S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 3, стр. 441–450 (2006) УДК 519.172.2
MSC 05C15

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОЙ 2-ДИСТАНЦИОННОЙ РАСКРАШИВАЕМОСТИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ 6

О.В.БОРОДИН, А.О. ИВАНОВА, Т.К. НЕУСТРОЕВА

Abstract. A trivial lower bound for the 2-distance chromatic number $\chi_2(G)$ of any graph G with maximum degree Δ is $\Delta+1$. It is known that if G is planar and its girth is at least 7, then for large enough Δ this bound is sharp, while for girth 6 it is not true. We prove that if G is planar, its girth is 6, every edge is incident with a 2-vertex, and $\Delta \geq 31$, then $\chi_2(G) = \Delta + 1$.

1. Введение

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и ребер графа G, соответственно. Раскраска $f : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более 2 окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$. Задача 2-дистанционной раскраски возникает как в теории графов (см. [1]), так и в приложениях, например, в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования.

Очевидно, что $\chi_2(G) \geq \Delta+1$ для любого графа G, где Δ — его максимальная степень (ввиду того, что в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta}$). В [2] в частности доказано, что если G — плоский и его обхват g (т.е. длина минимального цикла) не меньше 7, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$ при $\Delta \geq 30$. Там же доказано, что при $g = 6$ существуют графы произвольно большой степени, имеющие $\chi_2(G) > \Delta + 1$. В [3] доказано, что если G — планарный граф обхвата 6, в котором $\Delta \geq 179$, а каждое ребро инцидентно 2-вершине, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$.

Теорема 1. *Если G — планарный граф обхвата 6, в котором $\Delta \geq 31$, а каждое ребро инцидентно 2-вершине, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть граф G' — контрпример к теореме 2, Δ — его максимальная степень. Пусть далее G — наименьший по числу ребер граф со свойствами: $\Delta(G) \leq \Delta$, $g(G) = g \geq 6$, $\chi_2(G) > \Delta+1$. Множество графов с этими свойствами непусто, т.к., например, G' всеми ими обладает. Доказательство теоремы 1 состоит в доказательстве несуществования графа G, что противоречит сделанному нами предположению о существовании графа G'.

Borodin O.V., Ivanova A.O., Neustroeva T.K., Sufficient conditions for the minimum 2-distance colorability of plane graphs of girth 6.

Работа авторов поддержана грантами РФФИ 03-01-00796, 05-01-00816 и 06-01-00694.

Поступила 1 декабря 2006 г., опубликована 29 декабря 2006 г.

Не нарушая общности, можно считать, что граф G связен. Легко видеть, что в G нет вершин степени меньше 2. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде

$$(4|E| - 6|V|) + (2|E| - 6|F|) = -12,$$

где F — множество граней графа G.

Отсюда

$$\sum_{v \in V}(2d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(r(f) - 6) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f. Положим *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G равным $2d(v) - 6$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани f графа G равным $r(f) - 6$. Заметим, что заряд 2-вершины равен -2, а заряды вершин степени не менее 3 и всех граней неотрицательны.

Мы опишем ряд структурных свойств графа G, опираясь на которые перераспределим заряды вершин и граней так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин и граней при перераспределении сохраняется, мы получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 1.

Заметим, что в силу минимальности G граф, полученный из G удалением ребра, имеет требуемую раскраску (напомним, что Δ — максимальная степень графа G', а не графа G). Легко видеть, что если мы сможем перекрасить концы этого ребра в цвета, не встречающиеся на смежных вершинах и вершинах на расстоянии 2 от соответствующего конца, то полученная раскраска будет 2-дистанционной. Удаленное ребро на рисунке будем перечеркивать.

Далее под *k-цепью* будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2. Две цепи с общим концом, лежащие на границе некоторой грани, будем называть *соседними*. Если 6-грань образована 3-цепью и 1-цепью, то эти цепи и саму грань будем называть *особыми*. Пусть $d_q(v)$ – число особых граней при вершине v. Назовем *пучком* множество из не менее чем двух 2-цепей с общими концами, а его *толщиной* – число 2-цепей в нем. Обозначим через $b(v)$ число пучков при вершине v. Назовем вершину v *младшей*, если $3 \leq d(v) \leq 5$.

2.1. **Структурные свойства минимального контрпримера.**

Лемма 1. *В G не существует $\geq$ 3-цепи, ограниченной хотя бы с одной стороны вершиной степени меньше Δ.*

Доказательство. На рис. 1 удаленное ребро перечеркивается и первой красится вершина, помеченная N_1 (имеется не более Δ ограничений на выбор цвета), а второй — N_2 (четыре ограничения). □

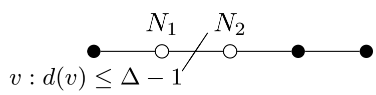


Рис. 1.

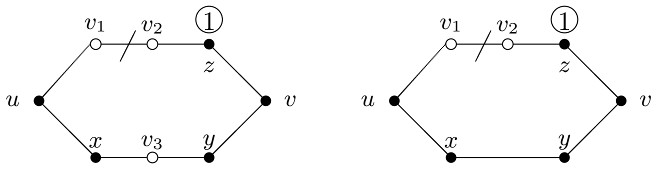
Следствие $1'$. В G не существует $\geq$ 4-цепи.

Лемма 2. *В G нет двух вершин, соединенных:*
(i) *двумя 3-цепями,*
(ii) *3-цепью и 2-цепью.*

Доказательство.

(i) Удалим перечеркнутое ребро на рис. 2 (a) и обесцветим вершины v_1, v_2 и v_3. Пусть z окрашена в цвет 1. Заметим, что v_1 нельзя покрасить лишь в том случае, когда на вершине u и смежных с ней вершинах встречаются все Δ цветов (т.е. для v_1 остается только цвет 1). В этом случае перекрасим вершину x в 1 (это всегда возможно, т.к. вершина y находится на расстоянии 2 от z, а следовательно, не окрашена в 1), а v_1 — в освободившийся цвет. Последними красим v_2 и v_3 (у них по 4 ограничения на выбор цвета).

