S@MR

ISSN 1813-3304

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 376-434 (2007)

УДК 531.5, 533.6, 534.2, 681.3 MSC 13A99

# ИЕРАРХИЧЕСКИЙ SPH-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

А.В. АЛИЕВ, Г.А. ТАРНАВСКИЙ

ABSTRACT. This work has been directed to a creation of new modern computer technologies and methods of programming for the rise of efficacy of solving of fundamental scientific and applied problems in gravitational gas dynamics connected with great volume of the calculations. The main attention has been given to theoretical questions and their practical application for the improvement of Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) method and algorithm of solving of complicated integro-differential systems of equations. The various aspects of method are considered. The degree of efficacy has been analyzed for determination of an optimal way of problem solving. The careful verification of theoretical method, calculating algorithm and computer program complex for detailed analysis of properties (exactitude of calculation and performance of computing process) is carried out. The executed theoretical investigations are used for creation of computer program complex of new generation for solving of space gas dynamics problems. The cycle of computer calculations of problems (in wide range of determinating parameters and starting data) of self-gravitational sphere collapse and protoplanet gas cloud evolution is executed and the analysis of received results is carried out.

### 1. Введение

Уровень развития высокопроизводительных вычислительных технологий и суперкомпьютеров, достигнутый к настоящему времени сделал возможным

ALIEV A.V., TARNAVSKY G.A., THE HIERARCHICAL SPH-METHOD FOR MATHEMATICAL SIM-ULATION IN GRAVITATIONAL GAS DYNAMICS.

<sup>©2007</sup> Алиев А.В., Тарнавский Г.А.

Работа поддержана РФФИ (проект 05-01-00009).

Поступила 14 апреля 2007 г., опубликована 24 сентября 2007 г.

проведение математического моделирования сложных научных проблем и природных явлений, что представлялось практически нереальным еще 10– 15 лет назад. Одной из областей знаний, решение задач которой вызывает настоятельную необходимость в создании и развитии компьютерных систем, а также современных численных методов, является область астрофизики. Среди множества ее актуальных проблем [1] можно выделить проблему образования звездных и планетарных систем из протовещества и их дальнейшего развития. К этой проблеме непосредственно примыкают вопросы о допланетном синтезе первичного органического вещества и возникновении ноосферы [2] на Земле, установления наиболее вероятных условий абиогенного синтеза органических соединений в Солнечной системе.

Исследования, выполненные межпланетными станциями «Вояджер-1», «Вояджер-2», «Галилео», «Гюйгенс», «Кассини» и орбитального телескопа «Хаббл» (рис. 1–2), приводят к необходимости существенного пересмотра классических моделей Канта-Лапласа и Шмидта (и их более современных модификаций) происхождения и эволюции Солнечной системы.

Одной из проблем классических теорий, вставших в ходе анализа полученной информации, является разнородность планет Солнечной системы: твердофазные (с жидким ядром) внутренние планеты Меркурий, Венера, Земля и Марс, газофазные внешние планеты Юпитер и Сатурн, и вновь твердофазные внешние планеты Уран и Нептун (Плутон был вычеркнут из числа планет на съезде Международного астрономического союза в 2006 г.). Проблемой также является разномасштабность планет: гиганты Юпитер и Сатурн и примерно одинаковые (по порядку) остальные планеты. Еще одной проблемой для классических теорий происхождения Солнечной системы является проблема разнородности лун (спутников) планет. Так, у газофазного (водород, метан) Юпитера (рис. 1) среди четырех галилеевых спутников существуют геологически активные (серные вулканы) Каллисто, Европа с морями воды подо льдом, твердокаменные пассивные Ио и Ганимед. Спутник газоводородного Сатурна Титан (самая крупная луна Солнечной системы, сравнимая с Землей) имеет плотную азотную атмосферу с давлением не менее 1 атм у поверхности. Спутник Урана (рис. 2) Миранда оказался состоящим из другого вещества, чем сам Уран. Тритон, спутник Нептуна, лишь в 3 раза меньше своей планеты, и здесь, вообще говоря, следует считать эту систему скорее двойной планетой, чем системой «планета – спутник».

Еще одной проблемой классических теорий являются нерегулярные направления вращения спутников вокруг своих планет: у одних орбитальные моменты различных типов движения имеют одинаковые знаки (спутник вращается вокруг планеты «по ходу» ее вращения вокруг своей оси и вращения вокруг Солнца), у других — противоположные знаки.

Все это делает маловероятной гипотезу о происхождении Солнечной системы из единого однородного газопылевого протопланетного облака. В свою очередь, достижения наблюдательной астрономии и астрофизики, значительно большие, чем приведенные выше, инициировали дальнейшее развитие разнообразных теоретических и компьютерных исследований. Так, например, складывающееся научное направление «космическая газодинамика» ориентировано на изучение процессов, происходящих в газовой среде, составляющей, наряду с твердофазными частицами и плазменной



Рис. 1. Планета-гигант Юпитер и его спутник Европа

компонентой, протогалактические (протозвездные, протопланетные) облака. Методология исследования этих процессов (экспериментальнонаблюдательные астрономические методы здесь не рассматриваются) основана на методах теоретической физики [3, 4], вычислительной математики [5], физической газовой динамики [6], термодинамики [7] и статистической физики [8] и опирается на возможности современной компьютерной техники.

Достаточно многочисленные работы (подробный анализ которых в данной статье представляется затруднительным) могут быть подразделены на аналитические (см., например, [9–11]) и численные исследования в пространстве чаще всего одного ([12–20]), существенно реже двух ([21– 22]) или трех ([23–26]) измерений. В [9] в рамках ньютоновской механики исследуется возможность образования однородного разлета гравитирующего газа и построен класс точных решений, учитывающих влияние градиента давления газа. В [10] рассматривается ультрарелятивистское приближение уравнений газовой динамики в специальной теории относительности, на основе которого получено точное решение задачи сильного релятивистского взрыва в среде со степенным распределением плотности. В [11] проведен вывод с точностью до членов второго порядка уравнений Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.

Работы [12–16] посвящены различным аспектам эволюции ударных волн в реагирующих средах, в том числе с инверсно-заселенными уровнями энергии, изучению их структуры и взаимодействия друг с другом с учетом излучения, в присутствии магнитных полей, устойчивости по отношению к малым возмущениям.

В [17] проанализированы стационарные решения системы уравнений Эйлера при наличии силовых воздействий гравитационного и электрического типов ИЕРАРХИЧЕСКИЙ SPH-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 379



Рис. 2. Система спутников планеты Уран. Иллюстрация NASA

с сосредоточенными массой и зарядом, основное внимание при этом уделено классу солитонных решений.

В [18] рассмотрена задача о динамическом взрыве равновесия звезды, которая рассматривается как самогравитирующий газовый шар, и получены особые режимы течений газа, в частности, неоднократный сброс оболочки звезды и уход части массы в межзвездное пространство.

В [19] и [20], наоборот, рассматривается коллапс (сжатие) протозвездного облака газа в изотермическом приближении. В зависимости от начальных условий (холодные или горячие облака) исследуются различные возможные сценарии гравитационного коллапса.

В [21] в газодинамическом приближении тонкого слоя рассматриваются проблемы взаимодействия солнечного ветра с локальной межзвездной средой и проводится сравнение данных вычислительных расчетов с многочисленными экспериментальными данными, полученными космическими аппаратами, и на основе этого сравнения проводится интерпретация ряда экспериментальных данных.

В [22] в газодинамическом приближении Навье-Стокса, для сравнения дополненного методом Монте-Карло, проведено моделирование двумерных стационарных течений во внутренней атмосфере комет с ядрами типа «яблоко», имеющими на дневной стороне большую, полностью освещенную выемку, и показана возможность образования рециркуляционных зон со сложной структурой.

При изучении сложных астрофизических явлений, например, процессов перемешивания вещества в сверхновых звездах, переход к моделированию

трехмерных течений сопровождается появлением новых физических эффектов, которые в задачах меньшей размерности либо отсутствуют, либо проявляются лишь незначительно. К таким процессам относятся гидродинамические неустойчивости Рэлея-Тейлора, Кельвина-Гельмгольца, Рихтмайера-Мешкова, физические неустойчивости Джинса И т.п., исследование которых приобретает особую значимость. Так, в [23] изучаются «грибовидные» структуры неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, возникающие при переходе ударной волны из одной газовой среды в другую (из гелия в ксенон), т.е. анализируется рефракция сильного разрыва на контактной границе. Исследование таких задач предъявляет большие требования к качеству применяемого алгоритма. Вопросам конструирования соответствующих алгоритмов для ультрарелятивистских уравнений Эйлера посвящена работа [24].

Необходимые для обеспечения численного решения подобных задач и, далее, задач, еще более приближенных к реальным, ресурсы настолько велики, что уже требуется применение новых компьютерных технологий параллельного счета на многопроцессорных вычислительных системах. Это порождает новые проблемы физико-математической декомпозиции полной задачи для организации распараллеливания вычислительного процесса. Решению таких проблем посвящены работы [25–27], а методология и конкретные технологии параллельного проектирования изложены в монографии [28].

Прогресс современной вычислительной техники и численных методов делает возможным компьютерное моделирование реальных динамических процессов, наблюдаемых в галактиках: образование спиральных структур, шаровых скоплений, аккреционных дисков и т.п. Сложный комплекс физикохимических, механических и даже философских проблем в целях оптимизации путей решения необходимо требует структурирования полной задачи на ряд подзадач — некоторых сегментов, охватывающих определенную часть проблемы. Эти сегменты, с одной стороны, должны быть достаточно автономны и иметь минимальное число связей с другими сегментами, чтобы, например, коренной пересмотр физико-химических концепций одного сегмента «не обрушил» теорию и алгоритмику решения других подзадач. С другой стороны, предмет исследования сегмента должен быть достаточно обширен, чтобы представлять не только некоторую структурную часть проблемы, не имеющую смысла вне ее, но и быть в большой мере самодостаточным, индивидуально вызывающим особый научный интерес. Таким структурным разделом большой астрофизической проблемы является сегмент «космическая газодинамика».

Несмотря на то, что газовая фаза составляет небольшую (до 5%) часть общей массы газопылевого облака нашей Метагалактики, ее влияние на эволюцию протовещества и реорганизацию в галактики, звездные скопления и планетарные системы в некоторых, далеко не всех, околозвездных пространствах, исключительно велика ([29]). Это подтверждается современными астрофизическими наблюдениями, в том числе проведенными на орбитальном телескопе «Хаббл». Теоретический анализ и компьютерное моделирование ряда различных аспектов наблюдаемых астрофизических процессов проведены в [30–36]. Настоящая работа представляет собой комплексный теоретический анализ и ориентирована на создание новых современных вычислительных технологий в области космической газодинамики.

Сложность математического моделирования в области вычислительной астрофизики связана, во-первых, с высокой зависимостью финального решения нелинейных задач от начальных данных и даже собственно от алгоритма, что представляется собой самостоятельную и весьма трудную проблему и опирается, в основном, на эмпирические, зачастую существенно интуитивные представления [37–40]. Во-вторых, при получении финального решения существенную роль играет необходимость селекции решений в процессе их эволюции во времени в многочисленных точках бифуркации [41–42]. В-третьих, для нелинейных задач, к которым относятся задачи гравитационной газовой динамики, весьма остро стоит проблема адекватности непрерывной (теоретической) и дискретной (алгоритмической, реализуемой численно) постановок одной и той же задачи. Вследствие этого, большие затруднения, в частности, вызывает необходимость отличать вычислительные неустойчивости от физических, весьма многочисленных и разнообразных, определяющих или быстрые катастрофы, или формирование достаточно стабильных структур (галактик, звезд, планетарных систем) со стагнацией состояния в течение какого-нибудь длительного периода времени (см. [29, 37]).

Предлагаемая разработка опирается на опыт создания методов, алгоритмов и программ, предназначенных для исследования физики и механики процессов обтекания тел различной конфигурации гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа в широком диапазоне определяющих параметров и высот полета как в атмосфере Земли [43–47], так и в газовых средах с аномальными свойствами [48–50], которые моделируют условия в атмосферах Венеры, Марса и Юпитера, а также в ряде других задач гравитационной космодинамики [51– 53].

В настоящей работе приводится подробное описание и всесторонний анализ вычислительного алгоритма и реализующего его комплекса программ, специально разработанного для исследования эволюции газовой компоненты протопланетного диска с учетом гравитационного влияния центрального тела и эффектов самогравитации газа методом сглаженных частиц (Smoothed Particles Hydrodynamics или сокращенно SPH-метод [54]). Определенное преимущество данной методики состоит в том, что, по сравнению с моделированием классических задач газовой динамики, например, задач обтекания [55], некоторые требования, предъявляемые к численному методу, ослабляются, но, вместе с тем, выдвигается и ряд дополнительных условий. В отличие от эйлеровых (сеточных) или смешанных эйлеро-лагранжевых методов (например, метода частиц Харлоу), SPH-метод относится к полностью лагранжевым и поэтому свободен от необходимости использования какой-либо пространственной сетки [56], на которой производится аппроксимация производных в системе дифференциальных уравнений. Данная особенность кардинальным образом отличает как технологию рассматриваемого метода по сравнению с сеточными методами (конечных разностей, конечных объемов, конечных элементов), так и вносит значительный вклад в некоторые вычислительные особенности получения решения. Некоторые из этих особенностей являются, на наш взгляд,

существенными преимуществами для решения рассматриваемого класса задач, в частности, при постановке естественных граничных условий на разделе газа и вакуума, полная пространственная изотропия алгоритма, отсутствие необходимости решения уравнения Пуассона для гравитации. В сеточных метода решение уравнения Пуассона приводит к необходимости использования прогонок, распараллеливание которых весьма неэффективно [57, 58]. Все это способствуют широкому использованию SPH-метода в астрофизике, а также некоторых других областях численного моделирования механики сплошной среды (высокоскоростное пробивание, разрушение конструкций и т.п.).

# 2. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Для понимания сущности решаемой задачи и организации соответствующих вычислений следует кратко изложить (подробно см. [1, 3, 4, 7, 8, 31, 51]) физико-математические основы моделирования задач гравитационной газодинамики.

2.1. Газовая динамика. Физические процессы, протекающие в газовых средах, определяются фундаментальными законами сохранения массы – импульса – энергии, которые могут быть записаны в дифференциальной форме в дивергентном виде

(1) 
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \nabla_k \mathbf{F}^k(\mathbf{U}) = \mathbf{A}.$$

Здесь  $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho E)$  — вектор консервативных переменных, представляющий плотности сохраняющихся величин (массы, импульса, энергии);  $\mathbf{F}$  — вектор их потоков;  $\mathbf{A}$  — вектор массовых сил;  $\nabla$  — дифференциальный оператор «набла», в частности, в декартовой системе координат  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right).$ 

Система (1), эволюционная по времени t, в пространстве трех измерений (x, y, z) состоит из 5 уравнений, связывающих сохраняемую величину  $U_i$  с ее потоком через границы или источником ее производства внутри рассматриваемой локальной области:

(2) 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \nabla_k (\rho V_k) = 0,$$

(3) 
$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \nabla_k (\rho V_i V_k) + \nabla_i p = F_i; \ i = 1, 2, 3,$$

(4) 
$$\frac{\partial\rho E}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \nabla_k V_k(\rho E + p) = -\sum_{k=1}^{3} \nabla_k q_k + Q + \sum_{k=1}^{3} V_k F_k,$$

(5) 
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_g$$

Здесь  $\rho-$ плотность, V<br/> — вектор скорости,  $E=e+V^2/2$  — массовая плотность полной энерги<br/>и, e — внутренняя энергия, p — давление, F<br/> — суммарный вектор внешних сил, q — тепловой поток, Q — локальное энерговыделение, VF —

удельная работа внешних сил. Смысл  $\mathbf{F}_f$  и  $\mathbf{F}_g$  (фотонная и гравитационная составляющие) будет пояснен ниже.

2.2. Термодинамика. Система (2) - (5) замыкается уравнением состояния

(6) 
$$p = Z(\rho, T) \frac{R}{\mu} \rho T,$$

где R — универсальная газовая постоянная ( $R = 8.31 \ \text{Дж} \ K^{-1} \ \text{моль}^{-1}$ ), T — абсолютная термодинамическая температура,  $\mu$  — молекулярный (атомарный) вес газовой среды. При Z = 1 уравнение (6) переходит в уравнение состояния идеального газа Клапейрона-Менделеева.

Весьма удобным для использования является уравнение состояния, связывающее давление с плотностью и внутренней энергией

(7) 
$$p = p(\rho, e).$$

В классической аэродинамике (7) имеет вид

(8) 
$$p = (\gamma - 1)\rho e,$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты газовой среды, величина, как правило, постоянная во всей области течения газа.

При моделировании задач космической газодинамики уравнение состояния (6) может весьма сильно отклоняться от идеального вследствие различных физических процессов — возбуждения внутренних степеней свободы (вращательных, колебательных, электронных), диссипации и рекомбинации, ионизации и т.п. При структурировании программного комплекса на сегменты, моделирующие (отдельно в вычислительном смысле) различные физические процессы, удобно использовать метод эффективного показателя адиабаты. Сущность этого метода (подробнее см. [49, 50]) заключается в использовании формы записи уравнения состояния в классическом виде (8), в котором  $\gamma$  является существенно переменной величиной

(9) 
$$\gamma = \gamma(\rho, T).$$

Этот метод эффективен для моделирования нестационарных течений газа с большими перепадами p и T в расчетной области в случае равновесных или квазиравновесных процессов. (Существенно неравновесные процессы требуют дополнительных связей между программными сегментами. Этот вопрос лежит вне рамок настоящей работы).

