S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 596–604 (2007) УДК 510.67
MSC 13A99

ПОЗИТИВНО ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ НАД НОРМАЛЬНЫМ БАЗИСНЫМ МНОЖЕСТВОМ

Е. А. ПАЛЮТИН

Abstract. For given universal domain C, a set BF of normal formulas, and $A \subseteq C$, we construct substructures B of C with the following properties: (a) $A \subseteq B$; (b) for each $a \in B$ the type $\mathrm{tp}(a;(B \setminus \{a\}))$ is based by formulas from BF. The existence and uniqueness theorems are proven. This is a generalization of the known results on the injective hulls in the variety of the modules in case when the theory $\mathrm{Th}(C^{\omega})$ is stable.

1. Введение

Работа посвящена конструкциям подструктур универсальной области C, содержащих данное множество $A \subseteq C$, которые являются минимальными с условием наличия определенных общих свойств с данной универсальной областью C. Идея таких конструкций не является принципиально новой (см. например, [1, глава 4]). Основной особенностью приведенной в этой статье конструкции является ее приспособленность для изучения стабильных аксиоматизируемых классов структур, обладающих свойством замкнутости относительно какого-то типа приведенных (фильтрованных) произведений. В частности, для декартово замкнутых классов или для классов, замкнутых относительно степеней по фильтру Фреше. Для таких классов существуют универсальные области с так называемыми базисными множествами нормальных формул, лежащими в основе рассматриваемой конструкции (см. [2]). Основными результатами данной работы являются теоремы существования (теорема 1) и единственности (теорема 3). Кроме общего интереса полученные результаты позволяют в упомянутых классах при наличии достаточной свободы размерностей типов получить кодировку

Palyutin E.A., Positively prime models over a normal basic set.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00411).

Поступила 12 декабря 2007, опубликована 28 декабря 2007.

широких классов структур (например, всех двудольных графов). Тем самым, если в упомянутых классах существует какая-то структурная теория, то там есть определенные связи между типами. Эти связи позволяют получать структурные результаты, в частности элиминацию кванторов (см., например, [3]).

2. Основные определения и соглашения.

Пусть имеется некоторая структура C языка L, как правило, достаточно насыщенная. Будем называть ее *универсальной областью* . Понятия подножеств, элементов, истинности формул, и пр. будут относиться к этой структуре C, хотя структура C при этом обычно указываться не будет. Теорию $\mathrm{Th}(C)$ будем обозначать через T. В дальнейшем под формулой будем понимать формулу языка L. Мощность множества предложений языка L будем обозначать через $|L|$.

Жирными буквами конца латинского алфавита $\mathbf{u}, \dots, \mathbf{z}$ обозначаются кортежи переменных, а его начала $\mathbf{a}, \dots, \mathbf{e}$ — кортежи элементов из структуры C. Для множества R и кортежа $\mathbf{s}$ вместо $\mathbf{s} \in R^n$ пишем просто $\mathbf{s} \in R$.

Запись $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ означает, что все свободные переменные формулы Φ принадлежат кортежу $\mathbf{x}$, а параметры — кортежу $\mathbf{a}$. Для формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ через $\Phi(C; \mathbf{a})$ обозначается множество $\{\mathbf{b} \mid C \models \Phi(\mathbf{b}; \mathbf{a})\}$. Будем говорить, что Формула $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ *делит множество* A , если $(\Phi(C; \mathbf{a}) \cap A) \neq \varnothing$ и $(A \setminus \Phi(C; \mathbf{a})) \neq \varnothing$.

