

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 4, стр. А.1–А.7 (2007)*УДК 517.98  
MSC 01A70

## О МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАБОТАХ КАНТОРОВИЧА

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

АБСТРАКТ. This is a brief overview of the signposts of the mathematical research of Leonid Kantorovich (1912–1986).

Невежество — не аргумент, а состояние, свидетельствующее ленью в прошлом, ограниченность в настоящем и деградацию в будущем. Знать всё невозможно, поэтому невежество — это отнюдь не пробелы в образовании, а ошибочное позиционирование себя по отношению к границе между познанным и неизвестным. Каждый знает всё про себя. Информация важная, но, как показывают многочисленные опыты, совершенно недостаточная для преодоления невежества. Кое-что необходимо знать и про других. Не про всех, но про некоторых.

Леонид Витальевич Канторович (19.01.1912–7.04.1986) прошел путь, который обогатил и украсил отечественную историю. Его судьба и вклад в науку несут колоссальный импульс просвещения.

Часто обсуждается — кем Канторович был больше, математиком или экономистом. Сам он ответил на этот вопрос на юбилейном собрании в ЦЭМИ в честь своего 70-летия. Леонид Витальевич сказал, что есть два Канторовича — математик и экономист, но они — сиамские близнецы.

Канторович был вундеркиндом-математиком. Он стал профессором в 20 лет и был одним из наиболее ярких и широких математиков своего времени.

---

KUTATELADZE, S.S. ON THE MATHEMATICAL CONTRIBUTION OF KANTOROVICH.

© 2007 Кутателадзе С.С.

Доклад 19.01.2007 на заседании семинара Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, посвященного 95-летию со дня рождения Л. В. Канторовича.

*Поступила 11 февраля 2007 г., опубликована 23 февраля 2007 г.*



Канторович — достойный представитель петербургской математической школы, основателем которой принято считать П. Л. Чебышева. Взгляд на математику как на науку, все разделы которой не просто взаимосвязаны, а неразрывны, соседствовал в творчестве и методологии Чебышева с пониманием особой роли математики во взаимопроникновении науки, техники, технологии и производства. Благодаря трудам Чебышева, представление о единстве фундаментальных и прикладных исследований как *sine qua non* прогресса стало уникальным ментальным символом российской науки. Ленинградский период школы Чебышева связан с Владимиром Ивановичем Смирновым. Математик-энциклопедист, Смирнов задавал стандарты, приоритеты и моральные принципы в науке и преподавании.

Универсальный подход к математике характерен для всего творчества Канторовича. Среди его монографических сочинений наряду с классическими книгами «Функциональный анализ в нормированных пространствах», «Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах», «Приближенные методы высшего анализа», «Математические методы организации и планирования производства» есть и такие, как «Теория вероятностей», «Вариационное исчисление», «Определенные интегралы и ряды Фурье», «Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций».

Научная работа Канторовича началась под руководством Г. М. Фихтенгольца при переходе на второй курс. Перед Канторовичем были поставлены задачи, относящиеся к наиболее актуальным в конце 1920-х годов разделам дескриптивной теории функций и множеств. Понять и оценить творческие предпочтения Канторовича в математике невозможно без понимания обстановки на предвоенных математических фронтах, без учета социальных реалий того времени. Проблематика теории функций и дескрипции характерна для московской математической школы, становление которой в начале 20 века связано с именем Н. Н. Лузина. Нельзя не видеть

влияния Лузина на формирование интереса Канторовича к дескрипции, в которой Канторович быстро выдвинулся на первые роли.

Знаменитый доклад Лузина «Современное состояние теории функций действительного переменного», сделанный 29 апреля 1927 года на Всероссийском съезде математиков в Москве, стал этапом в математической жизни страны. Парадоксальным образом этот доклад завершал иллюзию окончательного обоснования математики с помощью дескрипции и зафиксировал поворот к новой математической парадигме, лишенной несбыточных надежд. Математика освобождалась от пут категоричности, открывая бескрайние горизонты своей новой свободы.

Если петербургская-ленинградская школа испытывала исключительно благотворное моральное влияние Смирнова, нравственный климат в Москве на долгие годы был определён мрачными обстоятельствами «дела Лузина», сшитого при участии его ближайших учеников с 1930 по 1936 годы.