(ii) Доказательство аналогично доказательству утверждения (i), с той лишь разницей, что нет вершины v_3 (см. рис. 2 (b)). □



(a) (b)

Рис. 2.

Лемма 3. *В G не существует пучка, ограниченного с обеих сторон вершинами степени меньше Δ.*

Доказательство. Удалим перечеркнутое ребро и обесцветим его концы (см. рис. 3). Пусть $d(w) \le \Delta - 1$ и $d(v) \le \Delta - 1$. Покрасим один из концов ребра, например, y (на него действует не больше Δ ограничений). Заметим, что x нельзя покрасить лишь в том случае, когда для x остается только цвет, занятый на y. В этом случае покрасим x в цвет вершины z, а z перекрасим в цвет вершины y (в дальнейшем такую операцию, встречающуюся уже в лемме 2, будем называть *подкруткой*). $\square$

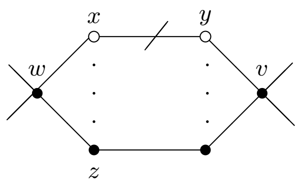


Рис. 3.

Через $d_l(v)$ обозначим число всех непучковых цепей (ножек), а через $d_j(v)$ — число 1-цепей, ведущих в младшие вершины. Наконец, пусть $d_s(v) = b(v) + d_l(v) - d_j(v) - d_q(v)$. Назовем *жесткими* все непучковые цепи, кроме 1-цепей, ведущих в младшие вершины, тогда их число равно $d_l(v) - d_j(v)$. Обозначим через $d_{ur}(v)$ число неособых жестких ножек. Тогда, как легко видеть, $d_s(v) = b(v) + d_{ur}(v) + d_q(v)$. Пусть также $k_1(v)$ – число жестких неособых 1-цепей при вершине v.

Лемма 4. *Если вершина v является концом пучка толщины не менее 6, то $d(v) \ge \min\{\Delta, \Delta + 1 - k_1(v) + d_j(v)\}$.*

Доказательство. Пусть $d(v) \le \Delta - k_1(v) + d_j(v)$ и $d(v) \le \Delta - 1$. По лемме 3 имеем $d(w) = \Delta$. Удалим перечеркнутое ребро и обесцветим вершину v, смежные с v вершины, кроме лежащих на жестких 1-цепях, все 2-вершины пучка B, центральные вершины особых 3-цепей и младшие на расстоянии 2 от v (см. рис. 4).

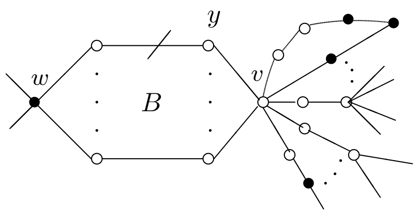


Рис. 4.

Пусть t — толщина пучка B. Покрасим v в один из цветов, встречающихся на w или на оставшихся окрашенными вершинах, смежных с w. Таких цветов $\Delta - t + 1$, а на выбор цвета для v имеется не более $d(v) - t + k_1(v) - d_j(v) \le \Delta - t$ ограничений (поскольку неособые жесткие 1-цепи дают по 2 ограничения, тогда как остальные неособые цепи – одно ограничение, а две цепи каждой особой грани вместе дают два ограничения), т.е. v всегда можно покрасить в цвет w или ее соседей. Затем красим смежные с w вершины из B (на последнюю имеется Δ ограничений, т.к. цвет вершины v при ней встречается дважды); затем — смежные с v вершины (что возможно, т.к. $t \ge 6$ и $d(v) \le \Delta - 1$; последней красится вершина y, и при этом, если нужно, делается подкрутка) и, наконец, центральные вершины особых 3-цепей и младшие вершины на расстоянии 2 от v. $\square$

Лемма 5. *Если вершина v является концом пучка толщины не менее 6, то v инцидентна жесткой неособой 1-цепи либо непучковой 2-цепи.*

Доказательство. Удалим ребро uv одного из пучков B при v. Обесцветим v, все смежные с ней вершины, кроме лежащих на особых 1-цепях, младшие концы 1-цепей и центральные вершины 3-цепей. Пусть конец пучка B, отличный от v, окрашен в 1. Если вершину v можно покрасить в 1, то раскраску можно продолжить следующим образом: раскрасим сначала непучковые вершины, смежные с v, а потом 2-вершины в пучках. Вершину u красим последней из пучковых; если нужно, применяем подкрутку. Последними красим младшие вершины и центральные вершины 3-цепей.

Если v нельзя покрасить в 1, то цвет 1 встречается либо на расстоянии 1 от v (на особой 1-цепи), либо на расстоянии 2. Если цвет 1 встречается на расстоянии 1 от v, то красим сначала v (это возможно, т.к. v имеет не более Δ запретов, учитывая то, что каждая цепь, кроме особой 1-цепи, дает не более 1 запрета, а две цепи особой грани вместе дают 2 запрета). Далее действуем как выше (для u цвет 1 повторяется).

Пусть цвет 1 встречается лишь на расстоянии 2 от v. Если цвет 1 встречается на особой 1-цепи, то красим в 1 смежную с v вершину 3-цепи этой особой грани. Если же цвет 1 встречается на пучковой цепи (не входящей в B), то красим в 1 смежную с v вершину любой другой цепи этого пучка. Далее красим v и остальные вершины, как выше. □

Следствие 6. *Если* $b(v) \geq 1$*, то* $d_{ur}(v) \geq 1$.

Лемма 7. *В* G *не существует цепи* vzw*, где* $d(v) \leq 13$*,* $d(z) = 2$*,* $d(w) \leq 5$*, кроме случая* $d(v) = d(w) = 2$*, т.е.* vzw *есть* 3*-цепь.*

Доказательство. Сначала считаем, что $d(v) = 2$, тогда $d(w) \geq 3$. Обесцвечиваем w, v и z (см. рис. 5). Первой красим v; это можно сделать, т.к. на нее действует не более Δ ограничений. Далее красим z: не более $13 + 4$ ограничений, затем – w (не более 10 ограничений). Если же $d(v) \geq 3$ и $d(w) \geq 3$, то действуем аналогично (на v действует не более 24 ограничений, а $\Delta \geq 24$). □

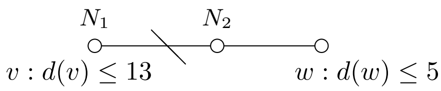


Рис. 5.