Под *типом* понимается произвольное множество формул с параметрами из универсальной области C. Совместность типа не предполагается. Для типа t запись $t(X; A)$ означает, что тип t состоит из формул вида $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$, где $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{a} \in A$. Если $X = \cup \mathbf{x}$, то вместо $t(X; A)$ пишем $t(\mathbf{x}; A)$. Часто вместо $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ и $t(\mathbf{x}; A)$ будем использовать выражения $\Phi(\mathbf{x})$ и $t(\mathbf{x})$. Вместо $(T \cup t) \vdash \Phi$ пишем просто $t \vdash \Phi$. Если U и V – множества формул и для каждой формулы Φ из множества U выполнено $V \vdash \Phi$, то пишем $V \vdash U$. Говорим, что тип t *порождается подтипом* $q \subseteq t$, если выполнено $q \vdash t$.

Формула $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ называется *нормальной для* $\mathbf{x}$, если для любых $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in C$ множества $\Phi(C; \mathbf{b})$ и $\Phi(C; \mathbf{c})$ либо совпадают, либо не пересекаются. Формула $\Phi(\mathbf{x})$ называется *нормальной,* если она является нормальной для любого кортежа переменных $\mathbf{x}'$, элементы которого принадлежат кортежу $\mathbf{x}$.

Для формул Φ и Ψ формулу $(\exists \mathbf{x} \Phi \wedge \forall \mathbf{x}(\Phi \to \Psi))$ будем называть результатом *P-операции,* примененной к формулам Φ и Ψ. (Ср. определение h-формулы из [2].)

Множество формул G (языка L) называется *неприводимым (в C),* если для любого конечного множества формул $\{\Phi_0(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x}; \mathbf{y})\} \subseteq G$ и любого кортежа элементов $\mathbf{a} \in C$ из включения

$$\Phi_0(C; \mathbf{a}) \subseteq \bigcup \{\Phi_1(C; \mathbf{a}), \dots, \Phi_n(C, \mathbf{a})\}$$

следует включение

$$\Phi_0(C; \mathbf{a}) \subseteq \Phi_i(C; \mathbf{a})$$

для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$.

В дальнейшем мы будет рассматриваться некоторое множеством формул BF, *которое будет называться* базисным *и предполагается, что оно состоит из нормальных формул, содержит равенства переменных,* *замкнуто относительно переобозначения переменных, конъюнкции и P-операции. В некоторых утверждениях статьи будет предполагаться, что множество базиснах формул* BF *является неприводимым. Такие утверждения отмечаются звездочкой* $(*)$.

Если $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{y})$ — базисная формула языка L, то формула вида $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$ для некоторого кортежа $\mathbf{a} \in A$ будет называться *базисной над* A и часто обозначаться просто через $\Phi(\mathbf{x})$.

Везде в дальнейшем, если не сказано противное, большими греческими буквами $\Phi, \Psi, \Theta, \Lambda, \Xi$ (возможно с индексами) обозначаются базисные формулы.

3. λ-позитивные конструкции

Определение. (b) Множество кортежей D называется *позитивным над* A, если $D = \Phi(C)$ для некоторой базисной над A формулы $\Phi(\mathbf{x})$.

Определение. (a) Множество t, состоящее из базисных формул над A со свободными переменными из множества X и их отрицаний, называется *базисным типом над* A *от* X.

(b) Если t — тип, то через t^+ обозначается множество всех базисных формул, входящих в тип t, и называется *позитивной частью типа* t. Через t^- будет обозначаться множество всех отрицаний базисных формул, входящих в тип t.

(c) Совместный тип t от переменных X называется *базисно полным над* A *от* X, если имеет место $t \vdash \Phi$ или $t \vdash \neg\Phi$ для любой базисной формулы Φ над A от X. Базисно полный над A от X базисный тип t, замкнутый относительно выводимости базисных формул над A от X и их отрицаний, называется *максимальным* над A от X. Максимальность базисного типа t означает, что среди совместных базисных типов над A от X нет собственного расширения типа t.

(d) Если для базисного типа t над A от переменных X существует тип $q \subseteq t^-$ мощности меньше λ и выполняется $(q \cup t^+) \vdash t$, то тип t называется *λ-позитивным типом над* A *от переменных* X . При этом тип q будем называть *λ-основой* (над A от X) λ-позитивного типа t (над A от X). Если $\lambda = 1$, то λ-позитивный тип t называется *позитивным типом над* A *от* X .

