S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 141–154 (2007) УДК 517.95
MSC 76S05

ЗАКОН ДАРСИ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А.М. МЕЙРМАНОВ

Abstract. A linear system of differential equations describing a joint motion of thermoelastic porous body with sufficiently large Lame's constants (absolutely rigid body) and thermofluid occupying porous space is considered. The rigorous justification is fulfilled for homogenization procedures as the dimensionless size of the pores tends to zero, while the porous body is geometrically periodic. As the results, we derive decoupled system consisting of Darcy's system of filtration for thermofluid (first approximation) and anisotropic Lamé's system of equations for thermoelastic solid (second approximation). The proof is based on Nguetseng's two-scale convergence method of homogenization in periodic structures.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о совместном движении неизотермического абсолютно твердого тела, перфорированного системой пор и каналов (твердый *скелет*), и неизотермической вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей пустоты (*поровое пространство*). Совершенно естественным является предположение, что абсолютно твердое тело можно аппроксимировать термоупругим телом с очень большими постоянными Ламэ. Соответствующую математическую модель назовем моделью **(NA)**. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = L\boldsymbol{w}, \quad \theta' = \vartheta_* \frac{L}{\tau v_*}\theta$$

дифференциальные уравнения модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\boldsymbol{w}$ и малых отклонений безразмерной температуры θ в области

Meirmanov A.M., Darcy's law in anisothermic porous medium.

Поступила 21 ноября 2007 г., опубликована 30 апреля 2007 г.

$\Omega \in \mathbb{R}^3$ имеют вид:

$$\alpha_\tau \bar{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \mathrm{div}_x\Big(\bar{\chi}\alpha_\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + (1-\bar{\chi})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - (p + \bar{\alpha}_\theta \theta)\mathbb{I}\Big), \tag{1.1}$$

$$\alpha_\tau \bar{c}_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathrm{div}_x(\bar{\alpha}_\varkappa \nabla_x \theta) - \bar{\alpha}_\theta \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}, \tag{1.2}$$

$$p + \bar{\chi}\alpha_p \mathrm{div}_x \boldsymbol{w} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь и далее мы используем обозначения

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = (1/2)\left(\nabla_x \boldsymbol{u} + (\nabla_x \boldsymbol{u})^T\right),$$

$$\bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1-\bar{\chi})\rho_s, \quad \bar{c}_p = \bar{\chi}c_{pf} + (1-\bar{\chi})c_{ps},$$

$$\bar{\alpha_\varkappa} = \bar{\chi}\alpha_{\varkappa f} + (1-\bar{\chi})\alpha_{\varkappa s}, \quad \bar{\alpha}_\theta = \bar{\chi}\alpha_{\theta f} + (1-\bar{\chi})\alpha_{\theta s}.$$

Характеристическая функция $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ порового пространства $\Omega_f \subset \Omega$ считается известной.

Вывод уравнений (1.1)– (1.3) и описание безразмерных постоянных (все они строго положительны) дан в [1].

Модель **(NA)** замыкается начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{w}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{w} = 0, \quad \theta = \theta_0(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

В предлагаемой модели естественным малым параметром является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

В настоящей работе ограничимся подмоделью $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$ модели **(NA)**, в которой поровое пространство геометрически периодическое.

Нашей основной целью является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) в модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$ при стремлении малого параметра к нулю.

Пусть выполнено следующее

Предположение 1. Область $\Omega = (0,1)^3$ является периодическим повторением элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$. Величина $1/\varepsilon$ является целым числом, так что Ω содержит целое число элементарных ячеек. Пусть Y_s есть "твердая фаза"ячейки Y, а "жидкая фаза"Y_f – его открытое дополнение. Положим также $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$. Граница γ является поверхностью класса C^1, поровое пространство Ω_f^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Всюду ниже ограничимся периодическими структурами, в которых область $\boldsymbol{\Omega}_s$ **–связное множество**. В этих предположениях

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon),$$

$$\bar{c}_p = c_p^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})c_{pf} + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))c_{ps},$$

$$\bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

$$\bar{\alpha}_\varkappa = \alpha_\varkappa^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\alpha_{\varkappa f} + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\alpha_{\varkappa s},$$

$$\bar{\alpha}_\theta = \alpha^\varepsilon_\theta(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\alpha_{\theta f} + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\alpha_{\theta s},$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ есть характеристическая функция Y_f в Y. В нашей модели эта функция, определяющая геометрию порового пространства, считается известной.

Предположим также, что безразмерные параметры модели α_i $(i=\tau,\nu,\ldots)$ зависят от малого параметра ε, и существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu(\varepsilon)=\mu_0,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda(\varepsilon)=\lambda_0,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\tau(\varepsilon)=\tau_0,\quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_p(\varepsilon)=p_*.$$

Более того, мы ограничимся случаем, когда

$$\mu_0=\tau_0=0,\quad p_*=\lambda_0=\infty.$$

Условие $p_*=\infty$ означает, что рассматриваемая жидкость несжимаемая, а условие $\lambda_0=\infty$ означает, что скелет является абсолютно твердым телом.

Всюду ниже, чтобы не перегружать текст дополнительными индексами, мы не будем указывать зависимость параметров α_i $(i=\tau,\nu,\ldots)$ от ε.