2.3. **Теплопередача.** Тепловой поток **q** в уравнении баланса энергии (4) определяется двумя физическими механизмами — теплопроводностью газа и переносом тепла излучением:

(10) 
$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \mathbf{q}_f.$$

Первый из них связан с разностью температур в слоях газа и в стационарном (квазистационарном) случае описывается законом Фурье

(11) 
$$\mathbf{q}_t = -\kappa \nabla T,$$

в котором коэффициент теплопроводности  $\kappa$ , может быть вычислен по значениям  $\rho$  и T при постулировании, например, максвелловского распределения молекул по скоростям, или значение  $\kappa$  в (11) взято непосредственно из каких-либо термодинамических таблиц. Механизм передачи тепла излучением описывается следующими уравнениями. Тепловой поток  $\mathbf{q}_f$  определяется решением системы

(12) 
$$\nabla \mathbf{q}_f = \frac{c}{l}(U - U_0),$$

(13) 
$$\nabla U = -\frac{3}{cl}\mathbf{q}_f,$$

где l — росселандов пробег (средняя длина пробега квантов излучения), c — скорость света (3 · 10<sup>8</sup> м/с), ( $U - U_0$ ) — отклонение плотности энергии от равновесного, которое определяется по закону Стефана-Больцмана

(14) 
$$U_0 = \beta T^4,$$

где постоянная Стефана-Больцмана  $\beta = 7.56 \cdot 10^{-16}$  Дж м<sup>-3</sup> К<sup>-4</sup>.

Используя формализм классической термодинамики, можно получить уравнение состояния излучающего газа (имеется в виду только фотонный газ, без атомарной составляющей)

$$(15) p_f = U/3,$$

где плотность энергии излучения U, определяемая из системы (12) – (13) исключением  $\mathbf{q}_f$ , — аналог удельной внутренней энергии e в (7),  $p_f$  — давление излучения.

В равновесном случае, приложив закон Стефана-Больцмана (14) к уравнению состояния (15), можно представить давление излучения в виде функции температуры

(16) 
$$p_f(T) = \beta T^4/3.$$

В общем (15) или частном (16) виде давление  $p_f$  должно быть учтено в общей системе уравнений (2) – (5) как одна из составляющих ( $\mathbf{F}_f$ ) суммарного вектора ( $\mathbf{F}_{\Sigma} = \mathbf{F}_f + \dots$ )

(17) 
$$\mathbf{F}_f = \rho \nabla p_f.$$

В данной статье метод решения уравнений (10) – (17) и их включения в SPH-метод не рассматривается, и дальнейшее описание алгоритма приводится без учета теплопроводности и излучения. Эти вопросы частично обсуждаются в [59, 60].

2.4. **Гравитация.** Гравитационное воздействие на газовую среду определяется двумя физическими механизмами — внешним источником тяготения и собственной самогравитацией газа:

(18) 
$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i,$$

где  $\Phi_e, \Phi_i, \Phi$  — соответственно гравитационные потенциалы внешнего источника, внутренний (газовой среды), суммарный.

Внешний источник тяготения может находиться как внутри, так и вне области моделирования (в последнем случае имеет место достаточно специфично поставленная задача). Обычно исследуются задачи в приближении «точечного» источника с размером, существенно меньшим характерного размера задачи. В этом случае может быть использован ньютоновский потенциал

(19) 
$$\Phi_e = -G\frac{M}{r},$$

где M — масса источника тяготения, r — расстояние от него до элемента газовой среды,  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ сек}^{-2}$  — гравитационная постоянная.

Гравитационный потенциал  $\Phi_i(x, y, z)$  газовой среды с распределенной массой, характеризующейся функцией плотности  $\rho(x, y, z)$  в декартовой или иной системе координат, определяется из решения уравнения Пуассона

(20) 
$$\Delta \Phi_i = 4\pi G(\rho + \rho_0).$$

Величина  $\rho_0$  в (20) позволяет учитывать так называемую «репульсивную» силу, некоторый гравитационный «фон», частично нейтрализующий поле газовой среды [34]. Заметим, что в большинстве случаев принимается  $\rho_0 = 0$ , если при моделировании какой-либо галактической системы пренебрегается влиянием как других галактических систем, так и невидимой (темной) материи, учет влияния которой (несмотря на абсолютную неясность ее природы) начинает появляться в настоящее время в некоторых работах.

Гравитационная составляющая  $\mathbf{F}_g$  вектора внешних сил  $\mathbf{F}$  в системе уравнений (3) – (5) определяется гравитационным потенциалом (18)

(21) 
$$\mathbf{F}_g = -\rho \nabla \Phi = -\rho \nabla (\Phi_e + \Phi_i).$$

При этом в (21) могут быть учтены по (19) – (20) потенциалы  $\Phi_e$  и  $\Phi_i$  как по отдельности, так и вместе, что определяется физическим смыслом решаемой задачи.

Работа внешних сил (гравитационное трение)  $\mathbf{vF}_g$  вносит лишь небольшой вклад в общий баланс энергии (5), за исключением задач с очень большими градиентами плотности и ее величиной, что может привести к образованию высокоградиентных полей тяготения.

2.5. Метрика пространства. Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства–времени, соответственно чему оно определяется метрическим тензором  $g_{ik}$ . То же самое относится и к неинерциальным системам отсчета, которые эквивалентны гравитационным полям (А. Эйнштейн, Общая теория относительности, 1916). При моделировании задач космической газодинамики может быть необходим учет искривления (неевклидовости) пространства при наличии сильных внешних полей тяготения, или даже самогравитации газового облака, если его масса (плотность или размер) достаточно велика. Эти эффекты могут быть узко локализованы («черные дыры»), и, соответственно, приводить к существенно неравномерным распределениям газодинамических параметров, в особенности для высокоскоростных течений газа, характеризующихся сложными динамическими картинами ударно-волновых структур.

Задающий свойства риманова пространства метрический тензор  $g_{ik}$  может быть найден (в принципе; в реальности его вычисление требует как специального моделирования, так и существенных вычислительных затрат) из основных уравнений общей теории относительности (уравнений гравитационного поля) — уравнений Эйнштейна

(22) 
$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa T_{ik},$$

где  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  — постоянная Эйнштейна, c — скорость света,  $T_{ik}$  — тензор энергии–импульса материи (включая электромагнитное поле), R — скалярная

кривизна пространства (инвариант), а тензор Риччи  $R_{ik}$  получен путем свертывания тензора кривизны пространства  $R_{jimk}$ :

(23) 
$$R = g^{ik}R_{ik}; \qquad R_{ik} = g^{jm}R_{jimk};$$

(24)

$$R_{ikjm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^j} \right) + g_{np} \left( \Gamma_{kj}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{ij}^p \right).$$

Символы Кристоффеля, использованные в (24), имеют вид

(25) 
$$\Gamma_{km}^{i} = \frac{1}{2}g^{is} \left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^{m}} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^{s}}\right).$$

Одним из приближенных способов учета искривления пространства является использование метрики Шварцшильда для гравитационного поля центрально-симметричного изолированного тела. Соответствующий ей метрический тензор диагонален и его компоненты равны

(26) 
$$g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1/g_{00},$$

где Ф — гравитационный потенциал.

Подчеркнем, что обсуждение проблем общей теории относительности ни в коей мере не является предметом данной работы (подробнее см., например, [1, 3, 33, 36]); рассматриваются только возможные способы использования разработанных теоретических аспектов ОТО (в том или ином приближении) при создании специализированного программного сегмента вычислительного комплекса, опирающегося на возможности современной компьютерной техники, для моделирования задач астрофизики.

2.6. Масштабирование. В качестве основных масштабов величин для записи интегрируемых уравнений в безразмерной форме выбраны характерные масса  $M_0$  и размер  $L_0$ , которые определяются сущностью конкретной задачи, а также гравитационная постоянная G. Масштабы остальных величин — времени  $t_0$ , скорости  $V_0$ , плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$ , удельной внутренней энергии  $e_0$ , температуры  $T_0$ , гравитационного потенциала  $\Phi_0$  формируются из основных:

(27) 
$$V_0 = G^{1/2} M_0^{1/2} L_0^{-1/2}; \quad t_0 = \frac{L_0}{V_0} = G^{-1/2} M_0^{-1/2} L_0^{3/2};$$

(28) 
$$e_0 = \Phi_0 = V_0^2 = GM_0L_0^{-1}; \quad \rho_0 = \frac{\Phi_0}{4\pi GL_0^2} = \frac{1}{4\pi}M_0L_0^{-3};$$

(29) 
$$p_0 = \rho_0 V_0^2 = \frac{1}{4\pi} G M_0^2 L_0^{-4}; \qquad T_0 = \frac{p_0}{\rho_0 R} = \frac{1}{R} G M_0 L_0^{-1},$$

где R — газовая постоянная.

Масштабы (83) позволяют пересчитать, при необходимости, безразмерные параметры в размерные.

2.7. Начальные данные. Постановка начальных данных нелинейной дифференциальной задачи, несмотря на некоторую, порой даже чрезмерную недооценку этого вопроса, представляет собой весьма сложную комплексную проблему, связанную с возможностью существования неединственности решения или вообще его отсутствия. Дополнительные трудности в эту проблему вносит переход от непрерывной дифференциальной задачи и ее начальных данных (НД) к дискретному вычислительному алгоритму, где этим НД соответствуют некоторые стартовые условия (СУ). И хотя зачастую, может быть даже неосознанно, между понятиями НД и СУ ставят знак тождества, они являются существенно различными и в идейном плане, и в их конкретной реализации.

Напомним, что в области аэродинамики существует, например, задача о натекании на клин сверхзвукового потока, имеющая двойное решение. Это решение обусловлено уравнением 2-й степени для одного из главных параметров задачи (в [48] показано, что при учете физико-химических превращений в газе это уравнение имеет 5-й порядок с соответствующими последствиями). При изучении взаимодействия ударных волн в классической газодинамике получены два разных типа их отражения друг от друга, причем диапазоны их существования перекрываются, т.е. при некоторых одних и тех же значениях параметров могут возникать как одна ударно-волновая структура, так и другая. Какая из них возникает в натурном эксперименте? Какая в вычислительном?

Эти примеры представляют стационарные задачи, существенно более простые, чем нестационарные, хотя и для них «нет и, по-видимому, не будут доказаны теоремы существования» [37] (авторы данной статьи разделяют эту точку зрения). Для задач космической газодинамики с их существенно более сложной физикой, эти проблемы приобретают особое значение. Заметим, что переход от непрерывности к дискретности эти проблемы теоретически еще более усугубляет (для нелинейных задач нет даже строгих доказательств аппроксимируемости).

В вычислительных экспериментах неединственность получаемых решений может быть «классифицирована» по трем основным типам (подробнее см. [42]). Первый тип — неединственность «по дискретным сеткам», самый известный тип (разные сетки — разные решения). Контроль осуществляется мельчением сетки до достижения «насыщения», если «насыщение» наступает. При этом априори нельзя утверждать, что на мелких сетках обеспечивается более качественное решение. Второй тип — неединственность по разным алгоритмам (разные алгоритмы — разные решения). В сложных ситуациях и при отсутствии достоверных данных физического эксперимента, ненадежности перехода к физической и математической моделям в гноснологической цепочке моделирования нет возможности определить «более качественный алгоритм» (см., например, [42, 55]).

Наконец, третий тип — неединственность по стартовым условиям алгоритма. Поскольку этому уделяется очень мало внимания, проанализируем данный вопрос несколько подробнее.

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения x = F(x) методом последовательных приближений  $x_{n+1} = F(x_n), n = 1, 2, ..., N, ...$  Заметим, что здесь речь не идет о качестве этого метода и альтернативах ему (этот метод

легко анализируем, чего нельзя сказать о методах решения нестационарных пространственных уравнений Эйлера). Возьмем простой пример — уравнение

$$(30) x = x^2$$

В классе неотрицательных значений  $x \in [0,\infty)$  уравнение (87) имеет два решения:

$$(31) X1 = 0,$$

(32) 
$$X2 = 1.$$

Непрерывному уравнению (87) соответствует дискретный алгоритм

(33) 
$$x_{n+1} = x_n^2, \ n = 1, 2, \dots, N, \dots$$

с некоторым стартовым условием

$$(34) x_1 = X0.$$

Рассмотрим влияние вариации значения X0 на получаемое решение. При выборе X0 > 1 траектория продвижения расчета по (90) приводит к неограниченному возрастанию амплитуды решения, т.е. алгоритм обеспечивает получение дискретного решения (символическая запись)

$$(35) X_d^a = \infty.$$

При выбореX0<1тра<br/>ектория продвижения расчета при  $n\to\infty$  приведет к<br/> решению (88)

и только при X0 = 1 будет обеспечено получение решения (89)

Таким образом,  $X_d^a$  и  $X_d^b$  являются обычными аттракторами дискретного алгоритма (90) для непрерывной задачи (87) с бассейнами притяжения соответственно  $X0^a \in (1,\infty)$ ,  $X0^b \in [0,1)$ , а  $X_d^c$  — странным аттрактором с бассейном притяжения, вырождающимся в точку  $X0^c \in [1,1]$ . Следовательно, выбор стартового условия в области допустимых значений  $X0 \in [0,\infty)$  в том или ином бассейне притяжения приводит к различным траекториям продвижения расчета и к получению различных финальных значений.

Небольшая, «непринципиальная» переформулировка непрерывной задачи (87) на задачу

$$(38) x = \sqrt{x},$$

(которая имеет те же решения (88–89)) приведет к существенной реорганизации траекторий расчета, «передела» бассейнов притяжения для аттракторов. В области допустимых значений  $X0 \in [0,\infty)$  будут иметь место один обычный аттрактор  $X_d^a = 1$ , соответствующий решению (94), с бассейном притяжения  $X0^a \in (0,\infty)$ , и один странный аттрактор  $X_d^b = 0$ , соответствующий решению (93), с бассейном притяжения, вырождающимся в точку  $X0^b \in [0,0]$ .

Этот простой пример показывает важность выбора стартового условия алгоритма даже для элементарной задачи: алгоритм может обеспечить получение решения при использовании адекватных начальных данных или привести к «уходу» вычислительного процесса на ветвь решений,

388

#### ИЕРАРХИЧЕСКИЙ SPH-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 389

не отражающих сущность моделируемого процесса. Тем более в задачах астрофизики, с их сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений и аппроксимирующими их вычислительными алгоритмами, опирающимися на решение больших систем алгебраических уравнений, весьма важен выбор начальных приближений, адекватно отражающих физические реалии. Иначе старт вычислительного расчета и его продвижение по «своей» траектории, особенно при наличии возможных точек бифуркации, может привести к получению результатов на другой, нежели ожидаемая, ветви решения. В частности, нельзя ожидать стационарного или слабоосциллирующего периодического или апериодического квазистационарного решения, получаемого методом установления, при неадекватном выборе стартового условия (подробнее см. [37]).

# 3. Численный метод сглаженных частиц, вычислительный алгоритм и комплекс компьютерных программ

Основным фактором, определяющим выбор или специальное построение технического инструментария (состоящего из ступеней «Численный метод вычислительный алгоритм — комплекс компьютерных программ»), является физическая сущность моделируемых процессов. Ожидаемое решение задачи (наличие ударно-волновых структур, большие градиенты величин, физические нестабильности) накладывают специфические требования к свойствам численного метода (устойчивость, точность, сходимость и т.п.) и реализующего его комплекса компьютерных программ (минимизация ресурсов, анализ большого потока информации при решении нестационарных пространственных задач). При этом желательно обеспечить «равномерную точность» моделирования этапов гносеологической цепочки (см. рис. 3). Совершенно бессмысленным, на наш взгляд, является применение схем повышенного порядка точности для третьего-четвертого этапа моделирования, если его первый-второй этапы являются весьма приближенными (что естественно для пионерских исследований). Для моделирования процессов в сегменте «газовая динамика» общего вычислительного комплекса нами использовался SPH-метод [54], дополненный некоторыми усовершенствованиями [61] и обеспечивающий решение нестационарных пространственных уравнений Эйлера. Выбор этого метода был связан с тремя основными обстоятельствами. Во-первых, это вычислительные достоинства метода. Естественная лагранжевая природа SPHметода позволяет проводить моделирование в очень широком динамическом диапазоне плотностей во времени и пространстве, от массивных скоплений газа до глубокого вакуума с нулевой плотностью. Метод отличается полной пространственной изотропией, а сама схема сконструирована на основе физической сущности решаемой задачи — движения частиц, эволюция которых во времени и пространстве непосредственно (не через систему дифференциальных уравнений) отражает законы сохранения массы, импульса и момента импульса. Этого нельзя сказать о большинстве алгоритмов, формально аппроксимирующих непрерывные дифференциальные уравнения их дискретными аналогами безотносительно физической сущности задачи.

Во-вторых, этот метод допускает расширение круга решаемых задач (физико-химические процессы, излучение) без кардинальной перестройки всего

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



Рис. 3. Основные этапы математического моделирования: реальный физический процесс — физическая модель математическая модель — численный метод — вычислительный алгоритм — компьютерная программа — анализ полученной информации

алгоритма [60], а также прозрачный и естественный интерфейс с другими сегментами программного комплекса математического моделирования. Кроме того, он легко распараллеливается.

В третьих, опыт применения SPH-метода свидетельствует о его высоком потенциале для моделирования задач космической гравитационной газодинамики, особенно в комбинации с иерархическим приближением задачи N тел (см., например, [54, 62, 63, 64]).

