S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 1–7 (2008) УДК 510.5

MSC 03D60

О СЕМЕЙСТВЕ ВЫЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ НА ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. Г. ПУЗАРЕНКО

Abstract. We study the existence of computable numberings of the set of all Δ–predicates over admissible sets. We construct an admissible set whose set of all Δ–predicates fails to have such a numbering and give a series of examples of admissible sets in which such numberings exist.

Как известно из классической вычислимости [1, 2], семейство всех вычислимых подмножеств, рассматриваемое как подсемейство вычислимо перечислимых подмножеств (т.е. задаваемое не характеристическими функциями, а именно подмножествами натуральных чисел), является вычислимым. Возникает естественный вопрос, связанный с вычислимостью семейства всех Δ-подмножеств на допустимых множествах. С одной стороны, подход к понятию вычислимости как Σ-определимости на допустимых множествах является обобщением классического подхода, причем в качестве вычислимых и вычислимо перечислимых подмножеств выступают Δ- и Σ-подмножества соответственно. С другой стороны, вычислимость на конкретных допустимых множествах может кардинальным образом отличаться от классической. В данной работе приводятся примеры допустимых множеств, в которых семейство всех Δ-подмножеств будет являться вычислимым. Такими будут, например, допустимые множества вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, $\mathbb{L}_\alpha$, $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}, P)$, где $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры, α — допустимый ординал ($\mathbb{L}_\alpha$ — "чистое" допустимое множество, состоящее из всех элементов, конструктивных на уровне α), а $\mathfrak{N}$ и P — стандартная модель арифметики и некоторое

Puzarenko, V.G., On collection of all computable subsets on admissible sets.

Работа частично поддержана международным грантом РФФИ-DFG 06-01-04002-ННИО_а, грантом РФФИ 02-01-00540, Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, грант N 00-15-96184, INTAS YSF 05-109-4919.

Поступила 25 июня 2007 г., опубликована 24 января 2008 г.

подмножество натуральных чисел соответственно. Кроме того, строится допустимое множество, в котором семейство всех Δ-подмножеств не вычислимо.

Автор не преследует здесь цели охарактеризовать допустимые множества с вычислимым семейством всех Δ-подмножеств, однако, как демонстрируют предложенные примеры, это свойство напрямую не связано со свойствами редукции, униформизации, отделимости и существования универсальной Σ-функции. Более того, наследственно конечные надстройки из §§1,5[3] имеют вычислимое семейство всех Δ-подмножеств, что следует из описания Σ-подмножеств в этих наследственно конечных надстройках. В частности, это означает, что существуют допустимые множества, имеющие вычислимое семейство всех Δ-подмножеств и удовлетворяющие "почти" любому возможному набору свойств из вышеприведенного списка.

Как обычно, под теорией KPU понимаем теорию Крипке-Платека с праэлементами — слабый "эффективный" фрагмент теории множеств с праэлементами, позволяющий иметь дело с транзитивными множествами и ординалами, замкнутыми относительно обычных ординальных операций. Множество всех ординалов в модели такой теории будет строго линейно упорядоченно отношением $\in$ и, к тому же, каждое непустое формульное его подмножество будет иметь наименьший элемент. Модель KPU называется *допустимым множеством*, если множество всех ординалов данной модели вполне упорядоченно. Допустимые множества будем обозначать большими латинскими буквами $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\ldots$, а их носители — буквами A, B, C, $\ldots$ соответственно. Основные понятия и обозначения, используемые по умолчанию, можно найти в [4, 5, 6].

Наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *над моделью* $\mathfrak{M}$ — наименьшее допустимое множество, содержащее носитель M модели $\mathfrak{M}$ (который является множеством всех праэлементов) в качестве подмножества. Отметим, что носитель этого допустимого множества может быть получен как замыкание множества $M \cup \{\varnothing\}$ относительно теоретико-множественных термов $\{\}^1$ и $\cup^2$.