Лемма 8. *В* G *нет цикла, образованного особыми* 3*-цепями.*

Доказательство. Пусть k таких цепей $a_i x_i y_i z_i a_{i+1}$ образуют цикл (где $1 \leq i \leq k$, а $a_{k+1} = a_1$). Удалим ребро $x_1 y_1$ и раскрасим полученный граф. Обесцветим все 2-вершины нашего цикла; тогда для каждой из $2k$ вершин x_i, z_i имеется по два допустимых цвета, поэтому задача их раскраски сводится к нахождению обычной (не 2-дистанционной) предписанной раскраски четного цикла, что нетрудно сделать. Затем красим все y_i (у них по четыре ограничения на выбор цвета). □

Введем понятие *спонсора* следующим образом. Рассмотрим граф, образованный особыми (т.е. инцидентными 6-граням) 3-цепями. В силу леммы 9, эти цепи образуют лес. Возьмем висячую вершину и назовем ее *спонсором* для центральной 2-вершины единственной инцидентной ей 3-цепи. Затем отбросим эту 3-цепь, получившую спонсора, и повторим процедуру. Поскольку мы рассматриваем граф без циклов, то висячая вершина всегда найдется. По построению, каждая центральная 2-вершина особой 3-цепи получает спонсора, а каждая Δ-вершина будет служить спонсором для не более чем одной 3-цепи.

2.2. **Правила перераспределения зарядов.**

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов:

R1: (i) Любая вершина, инцидентная двум соседним $\geq$ 2-цепям, получает 1 от инцидентной этим цепям грани ранга ≥ 8.

(ii) Любая вершина, инцидентная соседним 1-цепи и $\geq$ 2-цепи, получает $\frac{1}{2}$ от инцидентной этим цепям грани ранга ≥ 7.

(iii) Любая вершина v, инцидентная соседним 1-цепям, концы которых являются младшими вершинами, получает 1 от инцидентной этим цепям грани.

(iv) Любая $\geq$ 8-грань f отдает заряд 1 центральной вершине инцидентной ей 3-цепи.

R2: (i) Любая вершина v с $d(v) \geq 3$, являющаяся концом 1-цепи, отдает смежной с ней 2-вершине заряд 1.

(ii) Любая вершина v с $d(v) \geq 3$, инцидентная $\geq$ 2-цепи, отдает смежной с ней 2-вершине заряд 2.

(iii) Любая центральная 2-вершина особой 3-цепи (инцидентной 6-грани) получает 1 от своего спонсора.

R3: Любая младшая вершина получает 1 от другого конца инцидентной ей 1-цепи.

Заряды вершины v и грани f, оставшиеся у них после применения правил R1–R3, обозначим через $\mu_3(v)$ и $\mu_3(f)$, соответственно.

2.3. **Проверка неравенства $\mu_3(f) \geq 0$.**

Напомним, что $\mu(f) = r(f) - 6$ и по лемме 2 в G нет двух Δ-вершин, соединенных двумя 3-цепями либо 3-цепью и 2-цепью. Пусть r — ранг грани f. Заметим, что ввиду леммы 7, вершины, получающие 1 по правилу R1iii, не являются младшими.

При $r \geq 12$ усредним заряды передаваемые f инцидентным ей вершинам по правилам R1 до $\frac{1}{2}$ следующим образом. Заряд 1, передаваемый f вершине v по правилам R1i, R1iii, распределим по $\frac{1}{4}$ на ребра, прилегающие к v по два с каждой стороны. Аналогично, заряд $\frac{1}{2}$, получаемый v по R1ii — по $\frac{1}{4}$ на два инцидентных ей ребра, а заряд 1, получаемый центральной 2-вершиной 3-цепи по R1iv — на все четыре ребра этой цепи. Ясно, что при таком усреднении f отдает на каждое ребро не более $\frac{1}{2}$. Отсюда $\mu_3(f) \geq r - 6 - r \times \frac{1}{2} = \frac{r-12}{2} \geq 0$.

Пусть теперь $7 \leq r \leq 11$.

Рассмотрим случай, когда в G нет 3-цепей. При $9 \leq r \leq 11$ усредним заряды, передаваемые гранью f вершине v следующим образом. Заряд, получаемый v по R1i — на четыре прилегающих к v ребра: на первые (ближайшие) по $\frac{1}{3}$ и на вторые по $\frac{1}{6}$, а по R1ii — на два ребра $\geq$ 2-цепи: на первое $\frac{1}{3}$, а на второе $\frac{1}{6}$, и R1iii — на четыре ребра по $\frac{1}{4}$. Таким образом, каждое ребро забирает от грани не более $\frac{1}{3}$, а значит $\mu_3(f) \geq r - 6 - r \times \frac{1}{3} = \frac{2(r-9)}{3} \geq 0$.

При $r = 8$ возможны два типа граней: грань может быть инцидентна либо четырем 1-цепям и тогда f отдает не более 2×1 по правилу R1iii, либо двум 2-цепям и одной 1-цепи и тогда отдает $2 \times \frac{1}{2}$ и 1 по правилам R1ii и R1i; а значит $\mu_3(f) \geq 0$. При $r = 7$, ввиду того, что в G нет 0-цепей, возможна единственная грань, инцидентная двум 1-цепям и одной 2-цепи. По правилу R1ii и лемме 2 имеем: $\mu_3(f) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Пусть теперь в G имеются 3-цепи. Учитывая лемму 2(ii), получаем, что 7-грани, инцидентной 3-цепи, не существует, значит $8 \leq r \leq 11$. При $r = 8$, по лемме 2(i) возможна только одна грань, инцидентная 3-цепи и двум 1-цепям. Отсюда по R1iv, R1ii, имеем $\mu_3(f) \geq 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$. Если $r = 9$, то f ограничена 3-, 2- и 1-цепью, следовательно, по R1i, R1ii и R1iv, $\mu_3(f) \geq 3 - 1 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$. Рассмотрим 10-грань f; она ограничена 3-, 3- и 1-цепями, либо 3-, 2- и 2-цепями, либо одной 3-цепью и тремя 1-цепями. В каждом случае f отдает не более 4 единиц заряда, отсюда $\mu_3(f) \geq 0$. Пусть наконец $r = 11$. Возможны два варианта: f ограничена 3-, 3- и 2-цепями, либо 3-, 2- и двумя 1-цепями. Тогда, по правилам R1i–iv, f отдает не более 5, откуда $\mu_3(f) \geq 5 - 5 = 0$.