Используя метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга [2, 3] будет показано, что в зависимости от соотношений между безразмерными параметрами модели и геометрии элементарных ячеек Y_s и Y_f предельным режимом является распадающаяся система, состоящая из уравнений фильтрации Дарси для жидкой компоненты (первое приближение) и анизотропных уравнений Ламэ для твердого скелета (второе приближение) для двухтемпературного континуума. Более точно, мы покажем, что скорость жидкой компоненты представима в виде

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)=\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}^f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)+o(\varepsilon),$$

а перемещения в твердом скелете- в виде

$$(1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\left(\boldsymbol{w}^s(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon\boldsymbol{W}^s\left(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon\right)+o(\varepsilon)\right),$$

где функция $\boldsymbol{v}^f(\boldsymbol{x},t) = \int_Y \boldsymbol{V}^f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})dy$ является решением системы неизотермических уравнений фильтрации Дарси, а функция $\boldsymbol{w}^s(\boldsymbol{x},t)$ является решением системы неизотермических анизотропных уравнений Ламэ.

Более простые модели для изотермических сред изучались в [4]–[10].

§2. Формулировка основных результатов

Как обычно, уравнения (1.1)-(1.2) понимаются в смысле теории распределений. Они включают в себя собственно уравнения (1.1)– (1.2) в каждой из областей Ω^ε_f и Ω^ε_s и краевые условия

$$[\vartheta]=0,\quad [\boldsymbol{w}]=0,\quad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma^\varepsilon,\ t\geq 0, \tag{2.1}$$

$$[\mathbb{P}\cdot\mathbf{n}]=0,\quad [\alpha^\varepsilon_\varkappa\nabla_x\theta\cdot\mathbf{n}]=0,\quad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma^\varepsilon,\ t\geq 0 \tag{2.2}$$

на границе Γ^ε, где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к границе и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0)=\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0)-\varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0),$$

$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^\varepsilon_s}}\varphi(\boldsymbol{x}),\quad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^\varepsilon_f}}\varphi(\boldsymbol{x}),$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - (p + \alpha_\theta^\varepsilon \theta)\mathbb{I}.$$

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (1.1)–(1.2) и краевых условий (2.1)–(2.2). Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Определение 1. *Функции $(\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, \theta^\varepsilon,\, p^\varepsilon)$ называются обобщенным решением в модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$, если они удовлетворяют условиям регулярности*

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon,\, \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon),\, div_x \boldsymbol{w}^\varepsilon,\, p^\varepsilon,\, \theta^\varepsilon, \nabla_x \theta^\varepsilon \in L^2(\Omega_T) \tag{2.3}$$

в области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, граничным условиям (1.5), уравнению неразрывности

$$p^\varepsilon + \chi^\varepsilon \alpha_p div_x \boldsymbol{w}^\varepsilon = -\frac{1}{m}\gamma^\varepsilon \chi^\varepsilon, \tag{2.4}$$

почти всюду в области Ω_T, интегральному тождеству

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Omega_T} \Big(\alpha_\tau \rho^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}) + \\ &\{(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - (p^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon \theta^\varepsilon)\mathbb{I}\} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})\Big) d\boldsymbol{x}dt = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ таких, что $\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = \partial\boldsymbol{\varphi}/\partial t|_{t=T} = 0$ и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \Big((\alpha_\tau c_p^\varepsilon \theta^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon div_x \boldsymbol{w}^\varepsilon)\frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha_\varkappa^\varepsilon \nabla_x \theta^\varepsilon \cdot \nabla_x \xi\Big) d\boldsymbol{x}dt = 0 \tag{2.6}$$

для всех гладких функций $\xi = \xi(\boldsymbol{x}, t)$ таких, что $\xi|_{\partial\Omega} = \xi|_{t=T} = 0$.

В (2.5) через $A : B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A : B = \mathrm{tr}\,(B^* \circ A) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}B_{ji}$, и постоянная

$$\gamma^\varepsilon = \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon dx$$

в (2.4) выбрана из условия

$$\int_\Omega p^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.7}$$

Пусть дополнительно к сделанным во введении предположениям существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_{\varkappa s} = \varkappa_{0s}, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_{\theta f} = \beta_{0f}, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_{\theta s} = \beta_{0s},$$
$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_{\varkappa f}}{\alpha_\mu} = \varkappa_f, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_p}{\alpha_\lambda} = p_2.$$

В дальнейшем считаем, что выполнено

Предположение 2. 1)Безразмерные параметры в модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$ удовлетворяют следующим ограничениям

$$\varkappa_f,\, \varkappa_{0s},\, \beta_{0f},\, \beta_{0s},\, \mu_1 < \infty; \quad 0 < \mu_1,\, \varkappa_{0s},\, \varkappa_f,\, p_2,$$

2) Функции

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2}, \quad \nabla(\frac{\partial \theta_0}{\partial t})$$

ограничены в $L^2(\Omega_T)$ и

$$\theta_0(\boldsymbol{x},0)=\frac{\partial\theta_0}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0.$$

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы 1–2.

