

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 5, стр. 215–228 (2008)*УДК 515.16  
MSC 57M27ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ  
СЕРИИ ГРАФ-МНОГООБРАЗИЙ

Е. А. ФОМИНЫХ

АБСТРАКТ. We provide a new formula for an upper bound of complexity of closed connected graph-manifolds obtained by gluing together two Seifert manifolds fibered over the disc with two exceptional fibers and a Seifert manifolds fibered over the annulus with one exceptional fiber. This bound turns out to be sharp for all such manifolds up to complexity 12.

**Keywords:** Matveev's complexity, graph-manifolds.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения верхней оценки сложности  $c(M)$  компактного трехмерного многообразия  $M$  решается относительно легко. Для этого достаточно построить какой-нибудь простой спайн многообразия  $M$ , число вершин которого и оценивает сложность сверху. Известно [9, пункт 2.1.2], что простой спайн строится по практически любому заданию многообразия. С другой стороны, проблема точного вычисления  $c(M)$  весьма трудна. Пока найдены только две бесконечные серии неприводимых гранично неприводимых многообразий [5, 6], для которых сложность известна. Кроме того, эта проблема решена для конечного множества всех замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий до сложности 12 (см. [2]) путем перебора всех спайнов с одной, двумя и т.д. вершинами. Отметим, что построенная в [2]

---

ФОМИНЫХ, Е.А., UPPER COMPLEXITY BOUNDS FOR AN INFINITE FAMILY OF GRAPH-MANIFOLDS.

© 2008 Фоминых Е.А.

Работа поддержана РФФИ (грант 06-01-72014-МНТИ) и интеграционным проектом УрО и СО РАН.

*Поступила 7 февраля 2008 г., опубликована 15 мая 2008 г.*

таблица содержит порядка 37 тысяч многообразий и доступна только в электронном виде<sup>1</sup>.

Большой объем таблицы порождает новую задачу нахождения потенциально точных верхних оценок сложности, т.е. верхних оценок, которые имеют шансы быть точными и, во всяком случае, дают точное значение сложности для всех табличных многообразий. Важный результат в этом направлении был получен Б. Мартелли и К. Петроньо [8]. Они построили потенциально точные оценки для всех замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий Зейферта.

Будем говорить, что замкнутое ориентируемое граф-многообразие  $M$  принадлежит классу  $\Xi$  тогда и только тогда, когда JSJ-разбиение многообразия  $M$  состоит из трех многообразий Зейферта: двух многообразий с базой диск и двумя особыми слоями каждое и одного многообразия с базой кольцо и одним особым слоем. В данной работе построены потенциально точные верхние оценки сложности для всех многообразий класса  $\Xi$ , а также проверена точность этих оценок для всех 1548 табличных многообразий класса  $\Xi$ . Следует отметить, что общий метод построения простых спайнов граф-многообразий разработан М.А. Овчинниковым [4]. Дальнейшего прогресса как в работе [8], так и в этой статье, удалось добиться за счет нахождения спайнов с наименьшим числом вершин среди всех спайнов, построенных по методу Овчинникова.

Автор выражает глубокую благодарность В.В. Таркаеву за проведение вычислительного эксперимента, а также С.В. Матвееву и М.А. Овчинникову за плодотворные обсуждения работы.

## 2. ГРАФ-МНОГООБРАЗИЯ

**2.1. Задание многообразий меченными молекулами.** Из классификации граф-многообразий следует, что любое замкнутое неприводимое граф-многообразие  $W$  содержит такую систему  $\Upsilon$  непересекающихся двумерных торов, что

- 1)  $\Upsilon$  разбивает  $W$  на многообразия Зейферта;
- 2) никакая меньшая подсистема системы  $\Upsilon$  свойством 1 уже не обладает.