Отметим, что основным и по сути единственным реально «конкурирующим» подходом к моделированию задач космической газодинамики является применение адаптивных сеток [65], которые обладают рядом своих собственных как преимуществ, так недостатков.



Рис. 4. Классификация численных методов механики сплошной среды

3.1. Классификация численных методов механики сплошной среды. Для возможности функционального сравнения рассмотрим следующую условную классификацию (рис. 4) численных методов, используемых для решения задач механики сплошной среды, в том числе физической газовой динамики.

К эйлеровым сеточным методам решения уравнений газовой динамики относятся прежде всего методы конечных разностей и конечных объемов, например, схемы Мак-Кормака, Годунова, FLIC-метод и TVD-схемы, в т.ч. современные ENO, WENO схемы [5,47]. Общим для этих методов является использование пространственной сетки, возможно адаптивной или подвижной, но не связанной напрямую с движением частиц газа. Методы частиц в ячейках ([44, 66]]) также используют пространственную сетку, но при этом на каждом временном шаге содержат в себе два этапа: эйлеров этап для нахождения некоторых необходимых значений в узлах сетки и отдельно лагранжев этап, на котором осуществляется расчет конвективного переноса вещества из одной ячейки в другую, в соответствии со значениями в узлах ячейки, полученных на первом этапе. В полностью лагранжевых методах вся аппроксимация осуществляется без какой-либо пространственной расчетной сетки. К ним, в частности, относится метод частиц для несжимаемой жидкости [67]. SPH-метод также относится к этому семейству методов.

3.2. Идеология SPH-метода. Сглаживающее ядро. Формула для интерполяции. Основополагающим идеологическим моментов в SPH-методе является применение сплайн-интерполяции. Рассмотрим абстрактный случай: пусть в дву- или трехмерном пространстве  $\Omega$  некоторая функция  $f(\mathbf{r})$  известна только в N точках (узлах), т.е. заданы значения:

(39) 
$$f(\mathbf{r}_i), \ i = 1..N, \ \mathbf{r} = (x_1...x_D), \ D = \dim(\Omega).$$

Требуется построить значение данной функции в произвольной точке **r** этого пространства. Выпишем следующее приближение:

(40) 
$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}', \ \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega,$$

где  $W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h)$  — так называемое сглаживающее ядро, которое должно должно принадлежать пространству функций, удовлетворяющих условиям:

(41) 
$$\int W(\mathbf{r},h)d\mathbf{r} = 1; \quad W(\mathbf{r},h) \xrightarrow[h \to 0]{} \delta(\mathbf{r})$$
$$\int \frac{\partial}{\partial x} W(\mathbf{r},h)d\mathbf{r} = \int \frac{\partial}{\partial y} W(\mathbf{r},h)d\mathbf{r} = \int \frac{\partial}{\partial z} W(\mathbf{r},h)d\mathbf{r} = 0.$$

Параметр hназывается радиусом сглаживания. Из (41) следует, в частности, что  $W({\bf r},h)$  — функция с финитным носителем (почти всюду нулевая). При  $h\to 0$  выражение (40) сходится к очевидному соотношению

(42) 
$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

При выполнении всех этих условий формула (40) имеет второй порядок точности по h [63]:

(43) 
$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = f(\mathbf{r}) + O(\sigma h^2) + O(h^4), \ \sigma = \nabla^2 f(\mathbf{r})$$

Очевидно, что, если  $f(\mathbf{r})$  — линейная функция или постоянная, то порядок точности повышается до четвертого. Одним из возможных вариантов сглаживающего ядра, удовлетворяющего условиям (41), может быть следующая функция:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \frac{C}{h^D} \begin{cases} (1 - \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{4}k^3), & k < 1\\ \frac{1}{4}(2 - k)^3, & 1 < k < 2\\ 0, & k > 2 \end{cases},$$

(44) 
$$k = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{h},$$
$$C = \begin{cases} \frac{2}{3}, \ D = 1\\ \frac{10}{7\pi}, \ D = 2\\ \frac{1}{\pi}, \ D = 3 \end{cases}$$

где D — размерность пространства моделирования (D = 1, 2, 3).

Согласно (39) функция  $f(\mathbf{r})$  известна только в N точках, поэтому интегрирование (40) проводится приближенно (численно), путем замены интеграла на конечную сумму:

(45) 
$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{f(\mathbf{r}_j)}{n_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h).$$

392



Рис. 5. Окрестность взаимодействия сглаживающих частиц с контрольной частицей и сортировка частиц по ячейкам для быстрого поиска соседей

Здесь  $n_j$  — пространственная плотность расположения узлов с известными значениями (по которым строится интерполяция) в пространстве. Поскольку сглаживающая функция  $W(\mathbf{r}, h)$  не равна нулю только в окрестности с радиусом 2h вокруг точки пространства с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , на интерполируемый результат в  $\mathbf{r}$  влияют не все N известных узлов, а только те, которые попали в данную окрестность сглаживания вокруг  $\mathbf{r}$ . Следовательно, в (45) осуществлять суммирование можно заведомо не по всем известным точкам интерполяции, а только по соседним узлам (частицам) в радиусе 2h, как показано на рис. 5.

Частицы, которые попали в область сглаживания, в дальнейшем будем называть частицами-соседями или просто соседними частицами, а их число обозначать как  $N_{\rm nb}$ . Следует отметить, что полный перебор всех имеющихся частиц для поиска лежащих в радиусе 2h, имеет квадратичный порядок числа операций и потому не может быть рекомендован для вычислений. С учетом того, что частицы произвольно перемещаются в пространстве и могут свободно перемешиваться между собой, задача эффективного (экономичного по времени) поиска соседей является ключевой в технологии и реализации SPH-метода. Один из подходов к ее решению уже был продемонстрирован на рис. 5 [68], когда пространство решения задачи разбивается на ячейки, а в дальнейшем на отношение соседства проверяются только частицы из соседних ячеек. Порядок числа операций данного алгоритма при этом понижается с  $N^2$  до NlogN. В  $\left[ 59\right]$  рассматривается другой, более универсальный алгоритм, также требующий NlogN операций. Подчеркнем, что речь идет о технологических ячейках для эффективной реализации быстрого алгоритма и не связанных с какой-либо вычислительной аппроксимацией.

Отметим следующие дополнительные свойства представленной здесь интерполяции:

(46) 
$$\left\langle \frac{A(\mathbf{r})}{B(\mathbf{r})} \right\rangle = \frac{\langle A(\mathbf{r}) \rangle}{\langle B(\mathbf{r}) \rangle} + O(h^2),$$
$$\langle A(\mathbf{r})B(\mathbf{r}) \rangle = \langle A(\mathbf{r}) \rangle \langle B(\mathbf{r}) \rangle + O(h^2)$$

Поместим в пространство моделирования N частиц. Определим каждой частице значения массы, внутренней энергии и скорости. При этом частицы перемещаются в пространстве по законам классической механики:

(47) 
$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \\ m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}. \end{cases}$$

В каждый фиксированный момент времени  $t = t_k$  физические величины (энергия, скорость) известны в N точках, в которых находятся в данный момент времени частицы, несущие эти параметры. Проводя интерполяцию этих величин по (45), можно получить значения в любой точке пространства без использования сетки.

Плотность вещества в точке  $\mathbf{r}$  определяется как:

(48) 
$$\langle \rho(r) \rangle \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i W(r - r_j, h).$$

Если все частицы одинаковы по массе, то плотность пропорциональна числу частиц в элементе объема, но возможно задание неодинаковых по массе частиц. В соотношении (45) учитываются плотности вероятности расположения частиц, необходимая для корректного численного интегрирования. Приближенная плотность вероятности с учетом того, что частицы могут иметь разные массы, вычисляется по формуле:

(49) 
$$n_i = \frac{\rho(r_i)}{m_i}.$$

Если подставить (49) в (45), окончательно интерполяция для SPH-метода записывается в виде:

(50) 
$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho(r_j)} f(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h).$$

Формула (50) является основополагающей в методе сглаженных частиц.

3.3. Аппроксимация уравнений газовой динамики. Поскольку кинетика частиц описывается соответствующими законами механики, необходимо определить силы взаимодействия между частицами. От того, каким образом вычисляются силы, действующие на частицы, зависит то, какие уравнения можно моделировать SPH-методом. Поскольку данный вариант SPH-метода конструируется так, чтобы изначально аппроксимировать уравнения газовой динамики, то и решение будет газодинамическим (при соответствующем обеспечении точности). В частности, в нем не будет многопотоковости (проникновение частиц, несколько скоростей в одной точке). Важно отметить, что многопотоковость в данном случае исключена не при помощи какого

394

либо искусственного приема в рассматриваемом вычислительном методе, а непосредственно самими уравнениями газовой динамики, решение которых обеспечивает SPH-метод. С вычислительной точки зрения интерполяция скорости по формуле (50) дает единственное значение вектора осредненной скорости в каждой точке пространства.

Ниже для краткости рассматривается одномерный случай. Для многомерных течений методика конструирования SPH-метода полностью аналогична. Уравнение движения в лагранжевой форме можно записать в виде:

(51) 
$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Для аппроксимации этого уравнения SPH-методом применим подход, аналогичный используемому в методе Галеркина для метода конечных элементов. Для каждой точки **r**, где в данный момент времени находится частица, запишем уравнение движения в слабой форме, умножив его скалярно на введенную выше сглаживающую функцию и проинтегрировав по всей области пространства  $\Omega$ . Данная методика роднит SPH-метод с вариационными численными методами решения ДУ. Для правой части (51) справедливо представление:

(52) 
$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{p}{\rho^2} \nabla p.$$

Для произвольной *i*-ой частицы, находящей в точке  $\mathbf{r}_i$ , уравнение (51) с учетом (52) в слабой форме имеет следующий вид:

(53) 
$$\int_{\Omega} \frac{d\mathbf{V}}{dt} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = -\int_{\Omega} \left[ \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{p}{\rho^2} \nabla p \right] W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}'.$$

Применяя (40), можно получить:

(54) 
$$\frac{d\langle \mathbf{V} \rangle}{dt} = -\nabla \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle - \left( \frac{p}{\rho^2} \right) \nabla \left\langle \rho \right\rangle.$$

Учитывая дискретизацию (50), выражение окончательно преобразовывается:

(55) 
$$\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}\right) \nabla W \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h\right).$$

Заметим, что для интерполяции газодинамических параметров используется функция  $W(\mathbf{r}, h)$ , а для аппроксимации дифференциальных уравнений газовой динамики, соответственно, ее градиент по пространству  $\nabla W(\mathbf{r}, h)$ . Для одномерного случая вид этих функций приведен на рис. 6, который иллюстрирует одну из сущностей SPH-метода, выражающуюся в зависимости от расстояния степени влияния частиц друга на друга и отсутствие какого-либо влияния за пределами окрестности 2h. Можно отметить что  $\nabla W(0, h) = 0$ , означающее отсутствие действия частицы на саму себя. Кроме того, имеет место симметричность степени влияния на частицу в точке со стороны соседних частиц справа и слева:

(56) 
$$\nabla W(\mathbf{r},h) = -\nabla W(-\mathbf{r},h).$$



РИС. 6. Зависимость сглаживающей функции (сплошная линия)  $W\left(\frac{r}{h},h\right)$  и ее производной (пунктирная линия)  $\frac{d}{d(r/h)}W\left(\frac{r}{h},h\right)$  от безразмерного параметра r/h

Рассмотрим уравнение энергии, записанное для одномерного случая в лагранжевом виде:

(57) 
$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} \nabla \mathbf{V}.$$

Сделав аналогичные, что и выше, выкладки с этим уравнением, можно получить соотношение для частицы, определяющее изменение внутренней энергии:

(58) 
$$\frac{de_i}{dt} = \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j \right) \cdot \nabla W \left( \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h \right).$$

Параметр сглаживания h — расчетный параметр SPH-метода, влияющий на точность аппроксимации. Он не должен быть «слишком маленьким», чтобы частицы не теряли связь друг с другом, и не должен быть «слишком большим», чтобы решение не «размазывалось». Уравнения (48), (55), (58) вместе с уравнением состояния и начальными данными образуют замкнутую систему, что позволяет определить эволюцию системы частиц во времени в соответствии с законами газовой динамики.

Заметим, что среди уравнений газовой динамики, для которых здесь выписываются SPH аппроксимации, отсутствует уравнение неразрывности. Это объясняется полностью лагранжевой спецификой метода. Частицы, передвигаясь в пространстве, переносят с собой массу, а плотность определяется взвешенной суммой вкладов частиц из окрестности сглаживания согласно (48). Важно отметить, что моделирование по методу SPH не относятся к прямым методам моделирования движения молекул газа. Учитывая то, что в 1см<sup>3</sup> газа, например, земной атмосферы, при нормальных условиях содержится порядка 10<sup>19</sup> молекул, провести прямой расчет их движения на современной компьютерной технике невозможно. В астрофизических задачах плотность распределения молекул может быть еще выше. Частицы в описываемом методе не являются моделью молекул газа в полном смысле этого слова. Метод SPH моделирует осредненные уравнения сплошной среды (в данной работе — газовой динамики), выведенные из целого ряда дополнительных условий и ограничений (в частности, максвеловский вид распределения скоростей молекул газа, термодинамическое равновесие, равномерное распределение внутренней энергии по степеням свободы, достаточное количество молекул, необходимое для осреднения скоростей в сколь угодно малом объеме газа и т.д.). Эти условия накладывают принципиальные ограничения на сферу применения уравнений газовой динамики в реальных физических процессах. Так, разреженные газы уже следует описывать более общими кинетическими уравнениями со сложными столкновительными членами [8], а не уравнениями (2) – (4). Все эти ограничения в полной мере справедливы и для SPH-метода, который моделирует газ посредством решения дифференциальных уравнений (2) – (4) специфическим способом. Поэтому область применения метода сглаженных частиц как минимум ограничивается областью применимости уравнений сплошной среды.

3.4. Оценка погрешности аппроксимации методом сглаженных частиц. Общая погрешность метода сглаженных частиц является суммой трех погрешностей:

- Погрешность замены разрывной  $\delta$ -функции непрерывным сглаживающим ядром  $W(\mathbf{r}, h)$  (см. (40) (43)). Как уже указывалось, при соблюдении всех требований, предъявляемых для сферической функции ядра, в общем виде справедливо:  $\langle f(\mathbf{r}) \rangle f(\mathbf{r}) = O([\nabla^2 f] h^2)$  для произвольной функции и  $O(h^4)$  для линейной  $f(\mathbf{r})$ .
- Погрешность замены интеграла (40) конечной суммой по  $N_{\rm nb}$  соседним частицам. Ясно, что чем больше  $N_{\rm nb}$ , тем меньше будет погрешность от такой замены. Несмотря на то, что численное интегрирование осуществляется по методике, подобной алгоритму Монте-Карло, было показано, что погрешность аппроксимации интеграла в этом случае убывает со скоростью  $1/N_{\rm nb}$ , вопреки априорной оценке погрешности  $1/N^{0.5}$ . Причина заключена в том, что при численном интегрировании (45) учитывается фактическая плотность распределения частиц и их вклад в значение интеграла (посредством множителя  $m_j/\rho(\mathbf{r}_j)$  в интерполяционном соотношении).
- Погрешность процедуры численного интегрирования по времени. Для моделирования эволюции системы сглаженных частиц во времени может быть использована любая подходящая явная временная схема, например, схемы Рунге-Кутты или прогноза-коррекции. Вопрос выбора временного шага будет описан далее.

Поскольку эти три процедуры осуществляются совместно, общая погрешность аппроксимации для вычисления траекторий движения частиц на каждом шаге по времени определяется тремя параметрами:

(59) 
$$\varepsilon = O(l) + O(h^2) + O(\tau^k), \quad l = 1/N_{\rm nb},$$

где au — временной шаг, k — порядок аппроксимации схемы временного шага.

Таким образом, для обеспечения сходимости SPH-метода, в соответствии с (59) требуется одновременно уменьшать радиус сглаживания h и вместе с тем поддерживать достаточное количество частиц в окрестности 2h. Очевидно, что эти два требования являются противоречивыми при условии постоянного общего количества частиц в области решения, т.к. уменьшение радиуса сглаживания влечет за собой меньший охват частиц ненулевой частью функции ядра, т.е. уменьшение числа соседей  $N_{\rm nb}$  (рис. 5). Для того чтобы одновременно выполнить оба требования, необходимо увеличивать общее количество частиц N, уменьшая при этом h.

Величина  $N_{\rm nb}$  зависит от общего числа частиц линейно, т.е.  $N_{\rm nb} \sim N$ . С другой стороны, зависимость  $N_{\rm nb}$  от радиуса сглаживания имеет вид  $N_{\rm nb} \sim h^D$ , где D — размерность пространства (D = 1, 2, 3). Из этого следует, что для получения оптимальной сходимости, с увеличением числа частиц N в k раз до значения  $N^* = kN$ , необходимо уменьшить радиус сглаживания h так, чтобы его новое значение  $h^*$  лежало в диапазоне:

(60) 
$$h_0 < h^* < h, \ h_0 = h/k^a, \ a = 1/D,$$

Новое значение числа частиц соседей  $N_{\rm nb}^*$  при этом будет лежать в диапазоне:

$$(61) N_{\rm nb} < N_{\rm nb}^* < kN_{\rm nb}$$

Конкретный выбор нового параметра сглаживания при увеличения общего количества частиц зависит от того, какая из двух противоречивых (для фиксированных N и h ) целей в данный момент преследуется. Если требуется максимально подавить осцилляции в решениях на фронтах ударных волн, то радиус сглаживания необходимо выбирать ближе к максимальновозможному значению из (60), но при этом решение будет достаточно сильно сглаживаться. В случае необходимости передать крутизну фронтов ударных волн максимально без «размазывания», то следует выбирать меньший  $h^*$  из (60), что может привести, однако, к нефизическим осцилляциям в решении. Следует отметить, что это справедливо только для фиксированных N и h. При совместном увеличении же числа частиц и выполнении указанных выше требований для радиуса сглаживания, можно добиться одновременного уменьшения как «размазывания», так и осцилляций, что означает сходимость метода к точному решению. В разработанном вычислительном алгоритме для моделирования SPH-методом задается желаемое значение числа частиц соседей N<sub>nb</sub> и общее число частиц N, а шаг сглаживания определяется автоматически, исходя из этих двух параметров. Подробно вопрос выбора шага сглаживания будет также рассматриваться в п. 3.7.