Среди бумаг Канторовича недавно нашлось письмо Лузина, датированное 1934 годом и посвященное касающихся его и Канторовича обстоятельств подготовки издания Советской математической энциклопедии. Раздел по аналитическим множествам был поручен Канторовичу, а не Лузину. Между тем Канторовичу было в то время всего 22 года. Удивительная прозорливость Лузина проявлялась не только внутри математики, но и в отношении ее творцов. Он писал Канторовичу:

*«Прежде всего Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер.*

*Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее, если будете культивировать в себе Ваши силы, беседуя с сильнейшими (умершими) людьми.*

*Вы должны знать, что я глубочайше чтю Ваши научные силы и что, по Ленинграду, Вы мой избранник в члены-корреспонденты Академии наук. По Москве я буду стоять за Гельфонда, сделавшего недавно гениальное открытие»<sup>1</sup>.*

Неудивительно, что это письмо было далеко запрятано — с 1936 года до своей кончины Лузин четырнадцать лет ходил с клеймом «врага в советской маске».

Среди своих математических работ Канторович выделял циклы исследований в следующих направлениях: дескриптивная теория функций и теория множеств; конструктивная теория функций; приближенные методы анализа; функциональный анализ; функциональный анализ и прикладная математика; линейное программирование; вычислительная техника и программирование. Во всех указанных направлениях Канторович получил первоклассные, зачастую основополагающие результаты. В математический тезаурус прочно вошли пространства Канторовича, ядра Канторовича, метод Ньютона — Канторовича, вариационный метод Канторовича и, конечно же, многочисленные теоремы Канторовича.

Нынешние ученые, живущие на гранты, нередко работают и пишут для прокорма. Девиз “Publish or Perish” давно уже не ремарка острослова от науки, а каждодневный слоган исследователя. Канторович творил

<sup>1</sup>Решетняк Ю. Г., Кутателадзе С. С. *Письмо Н. Н. Лузина Л. В. Канторовичу*// Вестник РАН.—Т. 72, №8 (2002).— С. 740–742.

математику, отвечающую критериям совершенства, сформулированным Саундерсом Маклейном. Его математика была неизбежной и своевременной, отвечала на поставленные вопросы и освещала новые пути в науке.

С высоты нашего времени весьма показательными вехами на творческом пути Канторовича видятся всесоюзные математические съезды. Первый Всесоюзный съезд математиков проходил в Харькове с 24 по 30 июня 1930 года. В нем приняли участие около пятисот человек, среди них — 14 иностранцев. Наиболее известные фигуры — Ж. Адамар, В. Бляшке, О. Блументаль, А. Данжуа, С. Мандельбройт, Э. Картан, П. Монтель.

Открылся съезд докладом О. Ю. Шмидта «Роль математики в строительстве социализма». Блестящая по форме и увлекательная речь Шмидта — поучительный и характерный образец методологических взглядов того периода отечественной истории. Разумные соображения сочетались с космически нелепыми идеологизмами советского времени. Политизированные перегибы не могли перечеркнуть актуальный призыв Шмидта к аудитории: «В стране, где строится социализм, где нужно уметь считать, нужно, чтобы это умение математически формулировать стоящие перед каждой задачи, умение подойти во всеоружии науки к каждой конкретной задаче, умение руководить наиболее экономно и точно, — чтобы это умение было всеобщим достоянием».

Сам Канторович выступил на съезде в секции «Теория функций и теория рядов» на вечернем заседании 25 июня. Председательствовал Д. Е. Меньшов, тема доклада «О проективных совокупностях». В том же заседании выступил соавтор Канторовича Е. М. Ливенсон с докладом «Об аналитических операциях над множествами».

Из пленарных выступлений особой широтой и глубиной выделялся доклад С. Н. Бернштейна «Современное состояние и проблемы теории приближения функций действительного переменного посредством полиномов». Трудно сомневаться в том, что доклады Шмидта и Бернштейна оказали большое воздействие на восемнадцатилетнего Канторовича.

Второй съезд проходил с 24 по 30 июня 1934 г. в Ленинграде. Программа съезда была весьма обширной и демонстрировала крупные достижения отечественной математической мысли того периода. Работы Канторовича были отражены не только в двух его секционных докладах «О конформных отображениях областей» и «О некоторых методах приближенного решения уравнений в частных производных», но и в обзорном пленарном докладе Смирнова «Ленинградские работы по анализу».