Более того, система  $\Upsilon$  определена однозначно с точностью до изотопии. Любое неприводимое граф-многообразие задается меченной молекулой, т.е. ориентированным графом, каждой вершине (атому) которого сопоставлено многообразие Зейферта с указанными базовой поверхностью и неприведенными параметрами особых слоев. Торы на крае этого многообразия должны соответствовать ребрам, инцидентным рассматриваемой вершине, и на них должны быть введены канонические системы координат. Ребра графа должны быть помечены целочисленными матрицами порядка 2, задающими гомеоморфизмы склеек (см. [9]).

**2.2. Восстановление многообразия по молекуле.** Известно, что меченная молекула полностью определяет многообразие. В самом деле, каждый атом молекулы имеет вид  $M = (F, (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ , где  $F$  — компактная ориентируемая связная поверхность (для простоты мы ограничимся только такими) и  $(p_i, q_i)$  — пары взаимно простых целых чисел. Многообразие  $M$  можно восстановить следующим образом. Рассмотрим поверхность  $F_0$ ,

<sup>1</sup><http://www.topology.kb.csu.ru/~recognizer>

полученную из поверхности  $F$  удалением  $n$  непересекающихся открытых дисков. Граничные окружности этих дисков обозначим через  $c_1, \dots, c_n$ . Пусть  $c_{n+1}, \dots, c_k$  — все оставшиеся окружности в  $\partial F_0$ . Ориентируем поверхность  $F_0$  и многообразие  $M_0 = F_0 \times S^1$ . На каждом торе  $T_i = c_i \times S^1$ ,  $1 \leq i \leq k$ , выберем систему координат, состоящую из ориентированного меридиана  $c_i \times \{*\}$  и параллели  $\{*\} \times S^1$ . Ориентация меридиана индуцирована ориентацией поверхности  $F_0$ ; параллель ориентируем так, чтобы вместе с внутренней нормалью к тору  $T_i$  меридиан и параллель давали выбранную ориентацию многообразия  $M_0$ . Приклеим теперь к  $M_0$  полные торы  $V_i = D_i^2 \times S^1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , по гомеоморфизмам  $h_i = \partial V_i \rightarrow T_i$ , каждый из которых переводит меридиан  $\partial D_i^2 \times \{*\}$  тора  $V_i$  в кривую типа  $(p_i, q_i)$ . Полученное многообразие и есть  $M$ . Заметим, что оставшиеся граничные торы  $T_i$ ,  $n + 1 \leq i \leq k$ , многообразия  $M$  по-прежнему снабжены системами координат. Наконец, мы склеиваем атомы данной молекулы между собой по гомеоморфизмам, задаваемым матрицами.

**2.3. Преобразования меченных молекул.** Легко показать, что граф-многообразие не меняется при следующих операциях над меченной молекулой:

- $X_1$ ) перенумерация особых слоев одного атома;
- $X_2$ ) удаление или вставка неособого слоя атома типа  $(1, 0)$ ;
- $X_3$ ) замена двух пар параметров  $(p_i, q_i)$ ,  $(p_j, q_j)$ ,  $i \neq j$ , слоев одного атома на пары  $(p_i, q_i + p_j)$ ,  $(p_j, q_j - p_j)$ ;
- $X_4$ ) замена матрицы  $A$ , отвечающей выходящему из атома ребру, и пары параметров  $(p_i, q_i)$  слоя этого же атома на матрицу  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^\varepsilon$  и пару  $(p_i, q_i + \varepsilon p_i)$ , где  $\varepsilon = \pm 1$ ;
- $X_5$ ) замена матрицы  $A$ , отвечающей входящему в атом ребру, и пары параметров  $(p_i, q_i)$  слоя этого же атома на матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^\varepsilon \cdot A$  и пару  $(p_i, q_i + \varepsilon p_i)$ , где  $\varepsilon = \pm 1$ .

**2.4. Функции на матрицах.** Пусть  $G$  — множество всех целочисленных матриц порядка 2 с определителем  $-1$ .

**Определение.** Будем говорить, что матрица  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$  отрицательна, если хотя бы одно из чисел  $a/c, b/d \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$  отрицательно.