Теорема 1. *При сделанных предположениях для всех $\varepsilon>0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение в модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$ и справедливы следующие оценки*

$$\max_{0\le t\le T}\|\,|\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)|+\sqrt{\alpha_\mu}\chi^\varepsilon|\nabla_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)|\,\|_{2,\Omega}\le C_0, \tag{2.8}$$

$$\|\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega_T}+\sqrt{\alpha_{\varkappa f}}\|\chi^\varepsilon\nabla_x\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega_T}+\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega_T}\le C_0, \tag{2.9}$$

$$\alpha_\lambda\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega_T}+\|p^\varepsilon\|_{2,\Omega_T}\le C_0 \tag{2.10}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε.

Теорема 2. *Функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ и θ^ε допускают продолжения $\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon$ и ϑ^ε соответственно из области $\Omega^\varepsilon_{s,T}=\Omega^\varepsilon_s\times(0,T)$ на область Ω_T так, что последовательность $\{\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$ к нулю, а последовательность $\{\vartheta^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$ к функции ϑ. Кроме того, последовательность $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$, где $\boldsymbol{u}^\varepsilon=\alpha_\lambda\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon$, сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$ к функции $\boldsymbol{u}$. В то же время последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ к $\boldsymbol{w}$ и p соответственно.*

Если $\boldsymbol{v}=\partial\boldsymbol{w}/\partial t$–скорость жидкой компоненты, то функции $\boldsymbol{v}$, ϑ, p и $\boldsymbol{u}$ удовлетворяют в области Ω системе уравнений фильтрации несжимаемой неизотермической жидкости для скорости и давления в жидкой компоненте

$$div_x\boldsymbol{v}=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega; \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{v}=B^f\cdot(-\frac{1}{m}\nabla p-\beta_{0s}\nabla\vartheta),\ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{2.12}$$

$$div_x(B^\theta\cdot\nabla\vartheta)=0, \tag{2.13}$$

и анизотропным уравнениям Ламэ для перенормированных перемещений твердого скелета

$$0=div_x\{\mathbb{A}^s_0:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+B^s_0(1-m)\beta_{0s}\vartheta+B^s_1q\}, \tag{2.14}$$
$$q=p+\beta_{0f}m\vartheta.$$

Здесь симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}^s_0$, матрицы B^s_0, B^s_1 и симметричные строго положительно определенные матрицы B^ϑ и B^f определены ниже формулами (5.20), (5.21), (5.24) и (5.27)–(5.29).

§3. Предварительные сведения

3.1. Двухмасштабная сходимость. Доказательство теоремы 2 основано на систематическом применении метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом [2] и получившего широкое применение в теории усреднения (см., например, обзор [3]).

Определение 2. *Последовательность* $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ *называется двухмасштабно сходящейся к пределу* $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ *тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-периодической по* $\boldsymbol{y}$ *функции* $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega_T} \varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)\, d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T} \int_Y \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{x} dt. \tag{3.1}$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой [2, 3]:

Теорема 3. ***(теорема Нгуетсенга)***

1. *Из любой ограниченной последовательности в* $L^2(\Omega_T)$ *можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу* $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$.

2. *Пусть последовательности* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *и* $\{\varepsilon\nabla_x \varphi^\varepsilon\}$ *равномерно по параметру* ε *ограничены в* $L^2(\Omega_T)$. *Тогда существуют 1-периодическая по* $\boldsymbol{y}$ *функция* $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ *и подпоследовательность* $\{\varepsilon_k\}$ *такие, что* $\varphi, \nabla_y \varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ *и последовательности* $\{\varphi^{\varepsilon_k}\}$ *и* $\{\varepsilon_k \nabla_x \varphi^{\varepsilon_k}\}$ *двухмасштабно сходятся при* $\varepsilon_k \searrow 0$ *к* φ *и* $\nabla_y \varphi$ *соответственно.*

3. *Если последовательности* $\{\varphi^\varepsilon\}$ *и* $\{\nabla_x \varphi^\varepsilon\}$ *равномерно ограничены в* $L^2(\Omega_T)$, *то существуют функции* $\varphi \in L^2(\Omega_T)$ *и* $\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ *и подпоследовательность* $\{\varepsilon_k\}$ *такие, что* ψ *1-периодична по* $\boldsymbol{y}$, $\nabla_y \psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$, *и последовательности* $\{\varphi^{\varepsilon_k}\}$ *и* $\{\nabla_x \varphi^{\varepsilon_k}\}$ *двухмасштабно сходятся при* $\varepsilon_k \searrow 0$ *к* φ *и* $\nabla_x \varphi(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y \psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ *соответственно.*

Следствие 1. *Пусть* $\sigma \in L^2(Y)$, $\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ *и последовательность* $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ *двухмасштабно сходится к некоторому пределу* $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$. *Тогда последовательность* $\sigma^\varepsilon \varphi^\varepsilon$ *двухмасштабно сходится к* $\sigma\varphi$.

