S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 352–354 (2006) УДК 511.3

Краткие сообщения MSC 11P21

ДВЕ АДДИТИВНЫЕ БИНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Н.А.ЗИНЧЕНКО

Abstract. Let c be an arbitrary real number such that $1 < c \leqslant 2$. Two binary additive problems involving natural numbers n with two different prime divisors and additional condition $\{\frac{1}{2}n^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}$ solved in this paper.

Пусть c — произвольное вещественное число, $1 < c \leqslant 2$. В работе решаются две бинарные аддитивные задачи с натуральными числами n, имеющими два различных простых делителя, на которые накладываются дополнительные ограничения вида $\{\frac{1}{2}n^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}$.

В 1940 году И.М. Виноградов методом тригонометрических сумм получил асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида $[(2m)^2, (2m+1)^2)$, $m \in \mathbb{N}$ (см.[1]).

В 1945 году Ю.В. Линник в [2] решил подобную задачу с применением формулы Мангольдта для функции Чебышева и плотностных теорем.

В 1986 году С.А. Гриценко в [3] вывел асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1, 2]$.

Отметим, что чем меньше c, тем короче промежутки (1).

Главные члены в асимптотических формулах из [1] и [3] одинаковы и равны $\frac{1}{2}\pi(x)$, а остаточный член в [3] имеет степенное понижение.

В 1988 году С.А. Гриценко решил ряд аддитивных задач с простыми числами, лежащими в промежутках (1) (см.[4], [5]).

Zinchenko N.A., Two binary additive problems.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант РНП.2.1.1.3263) и Белгородским государственным университетом (грант ВГК 007-04).

Представлена Ю.В. Нестеренко 20 сентября 2006 г., опубликована 15 октября 2006 г.

Позднее задачи подобного вида рассматривались в [6] А. Балогом и Дж. Фридлендером.

Отметим, что в работах [4]–[6] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи.

На наш взгляд, представляют интерес бинарные аддитивные задачи с простыми числами из промежутков вида (1). В настоящее время они не поддаются решению. Из исследований в этом направлении отметим работу Д. Толева [7], в которой получен специальный вариант теоремы Бомбьери–Виноградова. Однако применение этой теоремы, даже в соединении с расширенной гипотезой Римана, не дает возможности решить, например, проблему делителей Титчмарша с простыми числами из промежутков (1).

В настоящей работе решаются бинарные аддитивные задачи, являющиеся вариантами проблемы делителей Титчмарша с числами вида p_1p_2 и $p_1p_2^a$ из промежутков (1), где p_1 и p_2 — простые числа, a — произвольное натуральное число, $a \geqslant 2$.

Заметим, что последовательность чисел вида $p_1p_2^a$ является более «редкой», чем последовательность чисел p_1p_2. С другой стороны, в условиях теоремы 2 присутствуют дополнительные ограничения на p_1 и p_2, которых нет в условиях теоремы 1.

В работе будут использованы следующие обозначения:
a — произвольное натуральное число, $a \geqslant 2$,
c — произвольное число из полуинтервала $(1, 2]$,
p_1, p_2 — простые числа,
$P = \exp(\sqrt{\ln n})$,
$A_1 = [1, nP^{-1}]$,
$A_2 = [1, P^{\frac{1}{a}}]$.
Основными результатами работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть*

$$T(n) = \sum_{\substack{p_1p_2 \leqslant n \\ p_1 > P,\ p_2 > P}} \tau(p_1p_2 - 1),$$

$$T_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2 \leqslant n \\ p_1 > P,\ p_2 > P \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}}} \tau(p_1p_2 - 1).$$

Тогда справедливо равенство

$$T_1(n) = \frac{1}{2}T(n) + O(n \ln\ln\ln n).$$

Отметим, что $T(n) \asymp n \ln\ln n$.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant n_0 > 0$, $a \geqslant 2$ — натуральные числа,*

$$J(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{x,y} 1,$$

$$J_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1p_2^a - xy = 1 \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}}} \sum_{x,y} 1.$$

Тогда справедливо равенство

$$J_1(n) = \frac{1}{2} J(n)(1 + O(P^{-\eta})),$$

где

$$J(n) = c_0 Li\ (\frac{n}{P}) \pi(P^{\frac{1}{a}}) \ln n\ (1 + O(\frac{1}{\sqrt{\ln n}})),$$

$\eta > 0$ — *абсолютная постоянная,* $c_0 = \sum\limits_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}$.

Доказательства теорем 1 и 2 проводятся методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Список литературы

[1] Виноградов И.М. *Некоторое общее свойство распределения простых чисел*, Мат. сб., **7** (1940), 365–372.

[2] Линник Ю.В. *Об одной теореме теории простых чисел*, Докл. АН СССР, **47** (1945), 7–8.

[3] Гриценко С.А. *Об одной задаче И.М. Виноградова*, Мат. заметки, **39**, вып. 5 (1986), 625–640.

[4] Гриценко С.А. *Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида*, УМН, **43**, вып. 4(262) (1988), 203–204.

[5] Гриценко С.А. *Три аддитивные задачи*, Изв. РАН. Сер.мат., **56**, No 6 (1992), 1198–1216.

[6] Balog A., Friedlander K.J. *A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro*, Pacific. J. Math., **156** (1992), 45–62.

[7] Tolev D.I.*On a theorem of Bombieri–Vinogradov type for prime numbers from a thin set*, Acta Arifmetica, **81**, 1 (1997), 57–68.

Зинченко Н.А.
Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85,
308015, Белгород, Россия
E-mail address: `tt@torins.ru`