Геометрический смысл отрицательности матрицы мы обсудим в параграфе 3.3. Пусть  $S(p, q)$  — сумма всех неполных частных в разложении числа  $p/q$  в непрерывную дробь, где  $p, q$  — натуральные числа. Отметим, что способ вычисления числа  $S(p, q)$  непосредственно вытекает из его определения. Каждой матрице  $A \in G$  сопоставим число

$$\xi(A) = S(|a| + |b|, |c| + |d|)$$

и определим функцию  $\omega: G \times G \rightarrow \mathbb{Z}$  следующим образом:

$$\omega(A_1, A_2) = \begin{cases} \xi(A_1) + \xi(A_2) - 3, & \text{если обе матрицы} \\ & \text{отрицательны;} \\ \max(\xi(A_1) - 2, 0) + \max(\xi(A_2) - 2, 0), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, положим

$$\Omega(A_1, A_2) = \min_{n \in \mathbb{Z}} \omega \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot A_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-n} \cdot A_2 \right).$$

Способ вычисления числа  $\Omega(A_1, A_2)$  мы обсудим в параграфе 6.

**2.5. Формулировка основного результата.** Напомним, что замкнутое ориентируемое граф-многообразие  $M$  принадлежит классу  $\Xi$  тогда и только тогда, когда JSJ-разбиение многообразия  $M$  состоит из трех многообразий Зейферта: двух многообразий с базой диск  $D^2$  и двумя особыми слоями каждое и одного многообразия с базой кольцо  $A^2$  и одним особым слоем. Опишем такое многообразие более подробно.

Рассмотрим двухзвенную ломаную, ребра которой ориентированы от вершин  $\nu_1, \nu_2$  валентности 1 к вершине  $\nu_3$  валентности 2. Каждой вершине  $\nu_i$  ломаной сопоставим многообразие Зейферта  $M_i$ , а ребра пометим матрицами  $A_1, A_2 \in G$ , где

$$\begin{aligned} M_1 &= (D^2, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (1, t_1)), \\ M_2 &= (D^2, (p_3, q_3), (p_4, q_4), (1, t_2)), \\ M_3 &= (A^2, (p_5, q_5), (1, t_3)). \end{aligned}$$

В результате, мы получим меченную молекулу  $(M_1, M_2, M_3, A_1, A_2)$ , определяющую некоторое граф-многообразие класса  $\Xi$ .

**Определение.** Будем говорить, что меченная молекула  $(M_1, M_2, M_3, A_1, A_2)$  многообразия класса  $\Xi$  приведена, если  $t_1 = t_2 = t_3 = -1$  и параметры  $(p_i, q_i)$  особых слоев удовлетворяют условию  $p_i > q_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Отвечающее ей многообразие будем обозначать  $M((p_i, q_i), 1 \leq i \leq 5)$ .

Несложно показать, что операций  $X_1 - X_5$  достаточно для преобразования произвольной меченной молекулы многообразия класса  $\Xi$  в приведенную молекулу этого же многообразия.

Напомним, что двумерный подполиэдр  $P$  замкнутого трехмерного многообразия  $M$  называется его *спайном*, если многообразие  $M \setminus P$  гомеоморфно открытому шару. Спайн  $P$  называется *простым*, если линк каждой его точки вкладывается в окружность с тремя радиусами. Важной характеристикой простого спайна является число его истинных вершин, т.е. точек, линки которых гомеоморфны окружности с тремя радиусами. Говорят, что сложность  $c(M)$  многообразия  $M$  равна  $k$ , если оно имеет простой спайн с  $k$  вершинами и не имеет простых спайнов с меньшим числом вершин.

Следующая теорема представляет основной результат статьи.