Практика показала, что для большинства реальных задач обычно достаточно 50–80 частиц-соседей. В процессе увеличения общего количества частиц, после достижения этого числа, как правило, точность суммирования (45) становится удовлетворительной и в дальнейшем рациональней придерживаться левой границы (60), т.е. значительнее уменьшать радиус сглаживания.

3.5. Выполнение законов сохранения в решении. Остановимся на вопросах выполнения законов сохранения в методе сглаженных частиц. Очевидно, что полная масса в предложенном здесь варианте SPH-метода всегда сохраняется, т.к. носителем вещества являются модельные частицы, а их общая масса постоянна, поскольку число частиц фиксировано и не меняется в процессе решения. Рассмотрим вопрос сохранения импульса. Импульс будет сохраняться, если выполняется третий закон Ньютона, т.е.  $\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i}$ , где  $\mathbf{F}_{i,j}$ — сила, действующая на частицу с номером *i* со стороны частицы с номером *j*,

398

а  $\mathbf{F}_{j,i}$  — соответственно, сила, действующая на частицу j со стороны частицы *i*. Обратимся к выражению для ускорения частицы (55), откуда с учетом (47) получается:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i,j} &= m_i \left[ -m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W \left( \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h \right) \right], \\ \mathbf{F}_{j,i} &= m_j \left[ -m_i \left( \frac{p_j}{\rho_i^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_j W \left( \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, h \right) \right]. \end{aligned}$$

٦

Из свойств сглаживающей функции (56) следует, что третий закон Ньютона  $\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i}$  выполняется в SPH-методе всегда, т.е. автоматически, сохраняется полный импульс системы.

SPH-метод в постановке, в которой он здесь рассматривается, свойством консервативности полной энергии не обладает. Степень сохранения полной энергии зависит от точности аппроксимации, определяется в конкретном расчете, и служит одним из критериев качества полученного решения.

3.6. Искусственная вязкость. В настоящей работе SPH-метод применяется для моделирования невязких течений, т.е. система уравнений (2)-(4) не содержит в себе членов для учета вязкости. Это означает, что в эти уравнения не заложено никакого механизма, который бы осуществлял диссипацию кинетической энергии и ее переход в тепловую за счет сил молекулярного трения. Широко известным фактом является то, что попытки решения таких систем уравнений численно приводят к значительным осцилляциям и резкому увеличению разброса локальных скоростей в решении с возникновением численных неустойчивостей. Стандартным путем решения этой проблемы является введение так называемой искусственной (схемной) вязкости путем подбора дополнительных членов в уравнения движения и энергии, которые осуществляют диссипацию кинетической энергии. Данный подход пришел в SPH-метод из эйлеровых схем решения уравнений газовой динамики. Наиболее распространенны следующие типы искусственных вязкостей, которые включаются в уравнения:

(63) 
$$\begin{aligned} \Pi_l &= -\alpha \rho l c_s \nabla \cdot \mathbf{V}, \\ \Pi_q &= \beta \rho l^2 (\nabla \cdot \mathbf{V})^2, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta$  — свободные параметры, l — характерный размер сглаживания ударной волны,  $c_s$  — скорость звука. В данной работе использовано следующее комбинированное выражение для искусственной вязкости П<sub>ij</sub> между двумя частицами с номерами i и j [62]:

$$\begin{split} \Lambda_{ij} &= \begin{cases} (-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \bar{p}_{ij}, \ \text{если} \ (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) < 0 \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases} \right\},\\ \mu_{ij} &= \frac{h(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon h^2},\\ \text{(64)} &\quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}, \ \bar{p}_{ij} = (p_i + p_j)/2,\\ \alpha &= 1.0, \ \beta = 0.5, \ \varepsilon = 0.01,\\ f_i &= \frac{|(\nabla \cdot \mathbf{V})_i|}{|(\nabla \cdot \mathbf{V})_i| + |(\nabla \times \mathbf{V})_i + 0.0001c_i/h|},\\ \Pi_{ij} &= \frac{1}{2}(f_i + f_j)\Lambda_{ij}. \end{split}$$

Выражения усредняются для того, чтобы выполнялся закон сохранения импульса. Используя формулы (55), (58) для уравнений движения и энергии SPH частиц и сравнивая их с правыми частями уравнений газовой динамики (51) и (57), несложно получить явные выражения компонент искусственной вязкости ( $\nabla \cdot \mathbf{V}$ ), ( $\nabla \times \mathbf{V}$ ) для *i*-ой частицы:

(65) 
$$(\nabla \cdot V)_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \left( \mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i \right) \cdot \nabla W \left( \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h \right)$$

(66) 
$$(\nabla \times V)_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \left( \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j \right) \times \nabla W \left( \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h \right)$$

Искусственная вязкость «включается», только для движущихся навстречу частиц и препятствует, в частности, их взаимному проникновению одной в другую, когда сила газодинамического давления не в состоянии сделать это, изза конечного шага интегрирования по времени. Уравнение движения частицы с учетом вклада искусственной вязкости переписывается в виде

(67) 
$$\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}\right) \nabla W \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h\right).$$

Модифицированное уравнение для энергии имеет вид:

(68) 
$$\frac{de_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2}\Pi_{ij}\right) (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \cdot \nabla W (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h).$$

Важно отметить, что выражения для искусственной вязкости не обязательно присутствуют в расчетной схеме в явном виде, как в рассматриваемом SPHметоде. Формально эти выражения могут отсутствовать, но схемная вязкость все равно будет иметь место, за счет других численных эффектов и свойств самой схемы. Так, например, в методе FLIC (метод крупных частиц) явных выражений для искусственной вязкости может и не быть, но данный метод сам по себе существенно «размазывает» получаемое решение, и это обеспечивает диссипацию кинетической энергии неявным образом, тем самым, обеспечивая устойчивость метода при моделировании течений с ударными волнами, ограничивая резкий рост скоростей. Но в этом случае схемную вязкость

#### ИЕРАРХИЧЕСКИЙ SPH-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 401

гораздо сложней контролировать, что является существенным недостатком. С другой стороны, в реальных газовых течениях физическая вязкость существует всегда. Вопросам подбора схемной вязкости в тех задачах, где существенную роль играет и реальная физическая вязкость так, чтобы она (искусственная вязкость) не только обеспечивала устойчивость вычислительной схемы, но еще и моделировала при этом физическую диссипацию, уделяется в последнее время много внимания. Эта методика использования искусственной вязкости является более простой и экономичной альтернативой прямого моделирования уравнения Навье-Стокса с явными членами физической вязкости в исходном дифференциальном уравнении. Другой подход, позволяющий обходиться без явного включения искусственной вязкости, состоит в использовании аналитических решений задачи Римана в расчетной схеме и имеет свои собственные достоинства и недостатки (схема Годунова и ее варианты).

3.7. Адаптивный шаг сглаживания. Как уже неоднократно указывалось выше, точность получаемого решения пропорциональна величине  $N_{\rm nb}^{-1}$ . На практике это означает, что желательно выбирать такой радиус сглаживания, чтобы гарантировать некоторый минимум числа соседей N<sub>nb</sub> у каждой частицы из пространства решения. В противном случае неизбежна существенная потеря точности решения, особенно в случаях «отрыва» отдельных групп частиц от остальных, т.к. это приводит к получению нефизических решений. В этом случае группы частиц теряют связь друг с другом, точность численного интегрирования (45) становится неудовлетворительной. Поэтому решение в области, где у частиц нет достаточного числа соседей, лишено физического смысла и не представляет интереса. В тоже время согласно (43), слишком большой радиус сглаживания, по сравнению с другими характерными размерами (например, геометрическими размерами важных особенностей исследуемого течения) в области решения, дает «размазывание» этих особенностей в получаемом решении, что особенно критично на фронтах ударных волн. Плотность в SPH-методе вычисляется согласно (48) и пропорциональна пространственной концентрации частиц. Распределение плотности в решении может быть функцией с большим диапазоном возможных значений, что особенно актуально для задач столкновений с сильными деформациями и задач астрофизики. Это означает, что выбрать единый радиус сглаживания для всех частиц в общем случае невозможно. Так, если плотность изменяется в пространстве в 10 раз, то в местах с низкой плотностью область сглаживания одной частицы охватит, например, 50 соседей, но в зоне высокой плотности соседними могут оказаться уже 500 частиц. Если же эти 500 частиц образуют уединенную ударную волну, то и вся волна окажется «размазанной». Во время задания начального распределения параметров газа эту проблему можно решить постановкой равномерного распределения частиц и обязательным наделением каждой частицы своей собственной индивидуальной массой, так чтобы в местах высокой плотности массы частиц были соответственно больше. Однако задачи, для которых был разработан SPH-метод всегда являются существенно нестационарными. Плотность газа (а следовательно и концентрация частиц) в одних и тех же участках может меняться с течением времени, в ходе эволюции решения, в сотни раз. Поэтому равномерное распределение частиц с разными массами не

является универсальным решением этой проблемы. Более эффективным представляется подход, который заключается в наделении каждой частицы своим собственным радиусом сглаживания. Этот радиус адаптивно меняется со временем, тем самым автоматически подстраиваясь под текущую плотность газа и обеспечивая оптимальное число соседей для данного общего количества частиц. Так, в областях разреженного газа, радиус сглаживания должен быть увеличен, чтобы захватить достаточное количество частиц, не допустив тем самым потерю точности решения, хотя и ценой большего «размазывания» в ряде случаев. Напротив, в областях сильного сжатия газа, этот радиус следует уменьшать (сохраняя при этом некоторый заданный необходимый минимум числа частиц-соседей), предотвращая тем самым избыточное сглаживание решения и сохраняя «тонкие» физические особенности течения газа.

Итак, каждой частице предписывается свой собственный переменный радиус сглаживания  $h_i$ , где *i*-номер частицы. Для того, что выполнялось свойство симметричности всех парных взаимодействий, SPH формализм (50), (48), (55), (58) принимает модифицированный вид, сущность которого заключается в следующем. Уравнения, соответствующие законам сохранения массы, импульса и энергии, записываются в новом симметризованном виде, в котором используются оба радиуса сглаживания:

(69) 
$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho(r_j)} f(\mathbf{r}_j) \left[ 0.5 W_{i,j}(h_i) + 0.5 W_{i,j}(h_j) \right]$$

(70) 
$$\langle \rho(r_i) \rangle \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \left[ 0.5 W_{i,j}(h_i) + 0.5 W_{i,j}(h_j) \right],$$

(71) 
$$\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}\right) [0.5\nabla W_{i,j}(h_i) + 0.5\nabla W_{i,j}(h_j)],$$

(72) 
$$\frac{de_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2}\Pi_{ij}\right) (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \left[0.5\nabla W_{i,j}(h_i) + 0.5\nabla W_{i,j}(h_j)\right],$$

(73) 
$$W_{i,j}(h) \equiv W\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h\right).$$

Формулы (69) – (72) даны без дополнительных алгебраических преобразований, для больше наглядности. Обозначения в них соответствуют ранее принятым соглашениям. Отметим, что эта новая форма записи по-прежнему полностью консервативна относительно массы и импульса.

Оптимальной стратегией в выборе  $h_i$  является стремление поддерживать число частиц-соседей на постоянном, заранее заданном пользователем уровне. Для этого были опробованы два варианта решения этой задачи:

Первый способ состоит в том, чтобы напрямую выбирать нужный шаг сглаживания, исходя из текущего расположения частиц. Для этого на каждом временно шаге для каждой частицы применяется следующая итерационная процедура [64]:

(74) 
$$h_i^{\text{new}} = \frac{1}{2} h_i^{\text{old}} \left[ 1 + \left( \frac{N_{\text{s}}}{N_i} \right)^{1/D} \right].$$

Здесь D — размерность пространства,  $h_i^{\rm new}$  — новое значение радиуса сглаживания для i-ой частицы,  $h_i^{\text{old}}$  — старое,  $N_i$  — текущее число частицсоседей, N<sub>s</sub> — желаемое число частиц-соседей. Последний параметр задается пользователем перед началом процесса моделирования и не меняется в процессе счета. Можно осуществлять несколько таких итераций, заменяя  $h_i^{\text{new}}$  на  $h_i^{\text{old}}$  и заново каждый раз перевычисляя  $N_i$ . Тем самым значение h<sup>new</sup> стремится стать таким, чтобы число соседей поддерживалось на постоянном уровне, равном N<sub>s</sub>. Процедура, очевидно, хорошо сходится для распределения частиц, близкого к равномерному вокруг *i*-ой частицы в *D*мерном пространстве и при условии, что  $N_i$  не слишком мало. К сожалению, в остальных ситуациях итерационный процесс имеет немонотонную сходимость с сильными скачками  $h_i^{\text{new}}$ , которые довольно медленно стремятся к нужному значению. Кроме того, процедура весьма затратна по компьютерным ресурсам, т.к. требует вызова функции поиска соседей на каждой своей итерации (для определения нового значения  $N_i$ ) с большим числом операций. Главным недостатком является то, что использование данной процедуры приводит также к тому, что в области скачков (разрывов) плотностей (т.е. на фронтах ударных волн) индивидуальный радиус сглаживания  $h_i$  скачкообразно меняется с сильными перепадами его значения. Экспериментально было установлено, что это приводит к дополнительным осцилляциям в решении. По всей видимости, замена терма  $\nabla W \left( \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i \right)$ при постоянном радиусе сглаживания на новое симметризованное выражение  $[0.5\nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_i) + 0.5\nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_j)]$ эффективно работает только при  $h_i \sim h_i$ , т.е. для достаточно гладкой функции h(x,y,z). Поэтому было решено делать либо только одну итерацию вида (74) на каждом шаге, либо один раз в несколько временных шагов, тем самым постепенно корректируя радиус сглаживания для каждой частицы. Частота вызова такой процедуры корректировки задается пользователем.

Заметим, что эта проблема практически полностью аналогична проблеме из совершенно другой области вычислительной газовой динамики проблеме подключения модуля учета турбулентности при моделировании течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа (уравнения Навье-Стокса). Существует альтернатива: либо на каждом шаге по времени решения уравнений Навье-Стокса проводить решение уравнений турбулентности, либо «подключать» турбулентность через априори заданный интервал временных шагов. Оказалось (см. подробнее [69]), что первый способ дает исключительно плохие результаты и общее замедление сходимости всего процесса в целом, а конкретное значение оптимального интервала может быть определено только после вычислительных экспериментов для большого класса задач.

В целом достоинством итерационной процедуры (74) является то, что она корректна для случая частиц с разными массами.

Второй способ корректировки  $h_i$  предназначен для более плавной подстройки радиуса сглаживания на каждом шаге по времени в целях поддержания числа частиц-соседей на постоянном уровне. К сожалению, он также хорошо работает только при распределении частиц, близкому к равномерному. Однако при достаточном большем числе частиц это почти всегда имеет место во многих подобластях решения. Сконструируем некоторую упрощенную методику для более экономичного (с вычислительной точки зрения) определения радиуса сглаживания каждой частицы. Для этого рассмотрим соотношение, при котором число частицсоседей для фиксированной плотности  $\rho_0$  и радиуса  $h_0$  будет таким же, как и для плотности  $\rho$  с радиусом h в момент времени t:

(75) 
$$h(t) = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho(t)}\right)^{1/D},$$

где D — размерность пространства. Продифференцировав обе части (75) по времени ( $\rho_0, h_0$  — константы), получим:

(76) 
$$\frac{dh}{dt} = -[D^{-1}h_0\rho_0^{1/D}\rho^{-(D+1)/D}]\frac{d\rho}{dt}$$

Подставим вместо  $\frac{d\rho}{dt}$  правую часть уравнения неразрывности (2):

(77) 
$$\frac{dh}{dt} = \left[-D^{-1}h_0\rho_0^{1/D}\rho^{-(D+1)/D}\right]\left[-\rho \operatorname{div}(\mathbf{V})\right] = D^{-1}h_0\rho_0^{1/D}\rho^{-1/D}\operatorname{div}(\mathbf{V}).$$

Выражая  $\rho^{1/D}$  из исходного соотношения для h (75) и подставляя его в (77), окончательно получаем:

(78) 
$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{1}{D}h_i(\nabla \cdot \mathbf{V}_i)$$

Эта методика является очень экономичной, поскольку дивергенция скорости  $\nabla \cdot \mathbf{V}_i$  вычисляется по формуле (65) (напомним, что она также требуется и для вычисления искусственной вязкости, а потому ее дополнительное использование не увеличивает вычислительную нагрузку).

Уравнение (78) разрешается на каждом временном шаге по схеме Эйлера:

(79) 
$$h_i(t+\tau) = h_i(t) + \frac{dh_i}{dt}\tau,$$

при этом радиус сглаживания плавно изменяется в соответствии с течением газа. Подчеркнем, что формулу (79) можно применять, только если было задано начальное распределение частиц с одинаковыми массами (т.е.  $m_i = m_j, \forall i, j \in N$ ).