Тридцатые годы прошлого века занимают в творчестве Канторовича особое место. Именно тогда сложилась характерная для него методология синтеза теоретических и прикладных исследований, сочетания наиболее абстрактных математических идей с приземленными конкретными практическими разработками. В эти годы сверкают фейерверки его идей в функциональном анализе. В 1935 году он закладывает основы теории упорядоченных пространств, выделяя класс дедекиндово полных векторных решеток и выдвигая гениальный эвристический принцип, нашедший свое отражение в булевозначном анализе наших дней. Введенные им  $K$ -пространства, которые в своих рабочих тетрадях Канторович называл «мои пространства», предоставляют новые модели вещественной прямой в нестандартных моделях теории множеств. Тем самым подтвердилось предвидение Канторовича, считавшего элементы своих пространств своего рода обобщенными числами, для которых сохраняются действующие в числовой прямой абстрактные закономерности.

Канторович вносит вклад в геометрию классических банаховых пространств и развивает новые приближенные приемы анализа: вариационный метод, метод коллокаций, модифицированные градиентные методы.

До сих пор остаются малоизвестными работы Канторовича по «расширению пространства Гильберта», ставшие удивительно ярким эпизодом предистории теории распределений. Уже в 1935 году, изучая в одном семинаре с С. Л. Соболевым классическую книгу Дж. фон Неймана «Математические методы квантовой механики» (1932), Канторович развивает подход К. Фридрикса (1934) к проблеме построения «идеальных функций», явно выписывая гильбертовы пространства, чьи элементы сейчас мы именуем умеренными периодическими распределениями.

Об этих работах И. М. Гельфанд пишет:

*«По существу Леонид Витальевич первым понял значение обобщенных функций и написал об этом задолго до Лорана Шварца. И, я думаю, не случайно, что не его работа оказалась широко известной. Для концепции Леонида Витальевича это был только маленький фрагмент. То, что было всей жизнью или основой творчества для других, было маленьким фрагментом выстраивающейся у него картины математики и ее связей с миром. Я думаю, что сделанная намного позже работа А. Г. Костюченко и моя об использовании обобщенных функций для спектрального анализа операторов была именно той, которую Леонид Витальевич не написал в свое время. По существу же он четко и ясно понимал эту работу, какие теоремы можно получить»<sup>2</sup>.*

В 1939 г. вышла брошюра «Математические методы организации и планирования производства», зафиксировавшая не только создание новой научной дисциплины — линейного программирования, но и открывшая экономико-математическую ветвь творчества Канторовича. Очередной третий математический съезд советских математиков состоялся спустя более чем двадцать лет после второго — летом 1956 г. Другое состояние общества, новый этап развития отечественной науки. Канторович за истекшие годы прошел путь от математического вундеркинда до мастера-корифея первых рядов, ставшего одним из идеологов вычислительной математики и зарождающейся информатики.

На III съезде С. Л. Соболев, Л. А. Люстерник и Л. В. Канторович выступили с программным пленарным докладом «Функциональный анализ и вычислительная математика». В нем вычислительная математика была позиционирована как наука о конечных приближениях общих, не обязательно метрических компактов, причем была особо подчеркнута имманентная связь функционального анализа и прикладной математики.

В последний раз Канторович участвовал в IV Всесоюзном съезде, проходившем в Ленинграде с 3 по 12 июля 1961 года (больше съезды не проводились). Его доклад назывался «Проблемы математической экономики» и ознаменовал собой важный рубеж творчества. В последующие годы математическая экономика была основным полем творчества Канторовича. Интересно, что уже в те годы он подчеркивал, что наибольшее значение имеет «предсказание развития экономики (при стихийном ее развитии) и оптимальное управление (при плановом развитии)».

---

<sup>2</sup>В кн.: *Леонид Витальевич Канторович — человек и ученый. Том 1.* — Новосибирск, Изд. «Гео» (2002), С. 162–163.

Говоря о математических работах Канторовича, нельзя не выделить особо три обзорные статьи:

*Функциональный анализ и прикладная математика* // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 6. — С. 89–185.

*Полупорядоченные группы и линейные полупорядоченные пространства* // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 3. — С. 31–98. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

*Об интегральных операторах* // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 2. — С. 3–29.