Основными объектами изучения в теории вычислимости на допустимых множествах являются Δ- и Σ-предикаты, которые играют роль вычислимых и вычислимо перечислимых предикатов. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Операция на $\mathbb{A}$ называется *Σ-функцией*, если ее график будет Σ-предикатом. Если f — операция на $\mathbb{A}$, то через δf и ρf будем обозначать ее области задания и значений соответственно.

Определение 1. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, а $S \subseteq \mathcal{P}(A)$. Семейство S называется *вычислимым* (в $\mathbb{A}$), если существует Σ-формула $\Phi(x, y)$ (возможно с параметрами), что $S = \{\{b \mid \mathbb{A} \models \Phi(a, b)\} \mid a \in A\}$.

Определение 2. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество.

- $\mathbb{A}$ называется *Σ-перечислимым (recursively listed)*, если существует Σ-функция $f : \mathrm{Ord}(\mathbb{A}) \to A$ с $\rho f = A$.
- Пусть C — Σ-подмножество $\mathbb{A}$. Допустимое множество $\mathbb{A}$ называется *квазипроецируемым в C*, если существует Σ-функция с $\rho f = A$ и $\delta f \subseteq C$. Квазипроецируемые в ω допустимые множества будем называть просто *квазипроецируемыми*.

- $\mathbb{A}$ называется *резольвентным*, если найдется Σ-функция $f : \mathrm{Ord}(\mathbb{A}) \to A$, для которой $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})} f(\alpha) = A$. В этом случае f называется *резольвентой*.

Отметим, что если $\mathbb{A}$ квазипроецируемо, то оно имеет e-степень. Другими словами, e-степени Σ-подмножеств натуральных чисел допустимого множества $\mathbb{A}$ образуют главный идеал, и, к тому же, $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$ для любого допустимого множества с тем же идеалом. Напомним используемые здесь понятия. Пусть $A, B \subseteq \omega$.

Определение 3. Говорят, что A *сводимо по перечислимости* к B (и обозначается как $A \leqslant_e B$), если существует вычислимо перечислимое множество W, для которого справедливо следующее для всех n:

$$n \in A \Leftrightarrow \exists u[(\langle n, u\rangle \in W) \wedge (D_u \subseteq B)],$$

где D_u — каноническая последовательность конечных множеств, задаваемых бинарным представлением индекса.

Как обычно, $A \equiv_e B$, если $A \leqslant_e B$ и $B \leqslant_e A$. *e-Степенью* $d_e(A)$ множества A называется класс всех подмножеств натуральных чисел, e-эквивалентных A. Определять здесь понятие идеала не будем. Отметим лишь, что главные идеалы — это в точности те непустые подмножества (e-степеней), которые замкнуты вниз и имеют наибольший элемент.

Определение 4. Будем говорить, что $\mathbb{A}$ *Σ-сводится* к $\mathbb{B}$ (и обозначать как $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$), если существует отображение ν из B на A, что ν-прообраз любого Σ-предиката на $\mathbb{A}$ будет Σ-предикатом на $\mathbb{B}$.

Определение 5. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество.

- Говорят, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу *редукции*, если для любых Σ-подмножеств B_0 и B_1 найдутся непересекающиеся Σ-подмножества $C_0 \subseteq B_0$ и $C_1 \subseteq B_1$ такие, что $C_0 \cup C_1 = B_0 \cup B_1$.
- Говорят, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу *отделимости*, если для любых непересекающихся Σ-подмножеств B_0 и B_1 найдется Δ-подмножество C такое, что $B_0 \subseteq C \subseteq A \setminus B_1$.
- Говорят, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу *тотальной продолжимости*, если для любой частичной Σ-функции $\varphi(x)$ найдется тотальная Σ-функция $f(x)$, для которой $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.
- Говорят, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу *униформизации*, если для любого бинарного Σ-предиката R на $\mathbb{A}$ найдется частичная Σ-функция $\varphi(x)$ с $\delta\varphi = \mathrm{Pr}_1(R)$, для которой $\Gamma_\varphi \subseteq R$ (здесь и в дальнейшем $\mathrm{Pr}_1(R)$ — проекция отношения R на первую координату).