(e) Кортеж $\mathbf{a}$ длины n называется *λ-позитивно изолированным над множеством* A, если его базисный тип над A является λ-позитивным. При $\lambda = 1$ это понятие будем называть *позитивной изолируемостью.*

(f) Если t — тип над A, а f — отображение A в C, то через $f(t)$ обозначается тип, полученный из типа t заменой параметров a в его формулах на их образы $f(a)$.

Замечание 1. Ясно, что максимальность над A типа $t(\mathbf{x})$ равносильна тому, что множество $t(C)$ не делится базисными формулами над A.

Предложение 1. *Если* $t(\mathbf{x})$ *— позитивный тип над* A*, то он эквивалентен своему подтипу* $t'(\mathbf{x})$ *мощности* $\leqslant |L|$.

Доказательство. Если тип t несовместный, то утверждение следует из теоремы компактности. В силу нормальности, все базисные формулы вида $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in A$, входящие в совместный тип t для конкретной базисной формулы $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{y})$, являются эквивалентными. Поэтому тип t эквивалентен своему подтипу t', содержащему для каждой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{y})$ без параметров не более одной формулы вида $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{a})$ с параметрами $\mathbf{a}$. $\square$

Определение. Пусть $\mathbf{a}$ — кортеж длины n, B — множество кортежей длины n. Кортеж $\mathbf{a}$ *λ-позитивно отделяется над A от множества B* , если существует λ-позитивный тип $t(\mathbf{x})$ над A, для которого $\models t(\mathbf{a})$ и $(t(C)\cap B)=\varnothing$. При этом будем говорить, что тип $t(\mathbf{x})$ отделяет $\mathbf{a}$ от B.

Замечание 2. Из теоремы компактности вытекает, что кортеж $\mathbf{a}$ длины n позитивно изолирован над множеством A тогда и только тогда, когда он позитивно отделяется над A от любого позитивного над A множества B кортежей длины n, для которого $\mathbf{a}\notin B$. Для λ-изолированности при $\lambda>1$ это неверно, так как λ-позитивный тип $\neg\Phi$ будет λ-отделять $\mathbf{a}$ от B, если B определяется базисной формулой Φ, хотя базисный тип кортежа $\mathbf{a}$ может не быть 2-изолированным.

Замечание 3. Из принципа максимума (леммы Цорна) вытекает, что если базисный тип p над A от переменных X порождается своим подтипом $q\subseteq p$, то существует максимальный базисный тип r над A от X, который порождается подтипом $q\cup r^+$, и $p\subseteq r$. Отсюда получаем, что для любого λ-позитивного типа p над A от переменных X существует максимальный λ-позитивный над A от X тип q, для которого выполнено включение $p\subseteq q$.

Предложение 2. $(^*)$ *Пусть $f:A\to B$ — базисный изоморфизм структур A и B и $t(\mathbf{x})$ — совместный базисный тип над A.*

(1) *Тип $f(t)(\mathbf{x})$ является совместным типом над B.*

(2) *Если $t(\mathbf{x})$ — максимальный λ-позитивный базисный тип над A, то тип $f(t)(\mathbf{x})$ является максимальным λ-позитивным базисным типом над B.*

Доказательство. Можно считать, что тип t замкнут относительно конъюнкции базисных формул.

(1) Предположим, что тип t_f несовместный. По компактности найдутся такие базисные формулы $\Phi_0(\mathbf{x};\mathbf{a}),\ldots,\Phi_k(\mathbf{x};\mathbf{a})$, для которых выполнены условия:

(a) $\Phi_0(\mathbf{x};\mathbf{a})\in t(\mathbf{x}),\neg\Phi_1(\mathbf{x};\mathbf{a})\in t(\mathbf{x})\ldots,\neg\Phi_k(\mathbf{x};\mathbf{a})\in t(\mathbf{x})$;

(b) $\Phi_0(C;f\mathbf{a})\subseteq\bigcup\{\Phi_1(C;f\mathbf{a}),\ldots,\Phi(C,f\mathbf{a})\}$.