Первая из названных статей снабжена названием, несказанно впечатляющим своим масштабом особенно при сравнении с возрастом автора. Эта статья фигурирует в формуле Сталинской премии второй степени в размере 100 000 рублей, присужденной Канторовичу в 1948 году. Учебник Канторовича и Акилова, многие годы служивший настольной книгой многих теоретиков и прикладников, возник на основе идей этого блестящего математического сочинения.

В том же 1948 году Совет Министров СССР особо секретным постановлением №1990-774сс/оп решил «в двухнедельный срок организовать в Ленинградском филиале Математического института АН СССР расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на проф. Канторовича». Так Канторович вошел в число участников проекта по созданию отечественного ядерного оружия (в оперативной переписке советской разведки — операция «Энормоз»).

Впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Канторовича, но и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения разнородных теоретических и прикладных проблем.

Пропасть между точным и гуманитарным стилями мышления не всегда достаточно осознается. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знаковых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что в свою очередь способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.

Альфред Маршалл, основатель кембриджской школы экономики и автор многотомного трактата по политической экономии, резко противопоставлял экономическое и математическое мышление. В специальных приложениях к своему курсу он писал:

*«Ясно, что в экономической науке нет места для длинных цепей дедуктивных рассуждений, ни один экономист, даже Рикардо, не пытался их использовать. На первый взгляд может показаться, что частое использование математических формул в экономических исследованиях свидетельствует о противоположном. Но при более тщательном рассмотрении станет очевидно, что такое впечатление обманчиво, за исключением случая, когда чистый математик использует экономические гипотезы ради развлекательных упражнений в математике...»<sup>3</sup>.*

*«Функция анализа и дедукции в экономической науке состоит не в создании нескольких длинных цепей логических рассуждений,*

<sup>3</sup>Маршалл А. *Принципы политической экономии. Том III.*— М.: Изд. Прогресс (1984), С. 225.

*а в правильном создании многих коротких цепочек и отдельных соединительных звеньев»<sup>4</sup>.*

В 1906 году Маршалл сформулировал свое скептическое отношение к применению математики в экономике следующим образом:

*«[У меня] в последние годы работы над этим предметом росло ощущение весьма малой вероятности того, что хорошая математическая теорема, имеющая дело с экономическими гипотезами, окажется хорошей экономикой. И я все больше и больше склонялся к следующим правилам:*

- (1) Используй математику как язык для стенографии, а не исследовательский механизм.*
- (2) Придерживайся математики, пока не закончил дело.*
- (3) Переведи на английский.*
- (4) Проиллюстрируй примерами, важными в реальной жизни.*
- (5) Сожги математику.*
- (6) Если не достиг успеха в (4), сожги (3). Особенно часто я пользовался именно последним приемом.*

*Я не имею ничего против математики, она полезна и необходима, однако очень плохо, что история экономической мысли больше не востребована и даже не предлагается во многих студенческих и аспирантских программах. Это потеря»<sup>5</sup>.*

Образ «гребешков» Маршалла не имеет ничего общего с представлением о перевернутой пирамиде универсума фон Неймана, в котором обитает современная теория множеств. Красота и сила математики со времен Древней Греции до наших дней связаны с аксиоматическим методом, предполагающим вывод новых фактов с помощью сколь угодно длинных цепей формальных импликаций.

Бросающаяся в глаза разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави. Этот статус-кво с глубокими историческими корнями всегда был вызовом для Канторовича, несовместимым с его тезисом о взаимопроникновении математики и экономики.

Канторович был блестящим математиком, но он может показаться неудачником в главном — в вопросе о признании центральной идеи его жизни, идеи взаимопроникновения математики и экономики. Однако такое мнение ошибочно. Несмотря на попытки замалчивания Канторовича и его идей, их торжество на самом деле неоспоримо. Яркими доказательствами стали изменение всей системы подготовки экономистов и уже неистребимые математизация и информатизация экономики как в ее функциональных, так и в управленческих аспектах.

Творчество Канторовича останется образцом служения математике как основе универсального мировоззрения.

СЕМЕН САМСОНОВИЧ КУТАТЕЛАДЗЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
E-mail address: sskut@math.nsc.ru

<sup>4</sup>Маршалл А. *Ibid.*, С. 212.

<sup>5</sup>Brue S. L. *The Evolution of Economic Thought. 5th Edition.* — Fort Worth: Harcourt College Publishers (1993), P. 294.