**Теорема.** Пусть  $(M_1, M_2, M_3, A_1, A_2)$  — приведенная меченная молекула многообразия  $M = M((p_i, q_i), 1 \leq i \leq 5) \in \Xi$ . Тогда

$$c(M) \leq \sum_{i=1}^5 S(p_i, q_i) + \Omega(A_1, A_2) - 1.$$

Более того, если  $c(M) \leq 12$ , то эта оценка является точной.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ТЭТА-КРИВЫМИ

**3.1. Тэта-кривые на торе.** Тэта-кривой  $\theta \subset T$  на двумерном торе  $T$  будем называть граф, гомеоморфный окружности с диаметром, дополнение  $T \setminus \theta$  к которому есть открытый диск. Обозначим через  $\Theta(T)$  множество всех тэта-кривых на  $T$ . Хорошо известно [1, 8], что произвольную тэта-кривую на торе можно преобразовать в любую другую тэта-кривую при помощи изотопии и так называемых флип-преобразований (см. рис. 1).

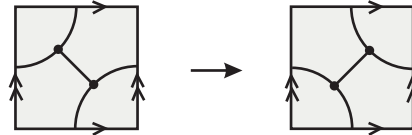


Рис. 1. Флип-преобразование

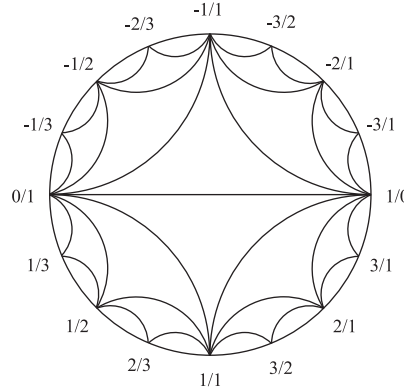


Рис. 2. Идеальная триангуляция гиперболической плоскости

**Лемма 1.** Для любых двух тэта-кривых  $\theta, \theta' \in \Theta(T)$  существует последовательность  $\{\theta_i\}_{i=0}^n \subset \Theta(T)$  попарно различных тэта-кривых такая, что  $\theta_0 = \theta$ ,  $\theta_n$  изотопна  $\theta'$  и для каждого  $i = 1 \dots n$  тэта-кривая  $\theta_i$  получается из тэта-кривой  $\theta_{i-1}$  одним флип-преобразованием.

Введем на множестве  $\Theta(T)$  функцию расстояния  $d$  полагая, что для данных тэта-кривых  $\theta, \theta' \in \Theta(T)$  число  $d(\theta, \theta')$  равно наименьшему числу флип-преобразований необходимых для перехода от  $\theta$  к  $\theta'$ .

**3.2. Тэта-кривые и идеальная триангуляция гиперболической плоскости.** Для вычисления расстояния  $d$  между тэта-кривыми на торе мы будем использовать классическую идеальную триангуляцию Фарей  $\mathbb{F}$  гиперболической плоскости  $\mathbb{H}^2$ . В качестве модели плоскости  $\mathbb{H}^2$  рассмотрим верхнюю полуплоскость комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , ограниченную абсолютом  $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Множество вершин триангуляции  $\mathbb{F}$  состоит из точек  $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ , где  $1/0 = \infty$ . При этом две вершины  $a/c, b/d$  соединены ребром (геодезической в  $\mathbb{H}^2$ ) тогда и только тогда, когда  $ad - bc = \pm 1$ . Для удобства изображения на рисунке 2 приведен образ гиперболической плоскости  $\mathbb{H}^2$  и триангуляции  $\mathbb{F}$  при отображении  $z \rightarrow (z - i)/(z + i)$ .