В заключение отметим, что 6-грани (пучковые, особые и образованные тремя 1-цепями) в перераспределении зарядов не участвуют и остаются с нулевым зарядом.

2.4. **Суммарный заряд, получаемый вершиной от граней.**

Положим $M(v) = \max\{d_s(v), d_j(v)\}$.

Лемма 9. *Каждая немладшая вершина v получает от граней не меньше $M(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2}$.*

Доказательство. Удалим все 1-цепи и особые 3-цепи при вершине v. Тогда в полученной окрестности суммарное поступление зарядов от граней на вершину v равно $d_s(v) - k_1(v) - d_q(v)$. Действительно, число внепучковых граней в такой окрестности равно $b(v)+d_{ur}(v)-k_1(v)$, а каждая из них дает v заряд 1 по правилу R1i.

Нужно проследить за изменением заряда, поступающего на v при добавлении одной цепи, P_1, между цепями P_2 и P_3 в зависимости от того, что каждая из P_2, P_3 является 1-цепью или $\geq$ 2-цепью. В каждом из случаев достаточно рассмотреть соответствующие варианты правила R1.

Сначала добавим жесткие 1-цепи. При этом гарантированный минимум $d_s(v) - k_1(v) - d_q(v)$ не изменится.

Затем добавим особые 3-цепи; их ровно $d_q(v)$ по лемме 2i, и добавление каждой увеличивает поступление зарядов от граней на $\frac{1}{2}$. В результате гарантированное поступление возрастает до $d_s(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2}$.

При последующем восстановлении 1-цепей, ведущих в младшие вершины, получаемый вершиной v суммарный заряд будет каждый раз либо не меняться, либо увеличиваться на 1, в зависимости от того, увеличилось ли число пар таких соседних цепей при добавлении очередной цепи, т.к. каждая из таких пар приносит v дополнительную 1 по правилу R1iii. Если $d_j(v) \geq d_s(v)$, то таких пар не меньше чем $d_j(v) - d_s(v)$, и в результате v получает не менее $d_s(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2} + d_j(v) - d_s(v) = d_j(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2}$, а в противном случае – по-прежнему не менее $d_s(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2}$. $\square$

Лемма 10. *Любая немладшая вершина v имеет $\mu_3(v) \geq -6 - \xi(v) + M(v) + \frac{d_q(v)}{2}$, где $\xi(v) = 1$, если $d_q(v) \geq 1$, и $\xi(v) = 0$ в противном случае.*

Доказательство. Напомним, что исходный заряд $\mu(v)$ вершины v равен $2d(v) - 6$. Расход вершины v по правилам R2–R3 не превышает $2d(v) - d_1(v) + \xi(v)$, где $d_1(v)$ – число жестких 1-цепей (особых и неособых), инцидентных v, поскольку каждая цепь забирает от v не более 2 единиц заряда, жесткие 1-цепи – лишь по 1, а еще 1 заряда v может потерять по правилу R2iii (если она является спонсором). Согласно лемме 9, v получает от граней не менее $M(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2}$, поэтому $\mu_3(v) \geq 2d(v) - 6 - (2d(v) - d_1(v) + \xi(v)) + (M(v) - k_1(v) - \frac{d_q(v)}{2}) = -6 - \xi(v) + (d_1(v) - k_1(v)) + M(v) - \frac{d_q(v)}{2} = -6 - \xi(v) + d_q(v) + M(v) - \frac{d_q(v)}{2} = -6 - \xi(v) + \frac{d_q(v)}{2} + M(v)$. $\square$

2.5. Проверка того, что $\mu_3(v) \geq 0$ при $b(v) = 0$.

Пусть сначала $d(v) = 2$, тогда $\mu(v) = -2$ и v получает либо 2 от смежной вершины по R2ii, либо два раза по 1 от смежных вершин по R2i или, когда она является центральной вершиной 3-цепи, по 1 от инцидентных граней согласно правилу R1iv, либо по 1 от инцидентной ей ≥ 8-грани и своего спонсора по R2iii. (Последнее следует из того, что 3-цепь не может лежать в 7-грани по лемме 2ii и не может лежать в двух 6-гранях, т.к. в G нет 4-циклов.)

Рассмотрим младшую вершину v, т.е. пусть $3 \leq d(v) \leq 5$. Согласно лемме 7 из v исходят только жесткие 1-цепи. Отсюда по правилам R2i, R3, имеем $\mu_3(v) \geq 2d(v) - 6 - d(v) + d(v) \geq 0$.

Предположим, что $d(v) \geq 6$, но $\mu_3(v) < 0$, т.е. $\mu_3(v) \leq -\frac{1}{2}$. Тогда $M(v) + \frac{d_q(v)}{2} \leq \mu_3(v) + 6 + \xi \leq -\frac{1}{2} + 6 + \xi \leq 6\frac{1}{2}$ согласно лемме 10. Отсюда следует, что $d_j(v) + \frac{d_q(v)}{2} \leq M(v) + \frac{d_q(v)}{2} \leq 6\frac{1}{2}$ и $d_s(v) + \frac{d_q(v)}{2} = d_{ur}(v) + d_q(v) + \frac{d_q(v)}{2} \leq M(v) + \frac{d_q(v)}{2} \leq 6\frac{1}{2}$. Это означает, что $d(v) = d_{ur}(v) + 2d_q(v) + d_j(v) \leq 13$. Однако, по лемме 7 вершина v не соединяется с младшей вершиной по 1-цепи и не инцидентна ≥ 2-цепям. Следовательно, по R2i имеем $\mu_3(v) \geq 2d(v) - 6 - d(v) \geq 0$.