Аналогично определяются данные свойства для семейств произвольной природы. Например, идеал e-степеней I удовлетворяет свойству отделимости, если для любых непересекающихся $B, C \subseteq \omega$, $d_e(B) \in \mathrm{I}$, $d_e(C) \in \mathrm{I}$, найдется множество $A \subseteq \omega$, что $B \subseteq A$, $C \subseteq \omega \setminus A$ и $d_e(A) \in \mathrm{I}$, $d_e(\omega \setminus A) \in \mathrm{I}$.

Предложение 1. (1) *Если $\mathbb{A}$ — резольвентное допустимое множество, то семейство всех Δ-подмножеств $\mathbb{A}$ будет вычислимым.*

(2) *Если $\mathbb{A}$ — квазипроецируемое допустимое множество с идеалом, удовлетворяющим принципу отделимости, то семейство всех Δ-подмножеств $\mathbb{A}$ будет вычислимым.*

Доказательство. 1. Пусть $f : \mathrm{Ord}(\mathbb{A}) \to A$ — резольвента допустимого множества $\mathbb{A}$. Будем предполагать, что f монотонна, т.е. $\alpha < \beta \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A}) \Rightarrow f(\alpha) \subseteq f(\beta)$ и, к тому же, $f(\gamma) = \bigcup_{\beta<\gamma} f(\beta)$, если γ — предельный, а $f(0) = \varnothing$. Кроме того, будем считать, что $f(\alpha)$ транзитивно для любого $\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$. Пусть также Σ-формула $\Phi(x, y)$ такова, что $\{\Phi^{\mathbb{A}}[a, x] \mid a \in A\}$ — семейство всех Σ-подмножеств $\mathbb{A}$. Определим аппроксимацию $A_{a,\alpha}$, $\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$, $a \in A$, набором следующих условий:

- $A_{a,\alpha} = \varnothing$, если $a \notin f(\alpha)$;
- $A_{a,\alpha+1} = A_{a,\alpha}$, если $a \in f(\alpha+1)$ и $f(\alpha+1) \cap \{\langle b, i\rangle \mid i = 0, 1;\ \mathbb{A} \models \Phi^{(f(\alpha+1))}(a, \langle b, i\rangle)\}$ не является однозначным множеством;
- $A_{a,\alpha+1} = \{b \in f(\gamma_0) \mid \mathbb{A} \models \Phi^{(f(\alpha+1))}(a, \langle b, 0\rangle)\}$, если $a \in f(\alpha+1)$ и $f(\alpha+1) \cap \{\langle b, i\rangle \mid i = 0, 1;\ \mathbb{A} \models \Phi^{(f(\alpha+1))}(a, \langle b, i\rangle)\}$ однозначно, $\gamma_0 = \max\{\gamma \leqslant \alpha+1 \mid f(\gamma) \subseteq \mathrm{Pr}_1(\{\langle b, i\rangle \mid \mathbb{A} \models \Phi^{(f(\alpha+1))}(a, \langle b, i\rangle); i = 0, 1\})\}$;
- $A_{a,\alpha} = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_{a,\gamma}$; если α — предельный, а $a \in A$.

Положим $A_a = \bigcup_{\beta\in\mathrm{Ord}(\mathbb{A})} A_{a,\beta}$. Данная аппроксимация обладает следующими свойствами для любых $a \in A$ и $\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$:

(1) *Для любого* $\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ *справедливо* $\{\langle a, b\rangle \mid b \in A_{a,\alpha}\} \in A$*; в частности,* $A_{a,\alpha} \in A$ *для всех* $a \in A$ *и* $\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$. Непосредственно следует из принципа Δ-выделения, примененного к $f(\alpha)$.