Окончательно объединяя два метода нахождения h на новом шаге по времени, получаем:

(80) 
$$h_i(t+\tau) = P\left\{\frac{1}{2}h_i(t)\left[1+\left(\frac{N_s}{N_i}\right)^{1/D}\right], i, t\right\} + \left(h_i(t)+\frac{1}{D}h_i(t)(\nabla \cdot \mathbf{V}_i)\tau\right).$$

Здесь  $P\{...\}$  — условный оператор, который определяет, надо ли выполнять процедуру модификации h по методу (74) для *i*-ой частицы в момент времени t. По умолчанию в программе он срабатывает один раз каждые пять временных шагов для всех частиц, обеспечивая грубую подстройку радиуса сглаживания. Экспериментально было установлено, что данное соотношение 1/5 необходимо для расчета высокоскоростных течений, в которых одной только процедуры (79) недостаточно для надежного поддержания числа частиц-соседей на постоянном уровне. В большинстве случаев, совместное применение двух описанных выше способов согласно (80) стабильно удерживает эту важнейшую величину с погрешностью не более 20% от желаемого значения.

Начальное задание шага сглаживания частиц (в момент времени t = 0) осуществляется следующим образом. Процедура (74) повторяется до

сходимости итераций, устанавливая тем самым для каждой частицы первоначальный радиус сглаживания  $h_i^0 = h_i(t = 0)$ . Как уже говорилось, эта процедура затратна, но осуществляется она только один раз перед стартом расчета эволюции системы частиц, и потому занимает очень незначительную часть от общего времени численного моделирования. После этого радиус сглаживания соседних частиц осредняется (для достижения необходимой гладкости).

Примечание: опыт использования SPH-метода показал, что, кроме всего прочего, необходимо также задавать ограничение радиуса сглаживания сверху  $h_{max}$ , выше которого он уже не устанавливается независимо от нехватки соседей. Это необходимо для предотвращения чрезмерного «размазывания» решения на границе «газ – вакуум».

3.8. Учет влияния гравитации на движение частиц. Ускорение движущегося малого объема гравитирующего газа можно записать как:

(81) 
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{gas} + \mathbf{a}^{grav},$$

где **a**<sup>gas</sup> — ускорение под воздействием сил газодинамического давления, **a**<sup>grav</sup> — ускорение под воздействием сил гравитации. Таким образом, в любой момент времени, ускорение каждой частицы складывается и является следствием двух независимых друг от друга физических процессов.

В общем виде задача о движении N гравитирующих масс называется задачей N-тел [70], и существует множество алгоритмов ее оптимального решения (см., например, [23]). Традиционно в эйлеровых методах, нахождение сил гравитации связано с решение уравнения Пуассона (1.7). Этот подход имеет свои особенности и трудности, среди которых можно отметить:

- Необходимость построения и хранения новой пространственной сетки для решения уравнения Пуассона, потенциально на каждом шаге, т.к. область решения может расширяться. Необходимость перестройки сетки при сильных деформациях. Например, для случая коллапсирования материи, когда все вещество может оказаться сконцентрированным всего в нескольких узлах изначальной сетки, что приводит к резкому снижению точности расчетов.
- Трудности, связанные с реализацией краевых условий для уравнения Пуассона в задачах эволюции гравитирующей материи. Возникает необходимость в достаточном удалении («на бесконечность») границ решения уравнения Пуассона от фактических границ движения гравитирующего вещества (эллиптическая задача), что существенно увеличивает требуемый размер сетки, повышая общую трудоемкость решения задачи и требования к оперативной памяти.
- Необходимость интерполяции значений с узлов газодинамической сетки (для эйлеровых решателей) на сетку для решения уравнения Пуассона, если сетки не совпадают. Если же сетка общая, то приходится использование одну и той же сетку для решения двух совершенно разных физических задач. Общая сетка может не учитывать специфические особенности решения каждой задачи в отдельности, что приводит к необходимости ее чрезмерного измельчения.

#### А.В. АЛИЕВ, Г.А. ТАРНАВСКИЙ

- Неинвариантность относительно произвольного поворота осей координат (отсутствие пространственной изотропии) сеточного решения уравнения Пуассона, особенно на прямоугольной сетке.
- Решением уравнения Пуассона является гравитационный потенциал, для решения же кинетической задачи необходимо ускорение. Возникает дополнительная необходимость численного дифференцирования полученного решения уравнения Пуассона для нахождения силы и ускорения, что вносит дополнительную погрешность.

С учетом всех этих проблем и того, что газодинамический SPH-метод сам по себе не требует пространственной сетки, решение уравнения Пуассона сеточными методами оказывается нецелесообразным. Поэтому для определения сил притяжения в вычислительном алгоритме используется также полностью лагранжевый метод без пространственной сетки, который, как будет показано ниже, хорошо комбинируется с бессеточным методом сглаженных частиц и при этом свободен от большинства указанных выше проблем.

3.9. Иерархический метод расчета гравитационных сил. Перепишем уравнения для движения частиц объема газа в виде уравнения для движения SPH частицы с номером *i*:

(82) 
$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^{gas} + \mathbf{a}_i^{grav}$$

Сила гравитационного притяжения описывается законом всемирного тяготения:

(83) 
$$\mathbf{a}^{grav}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) G \iiint_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right|^3} d\mathbf{x}$$

Интегрирование производится по всей области решения задачи  $\Omega$ ,  $\rho(\mathbf{x})$  — плотность материи (газа) в  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}^{grav}$  — ускорение под воздействием сил гравитации, действующее на частицу газа. Поскольку гравитационная масса и масса инертная совпадают (постулат Эйнштейна), то в выражении для ускорения любой материальной точки ее масса отсутствует. Таким образом,  $\mathbf{a}^{grav}$  зависит только от распределения масс (плотностей) в пространстве, но не зависит от массы, сосредоточенной в самой частице  $\mathbf{x}$ . Вектор  $\mathbf{a}^{grav}$  можно также называть напряженностью гравитационного поля, поскольку по его значению определяется сила воздействия гравитационного поля на тело данной массы.

Выпишем интеграл вида (83) в дискретной постановке для N частиц с точечными массами:

(84) 
$$\mathbf{F}_{i} = m_{i}G\sum_{j=1}^{N} \frac{m_{j}}{|\mathbf{r}_{i,j}|^{3}}\mathbf{r}_{i,j},$$

где  $\mathbf{F}_i$  — сила, действующая на частицу с номером *i* со стороны остальных частиц. Очевидно, что чем больше частиц, тем меньше будет погрешность такого представления. Ускорение частицы равно:

(85) 
$$\mathbf{a}_{i}^{grav} = G \sum_{j=1}^{N} \frac{m_{j}}{|\mathbf{r}_{i,j}|^{3}} \mathbf{r}_{i,j}.$$

406

Запись (85) является алгоритмом прямого суммирования и является максимально точным вариантом для полностью лагранжева расчета сил тяготения без необходимости решения уравнения Пуассона. Очевидно, что процедура вычисления (85) для всех частиц имеет квадратичный порядок сложности и затруднительна для практического использования при большом N. Поэтому применяется специальный иерархический алгоритм, обеспечивающий *приближенный расчет*, но имеющий при этом порядок операций  $\sim N \log N$ , который, как показывает вычислительная практика, вполне экономичен и пригоден для использования в реальных расчетах.

Воспользуемся понятием центра масс для системы, состоящей из k частиц:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{k} m_i \mathbf{r}_i.$$
$$M = \sum_{j=0}^{k} m_j.$$

(86)

Известно, что для системы достаточно удаленных друг от друга частиц хорошим механическим приближением является материальная точка с массой, равной сумме их масс и расположенной в центре масс этой системы. Понятие достаточно удаленной системы частиц (относительно заданной точки) означает, что характерные размеры этой системы много меньше расстояния от заданной точки до их центра масс. Основная идея приближенного иерархического подхода состоит в том, что удаленные частицы (от контрольной, для которой определяется сила) группируются, и расчет сил притяжения происходит посредством операций только с их центром масс, а не с каждой частицей в отдельности. Влияние частиц, которые находятся близко от контрольной, по-прежнему определяется прямым суммированием (85), для обеспечения достаточной точности учета вклада в суммарную силу притяжения от них. При этом, в качестве критерия, для определения границы, когда силы необходимо вычислять попарно, а когда уже можно группировать частицы, служит следующее условие:

(87) 
$$\frac{l_q}{r_{iq}} < \theta,$$

где  $l_q$  — линейный размер прямоугольной ячейки q, внутри которой частицы группируются в единую материальную точку,  $r_{iq}$  — расстояние от точки, для которой вычисляется напряженность гравитационного поля, до центра масс группируемой ячейки q,  $\theta$  — параметр, задающий точность приближения. Чем меньше величина  $\theta$ , тем точнее вычисляется сила гравитационного воздействия на контрольную частицу со стороны остальных. Если условие (87) выполнено, это означает, что в рамках организации приближенного счета можно группировать частицы внутри прямоугольника q и вычислять взаимодействие только с центром масс системы сгруппированных частиц. Для реализации полностью адаптивного алгоритма необходимо предварительно провести иерархическое разбиение области, заполненной частицами, как показано на рис. 7 [59].

Декомпозиция области на подобласти происходит до тех пор, пока в каждой ячейке не окажется только одна частица. Алгоритмически построение дерева происходит путем последовательного «просеивания», всех частиц



Рис. 7. Схематическое изображение иерархической декомпозиции пространства на подобласти

через недостроенное дерево от корня к листьям (рис. 7) до тех пор, пока каждая частица не займет свою позицию в соответствующем ей листе дерева. Если частица «дошла» до конца (листа) дерева и «соседствует», там с другой частицей, то у данного узла (листа) создается  $2^D$  (D — размерность пространства) потомков, и каждая частица помещается в свою ячейку, а незаполненные листы уничтожаются. Если же они снова попадают в один и тот же лист, он снова разбивается на потомки и эта процедура повторяется до тех пор, пока в каждом листе не будет находиться строго только одна частица. В ходе такой процедуры построения дерева в его узлах необходимо сохранять только координаты центра и размер ячейки в пространстве, за которую отвечает данный узел. В каждом листе построенного дерева запоминается номер частицы, которая в него попала. Построенное дерево сохраняется в оперативной памяти.

После того, как дерево построено, все его элементы от листьев до корня заполняются параметрами, в которых сохраняются сумма масс частиц, попавших в это подразбиение, и координаты центра масс этих частиц. Для листьев дерева координаты их центров масс совпадают с координатами расположенных в них частиц (т.к. в каждый лист попадает только одна частица). Из (86) очевидно, что центр масс нескольких систем частиц находится в центре масс их центров масс, поэтому процедуру заполнения значениями может осуществлять рекурсивно снизу вверх от листьев (где необходимые значения уже имеются) до корня.

После того, как такое дерево построено, расчет гравитационного ускорения для частицы осуществляется посредством обхода дерева в глубину. Начиная с корня и двигаясь вниз по дереву, для каждой ячейки определяется, выполняется ли условие (87). Если (87) не выполняется, то обход дерева в глубину продолжается, т.е. для достижений требуемой точности необходимо дальнейшее дробление группы частиц на подгруппы. Если был достигнут лист дерева (в котором хранится номер отдельной частицы), то происходит обычное прямое суммирование по (85) парной силы взаимодействия. В предельном случае, если в (87)  $\theta = 0$ , в процессе обхода дерева в глубину всегда будет достигаться отдельная частица (соответствующая листу дерева) и производиться парное прямое суммирование с ней. Если же (87) выполняется,

то это означает, что для достижения приемлемой точности достаточно произвести суммирование только с центром масс ячейки q, который уже был посчитан и сохранен на этапе построения дерева.

Параметр  $\theta$  определяет точность расчета и практическую временную затратность вычислительного процесса. Чем он меньше, тем точнее расчет гравитационной силы, но при этом требуется больше машинного времени. В случае  $\theta = 0$  иерархический алгоритм вырождается в точное прямое суммирование (85) с алгоритмической сложностью  $\sim N^2$ .

Следует отметить, что максимальная ошибка аппроксимации ограничена и зависит только от  $\theta$  и числа частиц, но не зависит от пространственного расположения (конфигурации) частиц. Таким образом, иерархический метод в принципе полностью адаптивен и не требует никакой специальной дополнительной процедуры сгущения сетки в отдельных участках повышения плотности частиц или на всей области, как это может потребоваться при решении уравнения Пуассона. Это свойство очень привлекательно, т.к. делает погрешность иерархического метода независимой по отношению к большим пространственным сгусткам плотностей в моделируемых астрофизических процессах, позволяя тем самым беспрепятственно корректно обеспечивать решения с большим динамическим диапазоном плотностей во времени и пространстве. При непосредственном решении уравнения Пуассона для фиксированной сетки обеспечить точность расчета в таких случаях затруднительно (не прибегая к существенному сгущении узлов). По сравнению с решением уравнения Пуассона данный подход также не имеет сложностей с краевыми условиями и не зависит от размеров области решения задачи. Кроме того, в результате работы алгоритма получается непосредственно сила притяжения, а не гравитационный потенциал и, следовательно, нет необходимости дополнительно численно дифференцировать решение.

Вследствие того, что ячейки кластеризации частиц имеют прямоугольную форму и ориентированы относительно осей координат, полной изотропией иерархический метод, по всей видимости, не обладает. Однако при верификации программного комплекса не было выявлено никаких негативных последствий этого факта, по сравнению с решением уравнения Пуассона на прямоугольной сетке с шаблонами типа «крест», где неинвариантность относительно осей являлась существенным препятствием в изучении динамики гравитирующей материи в ряде задач.

Алгоритмическая сложность одного обхода дерева  $\sim \log N$ . Для расчета всей системы из N частиц сложность составляет  $\sim N \log N$ , вместо  $\sim N^2$  для прямого суммирования.

Проведем исследование погрешности и практической временной сложности иерархического метода Относительную погрешность приближенного иерархического метода по сравнению с точным, в пересчете на одну частицу, определим как:

(88) 
$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left|F_i^{tree} - F_i^{exactly}\right|}{\left|F_i^{exactly}\right|} / N_i$$

где  $F_i^{tree}$  — значение силы, полученное иерархическим методом,  $F_i^{exactly}$  — точное решения, полученное методом прямого суммирования по всем



Рис. 8. Отклонение приближенного иерархического решения от точного

частицам. На рис. 8 приведена зависимость погрешности от параметра  $\theta$ . Как видно, с уменьшением  $\theta$  отклонение E быстро убывает, и приближенное решение сходится к точному значению. На основании большого количества экспериментов было получено оптимальное значение  $\theta = 0.25$ , дающее погрешность не более 1%.

Скажем несколько слов о практической временной затратности при использовании алгоритма для расчета эволюции N частиц. В табл. 1 приведены результаты исследования временной сложности методик прямого суммирования и иерархического приближения. Время приводится в секундах счета на компьютере с процессором Athlon XP 2500+, компилятор MSVC++.Net.

Таблица 1.

Число частиц	Прямое суммирование	Иерархический приближенный метод		
20000	16.64 сек.	0.18 сек.		
40000	73.1 сек.	0.37 сек.		

Четко прослеживается резкое отличие времени расчета по методу с логарифмической сложностью от метода с квадратичной зависимостью по N. Временная сложность процедуры построения дерева также пропорциональна  $N \log N$ . На каждом шаге по времени дерево строится только один раз и затем используется при расчете гравитационного притяжения для всех имеющихся частиц на текущем шаге. Поэтому время, затрачиваемое на его построение, не превышает нескольких процентов от общего счетного времени на одном шаге.

Таким образом, иерархический метод позволяет эффективно и достаточно точно рассчитывать гравитационное взаимодействие большой системы частиц (десятки миллионов), обходясь без решения уравнения Пуассона, и полностью оставаясь при этом в рамках бессеточного лагранжева формализма.

3.10. Сглаживание сил гравитации на малых расстояниях. Проблемой представляемой здесь методики является формальная расходимость закона Ньютона  $1/r^2 \to \infty$  при  $r \to 0$  Для решения этой проблемы вводится



Рис. 9. Зависимость силы тяготения от безразмерного параметра u = r/l без поправки (штриховая линия) и с поправкой (сплошная линия) для двух точечных масс

специальная поправка в гравитационную силу:

(89) 
$$F_c(r) = \begin{cases} Gm_1m_2S, \text{ если } r < l, \\ Gm_1m_2(1/r^2), \text{ если } r > l, \end{cases}$$

где S(u) — функция гравитационной поправки, u = r/l, r — расстояние, l — радиус гравитационного сглаживания (не путать с радиусом сглаживания h для SPH-метода). Заметим, что при r > l гравитационная сила определяется по классическому закону Ньютона, и поправка не вносится.

Такая коррекция позволяет избежать расходимости и обеспечивает устойчивую работу программного комплекса. С физической точки зрения (89) означает запрет на взаимное проникновения частиц друг в друга и в точечный источник гравитации. Заметим, что подобный подход применяется в термодинамике и молекулярной физике (потенциал взаимодействия атомов и молекул Сатерленда, Леннарда-Джонса, Штокмайера, Аксельрода; подробней см. [49]). Конкретный вид S и значение l подбирается эмпирически, на основании вычислительных экспериментов. В данной работе был использован следующий вид функции S(u):

$$(90) S(u) = \frac{1}{l^2} \begin{cases} \frac{32}{3}u - \frac{192}{5}u^3 + \frac{160}{5}u^4, & \text{если } u < 0.5\\ -\frac{1}{15u^2} + \frac{64}{3}u - 48u^2 + \frac{192}{5}u^3 - \frac{160}{15}u^4, & \text{если } 0.5 < u < 1 \end{cases}$$

где u = r/l.