2.6. Максимальная толщина пучка при слабой вершине.

Назовем вершину v *слабой*, если $\mu_3(v) < 0$. Пусть v – слабая вершина. Напомним, что $\mu_3(v) \geq -6 - \xi(v) + M(v) + \frac{d_q(v)}{2}$ по лемме 10. Согласно предыдущему разделу можно считать, что $b(v) \geq 1$.

Лемма 11. *Если $b(v) = 1$ и $\mu_3(v) < 0$, то $t \geq \Delta - 13 \geq 18$.*

Доказательство. Поскольку $\mu_3(v) < 0$, то $d_s(v) = d_{ur}(v) + d_q(v) + 1 \leq M(v) < 6 + \xi(v) - \frac{d_q(v)}{2}$.

Докажем сначала, что $d_q(v) \leq 3$. Действительно, иначе $d_s(v) \geq 1 + 4 + 1 = 6$, т.к. $d_{ur}(v) \geq 1$ по следствию 6, но с другой стороны $d_s(v) < 6 + \xi(v) - \frac{d_q(v)}{2} \leq 5$.

Так как $d_s(v) = d_{ur}(v) + d_q(v) + 1 < 6 + \xi(v) - \frac{d_q(v)}{2}$, то $d_{ur}(v) + 2d_q(v) < 5 + \xi(v) + \frac{d_q(v)}{2} < 5 + 1 + \frac{3}{2}$, а следовательно $d_{ur}(v) + 2d_q(v) \leq 7$.

Поскольку $b(v) = 1$, то $t = d(v) - d_{ur}(v) - 2d_q(v) - d_j(v) \geq d(v) - 7 - d_j(v)$. Если $d(v) = \Delta$, то $t \geq \Delta - 13$, т.к. $d_j(v) \leq M(v) \leq 6\frac{1}{2}$. Если же $d(v) < \Delta$, то по лемме 4 имеем $t \geq \Delta + 1 - k_1(v) + d_j(v) - d_{ur}(v) - 2d_q(v) - d_j(v) \geq \Delta + 1 - 4 - 7$, т.к. $k_1(v) \leq d_{ur}(v) \leq 4$, поскольку $b(v) = 1$ и $\mu_3(v) < 0$. $\square$

Лемма 12. *Если v – слабая и $b(v) \geq 2$, то $\mu_3(v) \in \{-3, -2\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}\}$ и v инцидентна пучку толщины t, где*

$$t \geq \begin{cases} \frac{\Delta-5}{2} \geq 13, & \text{если } \mu_3(v) = -3; \\ \frac{\Delta-8}{2} > 11, & \text{если } \mu_3(v) = -2\frac{1}{2}; \\ \frac{\Delta-6}{3} > 8, & \text{если } \mu_3(v) = -2; \\ \frac{\Delta-9}{3} > 7, & \text{если } \mu_3(v) = -1\frac{1}{2}; \\ \frac{\Delta-7}{4} \geq 6, & \text{если } \mu_3(v) = -1; \\ \frac{\Delta-10}{4} > 5, & \text{если } \mu_3(v) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Из доказательства леммы 9 следует, что $\mu_3(v)$ – либо целое число (если $d_q(v)$ четно), либо имеет дробную часть $\frac{1}{2}$ (если $d_q(v)$ нечетно). Согласно следствию 6 имеем $d_{ur}(v) \geq 1$, а значит $M(v) \geq d_s(v) \geq 3 + d_q(v)$, откуда $\mu_3(v) \geq -3 - \xi + \frac{3d_q(v)}{2} \geq -3 + \frac{d_q(v)}{2} \geq -3$.

Рассмотрим случай $\mu_3(v) = -3$. Здесь $d_q(v) = 0$ и $M(v) = 3$, откуда следует, что $d_s(v) \leq 3$ и $d_j(v) \leq 3$. Так как $k_1(v) = 1$, то $d(v) \geq \Delta - 1$ по лемме 4. Поскольку $d_{ur}(v) \geq 1$, то $b(v) = 2$ и $d_{ur}(v) = 1$, а значит при v имеется не менее $\Delta - 5$ пучковых цепей и не более 4 ножек, т.е. существует пучок толщины не менее $\frac{\Delta-5}{2}$.

Пусть теперь $\mu_3(v) = -2\frac{1}{2}$. Теперь $d_q(v) = 1$, поэтому $M(v) = 4$, откуда следует, что $b(v) = 2$. Так как $k_1(v) = 1$, то $d(v) \geq \Delta - 1$ по лемме 4, а $d_{ur}(v) = 1$, т.е. при v имеется не менее $\Delta - 8$ пучковых цепей и не более 7 ножек, а значит существует пучок толщины не менее $\frac{\Delta-8}{2}$. Ясно, что $d_q(v)$ не может быть равно большему нечетному числу.

Мы рассмотрим еще только последний случай $\mu_3(v) = -\frac{1}{2}$, а разбор остальных случаев аналогичен и оставляется заинтересованному читателю.

Теперь $d_q(v)$ должно принимать нечетное значение. Если $d_q(v) = 1$, то $M(v) = 6$, откуда следует, что $b(v) \leq 4$. Если $b(v) = 2$, то при v имеется 3 жестких неособых ножки и не более 6 мягких. При этом $d(v) \geq \Delta - 2$ по лемме 4, поэтому v имеет не менее $\Delta - 13$ пучковых цепей и не более 11 ножек, а значит существует пучок толщины не менее $\frac{\Delta-13}{2}$.

Пусть теперь $b(v) = 3$, тогда при v имеется 2 жестких неособых ножки и не более 6 мягких. При этом $d(v) \geq \Delta - 1$ по лемме 4, поэтому v имеет не менее $\Delta - 11$ пучковых цепей и не более 10 ножек, а значит существует пучок толщины не менее $\frac{\Delta-11}{3}$.