3.2. Лемма о продолжении. В задачах, аналогичных модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$, характерным является следующий факт: оценки на градиент перемещения $\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon$ различны в Ω_s и Ω_f (в жидкой и твердой фазах), что не позволяет непосредственно использовать более сильные оценки. Эта сложность преодолевается продолжением поля перемещений, определенного в Ω_s, на всю область Ω с сохранением оценки на норму градиента в Ω_s. Справедлива следующая лемма [11, 12], которую приведем в удобной для нас формулировке:

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения о геометрии области* Ω_s^ε, $\psi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega_s^\varepsilon)$ *и* $\psi^\varepsilon = 0$ *на границе* $S_s^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega$. *Тогда существует линейный ограниченный оператор продолжения* $\Phi^\varepsilon : W_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \to W_2^1(\Omega)$ *такой, что сужение функции* $\sigma^\varepsilon = \Phi^\varepsilon \psi^\varepsilon$ *на подобласть* Ω_s^ε *совпадает с* ψ^ε, *т.е.*

$$(1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))(\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) - \psi^\varepsilon(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{3.2}$$

При этом

$$\|\sigma^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C\|\psi^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \quad \|\nabla_x \sigma^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C\|\nabla_x \psi^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \tag{3.3}$$

где постоянная C *зависит только от геометрии ячейки* Y *и не зависит от* ε.

3.3. Неравенство Фридрихса–Пуанкаре в периодической структуре. Следующая лемма доказана Л. Тартаром в [5, приложение]. Она уточняет постоянную в неравенстве Фридрихса–Пуанкаре в случае ε-периодической геометрической структуры.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения относительно геометрии области Ω_f^ε. Тогда для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} |\varphi|^2 d\boldsymbol{x} \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla_x \varphi|^2 d\boldsymbol{x} \tag{3.4}$$

с некоторой постоянной C, независящей от ε.

Всюду ниже будем использовать следующие обозначения:

1)

$$\langle \Phi \rangle_Y = \int_Y \Phi dy, \quad \langle \Phi \rangle_{Y_f} = \int_Y \chi \Phi dy, \quad \langle \Phi \rangle_{Y_s} = \int_Y (1-\chi) \Phi dy,$$

$$\langle \varphi \rangle_\Omega = \int_\Omega \varphi dx, \quad \langle \varphi \rangle_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \varphi dx dt.$$

2) если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ два вектора, то матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

для произвольного вектора $\mathbf{c}$;

3) если B и C две матрицы, то $B \otimes C$ есть тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей A дается формулой

$$(B \otimes C) : A = B(C : A);$$

4) через $\mathbb{I}^{ij}$ обозначим матрицу, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении i-той строки и j-того столбца;

5) наконец

$$J^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i),$$

где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ -ортонормированный базис.

§4. Доказательство теоремы 1

При всех $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\max_{0<t<T} \Big(\sqrt{\alpha_\lambda} \|\nabla_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\|_{2,\Omega_s^\varepsilon} + \sqrt{\alpha_\tau} \|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\tau} \|\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t}(t)\|_{2,\Omega}\Big)$$

$$+ \sqrt{\alpha_\mu} \|\chi^\varepsilon \nabla_x \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\|_{2,\Omega_T} + \|\sqrt{\alpha_\theta^\varepsilon} \nabla_x \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega_T} \leq C_0, \tag{4.1}$$

где C_0 не зависит от ε. Она получается после дифференцирования уравнений для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ и θ^ε по времени, умножения первого уравнения на $\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon / \partial t^2$, второго — на $(\partial \theta^\varepsilon / \partial t - \partial \theta_0 / \partial t)$, интегрирования по частям и суммирования. При этом мы учли, что

$$\frac{1}{\sqrt{m}} |\frac{\partial \gamma^\varepsilon}{\partial t}| \leq \|\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega_f^\varepsilon}.$$

Эта оценка гарантирует существование и единственность обобщенного решения в модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$. Для этого достаточно воспользоваться методом Галеркина и определением обобщенного решения при построении приближенных решений. Соответствующая задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая приближенные решения, имеет единственное решение и допускает оценку решения аналогичную оценке

(4.1), описанную выше для решений в модели $(\boldsymbol{NA})^\varepsilon$. Выбор сходящейся подпоследовательности и предельный переход являются стандартными процедурами.

Для вывода оценок (2.8) и (2.9) воспользуемся оценками (4.1), оставляя необходимые нам члены

$$\max_{0<t<T}(\sqrt{\alpha_\mu}\|\chi^\varepsilon\nabla_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\|_{2,\Omega}+\sqrt{\alpha_\lambda}\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\|_{2,\Omega})\leq C_0, \tag{4.2}$$

$$\sqrt{\alpha_{\varkappa f}}\|\chi^\varepsilon\nabla_x\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}(t)\|_{2,\Omega_T}+\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}(t)\|_{2,\Omega_T}\leq C_0. \tag{4.3}$$

Далее воспользуемся леммой 1 и построим продолжение $\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon$ функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ из области Ω^ε_s в область Ω^ε_f так, чтобы $\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon=\boldsymbol{w}^\varepsilon$ в Ω^ε_s. Легко видеть, что

$$\|\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}\leq C\|\nabla(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t})\|_{2,\Omega}\leq\frac{C}{\sqrt{\alpha_\lambda}}\|(1-\chi^\varepsilon)\sqrt{\alpha_\lambda}\nabla_x(\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})\|_{2,\Omega}. \tag{4.4}$$