Формулы (89) — (90) можно трактовать и таким образом: частицы, находящиеся вплотную друг к другу, не гравитируют между собой (рис. 9), а являются одной объединенной частицей с массой  $m_1 + m_2$ , где  $m_1, m_2$  — их массы.

3.11. Иерархический метод поиска соседних частиц. Выше уже отмечалось, что задача экономичного поиска частиц-соседей является ключевой в достижении общей эффективности счета бессеточным методом сглаженных частиц. Ряд авторов (см., например, [68]) при этом рекомендуют использовать вспомогательное регулярное разбиение области на ячейки, как показано на рис. 5. Однако для астрофизического моделирования данный подход имеет большой недостаток, связанный с тем, что в несколько соседних ячеек может попасть значительная часть всех частиц (например, задача о коллапсе). Эффективность поиска соседей при этом может снизиться с  $N \log N$  до  $N^2$ , что значительно замедлит счет. Поэтому был использован другой алгоритм поиска соседей, который базируется на том же самом дереве разбиения пространства на нерегулярные ячейки, что и в иерархическом методе расчета сил гравитации. Для простоты эта методика приводится для двумерного случая и естественным и очевидным образом расширяется на трехмерную геометрию. Идея основана, во первых, на грубом приближении круга описывающим его квадратом, который, в свою очередь, представляет ячейку разбиения дерева (см. рис. 7) и, во вторых, на том, что алгоритмическая сложность задачи определения факта пересечения двух, строго ориентированных относительно осей координат, квадратов сравнительно невелика. Вокруг частицы, для которой отыскиваются соседи, строится квадрат A со стороной 2h (радиус, внутри которого находятся частицы-соседи). После этого начинается обход дерева разбиения пространства на ячейки в глубину, и для каждого его узла (квадратная ячейка В, которая также используется для группирования частиц в кластеры при иерархическом расчете сил гравитации) проверяется факт пересечения с квадратом А. Идея алгоритма проиллюстрирована на рис. 10. Вокруг частицы и ее окрестности сглаживания (круг радиуса 2h) описан квадрат A (отмечен пунктиром). Квадратами B на рисунке поочередно выступают ячейки с номерами 1-10. Возможны следующие варианты:

- Квадраты A и B не пересекаются. В этом случае, очевидно, что, продолжать дальнейший обход в глубину по этой ветке дерева разбиения нет необходимости, т.к. все частицы, лежащие внутри B, гарантированно и заведомо не попадают в область сглаживания частицы. На рис. 10 под этот случай попадают ячейки с номерами 2,3,4.
- Квадраты *A* и *B* пересекаются частично или *A* лежит в *B*. В этом случае обход в глубину в этом направлении продолжается, и описанная выше процедура рекурсивно повторяется для всех ячеек потомков. На рис. 10 под этот случай попадают ячейки с номерами 1,5,6,8,9,10.
- Квадрат *В* целиком лежит внутри квадрата *А*. В этом случае все частицы из *В* тестируются на отношение соседства. Для этого для каждой частицы из *В* делается проверка, лежит ли частица внутри круга *R* радиуса 2*h* вокруг искомой частицы, для которой отыскиваются соседи. Очевидно, что частицы из подобласти  $R \cap B$  будут частицами-соседями, а  $\overline{R \cap B}$  нет. На рис. 10 под этот случай попадают ячейка с номером 7.

Предложенный здесь алгоритм полностью адаптивен относительно пространственного распределения плотности газа, не имеет недостатков указанных выше для метода разбиения области на вспомогательные



Рис. 10. Схема иерархического поиска соседей

регулярные ячейки, и при этом алгоритмическая сложность имеет порядок  $N \log N$ . Кроме того, важным достоинством этого алгоритма является использование того же самого дерева разбиения, общего с алгоритмом приближенного иерархического расчета гравитации, что позволяет эффективно и естественным образом комбинировать эти две процедуры в одном программном комплексе.

Учитывая то, что каждая частица имеет индивидуальный сглаживающий шаг, в ходе процедуры поиска частиц-соседей для *i*-ой частицы для вычисления (70) – (72) необходимо пользоваться следующим алгоритмическим приемом. Формулы (71) – (72), для произвольной *i*-ой частицы можно представить в виде

(91) 
$$F = \sum_{j=1}^{N} F_{i,j} \left[ 0.5 \nabla W_{i,j}(h_i) + 0.5 \nabla W_{i,j}(h_j) \right].$$

Если для *i*-ой частицы найдена соседняя частица с номером *j*, нужно вычислять только компоненту (91), содержащую  $\nabla W_{i,j}(h_i)$ , прибавляя терм вида  $0.5F_{i,j}\nabla W_{i,j}(h_i)$  к расчитываемой характеристике *i*-ой частиц и одновременно прибавить  $-0.5F_{i,j}\nabla W_{i,j}(h_i)$  к характеристике *j*-ой частицы. Если в ходе аналогичной процедуры поиска соседей для *j*-ой частицы будет найдена частица-сосед с номером *i*, то к их характеристикам прибавляется соответственно вторая половина (91) вида  $-0.5F_{j,i}\nabla W_{j,i}(h_j)$ для *i* и  $0.5F_{j,i}\nabla W_{j,i}(h_j)$  для *j* (здесь используется тот факт, что  $F_{i,j} =$  $F_{j,i}$  и  $\nabla W_{i,j}(h) = -\nabla W_{j,i}(h)$ ). Аналогично проводятся вычисление (70), но с учетом того, что  $W_{i,j}(h) = W_{j,i}(h)$ . Данный прием позволяет сочетать иерархический поиск соседей с индивидуальными сглаживающими шагами частиц и исключить дополнительные вызовы процедуры поиска соседей. Отметим, что похожая идеология применяется и в технологии метода конечных элементов при сборке глобальной матрицы СЛАУ, как суммы отдельных вкладов локальных матриц от каждого конечного элемента.

3.12. Эволюция системы частиц во времени. Для интегрирования по времени уравнений движения и энергии можно использовать любую явную вычислительную схему, например, схему Эйлера, Рунге-Кутты, прогнозакоррекции и т.д. В разработанном программном комплексе применяется следующая комбинация модифицированной схемы с перешагиванием («leapfrog») и схемы Рунге-Кутты второго порядка:

(92)

(93)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} &= \mathbf{x}^{n} + \frac{1}{4}\tau \left[\mathbf{V}^{n} + \mathbf{V}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right], \\ e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} &= e^{n} + \frac{1}{2}\tau \frac{de^{n}}{dt}. \\ \mathbf{V}^{\left(n+1\right)} &= \mathbf{V}^{n} + \tau \mathbf{a}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \\ \mathbf{x}^{\left(n+1\right)} &= \mathbf{x}^{n} + \frac{1}{2}\tau \left[\mathbf{V}^{n} + \mathbf{V}^{\left(n+1\right)}\right], \\ e^{\left(n+1\right)} &= e^{n} + \tau \frac{de^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{dt}. \end{aligned}$$

 $\mathbf{V}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \mathbf{V}^n + \frac{1}{2}\tau \mathbf{a}^n,$ 

После дробного временного шага (92) значения всех производных по времени (включая гравитационное ускорение) вычисляются в новой промежуточной точке посередине, после чего осуществляется окончательный переход на новый временной слой согласно (93). Данный алгоритм выполняется для всех частиц на каждом временном шаге.

Выбор дискретного шага интегрирования системы дифференциальных уравнений (92) – (93) по времени представляет собой далеко не простую задачу. Моделирование физического процесса обуславливает требование к временному mary  $\tau$ :

(94) 
$$\tau < \tau_p,$$

где  $\tau_p$  — характерное время процесса. Бессмысленно проводить расчеты без учета условия (94), поскольку в этом случае вычислительный алгоритм будет обеспечивать получение «своих собственных» решений, далеких от реальности.

Другим требованием к  $\tau$  является фактор устойчивости алгоритма

(95) 
$$\tau < \tau_a,$$

где  $\tau_a$  — предельное значение шага, которое «выдерживает» алгоритм. Значение  $au_a$  определяется множеством причин, которые здесь рассматриваться не будут (см. [5, 55]). Остановимся только на одном обстоятельстве. Известно, что неявные схемы допускают шаг  $\tau_a^i$ , больший, чем шаг  $\tau_a^e$  явных схем

(96) 
$$\tau_a^e < \tau_a^i.$$

Условие (96) считается одним из главных достоинств неявных схем по сравнению с явными, несмотря на их громоздкость, трудность программной реализации и, в сущности, отсутствие «физической прозрачности». Это действительно так для большого класса задач газовой динамики (например, аэродинамики), особенно для стационарных задач, решение которых производится методом установления. Однако, если для исследуемого процесса имеет место условие

(97) 
$$\tau_p < \tau_a$$

а в задачах космической газодинамики, с наличием быстропротекающих процессов, даже

(98) 
$$\tau_p < \tau_a^e,$$

то использование неявных схем для таких задач становится бессмысленным, так как отпадает их основное преимущество (96), поскольку требование (94) и условия (95) – 98 расставляют характерные времена в цепочку:

(99) 
$$\tau < \tau_p < \tau_a^e < \tau_a^i$$

В методе сглаженных частиц выполнение всех сформулированных выше ограничений на  $\tau$  возможно за счет выбора следующего временного шага для i-ой частицы:

(100) 
$$\tau_i = \alpha_{\text{tol}} \frac{h_i}{\max\{c_i, |\mathbf{V}_i|\} + h_i |\text{div}(\mathbf{V}_i)|},$$

где  $\alpha_{tol}$  — вспомогательный параметр, регулирующий точность метода интегрирования по времени (обычно  $\alpha_{tol} \in [0.1..0.6]$ ),  $c_i$  — локальная скорость звука,  $h_i$  — индивидуальный радиус сглаживания.

Применительно к SPH-методу весьма перспективной и оправданной является техника индивидуальных (локальных) шагов по времени  $\tau_i$  для частиц (или групп частиц), находящихся в сильно различающихся областях решения, которая, однако, является темой отдельного исследования и здесь не рассматривается. В более простом (и надежном) варианте алгоритма для всех частиц в решении выбирается один глобальный временной шаг  $\tau$ , как минимальный из всех возможных:

(101) 
$$\tau = \min\{\tau_i | \forall i \in N\},\$$

где N — общее число частиц.

Следует отметить, что если в исследуемой физической модели помимо газовой динамики присутствуют дополнительные компоненты, такие как бесстолкновительная пылевая материя или нагрев и охлаждение за счет излучения, то шаг по времени может быть еще уменьшен, чтобы одновременно удовлетворить условиям (94) – (95) для всех имеющихся физических процессов. В этом случае итоговый временной шаг τ для всей системы выбирается как минимальный шаг среди всех имеющихся в физической модели процессов.

3.13. Влияние начального распределения частиц на решение. Как и для большинства численных методов решения сложных нелинейных задач, для SPH-метода важную роль играют начальные данные. В существенно нестационарных задачах при возможном наличии точек бифуркации решения, начальные данные фактически определяют ветвь финального решения. Рассмотрим влияние на получаемое решение различных способов задания начального распределения частиц в SPH-методе на примере тестовой задачи плоского истечения газа в вакуум. Она формулируется как задача о распаде разрыва, с одной (например, с правой) стороны которой все газодинамические параметры равны нулю. Возможны следующие варианты расположения частиц, обеспечивающие одно и тоже начальное значение плотности слева от границы разрыва:

- (1) Расположение частиц регулярными рядами.
- (2) Расположение частиц в шахматном порядке.
- (3) Расположение частиц в шахматном порядке с последующей рандомизацией (случайным сдвигом) положения каждой частицы относительно расчетного «шахматного» расположения.
- (4) Расположение частиц полностью случайным образом, в соответствии с некоторой функцией распределения.

Последний способ здесь рассматриваться не будет, т.к. имеет погрешность порядка  $N^{-0.5}$  и ограниченно пригоден для применения только с очень большим числом частиц в специальных случаях.

Результаты решения двумерной задачи с начальным распределением частиц по способам 1–3 приведены на рис. 11. Слева точками отображены стартовые порядки частиц на плоскости, справа — значение плотности в момент времени t = 0.5. Правые рисунки представлены парами: сверху — одномерное распределение плотности вдоль белой линии, обозначенной (снизу) на двумерном поле значений.

Как следует из рис. 11 а, первый вариант стартового расположения частиц приводит к финальному моменту времени к значительным осцилляциям в решении, связанными с «отрывом» рядов частиц друг от друга.

При стартовом шахматном порядке частиц (рис. 11 б), вследствие их более равномерного распределения, амплитуда осцилляции значительно уменьшились.

Поясним третий способ организации стартового распределения частиц. После того, как частицы были распределены в шахматном порядке (по способу 2), к координате каждой частицы прибавлялось случайно число из диапозона [0, R/4], где R — характерное расстояние между двумя соседними частицами. Этим было достигнуто лучшее перемешивание частиц. Как хорошо видно из рис. 11 в), в этом случае решение свободно от каких либо нефизических особенностей.

Таким образом, в методе сглаженных частиц начальное распределение частиц должно быть достаточно случайным и нежелательно наличие какой-либо регулярной структуры в виде рядов из частиц. Заметим, что это требование типично для всех методов частиц, а также частиц в ячейках, и иногда приводит к определенным технологическим трудностям в задании начальных распределений. Описанные здесь примеры стартовых распределений частиц на плоскости легко обобщаются на пространственный случай.

Следует отметить, что рандомизация положения частиц вносит погрешность в начальную плотность распределения газа, которая тем меньше, чем больше число частиц.

# 4. Верификация метода

Вычислительные эксперименты в рамках этой работы ставились для того, чтобы, во-первых, исследовать аппроксимацию и устойчивость рассмотренного метода сглаженных частиц применительно к моделированию задач гравитирующей и негравитирующей газовой динамики, а также

416



Рис. 11. Истечение газа в вакуум (плоская задача). Начальное распределение частиц (а) — рядами, б) — в шахматном порядке, в) — в шахматном порядке с рандомизацией) и соответствующее этим начальным данным распределение плотности в решении в момент t = 0.5

проконтролировать функционирование разработанного комплекса программ. Во-вторых, исследовать основные особенности, преимущества и недостатки бессеточного подхода, подтвердив или опровергнув тем самым высказанные в этой работе гипотезы об основных свойствах метода. В процессе создания программного сегмента проводилась его верификация как на простых тестах, газодинамических задачах с известными аналитическими решениями, так и на более сложных задачах гравитирующей газовой динамики. Во всех задачах масштабирование производилось в соответствии с п. 2.6.

4.1. Стандартные тесты распада разрыва. В настоящее время сложилась практика, когда все разрабатываемые или улучшаемые вычислительные алгоритмы (и одновременно реализующие их комплексы программ) проходят верификацию на одних и тех же тестах [71]. Это дает возможность адекватного сравнения различных и идейно разнообразных вычислительных алгоритмов и программных комплексов между собой. Для алгоритмов и вычислительных схем, применяющихся в области газовой динамики, очень показательным тестом является задача о распаде разрыва. Эта задача формулируется следующим стандартным образом. В одномерной области  $x \in [0, 1]$  существуют две подобласти с границей раздела x = 0.5, в которых находится однородный газ, с различными параметрами в каждой из них. Слева от границы раздела со значениями плотности, скорости и давления  $\rho_l$ ,  $V_l$ ,  $p_l$ , a справа соответственно  $\rho_r, V_r, p_r$  (табл. 2) В момент времени t = 0 перегородка исчезает и стартует вычислительный процесс. Наборы этих параметров и взаимное соотношение между их числовыми значениями определяют совершенно различные типы формирующихся газодинамических течений с образованием одной или нескольких ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов. Для уравнений Эйлера эти тестовые задачи имеют аналитические решения, вообще говоря, достаточно сложные и весьма разнообразные, позволяющие провести всестороннюю верификацию и анализ вычислительного алгоритма, в том числе процесса сходимости численного решения к точному по своим внутренним параметрам (числу узлов сетки, количеству частиц и т.д.). Анализ решения (распределения  $\rho(x)$ , V(x), p(x) и внутренней энергии e(x)в каждый момент времени t) позволяет вынести заключение об алгоритме для моделирования тех или иных задач газовой динамики.

Обычно используются пять стандартных международных тестов Торо [71], позволяющих не только выявить и по возможности устранить ошибки программирования, но и в глобальном смысле вынести заключение о пригодности или непригодности вычислительного алгоритма и численного метода в целом для моделирования сложных газодинамических процессов.

Таблица	2.

Тест	$\rho_l$	$V_l$	$p_l$	$ ho_r$	$V_r$	$p_r$	t
1	1.0	0	1.0	0.125	0	0.1	0.2
2	1.0	0.75	1.0	0.125	0	0.1	0.2
3	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4	0.15
4	1.0	0	1000	1.0	0	0.01	0.012
5	5.99924	19.5975	460.894	5.992242	-6.1963	46.0550	0.035

В ходе разработки и отладки программного комплекса, были выполнены соответствующие вычислительные эксперименты в квазиодномерной постановке двумерным SPH-решателем, подробно описанным в предыдущей части этой статьи. Далее (рис. 12 – 16) приведено описание полученного решения для каждого из пяти тестов, а также графики одномерных распределений величин в данных решениях. Поскольку задачи рассматриваются в квазиодномерной постановке, то под количеством частиц здесь подразумевается число частиц в нулевой момент времени вдоль каждого



Рис. 12. Первый тест. Профили плотности  $\rho$ , внутренней энергии e, давления p и скорости V. Сплошная линия — аналитическое решение, штриховая — численное (400 частиц)

направления в области решения (т.е. их общее количество приблизительно равно квадрату этой величины).