Наконец, пусть $b(v) = 4$, тогда при v имеется 1 жесткая неособая ножка и не более 6 мягких. При этом $d(v) \geq \Delta - 1$ по лемме 4, поэтому v имеет не менее $\Delta - 10$ пучковых цепей и не более 9 ножек, а значит существует пучок толщины не менее $\frac{\Delta-10}{4}$.

Остается заметить, что $\frac{\Delta-13}{2} \geq \frac{\Delta-11}{3} \geq \frac{\Delta-10}{4}$ при $\Delta \geq 25$. Ясно, что $d_q(v)$ не может быть равно большему нечетному числу, т.к. $d_{ur}(v) \geq 1$, $b(v) \geq 2$, а $d_s(v) \leq M(v) = 5$. □

2.7. **Окончательное распределение зарядов и его следствия.**

Мы знаем, что каждая слабая вершина v имеет $b(v) \geq 1$. Один из пучков при v, имеющих наибольшую толщину, назовем *донорским* для вершины v, а его конец – *донором* вершины v.

R4: Слабая вершина v получает заряд $-\mu_3(v)$ от своего донора по донорскому пучку.

Заряды вершины v и грани f, оставшиеся у них после применения правил R1–R4, обозначим через $\mu^*(v)$ и $\mu^*(f)$, соответственно. Ясно, что $\mu^*(f) = \mu_3(f)$, для любой грани f, а $\mu^*(v) \neq \mu_3(v)$ лишь для слабых вершин и доноров.

Далее в этом разделе мы убедимся, в частности, что никакой донор не является слабой вершиной, т.е. по любому донорскому пучку передача зарядов происходит лишь в одном направлении, откуда следует, что $\mu^*(v)$ для любой слабой вершины v равен 0. Более того, будет показано, что окончательный заряд $\mu^*(w)$ любого донора w неотрицателен.

2.7.1. *Донорская вершина делает по меньшей мере одну передачу на однопучковую вершину.*

Пусть B – пучок толщины t с концами v_L и v_R, где v_L – однопучковая слабая вершина. Докажем, что тогда $\mu_3(v_R) > -\mu_3(v_L) > 0$ и B – единственный донорский пучок при v_R. Отсюда будет следовать, что окончательный заряд $\mu^*(v_R)$ вершины v_R положителен.

Удалим одно из ребер пучка B и обесцветим вершины v_L, v_R, все смежные с ними вершины, кроме тех, что лежат на инцидентных им жестких 1-цепях, младшие вершины на расстоянии 2 от v_L и v_R, а также все центральные вершины особых 3-цепей при v_L и v_R. Тогда на выбор цвета для v_L имеется не более чем $d(v_L) - t + k_1(v_L) - d_j(v_L)$ ограничений, поскольку из $d(v_L)$ цепей при вершине v_L не несут запретов $t + d_j(v_L)$ цепей, неособые жесткие 1-цепи несут по 2 запрета, а каждая особая 1-цепь вместе с соответствующей особой 3-цепью – в сумме 2 запрета, а все остальные цепи – не более, чем по 1 запрету. Поскольку $b(v_L) = 1$, то $t = d(v_L) - d_{ur}(v_L) - 2d_q(v_L) - d_j(v_L)$, откуда следует, что $d(v_L) - t + k_1(v_L) - d_j(v_L) = d_{ur}(v_L) + k_1(v_L) + 2d_q(v_L) \leq 2d_{ur}(v_L) + 2d_q(v_L) \leq 10$. В последнем неравенстве мы использовали то, что $d_{ur}(v) + d_q(v) \leq 5$ для любой слабой вершины v, т.к. $M(v) \leq 6$.

Если найдется цвет, в который можно покрасить и v_L, и v_R, то можно докрасить граф G, как в доказательстве леммы 5. Поэтому можно считать, что v_R имеет не менее $\Delta + 1 - 10 \geq 22$ ограничений на выбор цвета. Но по лемме 11 имеем $t \geq \Delta - 13$, откуда следует, что при v_R существует не более 13 цепей, не входящих в пучок B. Если бы не более чем 8 из них давали бы по 2 запрета, то всего запретов было бы $\leq 2 \times 8 + (13 - 8) < 22$. Следовательно при v_R существует не менее 9 жестких неособых 1-цепей (запреты от особых 1-цепей мы учитываем вместе с особыми 3-цепями), дающих по 2 запрета. Отметим, что тогда $d_s(v_R) \geq 1 + 9 + 1 = 11$. Действительно, если кроме пучка B и 9 жестких неособых 1-цепей при v_R не было бы ни пучковых, ни жестких непучковых цепей, то запретов для v_R было бы лишь $\leq 2 \times 9$.

Итак, $\mu_3(v_R) \geq 11 - 6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$. Отметим, что v_R делает передачу лишь по пучку B, поскольку толщина второго, если он существует, не превосходит $13 - 9 = 4$, а передачи происходят лишь по пучкам толщины не менее 6 ввиду леммы 12. Остается отметить, что $\mu_3(v_L) \geq -4$, т.к. $d_{ur}(v_L) \geq 1$ и $b(v_L) = 1$, т.е. $d_s(v_L) \geq 2$.

2.7.2. *Донорская вершина w делает передачи только на неоднопучковые вершины.*

Сначала докажем лемму о донорском пучке. Напомним, что $k_1(v)$ есть число жестких неособых 1-цепей при вершине v, и пусть $d_3(v)$ – число 3-цепей при v. Положим $d_0(v) = \Delta - d(v) + d_3(v) + d_j(v)$.

Лемма 13. *Пусть слабая вершина v_L с $b(v_L) \geq 2$ является концом донорского пучка B толщины t, где $t \geq 6$, с донорской вершиной v_R, а $\rho(v_L) = t - k_1(v_L) + d_0(v_L)$. Тогда $k_1(v_R) \geq t + d_0(v_R)$, если выполнено хотя бы одно из условий:*
(i) $d(v_R) < \Delta$, $\rho \geq 1$;
(ii) $d(v_R) = \Delta$, $\rho \geq 3$ и при v_R существует хотя бы одна ≥ 2-цепь, не входящая в B;
(iii) $d(v_R) = \Delta$, $\rho \geq 5$ и при v_R существует 1-цепь, ведущая в младшую вершину.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $k_1(v_R) \leq t - 1 + d_0(v_R)$. Удалим перечеркнутое ребро и обесцветим v_L, v_R и все вершины смежные с ними по $\geq$ 2-цепям и 1-цепям, ведущим в младшие вершины, а также все младшие на расстоянии 2 от v_L и v_R и центральные вершины 3-цепей, инцидентных v_L и v_R (см. рис. 6). Будем считать, что конец второго пучка B', инцидентного v_L, окрашен в цвет 1.