После этого оценим $\|\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\|_{2,\Omega}$ с помощью неравенства Пуанкаре (лемма 2) для разности $(\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon/\partial t-\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t)$:

$$\|\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}\leq\|\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}+\|\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon-\boldsymbol{w}^\varepsilon)\|_{2,\Omega}\leq\|\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}+C\varepsilon\|\chi^\varepsilon\nabla_x\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon-\boldsymbol{w}^\varepsilon)\|_{2,\Omega}$$

$$\leq\|\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}+C\varepsilon\|\nabla_x\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}+C(\varepsilon\alpha_\mu^{-\frac{1}{2}})\|\sqrt{\alpha_\mu}\nabla_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega^\varepsilon_f}\leq$$

$$\|\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}+\frac{C\varepsilon}{\sqrt{\alpha_\lambda}}\|\sqrt{\alpha_\lambda}\nabla_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega^\varepsilon_s}+C(\varepsilon\alpha_\mu^{-\frac{1}{2}})\|\sqrt{\alpha_\mu}\nabla_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega^\varepsilon_f}\leq C_0.$$

Последнее неравенство следует из (4.2) и (4.4).

Все то же самое применим к функции θ^ε: существует продолжение ϑ^ε функции θ^ε из области Ω^ε_s в область Ω^ε_f такое, что $\vartheta^\varepsilon=\theta^\varepsilon$ в Ω^ε_s и

$$\|\frac{\partial\vartheta^\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial\vartheta_0}{\partial t}\|_{2,\Omega}\leq C\|\nabla_x(\frac{\partial\vartheta^\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial\vartheta_0}{\partial t})\|_{2,\Omega}\leq\frac{C}{\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}}\|\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}\nabla_x(\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial\vartheta_0}{\partial t})\|_{2,\Omega^\varepsilon_s},$$

$$\|\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega}\leq C+\frac{C\varepsilon}{\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}}\|\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}\nabla_x\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega^\varepsilon_s}+C(\varepsilon\alpha_{\varkappa f}^{-\frac{1}{2}})\|\sqrt{\alpha_{\varkappa f}}\nabla_x\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\|_{2,\Omega^\varepsilon_f}\leq C_0.$$

Чтобы оценить давление, в первую очередь оценим выражение

$$\|(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\nabla_x\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}.$$

Для этого уравнение для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ умножим на $\alpha_\lambda\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ и проинтегрируем по частям по области $\Omega\times(0,t_0)$. Оставляя необходимые нам слагаемые получим

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_\lambda}\alpha_\lambda^2\|\chi^\varepsilon\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon(t_0)\|^2_{2,\Omega}+\alpha_\lambda^2\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x\boldsymbol{w}^\varepsilon(t_0)\|^2_{2,\Omega}\leq$$

$$\alpha_\lambda|\int_0^{t_0}\int_\Omega(\alpha_{\theta f}\chi^\varepsilon+\alpha_{\theta s}(1-\chi^\varepsilon))\theta^\varepsilon\mathrm{div}(\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})dxdt|.$$

Далее в последнем слагаемом производную по времени в сомножителе $\partial(\mathrm{div}\boldsymbol{w}^\varepsilon)/\partial t$ перебросим на сомножитель θ^ε и с помощью неравенств Гельдера и Гронуолла получим необходимую оценку

$$\alpha_\lambda\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega_T}\leq C_0, \tag{4.5}$$

если вспомним ограничение

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_p}{\alpha_\lambda}=p_2>0.$$

Оценка (2.10) для давления следует теперь из интегрального тождества (2.5), оценок (4.1), (4.5), (2.8) и (2.9) как оценка соответствующего функционала, если мы вспомним условие (2.7).

Действительно, из интегрального тождества (2.5) следует, что

$$|\int_\Omega p^\varepsilon \mathrm{div}_x \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{x}|\leq C\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_{2,\Omega}.$$

Выбирая теперь $\boldsymbol{\psi}$ так, чтобы $p^\varepsilon=\mathrm{div}_x\boldsymbol{\psi}$ получим необходимую оценку для давления p^ε. Такой выбор всегда возможен (см. [13]), если положить

$$\boldsymbol{\psi}=\nabla\varphi+\boldsymbol{\psi_0},\quad \mathrm{div}_x\boldsymbol{\psi_0}=0,\quad \triangle\varphi=p^\varepsilon,\quad \varphi|_{\partial\Omega}=0,\quad (\nabla\varphi+\boldsymbol{\psi_0})|_{\partial\Omega}=0.$$

§5. Доказательство Теоремы 2

5.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещений, температур и давлений. В силу Теоремы 1 последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$ и $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Следовательно существует подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и функции θ, p и $\boldsymbol{w}$ такие, что

$$\theta^\varepsilon\to\theta,\quad p^\varepsilon\to p,\quad \boldsymbol{w}^\varepsilon\to\boldsymbol{w}$$

слабо в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Согласно Лемме 1 существует функция $\boldsymbol{u}^\varepsilon\in L^\infty((0,T);W^1_2(\Omega))$ такая, что $\boldsymbol{u}^\varepsilon=\alpha_\lambda\boldsymbol{w}^\varepsilon$ in $\Omega_s\times(0,T)$, и семейство $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничено в $L^\infty((0,T);W^1_2(\Omega))$. Следовательно существует подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ такая, что

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon\to\boldsymbol{u} \text{ слабо в } L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$$

при $\varepsilon\searrow 0$.