В силу базисной неприводимости, для некоторого $i\in\{1,\ldots,k\}$ выполняется условие

(c) $\Phi_0(C;f\mathbf{a})\subseteq\Phi_i(C;f\mathbf{a})$.

Так как f — базисный изоморфизм, а $t(\mathbf{a})$ — совместный тип, то $\Phi_0(C;f\mathbf{a})\neq\varnothing$, следовательно, условие (c) записывается P-формулой, и в силу того, что f — базисный изоморфизм, получаем условие

(d) $\Phi_0(C;\mathbf{a})\subseteq\Phi_i(C;\mathbf{a})$.

Условия (a) и (d) противоречат совместности типа $t(\mathbf{x})$.

(2) Для доказательства максимальности типа $f(t)$ покажем, что множество $f(t)(C)$ не делится базисными формулами над B. Возьмем произвольную базисную формулу $\Psi(\mathbf{x};f\mathbf{a})$. Так как $t(C)$ — не делится формулой $\Psi(\mathbf{x};\mathbf{a})$, то найдутся такие базисные формулы $\Phi_0(\mathbf{x};\mathbf{a}),\ldots,\Phi_k(\mathbf{x};\mathbf{a})$, для которых выполняется условие (a) и имеет место один из следующих 2-х случаев:

1)$(\Psi(C;\mathbf{a})\cap\Phi_0(C;\mathbf{a}))\subseteq\bigcup\{\Phi_1(C;\mathbf{a}),\ldots,\Phi(C,\mathbf{a})\}$;

2) $\Phi_0(C;\mathbf{a})\subseteq\bigcup\{\Psi(C;\mathbf{a}),\Phi_1(C;\mathbf{a}),\ldots,\Phi(C,\mathbf{a})\}$.

Если $(\Psi(C;\mathbf{a}) \cap \Phi_0(C;\mathbf{a})) = \varnothing$, то в силу максимальности t, $\neg\exists\mathbf{x}(\Psi(\mathbf{x};\mathbf{a}) \cap \Phi_0(\mathbf{x};\mathbf{a})) \in t$. Так как f — базисный изоморфизм, то $(\Psi(C;f\mathbf{a}) \cap \Phi_0(C;f\mathbf{a})) = \varnothing$, т. е. формула $\Psi(\mathbf{x};f\mathbf{a})$ не делит тип $f(t)$. Если $(\Psi(C;\mathbf{a}) \cap \Phi_0(C;\mathbf{a})) \neq \varnothing$, то в силу 1) или 2), базисной неприводимости и замкнутости множества базисных формул относительно P-операции также получаем, что тип $f(t)(C)$ не делится формулой $\Psi(\mathbf{x};f\mathbf{a})$. Покажем λ-позитивность типа $f(t)$. Пусть $t_1 = (t^+ \cup q)$, $(t^+ \cup q) \vdash t$, где $q \subseteq t^-$ и $|q| < \lambda$. По доказанному, тип $f(t_1)$ является максимальным, следовательно, $f(t_1) \vdash f(t)$. Так как $(f(t_1)^-) = f(q)$, то $|f(t_1)^-| = |q| < \lambda$. $\square$

Определение. Последовательность $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \varkappa \rangle$ называется *λ-позитивной конструкцией над A,* если для любого $\alpha < \varkappa$ элемент a_α λ-позитивно изолирован над множеством $(A \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha\})$. При этом последовательность S называется λ-позитивной конструкцией (над A) множества $B = \bigcup S$,

Определение. Множество B называется *λ-позитивно конструируемым* (или просто *λ-конструируемым*) над A, если существует λ-позитивная конструкция $\langle a_\alpha \mid \alpha < \varkappa \rangle$ над A, для которой $B = (\bigcup\{a_\alpha \mid \alpha < \varkappa\} \cup A)$.