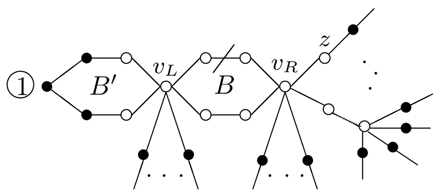


Рис. 6.

Если цвет 1 не встречается ни на одной из смежных с v_L вершин, то покрасим в 1 одну из вершин, смежных с v_L в пучке B. Теперь покрасим v_R в цвет отличный от 1: это возможно, т.к. v_R имеет $\geq t - 1$ цепей пучка B и $d_3(v_R) + d_j(v_R)$ непучковых цепей, не дающих ограничений на выбор цвета для v_R, а $k_1(v_R)$ ножек дают по 2 ограничения, т.е. v_R имеет $\geq \Delta + 1 - d(v_R) + d_3(v) + d_j(v) + t - 1 - k_1(v_R) = d_0(v_R) + t - k_1(v_R) \geq 1$ свободных цветов.

Отметим, что для v_L имеется не менее чем $\Delta + 1 - \Delta + (t-1) + (\Delta - d(v_L)) + d_3(v_L) + d_j(v_L) - k_1(v_L) = t - k_1(v_L) + \Delta - d(v_L) + d_3(v_L) + d_j(v_L) = \rho$ допустимых цветов ($\geq t - 1$ цепей пучка B не дают ограничений, как и $\Delta - d(v_L)$ фантомных (отсутствующих) цепей, 3-цепей и мягких ножек, в то время как $k_1(v_L)$ дают по 2 ограничения, а остальные — не более чем по одному). Обозначим эти цвета через $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$.

Случай 1. На смежных с v_R вершинах или на самой v_R встречается хотя бы один из цветов $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$.

Красим v_L в этот цвет α, затем красим вершины, смежные с v_R по ножкам (заметим, что в момент окраски вершины y, смежной с младшей, от младшей добавляется не более четырех ограничений, но неокрашенных братьев из B у вершины y больше, т.к. $t \geq 6$), потом пучковые вершины не из B, а потом все пучковые из B, смежные с v_R (ввиду повторения цвета α на последнюю из них действует не более Δ ограничений, если цвет 1 встречается на одной из смежных с v_L вершинах не из B; если в 1 покрашена смежная с v_L вершина из B, то применяем подкрутку, введенную в доказательстве леммы 3). Далее по той же схеме мы красим соседей вершины v_L; заметим только, что последними красим вершины из B', пользуясь тем, что для них цвет 1 повторяется, и применяя к самой последней подкрутку. Наконец красим центральные вершины 3-цепей и младшие вершины, на последние действует не более 10 ограничений.

Случай 2. На смежных с v_R вершинах и на самой v_R не встречается ни один из цветов $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$.

(i) Если $d(v_R) < \Delta$ и $\rho \geq 1$, то красим v_L в любой допустимый цвет, например α_1. Тогда предыдущее доказательство можно повторить, поскольку на последнюю из смежных с v_R вершин пучка B (последней мы делаем не ту вершину, которая смежна с 2-вершиной пучка B, окрашенной в цвет 1) имеется не более Δ ограничений.

В случаях (ii) и (iii) имеем $d(v_R) = \Delta$ и хотим покрасить одну из смежных с v_R вершин и вершину v_L в один и тот же цвет, тогда мы сможем повторить доказательство, поскольку для 2-вершины смежной с v_R, окрашиваемой последней в пучке B, этот цвет будет повторяться, а значит на нее будет действовать не более Δ ограничений. Остальные вершины красятся в таком же порядке, как и в случае 1.

В случае (ii) такую вершину z мы выбираем на ≥ 2-цепи не из B. Поскольку на z действует не более двух ограничений по ее цепи (ведь ни цвет v_R, ни цвета соседей v_R не встречаются среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$), а $\rho \geq 3$, то z и v_L можно покрасить одинаково.

В случае (iii) вершину z мы выбираем на 1-цепи, ведущей в младшую вершину. Тогда на z действует не более 4 ограничений, а т.к. $\rho \geq 5$, то снова z и v_L красим в один и тот же цвет. □

Следствие 14. *Если $\rho \geq 5$, то $k_1(v_R) < t + d_0(v_R)$ лишь если $d(v_R) = \Delta$, $b(v_R) = 1$ и при v_R каждая непучковая цепь является жесткой неособой 1-цепью.*

Пусть v_R – донор неоднопучковых вершин.

Случай 1. Вершина v_R удовлетворяет условиям леммы 13, а значит при ней есть не менее t жестких неособых 1-цепей.

Напомним, что $d_s(v_R) = b(v_R) + d_{ur}(v_R) + d_q(v_R)$, поэтому $\mu_3(v_R) \geq -6 - \xi + \frac{d_q(v_R)}{2} + d_s(v_R) \geq -6 - \xi + \frac{3d_q(v_R)}{2} + t + b(v_R) \geq t - 6 + b(v_R) > 0$, т.к. толщина любого донорского пучка не меньше 6.

Пусть η – максимальная передача, совершаемая по донорским пучкам по правилу R4, и B – пучок при v_R, по которому происходит передача величиной в η. Из леммы 12 следует, что $\eta \leq 3$. Для каждого η оценим максимальный суммарный расход, σ, вершины v_R по донорским пучкам.

Если $\eta = 3$, то v_R не может делать передач по пучкам, отличным от B, т.к. при v_R существует не более $\Delta - 2 \times \frac{\Delta-5}{2} < 6$ непучковых цепей, не входящих в B. Отсюда $\sigma = 3$, а значит $\mu^*(v_R) \geq t - 6 + b(v_R) - 3 \geq 13 - 6 + 1 - 3 > 0$, т.к. $t \geq 13$ по лемме 12.