Воспользовавшись той же самой Леммой 1 заключаем, что существует функция $\vartheta^\varepsilon\in L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$ такая, что $\vartheta^\varepsilon=\theta^\varepsilon$ в $\Omega_s\times(0,T)$ и семейство $\{\vartheta^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничено в $L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$. Следовательно существует подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ такая, что

$$\vartheta^\varepsilon\to\vartheta \text{ слабо в } L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$$

при $\varepsilon\searrow 0$.

Аналогичным образом поступим с функцией $\boldsymbol{w}^\varepsilon$: существует функция $\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon\in L^\infty((0,T);W^1_2(\Omega))$ такая, что $\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon=\boldsymbol{w}^\varepsilon$ in $\Omega_s\times(0,T)$, и

$$\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon\to 0 \text{ сильно в } L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$$

при $\varepsilon\searrow 0$.

Кроме того

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\gamma^\varepsilon=0 \quad\text{и } \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^\varepsilon)\to 0,\quad \chi^\varepsilon\alpha_{\varkappa f}\nabla\theta^\varepsilon\to 0 \tag{5.1}$$

сильно в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Переобозначая, если необходимо, индексы, будем считать, что сходятся сами последовательности.

Далее воспользуемся теоремой Нгуетсенга: существуют 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\Theta^s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ такие, что последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla_x\vartheta^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно соответственно к $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\nabla_x\vartheta + \nabla_y\Theta^s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\nabla_x\boldsymbol{u} + \nabla_y\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$.

Заметим, что последовательность $\{\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ сходится слабо к функции $\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}$ и $(\vartheta-\theta_0)$, $\boldsymbol{u}\in L^2((0,T);\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$. Последнее утверждение для несвязного порового пространства следует из включения $(\vartheta^\varepsilon-\theta_0)$, $\boldsymbol{u}^\varepsilon\in L^2((0,T);\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$. Для связного порового пространства утверждение следует из неравенства Фридрихса-Пуанкаре для $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ и $(\vartheta^\varepsilon-\theta_0)$ в ε-слое границы S и из сходимости последовательностей $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ и $\{\vartheta^\varepsilon\}$ соответственно к $\boldsymbol{u}$ и ϑ сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0,T);W^1_2(\Omega))$.

5.2. Микро- и макроскопические уравнения.

Пусть

$$q^\varepsilon = p^\varepsilon + \alpha_{\theta f}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon \tag{5.2}$$

и q и Q есть соответственно слабый и двухмасштабный пределы последовательности $\{q^\varepsilon\}$.

Лемма 3. *Для всех $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T$ и $\boldsymbol{y}\in Y$ слабые и двухмасштабные пределы последовательностей $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$ и $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ удовлетворяют следующим соотношениям*

$$Q=(1/m)\chi q,\quad Q=P+\chi\beta_{0f}\Theta; \tag{5.3}$$

$$q=p+\beta_{0f}\theta^f,\quad \theta^f=\langle\Theta\rangle_{Y_f}; \tag{5.4}$$

$$div_y\boldsymbol{W}=0; \tag{5.5}$$

$$div_x\boldsymbol{w}=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega; \tag{5.6}$$

$$(1-\chi)W=0,\quad \Theta=\chi\Theta+(1-\chi)\vartheta. \tag{5.7}$$

В (5.6) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ — вектор единичной нормали в точке $\boldsymbol{x}\in S$.

Доказательство. Для доказательства (5.2) подставим в интегральное тождество (2.5) пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon=\varepsilon\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — произвольная 1-периодическая и финитная в Y_f по $\boldsymbol{y}$ функция. Переходя к пределу при $\varepsilon\searrow 0$, получим

$$\nabla_y Q(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y_f.$$

Слабый и двухмасштабный предельные переходы в уравнении (5.2) доставляют нам (5.4) и второе уравнение в (5.2).

Применяя далее двухмасштабный предельный переход в равенствах

$$(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon=0,\quad (1-\chi^\varepsilon)q^\varepsilon=0$$

получим

$$(1-\chi)P=0,\quad (1-\chi)Q=0,$$

что и доказывает (5.2).

Равенство (5.5) есть результат двухмасштабного предельного перехода в уравнении

$$\frac{1}{\alpha_p}p^\varepsilon+\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon=(1-\chi^\varepsilon)\mathrm{div}_x\tilde{\boldsymbol{w}}^\varepsilon-\frac{1}{m}\gamma^\varepsilon\chi^\varepsilon, \tag{5.8}$$

которое является эквивалентной записью уравнения (2.4). Уравнение (5.6) получатся, если уравнение (5.8) умножить на произвольную функцию, не зависящую от "быстрой"переменной $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$ проинтегрировать по области Ω и затем перейти к пределу.

Для доказательства (5.7) необходимо рассмотреть двухмасштабный предел в тождествах

$$(1-\chi^\varepsilon)(\boldsymbol{w}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0, \quad (1-\chi^\varepsilon)(\theta^\varepsilon - \vartheta^\varepsilon) = 0.$$

□

Лемма 4. *Для всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *и* $y \in Y$ *справедливо равенство*

$$div_y\{(1-\chi)(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}) + \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u})) - (\beta_{0s}\vartheta(1-\chi) + \frac{1}{m}q\chi) \cdot \mathbb{I}\} = 0. \tag{5.9}$$

Доказательство. Подставляя в интегральное тождество (2.5) пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ — произвольная 1-периодическая по $\boldsymbol{y}$ функция, исчезающая на границе S, и переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим требуемое микроскопическое уравнение на ячейке Y. □

Совершенно аналогично, используя уравнения неразрывности (2.4) получим из интегрального тождества (2.6)

Лемма 5. *При всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *справедливы равенства*

$$\left.\begin{aligned} &\triangle_y \Theta^s = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s, \\ &\partial\Theta^s/\partial n = -\nabla_x \vartheta \cdot \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Наш следующий шаг — вывод макроскопических уравнений для перемещений в твердом скелете.