4. Позитивные оболочки

В доказательствах утверждений этого раздела не используется условие замкнутости множества базисных формул BF *относительно P-операции.*

Предложение 3. *Пусть кортеж* $\mathbf{a}$ *позитивно изолирован над A, кортеж* $\mathbf{b}$ *позитивно изолирован над* $(A \cup \mathbf{a})$. *Тогда кортеж* $\mathbf{a}$ *позитивно изолирован над* $(A \cup \mathbf{b})$.

Доказательство. Пусть $t(\mathbf{x}) = \mathrm{tp}^+(\mathbf{a};A)$, $q(\mathbf{y};\mathbf{a}) = \mathrm{tp}^+(\mathbf{b};(A \cup \{\mathbf{a}\}))$. Покажем, что тип $r(\mathbf{x};\mathbf{b}) = \mathrm{tp}^+(\mathbf{a};(A \cup \{\mathbf{b}\}))$ порождает тип $\mathrm{tp}(\mathbf{a};(A \cup \{\mathbf{b}\}))$.

Предположим, что тип $r(\mathbf{x};\mathbf{b})$ делится базисной формулой $\Phi(\mathbf{x};\mathbf{b})$. Пусть кортеж $\mathbf{e}$ реализует тип $(r(\mathbf{x};\mathbf{b}) \cup \{\Phi(\mathbf{x};\mathbf{b})\})$. Рассмотрим базисное множество $G = \Phi(\mathbf{a};C)$. Так как $\mathbf{b} \notin G$, то, в силу позитивной изолированности $\mathbf{b}$ над $(A \cup \mathbf{a})$, существует базисная формула $\Psi(\mathbf{a};\mathbf{y}) \in q$, для которой тип $\{\Psi(\mathbf{a};\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{a};\mathbf{y})\}$ несовместен.

Так как $\mathbf{e}$ реализует $r^+(\mathbf{x};\mathbf{b})$, то $\mathbf{b} \in \Psi(\mathbf{e};C)$ и по нормальности имеем равенство $\Psi(\mathbf{e};C) = \Psi(\mathbf{a};C)$. Таким образом, для базисной формулы $\beta(\mathbf{x}) = \exists\mathbf{y}(\Phi(\mathbf{x};\mathbf{y}) \wedge \Psi(\mathbf{x};\mathbf{y}))$ над A выполняются условия $\beta(\mathbf{e})$ и $\neg\beta(\mathbf{a})$. Это противоречит тому, что $\mathbf{e}$ реализует тип $r(\mathbf{x};\mathbf{b})$ и, в силу позитивной изолируемости $\mathbf{a}$ над A, имеем $r(\mathbf{x};\mathbf{b}) \vdash \mathrm{tp}(\mathbf{a};A)$. $\square$

Лемма 1. *Пусть $A_0 \subseteq A$, каждый кортеж* $\mathbf{a} \in (A \setminus A_0)$ *позитивно изолирован над A_0 и кортеж* $\mathbf{b}$ *позитивно изолирован над A. Тогда кортеж* $\mathbf{b}$ *позитивно изолирован над A_0.*

Доказательство. Предположим, что кортеж $\mathbf{b}$ позитивно неизолирован над A_0, т. е. некоторая базисная формула $\Phi(\mathbf{y};\mathbf{a}_0)$ с параметрами из кортежа $\mathbf{a}_0 \in A_0$ делит тип $\mathrm{tp}^+(\mathbf{b};A_0)$. Кортеж $\mathbf{b}$ позитивно изолирован над A, поэтому существует базисная формула $\Psi(\mathbf{y};\mathbf{a})$ с параметрами из кортежа $\mathbf{a} \in A$, для которой выполняются условия $\models \Psi(\mathbf{b};\mathbf{a})$ и $(\Psi(C;\mathbf{a}) \cap \Phi(C;\mathbf{a}_0)) = \varnothing$. Из позитивной изолированности кортежа $\mathbf{a}$ над A_0, компактности и замкнутости множества базисных формул относительно конъюнкции получаем, что для некоторой формулы $\Theta(\mathbf{z};\mathbf{a}_1)$ с параматрами из кортежа $\mathbf{a}_1 \in A_0$ справедливо