Пусть $\eta = 2\frac{1}{2}$, тогда v_R имеет не более $\Delta - 2 \times \frac{\Delta-8}{2} = 8$ пучковых цепей, не входящих в B, а по лемме 12 отсюда следует, что v_R может сделать лишь одну передачу по пучку, отличному от B, причем не превышающую $1\frac{1}{2}$. Значит $\mu^*(v_R) \geq t - 6 + 1 - 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} \geq 0$, т.к. $t \geq 12$.

Если $\eta = 2$, то при v_R существует не более 2 пучков, уносящих от v_R более 1. Действительно, иначе $d(v_R) \geq 2 \times \frac{\Delta-6}{3} + 2 \times \frac{\Delta-9}{3} > \Delta$, т.к. $\Delta > 30$; противоречие. Таким образом, $\sigma \leq 2 \times 2 + (b(v_R) - 2) \times 1 = b(v_R) + 2$, а значит $\mu^*(v_R) \geq t - 6 + b(v_R) - b(v_R) - 2 \geq t - 8 > 0$.

Пусть $\eta = 1\frac{1}{2}$, тогда при v_R существует не более 3 пучков, забирающих от v_R более 1. Действительно, в противном случае $d(v_R) \geq 5 \times \frac{\Delta-9}{3} > \Delta$, т.к. $\Delta > 23$; противоречие. Таким образом, $\sigma \leq 3 \times 1\frac{1}{2} + (b(v_R) - 3) \times 1 = b(v_R) + 1\frac{1}{2}$, а значит $\mu^*(v_R) \geq 8 - 6 - 1\frac{1}{2} > 0$.

Если $\eta \in \{\frac{1}{2}, 1\}$, то $\sigma \leq b(v_R)$, а значит $\mu^*(v_R) \geq t - 6 + b(v_R) - \sigma \geq 0$, т.к. $t \geq 6$ по лемме 12.

Случай 2. Вершина v_R не удовлетворяет ни одному из условий (i)–(iii) леммы 13.

Заметим, что ограничения на ρ в условиях (i) и (ii) леммы 13 выполнены всегда. Действительно, даже $t - k_1(v_L) \geq 3$ поскольку $t \geq 6$, мы рассматриваем случай $b(v_L) \geq 2$, а $k_1(v_L) \leq 3$ для слабой вершины v_L (достаточно рассмотреть случаи $d_q(v_L) = 0$ и $d_q(v_L) > 0$). Поэтому в дальнейшем можно считать, что $d(v_R) = \Delta$ и при v_R нет ≥ 2-цепей, не входящих в B.

Пусть $t \geq 8$, тогда $\rho \geq t - k_1(v_L) \geq 5$, поэтому невыполнение условия (iii) означает, что при v_R все цепи, не входящие в B, являются жесткими неособыми 1-цепями. Тогда v_R передает по своему единственному пучку B не больше 3, поэтому нужно исключить лишь возможность $\mu_3(v_R) \leq 2$, т.е. $-6 + 1 + \Delta - t \leq 2$, а значит $t \geq \Delta - 7$. Это означает, что при v_L и v_R имеется не более, чем по 7 цепей, не входящих в B. Тогда, повторив рассуждения из доказательства леммы 5, мы видим, что сумма запретов на v_L и v_R не больше $4 \times 7 \leq \Delta + 1$, а значит можно покрасить v_L и v_R в один и тот же цвет. Таким образом, $\mu^*(v_R) \geq 0$.

Рассмотрим последний случай $6 \leq t \leq 7$. Если $k_1(v_L) = 1$, то $\rho \geq t - k_1(v_L) \geq 5$, поэтому окрестность v_R состоит из пучка B и не менее чем $\Delta - 7$ жестких неособых 1-цепей, поэтому $\mu^*(v_R) \geq \mu_3(v_R) - 1 \geq -6 + 1 + \Delta - 7 - 1 > 0$.

Напомним, что на самом деле $\rho \geq t - k_1(v_L) + d_j(v_L)$, поэтому при $d_j(v_L) \geq 2$ уже имеем $\rho \geq 5$, т.к. $k_1(v_L) \leq 3$. Далее будем считать, что $d_j(v_L) \leq 1$, иначе снова $\mu^*(v_R) \geq 0$. Заметим, что $b(v_L) \leq 3$ и $d_q(v_L) \leq 2$. По лемме 4 имеем $d(v_L) \geq \Delta - 2 + d_j(v_L)$. Если $d_j(v_L) = 0$, то $d(v_L) \leq 3 \times 7 + 3 + 2 \times 2 < \Delta - 2$, если же $d_j(v_L) = 1$, то $d(v_L) \leq 3 \times 7 + 3 + 2 \times 2 + 1 < \Delta - 1$; противоречие в обоих случаях.

Итак, мы доказали, что

$$0 \leq \sum_{x \in V \cup F} \mu^*(x) = \sum_{x \in V \cup F} \mu_3(x) = \sum_{x \in V \cup F} \mu(x) < 0,$$

противоречие с (1). Теорема 1 доказана.

Авторы благодарят А.Н. Глебова за полезные замечания по рукописи данной статьи.

Список литературы

[1] Jensen T. R., Toft B. *Graph coloring problems.* New York: John Wiley & Sons, 1995.

[2] Бородин О.В., Глебов А.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К., Ташкинов В.А. *Достаточные условия 2-дистанционной* (Δ+1)*-раскрашиваемости плоских графов.* Сибирские электронные математические известия, **1** (2004), 129–141 (http://semr.math.nsc.ru/).

[3] Бородин О.В., Иванова А.О., Неустроева Т.К. *Достаточные условия 2-дистанционной* ($\Delta + 1$)*-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6.* Дискретный анализ и исследование операций, июль–сентябрь. Серия 1, **12**:3 (2005), 32–47.

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: brdnoleg@math.nsc.ru

Анна Олеговна Иванова
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: shmgnanna@mail.ru

Татьяна Кимовна Неустроева
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: podn2001@mail.ru