(2) $A_{a,\alpha} \subseteq A_{a,\alpha+1}$. Непосредственно следует из монотонности Δ_0-формулы $\Phi^{(u)}$ по переменной u (лемма I.4.2[4]).

(3) *Если* $\{b \mid \mathbb{A} \models \Phi(a, b)\} \cap (A \times \{0, 1\})$ *— график характеристической функции* Δ*-множества* B*, то* $B = A_a$.

(4) *Если не выполняется условие пункта 3, то* $A_a = A_{a,\beta_0}$ *для некоторого* $\beta_0 \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$*; в частности,* A_a *также будет* Δ*-множеством.* Действительно, если $\{b \mid \mathbb{A} \models \Phi(a, b)\} \cap (A \times \{0, 1\})$ будет графиком частичной функции φ, то найдем наибольшее $\gamma_0 = \gamma \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$, что $f(\gamma) \subseteq \delta\varphi$. Пусть $\gamma' \geqslant \gamma_0$ таково, что $\Gamma_\varphi \cap f(\gamma_0) \subseteq \{x \mid \mathbb{A} \models \Phi^{(f(\gamma'))}(a, x)\}$ (существование такого γ' следует из принципа Σ-выборки). Тогда $A_a = A_{a,\gamma'}$. Далее, если $\{b \mid \mathbb{A} \models \Phi(a, b)\} \cap (A \times \{0, 1\})$ не однозначно, то найдем наименьшее $\alpha_0 = \alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$, для которого $\{b \mid \mathbb{A} \models \Phi(a, b)\} \cap (A \times \{0, 1\}) \cap f(\alpha)$ не будет функцией (такой ординал обязательно будет непредельным). Тогда $A_a = A_{a,\alpha_0}$.

2. Сначала покажем, что существует вычислимая последовательность e-операторов $\{\Theta_n\}_{n<\omega}$, что для любого $A \subseteq \omega$ семейство $\{\Theta_n(A) \mid n < \omega\}$ совпадает с $\{B \mid B \oplus \overline{B} \leqslant_e A\}$. Действительно, пусть $\{\Phi_n\}_{n<\omega}$ — вычислимая последовательность всех операторов перечисления (ее существование следует из вычислимости семейства всех в.п.м.), а оператор Ψ действует по следующему правилу (F — конечное множество):

$$\Psi(F) = \begin{cases} F^{-1}(0), & \text{если } F \text{ — функция с } \delta F \in \omega,\ \rho F \subseteq \{0, 1\};\\ \omega, & \text{если } F \text{ не является функцией.} \end{cases}$$

Тогда в качестве Θ_n можно взять $\Psi \circ \Phi_n$.

Пусть теперь $\mathbb{A}$ — квазипроецируемое допустимое множество, а f — функция из определения. Заметим, что Δ-подмножества $\mathbb{A}$ соответствуют парам непересекающихся Σ-множеств $A_0, A_1 \subseteq \omega$, удовлетворяющих условиям $A_0 \cup A_1 = \delta f$ и

$n \in A_i$, $f(n) = f(m) \Rightarrow m \in A_i$, $i = 0, 1$.

По принципу отделимости, найдется Δ-подмножество $B \subseteq \omega$, что $A_0 \subseteq B \subseteq \omega \setminus A_1$. Пусть $C \subseteq \omega$ таково, что для любого $D \subseteq \omega$, $D \leqslant_e C$, если и только если D — Σ-подмножество $\mathbb{A}$. Положим A_n, $n < \omega$, по следующему правилу:

$f(k) \in A_n$, если и только если $\exists F_0 \exists F_1[(\mathrm{card}(F_0 \cup F_1) < \infty) \wedge (F_0 \subseteq \Theta_{l(n)}(C)) \wedge (F_1 \subseteq \Theta_{r(n)}(C)) \wedge (F_0 \cup F_1 \in \omega) \wedge (k \in \delta f \cap F_0)] \vee \exists u \exists v[(u \in \Theta_{l(n)}(C) \cap \delta f) \wedge (v \in \Theta_{r(n)}(C) \cap \delta f) \wedge (f(u) = f(v)) \wedge (k \in \delta f)]$.