$$(\Psi(C;\mathbf{d}) \cap \Phi(C;\mathbf{a}_0)) = \varnothing$$

для любого кортежа $\mathbf{d} \in \Theta(C;\mathbf{a}_1)$. Рассмотрим формулу

$$\Lambda(\mathbf{y};\mathbf{a}_0;\mathbf{a}_1) = \exists \mathbf{z}(\Theta(\mathbf{z};\mathbf{a}_1) \wedge \Psi(\mathbf{y};\mathbf{z})).$$

Ясно, что $\models \Lambda(\mathbf{b};\mathbf{a}_0;\mathbf{a}_1)$ и $(\Lambda(C;\mathbf{a}_0;\mathbf{a}_1) \cap \Phi(C;\mathbf{a}_0)) = \varnothing$. Это противоречит тому, что формула $\Phi(\mathbf{y};\mathbf{a}_0)$ делит тип $\mathrm{tp}^+(\mathbf{b};A_0)$. □

Предложение 4. *Перестановка конечной позитивной конструкции над A является позитивной конструкцией над A.*

Доказательство. Следует из леммы 1 и предложения 3, так как любая конечная перестановка получается комбинацией транспозиций. □

Определение. Множество A называется *позитивно компактным* , если любой позитивный тип над A реализуется в A.

Предложение 5. *Пусть $\lambda > |L|$. Если A — λ-насыщенная модель, то A позитивно компактна.*

Доказательство. Следует из предложения 1. □

Определение. Пусть B, D — множества элементов.

(a) Отображение $f : B \to C$ называется *базисным A-гомоморфизмом B в D,* если выполняются условия

(1) $f(a) = a$ для всех $a \in A$;

(2) $\models (\Phi(\mathbf{b}) \to \Phi(f\mathbf{b}))$ для каждой позитивной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ над A и любого кортежа $\mathbf{b} \in B$.

(b) A-гомоморфизм $f : B \to D$ называется *базисным A-изоморфизмом B в D,* если выполняется также условие

(2′) $\models (\Phi(f\mathbf{b}) \to \Phi(\mathbf{b}))$ для каждой позитивной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ над A и любого кортежа $\mathbf{b} \in B$.

(c) $\varnothing$-гомоморфизм ($\varnothing$-изоморфизм) будем называть просто гомоморфизмом (изоморфизмом).

Следующая лемма по существу вытекает из предложения 2, однако это предложение имеет место при предположении неприводимости множества базисных формул BF и его замкнутости относительно P-операции.

Лемма 2. *Пусть f — базисный изоморфизм A в C и $t(x)$ — позитивно максимальный тип над A. Тогда*

(a) *тип $f(t)(x)$ будет позитивно максимальным над $f(A)$;*

(b) *если элементы $a, b \in C$ реализуют соответственно типы $t(x)$ и $f(t)(x)$, то отображение $f_1 = (f \cup \{\langle a, b\rangle\})$ будет базисным изоморфизмом множества $(B \cup \{a\})$ в C.*

Доказательство. (a). Так как тип $t(x)$ позитивно максимальный над A, то для любой базисной формулы $\Phi(x)$ над A выполняется один из 2-х случаев:

1) $\Phi \in t$;

2) $(\Phi(C) \cap \Psi(C) = \varnothing)$ для некоторой базисной формулы $\Psi(x) \in t$.

Множество базисных формул замкнуто относительно конъюнкции, поэтому эти условия выражаются с помощью базисных формул и их отрицаний. В силу того, что f — базисный изоморфизм, эти условия выполняются для типа $f(t)$, поэтому он также является позитивно максимальным.