Лемма 6. *Функции* $\boldsymbol{u}, q, \pi, \vartheta$ *удовлетворяют в области* Ω_T *следующей системе макроскопических уравнений*

$$div_x\{((1-m)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}) - (q + \beta_{0s}(1-m)\vartheta) \cdot \mathbb{I}\} = 0, \tag{5.11}$$

$$div_x\{(1-m)\nabla_x \vartheta + \langle \nabla_y \Theta^s\rangle_{Y_s}\} = 0. \tag{5.12}$$

Доказательство. Уравнения (5.11) и (5.12) есть результат предельного перехода в интегральных тождествах (2.5) и (2.6) с пробными функциями, финитными в Ω_T и независящими от ε. В тождестве (2.6) мы использовали уравнение неразрывности (2.4). □

Наконец, последний шаг — вывод микроскопических уравнений, описывающих поведение жидкой компоненты.

Лемма 7. *Пусть* $\boldsymbol{V} = \chi\partial\boldsymbol{W}/\partial t$. *Тогда*

$$\mu_1 \triangle_y \boldsymbol{V} - \nabla_y R - \frac{1}{m}\nabla_x q = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f; \quad \boldsymbol{V} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma; \tag{5.13}$$

$$\triangle_y \Theta = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f; \quad \Theta = \vartheta, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma. \tag{5.14}$$

Доказательство. Дифференциальные уравнения (5.13) есть следствие интегрального тождества (2.5) при $\varepsilon \searrow 0$ для пробных функций вида $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}(x\varepsilon^{-1}) \cdot h(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — соленоидальная и финитная в Y_f вектор-функция.

Совершенно аналогично выводятся уравнение (5.14), если в интегральном тождестве (2.6) исключить слагаемое $\chi^{\varepsilon}\mathrm{div}_x(\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t)$ с помощью уравнения неразрывности (2.4).

Краевое условие в (5.13) есть следствие первого уравнения в (5.7) и двухмасштабной сходимости последовательности $\{\alpha_{\mu}^{\frac{1}{2}}\nabla_x \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ к функции $\mu_1^{\frac{1}{2}}\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$. В силу этой сходимости функция $\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ равномерно по $(\boldsymbol{x}, t)$ ограничена в $L^2(Y)$. Аналогичные рассуждения справедливы для краевого условия в (5.14). □

5.4. Усредненные уравнения.

Лемма 8. *Сильные и слабые пределы $\boldsymbol{u}$, ϑ и q удовлетворяют в области Ω_T следующей краевой задаче*

$$0 = div_x\{\mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + B_0^s(1-m)\beta_{0s}\vartheta + B_1^s q\}, \tag{5.15}$$

$$div_x(B^{\theta} \cdot \nabla\vartheta) = 0, \tag{5.16}$$

где симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^s$, матрицы B_0^s, B_1^s, строго положительно определенная матрица B^{ϑ} определены ниже формулами (5.20), (5.21) *и* (5.24).

Доказательство. Уравнения (5.15) следуют из макроскопических уравнений (5.11) после подстановки в них выражения

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} = \mathbb{A}_1^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + (B_0^s + \mathbb{I})(1-m)\beta_{0s}\vartheta + (B_1^s + \mathbb{I})q.$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (5.9) на элементарной ячейке Y_s. В самом деле, полагая

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}^{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij} + \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{y})(1-m)\beta_{0s}\vartheta + \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{y})q$$

где

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}),$$

получаем следующие периодические краевые задачи на элементарной ячейке Y:

$$\mathrm{div}_y\{(1-\chi)(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}^{ij}) + (1-\chi)J^{ij}\} = 0, \tag{5.17}$$

$$\mathrm{div}_y\{(1-\chi)(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_0) - \frac{1}{1-m}(1-\chi)\mathbb{I})\} = 0, \tag{5.18}$$

$$\mathrm{div}_y\{(1-\chi)\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_1) - \frac{1}{m}\chi \cdot \mathbb{I}\} = 0. \tag{5.19}$$

В принятых в настоящей работе ограничениях на геометрию элементарной ячейки Y_s задачи (5.17)– (5.19) всегда имеют единственное (с точностью до произвольного постоянного вектора) решение. Чтобы не иметь дело с произвольными постоянными положим

$$\langle \boldsymbol{U}^{ij}\rangle_{Y_s} = \langle \boldsymbol{U}_0\rangle_{Y_s} = \langle \boldsymbol{U}_1\rangle_{Y_s} = 0.$$

Таким образом

$$\mathbb{A}^s_0 = (1-m)\sum_{i,j=1}^{3} J^{ij}\otimes J^{ij} + \mathbb{A}^s_1, \quad \mathbb{A}^s_1 = \sum_{i,j=1}^{3}\langle D(y,\boldsymbol{U}^{ij})\rangle_{Y_s}\otimes J^{ij}. \tag{5.20}$$

$$B^s_0 = -\mathbb{I} + \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0)\rangle_{Y_s}, \quad B^s_1 = -\mathbb{I} + \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_1)\rangle_{Y_s}. \tag{5.21}$$

Симметричность и строгая положительная определенность тензора $\mathbb{A}^s_0$ была доказана в [10].