Данные тесты позволили также убедиться в хорошей способности алгоритма сохранять одномерность решения в процессе его развития в многомерной области. Общность пространственного алгоритма для решения одно-, двуи трехмерных задача требует такого контроля по крайней мере на первом этапе эксплуатации программного комплекса для выявления и устранения неточностей в алгоритме и ошибок программирования. Заметим, что даже при применении «отлаженных» и давно эксплуатировавшихся программ такой контроль (особенно при переходе к решению нового класса задач) является весьма полезным. Полагать же иначе было бы неоправданным оптимизмом.

Отметим, что для эйлеровых сеточных методов дополнительной проблемой является решение подобной квазиодномерной задачи на плоскости или в пространстве в случае, если граница раздела ориентирована не строго вдоль расчетной сетки (т.е. под некоторым углом  $\alpha$ ). В бессеточном методе сглаженных частиц такой проблемы нет в принципе.

Основным назначением первого теста является проверка способности численного метода моделировать контактный разрыв. В полученном решении (рис. 12) заметны осцилляции давления и скорости в области контактного разрыва. Отличие второго теста — начальная скорость газа с левой части от границы раздела. Тест является существенно более сложным и предназначен для анализа «размазывания» фронтов ударных волн и осцилляций за ними особенно характерных для методов первого порядка точности. Из вычислительных экспериментов (рис. 13) следует, что с увеличением количества частиц степень «размазывания» ударных волн



Рис. 13. Второй тест. Профили плотности  $\rho$ , внутренней энергии e, давления p и скорости V. Сплошная линия — аналитическое решение, штриховая — численное (200 частиц), пунктирная линия - численное (400 частиц)



Рис. 14. Третий тест. Профили плотности  $\rho$ , внутренней энергии e, давления p и скорости V. Сплошная линия — аналитическое решение, пунктирная — численное (400 частиц), штриховая — численное (800 частиц), штрих-пунктирная — численное (1600 частиц)



Рис. 15. Четвертый тест. Профили плотности  $\rho$ , внутренней энергии e, давления p и скорости V. Сплошная линия — аналитическое решение, штриховая линия — численное (1600 частиц)



Рис. 16. Пятый тест. Профили плотности  $\rho$ , внутренней энергии e, давления p и скорости V. Сплошная линия — аналитическое решение, штриховая — численное (800 частиц), пунктирная линия — численное (3200 частиц)

значительно уменьшается, но при этом некоторые осцилляции в решении на фронтах ударных волн и контактного разрыва по-прежнему остаются.

Остановимся на анализе третьего теста. Этот тест весьма труден для вычислительного алгоритма, поскольку в процессе разлета газа образуется существенная область разрежения. Тест выявляет способность метода и алгоритма физически верно моделировать такую ситуацию. Известно [71], что многие методы в данной ситуации дают существенный ошибочный (нефизический) рост внутренней энергии в области сильного разрежения, и получаемое решение практически неисправимо никакими вычислительными приемами. Анализировался важный вопрос: какое число частиц приемлемо для моделирования процесса эволюции решения. Как показали вычислительные эксперименты (рис. 14), использование 400 частиц недостаточно для получения даже качественно подобного решения.В этом случае частиц мало и в центре области образуется вакуум (с нулевой энергией). 800 частиц уже дают неплохое соответствие. Дальнейшее увеличение количества частиц до 1600 еще улучшает картину «в целом» (по норме разности), однако это также незначительно увеличивает внутреннюю энергию в области разрежения, делая процесс сходимости решения для каждой точки по отдельности не столь однозначным. Решение данного теста методом сглаженных частиц отличается от эйлеровых методов своей выраженной спецификой. В целом, SPH-метод показал, что он вполне удовлетворительно отрабатывает третий тест.

Четвертый тест предназначен для проверки устойчивости (робастности) численного метода и характеризуется большим начальным перепадом давления. По своей идее этот тест соответствует задаче о точечном взрыве, но для плоского случая. Несмотря на простоту постановки, это один из весьма трудных тестов для контроля качества численного алгоритма. Исходные распределения величин, вследствие формирования ударной волны, идущей направо, и волны разрежения, движущейся налево, и их взаимодействия с начальным полем, к заданному моменту времени показаны на (рис. 15). Обратим внимание только на 2 особенности, особо «тяжелые» для алгоритмов: плотность имеет узколокализованный «всплеск» высокой интенсивности  $ho_{max} pprox 6$  (предел роста ho = 6 на скачке  $p_2/p_1 = \infty$  для показателя адиабаты  $\gamma = 1.4$ ), внутренняя энергия, помимо основного скачка, образует идущую перед ним волну — предвестник невысокой интенсивности. Тестируемый метод достаточно хорошо отслеживает эти особенности. Данный вычислительный эксперимент также является ярко выраженным тестом, где важную роль играет включение искусственной (схемной) вязкости.

Пятый тест помогает выявить способность метода отслеживать сложную ударно-волновую конфигурацию с контактным разрывом. Решение (рис. 16) содержит две ударные волны и один контактный разрыв, движущийся направо. Использование 3200 частиц значительно уменьшает нефизические осцилляции и сглаживание ударных волн по сравнению с решением, состоящим из 800 частиц.

Проведенные вычислительные эксперименты, с одной стороны, подтвердили эффективность SPH применения метода для решения уравнений газовой динамики, включая сложные ударно-волновые конфигурации. С другой стороны, как было показано, метод предъявляет существенные требования к числу частиц. Для адекватной передачи профилей решений в некоторых,



Рис. 17. Плоское истечение газа в вакуум. Распределения плотности газа в момент времени t=0.5

особенно сложных тестах, необходимо использовать не менее 400–800 частиц в одном направлении. Таким образом, полностью трехмерная задача моделирования газодинамических процессов может потребовать ~ 400<sup>3</sup> частиц, что влечет за собой существенные вычислительные затраты и однозначно ориентирует на применение параллельных технологий с расчетами на суперЭВМ.

4.2. Плоское истечение газа в вакуум. Важным, даже принципиальным требованием, предъявляемым к алгоритму решения астрофизических задач является «корректное» поведение газодинамического численного метода при моделировании открытой границы между газом и вакуумом. Возникновение таких ситуация практически исключено при моделировании, например, задач обтекания летательных аппаратов. Поэтому требования к численным методам, ориентированным на астрофизические задачи, имеют свою специфику, существенно отличающуюся от других приложений газовой динамики.

Двумерный SPH-решатель тестировался на квазиодномерной задаче плоского истечения газа в вакуум. Этот тест аналогичен тесту о распаде разрыва, но справа от перегородки находится вакуум. Начальные газодинамические параметры слева аналогичны первому тесту из табл. 2, но область решения  $x \in [0, 3]$  расширена вправо для устранения влияния краевых эффектов. Расчет проводился с использованием двумерного алгоритма и 160 000 частиц (по 400 в каждом направлении осей координат). Решение этой же задачи анализировалось также в п. 3.13 (о начальном распределении частиц).

На рис. 17 приведены два одномерных графика и одна двумерная картина в момент времени t = 0.5, предоставляющая достаточную информацию для анализа распределения плотности в области решения. На двумерной картине уменьшение плотности среды показано промежуточными градациями тона от белого цвета (плотная среда) до черного (глубокий вакуум). На этой картине нанесены две прямые линии: горизонтальная  $y = C_1$  и вертикальная  $x = C_2$ . Вдоль этих линий приведены одномерные распределения плотности  $\rho(x, y)$ : сверху —  $\rho(x, C_1)$ , справа —  $\rho(C_2, y)$ . Таким образом, верхний график представляет волну разрежения, движущуюся в газе влево, т.к. истечение газа в вакуум происходит вправо. Правый график  $\rho(C_2, y)$  позволяет контролировать сохранение одномерности течения, получаемого в расчете.

Как известно, волна разреженья должна двигаться со скорость звука  $c_0 = \sqrt{\gamma_{\rho}^{\frac{p}{\rho}}} = 1.1832$  и в соответствии с теорией, этот вид течения не имеет особенностей. Для момента времени t = 0.5 волна должна дойти до точки  $x = 1 - c_0 t = 0.4$ . На верхнем графике  $\rho(x, C_1)$  вертикальной линией обозначена эта точка. Видно, что на этой границе область течения газа заканчивается. Таким образом численное решение правильно моделирует эволюцию волны разрежения.

График  $\rho(C_2, y)$  показывает высокую степень сохранения одномерности решения (практически прямая линия), небольшие флуктуации в котором вызваны погрешностью от рандомизации начального распределения частиц 3.13.

4.3. Разлет газового шара в вакуум. Известной проблемой многих эйлеровых сеточных методов является их неполная инвариантность относительно произвольного поворота осей координат. Этот факт обусловлен тем, что пространственная (регулярная) сетка всегда определенным образом ориентирована относительно координатных осей. Данная особенность делает пространственные направления неравноправными. Это приводит к появлению некоторых численных, нефизических особенностей в решении, например, образование строго определенного числа «рукавов» газового облака вдоль осей координат, сужая тем самым класс наблюдаемых сценариев возможного развития системы. Неинвариантность схемы становится особенно заметной при попытке моделировать физически неустойчивые процессы с бифуркациями решений, к которым относится множество астрофизических задач. Возмущения, вносимые неинвариантностью схемы, усиливаются за счет сил гравитационного притяжения, и эволюция решения часто протекает по сценарию, связанному с ориентацией пространственной сетки. Например, хорошо известно, что для многих конечно-разностных методов скорость движения ударных волн может отличаться при движении вдоль различных направлений сетки, особенно неортогональных.

В рамках формализма SPH-метода сетка отсутствует, а все пространственные координаты частиц используются только в контексте квадрата евклидовой нормы  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$  либо соответствующего скалярного произведения. Поэтому SPH-метод полностью инвариантен относительно поворота системы координат и ориентации осей.

Рассмотрим следующую задачу: газовый шар единичного радиуса с центром в начале координат помещен в вакуум. Параметры газа: p = 1.0,  $\rho = 1.0$ , V = 0, e = 2.5. Гравитационные эффекты не учитываются. В момент времени t = 0 газовый шар начинает распадаться в вакууме.

На рис. 18 представлен результат расчета в момент времени t = 0.5 с использованием  $10^6$  частиц. Изолинии плотности круговые, без каких либо особенностей, связанных с осями координат, характерных для сеточных методов. Незначительные искажения линий равного уровня в области сильного разрежения вызваны малым числом частиц-соседей в этих областях



Рис. 18. Разлет газового шара в вакуум. Распределение плотности в экваториальном сечении z = 0 в момент времени t = 0.5. а) — поверхность уровней плотности, б) — изолинии плотности (логарифмическая шкала яркости)

и влиянием рандомизации в начальном распределении. Таким образом, изначально симметричный шар сохранил свою симметрию в ходе эволюции во времени. Этот вычислительный эксперимент подтверждает пространственную изотропию метода сглаженных частиц и независимость получаемого решения от направления осей координат.

#### 5. Результаты моделирования некоторых задач астрофизики

SPH-метод, ключевые многосторонние аспекты которого изложены выше, был применен для компьютерного моделирования ряда задач современной вычислительной астрофизики: коллапса газового диска и формирования газового облака галактики со спиральной структурой. Решение этих задач является также реальной верификацией алгоритма и комплекса программ.

5.1. Коллапс газового диска. Исследуется эволюция самогравитирующей газовой среды, расположенной в глубоком вакууме. В начальный момент времени газовая среда полагается неподвижной (в собственной системе координат, связанной с ее центром массы), однородной и имеет форму диска с резкой (скачкообразной) границей «газ – вакуум». Безразмерные параметры газа: давление  $p_0 = 1$ , плотность  $\rho_0 = 1$ , удельная внутренняя энергия  $e_0 = 2.5$ , радиус  $R_0 = 1$ . Заметим, что такое соотношение p,  $\rho$  и e с использованием модели идеального и совершенного газа соответствует двухатомному газу (молекулярному водороду) с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ .

Эволюция газовой системы определяется двумя факторами: давлением, приводящим к расширению газа в пустоту, и самогравитацией среды, приводящей к коллапсу (сжатию газа). Эффективный центр самогравитационных сил, очевидно, совпадает с центром системы.

Цель вычислительного эксперимента — определить, какой тип процесса возникнет: разлет или коллапс газового диска? Если коллапс, то какова будет финальная степень сжатия среды? Произойдет ли стягивание в точку (аналог возникновения «черной дыры»)? (Заметим, что это — модельная задача, в которой не учитывается изменение реальных свойств газа при высоких давлениях и изменении метрики пространства при росте концентрации массы.) Возможно, возникнет баланс сил давления и самогравитации с формированием (хотя бы асимптотическим) стационарного газового диска с радиусом  $R_f$ . В этом случае весьма интересен вопрос: больше или меньше  $R_f$  чем  $R_0$ ?

Кроме изучения физического процесса, в вычислительном эксперименте проводилась верификация алгоритма «на изотропность». При правильном функционировании программного комплекса газовая среда во все моменты времени должна сохранять симметрию, и степень отклонения этой формы от круговой является показателем точности вычислительного алгоритма или наличия в комплексе опибок программирования.

На рис. 19 показана эволюция газового облака к различным моментам времени t. Представлены: двумерное поле плотности  $\rho(x, y)$  в экваториальном сечении и два одномерных распределения  $\rho(x)$  при y = 0 и  $\rho(y)$  при x = 0(сверху и справа соответственно).

В начальный момент времени t = 0 (рис. 19 а) плотность внутри диска, в соответствии с постановкой задачи, постоянна и равна 1, вне — равна 0, что иллюстрируется графиками как вдоль x, так и вдоль y в виде ступенек. Далее начинает формироваться следующая структура газового облака.

Первое. Внешняя граница облака постепенно размывается вследствие процесса истечения внешних слоев газа в вакуум. Это размытие с течением времени усиливается. Градиенты плотности здесь уменьшаются, и форма ступеньки постепенно теряется.

Второе. Зарождается (рис. 19 б) и непрерывно усиливается пикообразная структура облака — формируется специфическая внешняя оболочка газового диска с максимальным значением плотности: пики на одномерных графиках, кольца на двумерных сечениях и пространственные оболочки на трехмерных проекциях. Исследование этих пиков не является предметом данной работы и поэтому конкретные цифровые данные здесь не приводятся (их значения могут быть приближенно определены из одномерных графиков). Эта круговая оболочка возникает вследствие двух факторов: давления и гравитации. Газодинамическое давление стремится расширить объем облака. Воздействие давления достаточно одинаково на все газовые слои внутри диска, но на границе «газ – вакуум» противодавления нет. Поэтому внешние газовые слои движутся от центра. Самогравитация газа, наоборот, стремится уменьшить объем диска, поскольку все газовые слои притягиваются к эффективному центру тяготения (центру диска). Сила притяжения пропорциональна  $1/r^2$ , и воздействие самогравитации на внутренние слои газа больше, чем на внешние. Возникают газовые потоки в центр облака с постепенным ростом здесь  $\rho$ , p и e.

Третье. При таком исходном соотношении параметров внешняя оболочка диска сжимается (рис. 19 б, в, г, д), и к моменту времени t = 0.5 схлопывается, образуя новую структуру облака: пик значений всех газодинамических параметров в центре диска. Амплитуда этого пика лавинообразно растет. Сила гравитации все больше и больше превосходит противостоящую ей силу газодинамического давления. Вся масса газового облака стягивается в точку (рис. 19 е), и возникает «черная дыра».



Рис. 19. Эволюция двумерного газового облака. Распределение плотности в экваториальном сечении и вдоль осей X (сверху) и Y (справа) в различные моменты времени t = 0(a); 0.1(6); 0.2(в); 0.3(г); 0.4(д); 0.5(e)

Заметим, что при других значениях  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $e_0$  и  $R_0$  эволюция облака может пойти по другому сценарию. Если газодинамическое давление будет превалировать над силой самогравитации, то возникающая круговая оболочка (рис. 19 б, в, г) будет двигаться не к центру, а от него. Результатом этого процесса станет разрыв среды и сброс газовой оболочки в пространство, а оставшаяся масса газа будет коллапсировать к центру. Этот процесс может быть периодическим (квазипериодическим), со сбросом новых оболочек несколько раз, пока масса газа не уменьшится до того уровня, когда соответствующее давление станет меньше сил самогравитации. Произойдет финальный коллапс газового облака и возникновение «черной дыры».

Во избежание недоразумений повторим, что здесь рассматривается модельная задача, газ предполагается совершенным (в реальности при высоких давлениях и температурах уравнение состояния газа резко отклоняется от совершенного, что приводит к дополнительным физическим эффектам).

Отметим, что вычислительный алгоритм на данной задаче показал хорошие свойства изотропии с высокоточным сохранением круговой симметрии решения.

5.2. **Формирование спиралей галактики.** Рассмотрим двумерную задачу об эволюции газового облака, вращающегося вокруг некоторого центра тяготения в квазистационарном режиме, возмущенного двумя точечными источниками гравитации на периферии в начальный момент времени.