Нетрудно понять, что предикат $\{\langle k, n\rangle \mid f(k) \in A_n\}$ будет Σ-предикатом на $\mathbb{A}$ и, к тому же, семейство $\{A_n\}_{n<\omega}$ содержит в точности все Δ-подмножества $\mathbb{A}$. $\square$

Напомним, что резольвентные допустимые множества удовлетворяют свойству редукции и имеют универсальную Σ-функцию [5], а допустимые множества, удовлетворяющие условию 2 предложения, — обладают свойством отделимости (что следует из доказательства предложения).

Теорема 1. *Существует допустимое множество, у которого семейство всех Δ-подмножеств не вычислимо.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры $\{P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_3^1, Q_0^2, Q_1^2, Q_2^2\}$ с носителем M, удовлетворяющая следующим условиям:

- множества $P_0^{\mathfrak{M}}$, $P_1^{\mathfrak{M}}$, $P_2^{\mathfrak{M}}$, $P_3^{\mathfrak{M}}$ бесконечны и попарно не пересекаются;
- $P_0^{\mathfrak{M}} \cup P_1^{\mathfrak{M}} \cup P_2^{\mathfrak{M}} \cup P_3^{\mathfrak{M}} = M$;
- $Q_0^{\mathfrak{M}} \subseteq P_0^{\mathfrak{M}} \times (M \setminus P_0^{\mathfrak{M}})$;
- для каждого $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$ множества $R_a \leftrightharpoons \{b \mid \mathfrak{M} \models Q_0(a, b) \wedge P_1(b)\}$, $S_a \leftrightharpoons \{b \mid \mathfrak{M} \models Q_0(a, b) \wedge P_2(b)\}$ и $T_a \leftrightharpoons \{b \mid \mathfrak{M} \models Q_0(a, b) \wedge P_3(b)\}$ бесконечны;
- для любых различных $a, b \in P_0^{\mathfrak{M}}$ справедливо $(R_a \cap R_b) \cup (S_a \cap S_b) \cup (T_a \cap T_b) = \varnothing$;
- $Q_1^{\mathfrak{M}} \subseteq P_1^{\mathfrak{M}} \times P_3^{\mathfrak{M}}$, $Q_2^{\mathfrak{M}} \subseteq P_2^{\mathfrak{M}} \times P_3^{\mathfrak{M}}$;
- для любого $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$ отношения $Q_1^{\mathfrak{M}} \upharpoonright R_a$ и $Q_2^{\mathfrak{M}} \upharpoonright S_a$ осуществляют взаимно однозначные соответствия между R_a, S_a и $V_a \leftrightharpoons \{c \mid \mathfrak{M} \models \exists x Q_1(x, c)\} \cap T_a$, $W_a \leftrightharpoons \{c \mid \mathfrak{M} \models \exists x Q_2(x, c)\} \cap T_a$ соответственно;
- для любого $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$ множество $V_a \cap W_a = \varnothing$;
- для любого $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$ либо $V_a \cup W_a = T_a$, либо $T_a \setminus (V_a \cup W_a)$ бесконечно;
- существует бесконечно много элементов $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$, для которых $V_a \cup W_a = T_a$;
- существует бесконечно много элементов $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$, для которых $T_a \setminus (V_a \cup W_a)$ бесконечно.

Отметим, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ разрешима и счетно категорична.

Докажем, что семейство Δ-подмножеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не вычислимо. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{M}$ — счетная модель. Предпошлем два вспомогательных утверждения.