(b). Пусть для базисной формулы $\Phi(x;\mathbf{y})$ и кортежа $\mathbf{c} \in A$ имеет место $\models \Phi(a;\mathbf{c})$. Тогда имеет место случай 1 и выполняется $\models \Phi(\mathbf{b};f\mathbf{c})$, так как элемент b реализует тип $f(t(x))$. Если $\models \neg\Phi(a;\mathbf{c})$, то выполняется случай 2, условие которого выражается с помощью отрицания базисной формулы над A, следовательно, имеем $\models \neg\Phi(b;f\mathbf{c})$. □

Предложение 6. *Базисный A-гомоморфизм f позитивно конструируемого над A множества B является позитивным A-изоморфизмом. Более того, при отображении f образ позитивной над A конструкции является позитивной над A конструкцией.*

Доказательство. Индукция по минимальной длине позитивной конструкции над A множества B. Требуется показать, что если f — A-гомоморфизм множества $(B \cup \{b\})$, и выполняются условия

(a) элемент b позитивно изолирован над B;

(b) ограничение $f \restriction B$ является A-изоморфизмом;

(c) для позитивной формулы $\Phi(x;\mathbf{y})$ над A и кортежа $\mathbf{d} \in B$ выполнено $\models \Phi(fb;f\mathbf{d})$;

тогда выполняется условие $\models \Phi(b;\mathbf{d})$.

Предположим, что $\models \neg\Phi(b;\mathbf{d})$. По условию (a) существует базисная формула $\Psi(x;\mathbf{z})$ над A и кортеж $\mathbf{c} \in B$, для которых $\models \Psi(b;\mathbf{c})$ и $(\Phi(C;\mathbf{d}) \cap \Psi(C;\mathbf{c}) = \varnothing)$. Так как f — базисный гомоморфизм, то $\models \Psi(fb;f\mathbf{c})$. Таким образом, для базисной над A формулы $\Gamma(\mathbf{y};\mathbf{z}) = \exists x(\Phi(x;\mathbf{y}) \wedge \Psi(x;\mathbf{z}))$ выполнены условия $\models \neg\Gamma(\mathbf{d};\mathbf{c})$ и $\models \Gamma(f\mathbf{d};f\mathbf{c})$. Это противоречит условию (b).

Вторая часть утверждения леммы следует из леммы 2 индукцией по длине позитивной конструкции. □

Предложение 7. *Пусть B — позитивно конструируемое над A множество, D — позитивно компактное множество, и f_0 — базисный изоморфизм A в D. Тогда существует базисный изомоморфизм f множества B в D, для которого выполняется включение $f_0 \subseteq f$.*

Доказательство. Индукция по длине позитивной конструкции. Индукционный шаг вытекает из леммы 2. □

Определение. Пусть $A \subseteq B$. Множество B называется *позитивной оболочкой* множества A, если оно позитивно компактно и позитивно конструируемо над A.

Предложение 8. *Если множество B является максимальным (по включению) позитивно конструируемым над A, то B позитивно компактно.*

Доказательство. Пусть $t(x)$ — произвольный позитивный тип над B. По замечанию 3 существует максимальный позитивный тип $p(x)$ над B, расширяющий тип $t(x)$. Пусть элемент a реализует тип $p(x)$. Из максимальности B вытекает $a \in B$. □

Теорема 1. *Для любого множества A существует его позитивная оболочка.*

Доказательство. В силу предложения 8 достаточно показать, что существует максимальная позитивная конструкция над A. Известно, что для любой структуры M и любого кардинала λ существует λ-насыщенная структура N, являющаяся элементарным расширением структуры M. Возьмем произвольную $|L|^+$-насыщенную элементарную подструктуру D структуры C, содержащую множество A. По предложению 5 структура D позитивно компактна. По предложениям 6 и 7 любая позитивная конструкция над A имеет свой изоморфный над A образ в структуре D. Поэтому максимальная позитивная конструкция внутри структуры D будет максимальной позитивной конструкцией. □

Определение. Множество B называется *локально позитивно конструируемым над* A, если любая конечная последовательность элементов множества B является позитивной конструкцией над A.