Сформулируем начальные данные задачи следующим образом. Однородное газовое облако имеет форму диска с внешним радиусом  $R_0 = 2$ , плотностью  $\rho_0 = 0.25$ , давлением p = 0.05 и удельной внутренней энергией  $e_0 = 0.5$ . Такое соотношение p,  $\rho$  и e соответствует уравнению состояния совершенного и идеального двухатомного газа, в частности, молекулярного водорода. Вращение облака вокруг центрального тела массы M в начальный момент соответствует движению по стационарной орбите с угловой скоростью

(102) 
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}.$$

Соотношение массы газового облака и массы центрального тела принималось равным 1:5. Возмущения, вносимые периферийными источниками тяготения, моделировались как возмущения угловой скорости газа  $\omega'$ :

(103) 
$$\omega' = \omega_0 \cdot (1 + 0.1 \cdot \sin 2\phi).$$

где  $\phi$  — угловая координата, отсчитываемая от некоторого начала (для дальнейшего анализа значения не имеет). Разумеется, условия (102) – (103) описывают воздействие периферийных масс достаточно приближенно, но проблема начальных данных в вычислительной астрофизике вообще весьма трудна.

На рис. 20 показаны распределения плотности газа  $\rho(x, y)$  в плоскости диска, иллюстрирующие эволюцию газового облака и его состояния в различные моменты времени.

Рис. 20 представляет процесс формирования из первичного газового протовещества некоторой околозвездной системы со спиралевидной структурой. В однородном газовом диске в начальный момент времени (рис. 20 а) возмущения, вызванные внешним воздействием, начинают развиваться. С определенных позиций этот процесс может быть назван потерей устойчивости циклического движения протовещества, однако при этом возникают не стохастические, а упорядоченные структуры. Так, к моменту времени t = 0.3 (рис. 20 б) в ближней окрестности центрального тела (скопления звезд) организуется вихревое движение с определенными, еще не до конца оформившимися треками протоспиралей. К моменту времени



ИЕРАРХИЧЕСКИЙ SPH-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 429

Рис. 20. Эволюция газового диска с формированием спиралей. Распределение плотности в различные моменты времени t = 0(a); 0.3(6); 0.6(B); 0.9(г)

t = 0.6 (рис. 20 в) эти треки уже достаточно хорошо сформировались, хотя в целом еще существуют ветвления некоторых спиралей.

К финальному (окончание данного расчета) моменту времени t = 0.9 (рис. 20 г) спирали практически сформировались. Обратим внимание, что сформировались два рукава спирального движения, в соответствии с числом возмущений, вызванных в начальный момент периферийными источниками гравитации. Вообще говоря, финальная картина по-прежнему является нестационарной, как большинство астрофизических процессов.

Для сравнения на рис. 21 показана фотография, полученная с помощью орбитального телескопа Hubble, галактики M51 «Whirlpool» (по другой классификации NGC 5194) созвездия Гончих Псов, в центре которой находится массивное скопление остывающих звезд и черная дыра. Предполагается, что выраженная спиральная структура M51 «Whirlpool» обусловлена гравитационным влиянием и прохождением сквозь нее 500–600 млн. лет назад галактики-спутника M51B (NGC 5195), которая хорошо видна на этой же фотографии (рис. 21) справа.

Следует отметить, что прямое сравнение фотографий с компьютерными расчетами затрудняется тем, что уровень светимости космических тел не всегда однозначно коррелирует с их плотностью, внутренней энергией и другими

А.В. АЛИЕВ, Г.А. ТАРНАВСКИЙ



Рис. 21. Спиральная галактика M51 «Whirlpool» (NGC 5194) и ее галактика-спутника (справа). Размер — 90 тыс. свет. лет, расстояние до Земли — 31 млн. свет. лет, масса — 160 млрд. солнечных масс. Фотография с сайта Hubblesite.org

модельными параметрами, используемыми для визуализации результатов компьютерных вычислений.

Полученные результаты хорошо соответствуют физическим представлениям о протекающем процессе. Однако, анализируя вопросы, поставленные в начале этого пункта о влиянии стартовых условий на финальное решение, следует понимать, что в описанных выше результатах имеют место такие ветви вычислительного процесса, которые никогда не приведут к получению стационарного решения при таких начальных данных.

Физическая ясность этой простой задачи позволяет проанализировать результат априори, до проведения вычислений. Но в большинстве практически интересных задач со сложной конфигурацией (несколько центров тяготения, самогравитирующий газ с различной структурой доменов и т.д.) «неудачная» постановка стартовых условий не приведет к получению желаемого результата. При этом главная проблема заключается в том, что для сложной задачи «удачные» начальные данные, как правило, неизвестны.

# 6. Заключение

Настоящая работа ориентирована на создание новых современных компьютерных технологий и методов программирования для повышения эффективности решения фундаментальных научных и прикладных проблем в области космической газодинамики, связанных с большим объемом вычислений. Большое внимание уделено теоретическим вопросам и их практическому использованию в совершенствовании SPH-метода и реализующего его алгоритма решения сложных интегро-дифференциальных систем уравнений. Подробно рассмотрены различные аспекты метода и проанализирована степень их влияния на эффективность решения

#### ИЕРАРХИЧЕСКИЙ ЅРН-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 431

задачи. Проведена верификация теоретического метода, вычислительного алгоритма и комплекса компьютерных программ для всестороннего анализа свойств (точности счета и быстродействия вычислительного процесса). Проведенные теоретические исследования используются при создании комплекса компьютерных программ нового поколения для решения задач космической газодинамики. Выполнен цикл компьютерных расчетов задач (в широком диапазоне определяющих параметров и начальных данных) о коллапсе самогравитирующего диска и эволюции протопланетного газового облака и проведен анализ полученных результатов.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность проф. В.А. Вшивкову за полезные консультации и внимание к работе.

# Список литературы

- Гинзбург В.Л., Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными?, Успехи физ. наук, 169:4 (1999), 419–441.
- [2] Контримавичюс В.Л., Истоки учения о ноосфере, Вестник РАН, 73:11 (2003), 1002–1009.
- [3] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М., Теория поля, М.: Наука, 1967.
- [4] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М.: Наука, 1966.
- [5] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П., Численное решение задач газовой динамики, М.: Наука, 1976.
- [6] Кларк Дж., Макчесни М., Динамика реальных газов, М.: Мир, 1967.
- [7] Пригожин И., Кондепуди Д., Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур, М.: Мир, 2002.
- [8] Румер Ю.Б., Рывкин М.С., Термодинамика, статистическая физика и кинетика, М.: Наука, 1972.
- [9] Голубятников А.Н., К образованию однородного разлета гравитирующего газа при наличии градиента давления, Изв. РАН. Мех. жидкости и газа, 4 (1998), 176–182.
- [10] Голубятников А.Н., Чукин С.С., О сильном релятивистском взрыве в среде с переменной плотностью, Аэромеханика и газовая динамика, 2 (2002), 86–90.
- [11] Захаров А.В., Мухарлямов Р.К., Макроскопические уравнения Эйнитейна для системы гравитирующих частиц с разными массами, ЖЭТФ, 123:4 (2003), 665–671.
- [12] Смирновский И.Р., О структуре ударной волны в диспергирующей плазме, Прикл. мех. и техн. физ., 39:3 (1998), 14–21.
- [13] Деревянко В.А., Захаров Ю.П., Тарнавский Г.А., Лабораторное моделирование коллективных процессов в плазме солнечного ветра, В сб. Математические модели ближнего космоса. Новосибирск: Наука, 1977, 204–215.
- [14] Марковский С.А., Скороходов С.Л., Численное моделирование ударных волн с неоднозначной структурой, ЖВММФ, 40:9 (2002), 1408–1415.
- [15] Гридчина М.Е., Осипов А.И., Уваров А.В., Взаимодействие звуковых и сильных ударных волн, Аэромеханика и газовая динамика, 2 (2002), 40–47.
- [16] Калайдин Е.Н., Распространение прямых нестационарных ударных волн по газу с инверсно-заселенными уровнями колебательной энергии, Изв. РАН. Мех. жидкости и газа, 5 (1989), 159–163.
- [17] Иванов М.Я., Терентьева Л.В., Стационарные солитоноподобные решения уравнений Эйлера при наличии собственных силовых полей, Прикл. матем. и механика, 63:2 (1999), 258–266.
- [18] Ласковый М.В., Левин В.А., Седов Л.И., Периферийный взрыв в самогравитирующем газовом шаре и динамический взрыв равновесия звезды, Изв. РАН. Мех. жидкости и газа, 3 (1998), 157–163.
- [19] Дудоров А.Е., Жилкин А.Г., Неавтомодельные режимы изотермического коллапса протозвездных облаков, ЖЭТФ, 123:2 (2003), 195–202.

- [20] Tsuribe T., Inutsuka S.-I., Criteria for fragmentation of rotating isothermal clouds. I. Semianalytic approach, Astrophys. J., 526:2 (1999), 307–313.
- [21] Баранов В.Б., Газодинамическая модель сверхзвукового обтекания солнечного ветра локальной межзвездной средой. Связь с экспериментальными данными, Успехи механики, 1:1 (2002), 3–31.
- [22] Захаров В.В., Крифо Ж.Ф., Лукьянов Г.А., Родионов А.В., Моделирование внутренней атмосферы комет с несферическим ядром типа «яблоко», Матем. моделирование, 15:6 (2003), 48–52.
- [23] Белоцерковский О.М., Демченко В.В., Опарин А.М., Нестационарное трехмерное численное моделирование неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, Докл. РАН, 354:2 (1997), 190–193.
- [24] Kunik M., Qamar S., Warnecke G., Kinetic schemes for the ultra-relativistic Euler equations, J. Comput. Phys., 187:2 (2003), 572–596.
- [25] Marcos C., Barge P., Marcos R., Dust dynamics in protoplanetary disks: parallel computing with PVM, J. Comput. Phys., 176:1 (2002), 274–294.
- [26] Тарнавский Г.А., Шпак С.И., Декомпозиция методов и распараллеливание алгоритмов решения задач аэродинамики и физической газовой динамики: вычислительная система «ПОТОК-3», Программирование, 6 (2000), 45–57.
- [27] Тарнавский Г.А., Тарнавский А.Г., Мультипроцессорное компьютерное моделирование в гравитационной газовой динамике, Вычисл. методы и программирование, 6:1 (2005), 71–87.
- [28] Воеводин В.В., Воеводин Вл.В., Параллельные вычисления, СПб: БХВ-Петербург, 2002.
- [29] Комб Ф., Рябь в галактическом пруду, В Мире Науки, 1 (2006), 30–37.
- [30] Herant M. et al., Inside the Supernova, Astrophys. J., 435 (1994), 339–361.
- [31] Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М., Турбулентность: новые подходы, М.: Наука, 2002.
- [32] Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., О некоторых задачах гравитационной газовой динамики, Мат. моделирование, 12:3 (2000), 110–120.
- [33] Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чечеткин В.М., Цикл работ по моделированию двойных систем, Астрон. журн., 1995–2000.
- [34] A repulsive force in Universe, Physics News Update. The American Institute of Physics Bulletin of Physics News, 361, 1998.
- [35] Снытников В.Н., Пармон В.Н., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Никитин С.А., Снытников А.В., Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом, Вычислительные технологии, 7:3 (2002), 72–84.
- [36] Блинников С.И., Высоцкий М.И., Окунь Л.Б., Скорости с/√3 и с/√2 в общей теории относительности, Успехи физ. наук, 173:10 (2003), 1131–1136.
- [37] Белоцерковский О.М., Математическое моделирование на суперкомпьютерах (опыт и тенденции), Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 40:8 (2000), 1221–1236.
- [38] Тарнавский Г.А., Хакимзянов Г.С., Тарнавский А.Г., Моделирование гиперзвуковых течений: влияние стартовых условий на финальное решение в окрестности точек бифуркации, Инж.-физич. журн., 76:5 (2003), 101–107.
- [39] Pandolfi M., D'Ambrosio D., Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the «carbuncle» phenomena, J. Comput. Phys., 166:2 (2001), 271–301.
- [40] Тарнавский Г.А., Корнеев В.Д., Вайнер Д.А., Покрышкина Н.М., Слюняев А.Ю., Танасейчук А.В., Тарнавский А.Г., Вычислительная система «Поток-3»: опыт параллелизации программного комплекса. Часть І. Идеология распараллеливания, Вычисл. методы и программирование, 4:1 (2003), 37–48.
- [41] Тарнавский Г.А., Тарнавский А.Г., Современные компьютерные технологии и неединственность решений задач газовой динамики, Симметрия и дифференциальные уравнения (под ред. В.К. Андреева), Красноярск: изд. ИВТ СО РАН, 2002, 209–213.
- [42] Тарнавский Г.А., Шпак С.И., Некоторые аспекты компьютерного моделирования гиперзвуковых течений: устойчивость, неединственность и бифуркации численных решений уравнений Навье-Стокса, Инженерно-физич. журн., 74:3 (2001), 125–132.
- [43] Тарнавский Г.А., Вшивков В.А., Тарнавский А.Г., Параллелизация алгоритмов и кодов вычислительной системы «Поток-3», Программирование, 1 (2003), 24–44.
- [44] Harlow, F. H., A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems, Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-1956, (November 1955).

432

ИЕРАРХИЧЕСКИЙ ЅРН-МЕТОД ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 433

- [45] Park S.H., Kwon J.H., On the dissipation mechanism of Godunov-type schemes, J. Comput. Phys., 188:2 (2003), 524–542.
- [46] Беляев Н.М., Хрущ В.К., Численный расчет сверхзвуковых течений газа, Киев: «Вища школа», 1984.
- [47] Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W., Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures, J. Comput. Phys., 186:2 (2003), 690–696.
- [48] Тарнавский Г.А., Ударные волны в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка, Вычисл. методы и программирование, 3:2 (2002), 129–143.
- [49] Тарнавский Г.А., Шпак С.И., Эффективный показатель адиабаты в задачах гиперзвукового обтекания тел реальным газом, Теплофизика и аэромеханика, 8:1 (2001), 41–58.
- [50] Тарнавский Г.А., Шпак С.И., Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений, Сиб. ж. индустриальной математики, 4:1(7) (2001), 177–197.
- [51] Тарнавский Г.А., Аульченко С.М., Вшивков В.А., Математическое моделирование нестационарных трехмерных процессов в космической газодинамике, Вычисл. методы и программирование, 4:2 (2003), 294–322.
- [52] Тарнавский Г.А., Корнеев В.Д., Распараллеливание программного комплекса математического моделирования высокоскоростных течений реального газа, Автометрия, 39:3 (2003), 72–83.
- [53] Rognlien T.D., Xu X.Q., Hindmarsh A.C., Application of parallel imlicit methods to edgeplasma numerical simulations, J. Comput. Phys., 175:1 (2002), 249–268.
- [54] Gingold, R. A., Monaghan, J. J., Smoothed particle hydrodynamics Theory and application to non-spherical stars, Royal Astronomical Society, Monthly Notices, 181 (Nov. 1977), 375– 389.
- [55] Роуч П., Вычислительная гидродинамика, М.: Мир. 1980.
- [56] Крылов А.А., Михалин В.А., Савельев А.Д., Опыт применения параболического генератора сеток в задачах вычислительной газовой динамики, ЖВММФ, 43:7 (2003), 1096–1106.
- [57] Тарнавский Г.А., Шпак С.И., Схемы распараллеливания операций решения систем алгебраических уравнений методом многомерной скалярной прогонки, Вычисл. методы и программирование, 1:1 (2000), 21–29.
- [58] Вшивков В.А., Тарнавский Г.А., Неупокоев Е.В., Параллелизация алгоритмов прогонки: многоцелевые вычислительные эксперименты, Автометрия, 38:4 (2002), 74–86.
- [59] Springel V., Yoshida N., White S. D. M., GADGET: A code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations, 2001, New Astronomy, 6, 51.
- [60] Jubelgas M., Springel V., Dolag K., Thermal conduction in cosmological SPH simulations, MNRAS, 351 (2004), 423-435(13).
- [61] Алиев А.В., Моделирование уравнений газовой динамики с учетом самогравитации методом сглаженных частиц, Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математик, Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск, 2006, 126–127.
- [62] Springel V., The cosmological simulation code GADGET-2, MNRAS, 364 (2005), 1105-1134.
- [63] Benz W., Smooth Particle Hydrodynamics: a review, Ed. J.R. Buchler. The Numerical Modeling of Nonlinear Stellar Pulsation, Kluwer Academic Publishers, 1990, 269–288.
- [64] Hernquist L., Katz N., TreeSPH: A Unification of SPH with the Hierarchical Tree Method, The Astrophysical Journal Supplements Series, 70 (1989 June), 419–446.
- [65] Brian W. O'Shea, Greg Bryan, James Bordner, Michael L. Norman, Tom Abel, Robert Harkness, Alexei Kritsuk, *Introducing Enzo, an AMR Cosmology Application*, eprint arXiv:astroph/0403044
- [66] Березин Ю.А., Вшивков В.А., Метод частиц в динамике разреженной плазмы, Новосибирск, Наука, 1980.
- [67] Франк А.М., Численное моделирование удержания шара струей жидкости, Доклады РАН., 365:3 (1999), 346–349.
- [68] Vignjevic, Rade, Review of development of the Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) method, December 2004

# А.В. АЛИЕВ, Г.А. ТАРНАВСКИЙ

- [69] Тарнавский Г.А., Шпак С.И., Проблемы численного моделирования сверхзвукового ламинарно-турбулентного обтекания тел конечного размера, Математическое моделирование, 10:6 (1998), 53–74.
- [70] Barnes J.E., N-Body Methods Resources, http://www.epcc.ed.ac.uk/mario/nbody.html
- [71] Toro E.F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction, Springer-Verlag. Second Edition, June 1999, 624 pages.

Алексей Владимирович Алиев Институт вычислительной математики и матемтической геофизики, пр. Ак. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Россия *E-mail address*: aliev@ssd.sscc.ru

Геннадий Адамович Тарнавский Институт вычислительной математики и матемтической геофизики, пр. Ак.Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Россия *E-mail address*: Gennady@Tarnavsky.ru

434