$\langle 1 \rangle$ *Если $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$ таково, что $V_a \cup W_a = T_a$, то V_a и W_a — Δ-подмножества* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Действительно,

$$b \in V_a \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \exists x Q_1(x, b) \wedge (b \in T_a),$$

$$b \in W_a \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \exists x Q_2(x, b) \wedge (b \in T_a),$$

$$b \in M \setminus V_a \Leftrightarrow [(b \in W_a) \vee P_0(b) \vee P_1(b) \vee P_2(b) \vee \exists x(Q_0(x,b) \wedge \urcorner(x \approx a))],$$

$$b \in M \setminus W_a \Leftrightarrow [(b \in V_a) \vee P_0(b) \vee P_1(b) \vee P_2(b) \vee \exists x(Q_0(x,b) \wedge \urcorner(x \approx a))].$$

$\langle 2\rangle$ *Пусть $a \in P_0^{\mathfrak{M}}$ таково, что $V_a \cup W_a \neq T_a$. Тогда если подмножество $S \subseteq T_a$, определимое Σ-формулой $\Phi(x_0)$ с параметрами $\overline{s}$ из M, а X — замыкание $\overline{s}$ относительно $Q_1^{\mathfrak{M}}$ и $Q_2^{\mathfrak{M}}$, то $T_a \setminus S$ конечно, если и только если $S \setminus (V_a \cup W_a \cup X) \neq \varnothing$. В частности, если $S \subseteq T_a$ — бесконечное Δ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то $T_a \setminus S$ конечно.* Пусть S определимо Σ-формулой с параметрами $\overline{s}$ и пусть X — замыкание $\overline{s}$ относительно отношений $Q_1^{\mathfrak{M}}$ и $Q_2^{\mathfrak{M}}$. Если $T_a \setminus S$ конечно, то $S \setminus (V_a \cup W_a \cup X) \neq \varnothing$, поскольку $T_a \setminus (V_a \cup W_a)$ бесконечно, а X конечно.

В обратную сторону, предположим, что найдется $b_0 \in S \setminus (V_a \cup W_a \cup X)$. Покажем, что в этом случае найдутся $c_0 \in S \cap (V_a \setminus X)$ и $c_1 \in S \cap (W_a \setminus X)$. Ограничимся лишь нахождением c_0. Определим модель $\mathfrak{M}_0$ сигнатуры $\{P_0, P_1, P_2, P_3, Q_0, Q_1, Q_2\}$ на $M \uplus \{*\}$ следующим образом:

- $P_0^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq P_0^{\mathfrak{M}}$;
- $P_1^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq P_1^{\mathfrak{M}} \cup \{*\}$;
- $P_2^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq P_2^{\mathfrak{M}}$;
- $P_3^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq P_3^{\mathfrak{M}}$;
- $Q_0^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq Q_0^{\mathfrak{M}} \cup \{\langle a, *\rangle\}$;
- $Q_1^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq Q_1^{\mathfrak{M}} \cup \{\langle *, b_0\rangle\}$;
- $Q_2^{\mathfrak{M}_0} \risingdotseq Q_2^{\mathfrak{M}}$.

Тогда $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{M}_0$, поэтому $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(b_0)$, но $f_0(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}$ для некоторого изоморфизма f_0, для которого $f_0 \upharpoonright X = \mathrm{id}_X$. В качестве c_0 необходимо взять $f_0(b_0)$.

Допустим, что семейство всех Δ-подмножеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ вычислимо и $\Psi(x, y, \overline{s})$ — Σ-формула с параметрами $\overline{s}$, что $\{\{b \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(a, b, \overline{s})\} \mid a \in HF(M)\}$ состоит в точности из всех Δ-подмножеств. Пусть также X — замыкание $\overline{s}$ относительно $Q_1^{\mathfrak{M}}$ и $Q_2^{\mathfrak{M}}$. Выберем $a_0 \in HF(M)$ такое, что $V_a = \{b \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(a_0, b, \overline{s})\}$ для некоторого a такого, что $a \notin X$ и $X \cap (R_a \cup S_a \cup T_a) = \varnothing$. По $\langle 1\rangle$ и $\langle 2\rangle$, $V_a \cup W_a = T_a$. Определим модель $\mathfrak{M}_1$ сигнатуры $\{P_0, P_1, P_2, P_3, Q_0, Q_1, Q_2\}$ на $M \uplus \{u_n \mid n < \omega\}$, где элементы из $U = \{u_n \mid n < \omega\}$ попарно различны, следующим образом:

- $P_0^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq P_0^{\mathfrak{M}}$;
- $P_1^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq P_1^{\mathfrak{M}}$;
- $P_2^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq P_2^{\mathfrak{M}}$;
- $P_3^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq P_3^{\mathfrak{M}} \cup U$;
- $Q_0^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq Q_0^{\mathfrak{M}} \cup \{\langle a, u_n\rangle \mid n < \omega\}$;
- $Q_1^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq Q_1^{\mathfrak{M}}$;
- $Q_2^{\mathfrak{M}_1} \risingdotseq Q_2^{\mathfrak{M}}$.

Нетрудно понять, что $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{M}_1$, поэтому $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \models \Psi(a_0, b, \overline{s})$, где $b \in V_a$. кроме того, имеется изоморфизм $f_1 : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \simeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, что $f_1 \upharpoonright X = \mathrm{id}_X$. Тогда $V_{f_1(a)} \subseteq \{b \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(f_1(a_0), b, \overline{s})\}$ и, по $\langle 2\rangle$, $T_{f_1(a)} \setminus \{b \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(f_1(a_0), b, \overline{s})\}$ конечно.

Определим теперь модель $\mathfrak{M}_2$ сигнатуры $\{P_0, P_1, P_2, P_3, Q_0, Q_1, Q_2\}$ на $M \uplus \{v_n \mid n < \omega\}$, где элементы из $V = \{v_n \mid n < \omega\}$ попарно различны, следующим образом:

- $P_0^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons P_0^{\mathfrak{M}}$;
- $P_1^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons P_1^{\mathfrak{M}} \cup V$;
- $P_2^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons P_2^{\mathfrak{M}}$;
- $P_3^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons P_3^{\mathfrak{M}}$;
- $Q_0^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons Q_0^{\mathfrak{M}} \cup \{\langle f_1(a), v_n\rangle \mid n < \omega\}$;
- $Q_1^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons Q_1^{\mathfrak{M}} \cup \{\langle v_n, f_1(u_n)\rangle \mid n < \omega\}$;
- $Q_2^{\mathfrak{M}_2} \rightleftharpoons Q_2^{\mathfrak{M}}$.

Легко видеть, что $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{M}_2$, поэтому $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_2) \models \Psi(f_1(a_0), b, \overline{s})$, где $b \in T_{f_1(a)}$ (за исключением, быть может, лишь конечного числа элементов из $T_{f_1(a)}$). Кроме того, имеется изоморфизм $f_2 : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_2) \simeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, что $f_2 \restriction X = \mathrm{id}_X$ и $f_2(\langle f_1(a_0), f_1(a)\rangle) = \langle a_0, a\rangle$. Тогда $T_a \setminus \{b \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(a_0, b, \overline{s})\}$ конечно, что противоречит выбору a_0 и a. $\square$

Список литературы

[1] Muchnik, A. *Solution of Post reduction problem and of certain other problems in theory of algorithms*, Amer. Mat.Soc., **29**(1963), 197–215.

[2] Odifreddi, P. *Classical recursion theory. The theory of functions and sets of natural numbers,* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **125**. Amsterdam etc.: North-Holland. 1989.

[3] Пузаренко В.Г., *К вычислимости на специальных моделях*, Сиб. мат. журнал, **46**:1 (2005), 185–208.

[4] Barwise J., *Admissible Sets and Structures*, Springer, 1975.

[5] Ершов Ю.Л., *Определимость и вычислимость*, Новосибирск, Научная книга, Москва, Экономика, 2000.

[6] Морозов А.С., Пузаренко В.Г., *О Σ-подмножествах натуральных чисел*, Алгебра и логика, **43**: 3 (2004), 291–320.

Вадим Григорьевич Пузаренко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: vagrig@math.nsc.ru