Далее для $i = 1, 2, 3$ рассмотрим модельные краевые задачи

$$\begin{aligned} &\triangle_y \Theta^s_i = 0, \quad \boldsymbol{y}\in Y_s,\\ &\frac{\partial \Theta^s_i}{\partial n} = -\boldsymbol{e}_i\cdot \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{y}\in\gamma \end{aligned} \tag{5.22}$$

и положим

$$\Theta^s = \sum_{i=1}^{3}(\Theta^s_i\otimes \boldsymbol{e}_i)\cdot\nabla_x\vartheta. \tag{5.23}$$

Тогда Θ^s решает задачу (5.10) и после подстановки выражения $\langle\nabla_y\Theta^s\rangle_{Y_s}$ в (5.12) получим

$$B^\theta = \varkappa_{0s}((1-m)\mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3}\langle\nabla_y\Theta^s_i\rangle_{Y_s}\otimes \boldsymbol{e}_i). \tag{5.24}$$

Все свойства матрицы B^θ хорошо изучены (см.[5], [12]). □

Лемма 9. *Пусть $\boldsymbol{v} = \langle\chi\partial \boldsymbol{W}/\partial t\rangle_Y$. Тогда сильные и слабые пределы $\boldsymbol{v}$, ϑ, и p удовлетворяют в области Ω_T следующей системе уравнений*

$$div_x\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{v} = B^f\cdot(-\frac{1}{m}\nabla p - \beta_{0s}\nabla\vartheta),\ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{5.26}$$

где строго положительно определенная симметричная матрица B^f определяется ниже формулами (5.27)–(5.29).

Доказательство. Усредненные уравнения (5.25) есть просто продифференцированные по времени уравнения (5.6). Уравнения (5.26) получаются после усреднения решения системы микроскопических уравнений (5.5) и (5.13), которое дается формулой

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{B}^f(\boldsymbol{y})\cdot(-\frac{1}{m}\nabla q).$$

Здесь

$$\mathbf{B}^f(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{U}^i(\boldsymbol{y})\otimes \boldsymbol{e}_i, \tag{5.27}$$

а функции $\boldsymbol{U}^i(\boldsymbol{y})$ определяются из решения периодической краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l} -\mu_1\triangle \boldsymbol{U}^i + \nabla R^i = \boldsymbol{e}_i, \quad \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \\ \boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma. \end{array}\right\} \tag{5.28}$$

Таким образом

$$B^f = \langle \mathbf{B}^f((\boldsymbol{y})\rangle_{Y_s}. \tag{5.29}$$

Матрица B^f является симметричной и строго положительно определенной ([5],гл.8).

Осталось воспользоваться уравнением (5.4) и заметить, что

$$\theta^f = \langle \Theta \rangle_{Y_s} = \langle \vartheta \rangle_{Y_s} = m\vartheta,$$

поскольку единственное решение микроскопических уравнений (5.14) дается равенством $\Theta = \vartheta$. $\square$

Список литературы

[1] A.M.Meirmanov, S.A.Sazhenkov, *Generalized solutions to the linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid*, www.arXiv.org/math.AP/0611350 v1 12 Nov (2006).

[2] G.Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 608–623.

[3] D.Lukkassen, G.Nguetseng, P.Wall, *Two-scale convergence*, Int. J. Pure and Appl. Math., **2**:1(2002), 35–86.

[4] R.Burridge, J.B.Keller,*Poroelasticity equations derived from microstructure*, J. Acoust. Soc. Am., **70**:4 (1981), 1140–1146.

[5] Э.Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория вибраций*, Мир, Москва, 1984.

[6] G.Nguetseng, *Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics*, SIAM J. Math. Anal., **21**(1990), 1394-1414.

[7] R.P.Gilbert, A.Mikelić, *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I*, Nonlinear Analysis, **40** (2000), 85–212.

[8] Th.Clopeau, J.L.Ferrin, R.P.Gilbert, A.Mikelić, *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II*, Mathematical and Computer Modelling, **33** (2001), 821–841.

[9] J.L.Ferrin, A.Mikelić, *Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluids*, Math. Meth. Appl. Sci., **26** (2003), 831–859.

[10] A.M.Meirmanov, *Nguetseng's two-scale convergence Method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media*, www.arXiv.org/math.AP/0611330 v1 11 Nov (2006).

[11] E.Acerbi, V.Chiado Piat, G.Dal Maso, D.Percivale, *An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains*, Nonlinear Anal., **18**(1992), 481–496.

[12] В.В.Жиков, С.М.Козлов, О.А.Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, Москва, 1993.

[13] О.А.Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, Москва, 1970.

Анварбек Мукатович Мейрманов
Государственный университет,
ул. Победы 85,
308015 Белгород, Россия
E-mail address: meirmanov@bsu.edu.ru