Теорема 2. *Для множеств A и B эквивалентны следующие условия:*

(a) *B является позитивно конструируемым над A;*

(b) *B является локально позитивно конструируемым над A;*

(c) *любое полное упорядочение множества B является позитивной конструкцией над A.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Индукция по длине позитивной конструкции. Нужно доказать, что если D является локально позитивно конструируемым над A, а элемент a позитивно изолирован над $(A \cup D)$, то множество $(D \cup \{a\})$ также является локально конструируемым над A. В силу предложения 4, достаточно доказать, что для любого конечного множества $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq D$ элемент a позитивно изолирован над $(A \cup \{a_0, \ldots, a_n\})$. Это следует из леммы 1.

(b)$\Rightarrow$(c). Пусть последовательность $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ — позитивная конструкция над A и множество $B = (A \cup \{a_\beta\} \bigcup S)$ локально позитивно конструируемо над A. Требуется показать, что последовательность $S^* = \langle a_\alpha \mid \alpha \leqslant \beta \rangle$ является позитивно конструкцией над A, т. е. элемент α_β позитивно изолирован над множеством $D = (A \cup \bigcup S)$. Предположим противное. Тогда существует базисная формула $\Phi(x; \mathbf{b})$ с параметрами из кортежа $\mathbf{b} \in D$, которая делит тип $\mathrm{tp}^+(a_\beta; D)$. Тогда эта же самая формула будет делить тип $\mathrm{tp}^+(a_\beta; (A \cup \mathbf{b}))$. Таким образом, элемент a_β не является позитивно изолированным над $(A \cup \mathbf{b})$. Это противоречит тому, что B является локально позитивно конструируемым над A.

Утверждение (c)$\Rightarrow$(a) тривиально. □

Предложение 9. *Пусть $A \subseteq B \subseteq D$, D — позитивно конструируемое над A множество и B позитивно компактно. Тогда $B = D$.*

Доказательство. Предположим $B \neq D$. Возьмем любой элемент $d \in (D \setminus B)$. По теореме 2 позитивный тип $\mathrm{tp}^+(d; B)$ является максимальным. Этот тип не может реализовываться никаким элементом $b \in B$. В самом деле, в противном случае выполнялось бы включение $\mathrm{tp}^+(d; B) \subseteq \mathrm{tp}^+(b; B)$ и так как $x = b \in (\mathrm{tp}^+(b; B) \setminus \mathrm{tp}^+(d; B))$, то это включение было бы собственным, что противоречит максимальности типа $\mathrm{tp}^+(d; B)$. Таким образом, B не является позитивно компактным, что противоречит условию теоремы. □

Из теоремы 1 следует существование позитивной сболочки. Покажем ее единственность с точностью до изоморфизма.

Теорема 3. *Пусть B, B' — позитивные оболочки множества A, Тогда существует базисный A-изоморфизм f множества B на B'.*

Доказательство. В силу предложения 7 и предложения 6 существует A-изоморфизм f множества B в B'. По лемме 2 образ этого отображения является позитивно компактным и позитивно конструируемым. По предложению 9, f сюръективно отображает B на B'. $\square$

Список литературы:

[1] S.Shelah, *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, Amsterdam: North-Holland, 1978.

[2] Е.А.Палютин, *Категоричные хорновы классы. 1*, Алгебра и логика, **19**:5 (1980), 582–614.

[3] Е.А.Палютин, *Примитивно связные теории*, Алгебра и логика, **39**:2 (2000), 145–169.

Евгений Андреевич Палютин
Институт математики им. С.Л.Соболева,
проспект Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: palyutin@math.nsc.ru