algebra, 2000, **234**, 225–276.

Евгений Семенович Есып
Омский филиал института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644000, Омск, Россия
E-mail address: `esyp@iitam.omsk.net.ru`