Построим отображение  $\Psi_{\mu, \lambda}$  множества  $\Theta(T)$  на множество всех треугольников триангуляции  $\mathbb{F}$ , зависящее только от выбора системы координат  $(\mu, \lambda)$  на двумерном торе  $T$ . Для этого рассмотрим отображение  $\psi_{\mu, \lambda}$ , которое каждой нетривиальной простой замкнутой кривой  $\mu^\alpha \lambda^\beta$  на  $T$  сопоставляет точку  $\alpha/\beta \in \partial\mathbb{H}^2$  (ориентация кривой не важна). Заметим, что любая тэта-кривая  $\theta$  на  $T$  содержит три нетривиальные простые замкнутые кривые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , каждая из которых состоит из двух ребер тэта-кривой  $\theta$ . Так как индекс пересечения любых двух кривых  $\ell_i, \ell_j, i \neq j$ , равен  $\pm 1$ , то точки

$\psi_{\mu,\lambda}(\ell_1)$ ,  $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_2)$ ,  $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_3)$  являются вершинами некоторого треугольника  $\sigma$  триангуляции Фарея. Итак, мы полагаем  $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta) = \sigma$ .

**3.3. Примеры вычисления расстояний.** Определим расстояние между треугольниками триангуляции Фарея как число ребер единственного простого пути в двойственном графе  $\Sigma$  триангуляции, соединяющего вершины, лежащие в данных треугольниках (путь единственный, поскольку  $\Sigma$  есть дерево). Ключевое для конкретных вычислений наблюдение заключается в том, что при любом выборе системы координат на торе расстояние между тэта-кривыми совпадает с расстоянием между соответствующими им треугольниками из  $\mathbb{F}$ . Это следует из того, что если тэта-кривая  $\theta'$  получается из тэта-кривой  $\theta$  одним флип-преобразованием, то соответствующие им треугольники имеют общее ребро.

Приведем два примера вычисления расстояний между треугольниками триангуляции Фарея. Обозначим через  $\sigma(\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3)$  треугольник с вершинами  $\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3$ , через  $\sigma(\alpha/\beta)$  — ближайший к  $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$  треугольник среди всех треугольников, имеющих вершину в точке  $\alpha/\beta$ . Следующая лемма в эквивалентной формулировке доказана в [8, Proposition 4.3].

**Лемма 2.** *Для любого положительного рационального числа  $p/q$  расстояние между треугольником  $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$  и треугольником  $\sigma(p/q)$  равно  $S(p, q) - 1$ , где  $S(p, q)$  — сумма всех неполных частных в разложении числа  $p/q$  в непрерывную дробь.*

*Доказательство.* Если  $S(p, q) = 1$ , то утверждение леммы очевидно, поскольку  $p/q = 1/1$  и  $\sigma(0/1, 1/0, 1/1) = \sigma(1/1)$ . Далее будем рассуждать методом индукции по числу  $S(p, q)$ . Рассмотрим случай  $p > q$ . Поскольку  $S(p - q, q) = S(p, q) - 1$ , по индукционному предположению расстояние между треугольниками  $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$  и  $\sigma((p - q)/q)$  равно  $S(p - q, q) - 1$ . Нетрудно проверить, что изометрия  $\tau : z \rightarrow z + 1$  гиперболической плоскости  $\mathbb{H}^2$  сохраняет триангуляцию Фарея. Более того,  $\tau$  переводит  $\sigma((p - q)/q)$  в  $\sigma(p/q)$  и  $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$  в  $\sigma(1/1, 1/0, 2/1)$ . Осталось только заметить, что расстояние между треугольниками  $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$  и  $\sigma(p/q)$  равно на 1 больше расстояния между треугольниками  $\sigma(1/1, 1/0, 2/1)$  и  $\sigma(p/q)$ . Случай  $p < q$  доказывается аналогично. Для этого достаточно рассмотреть изометрию  $z \rightarrow z/(z + 1)$  и треугольник  $\sigma(p/(q - p))$ .  $\square$

Рассмотрим второй пример. Сопоставим каждой целочисленной матрице  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с определителем  $\pm 1$  ребро  $e_A$  триангуляции Фарея с вершинами  $a/c$  и  $b/d$ . Тогда условие отрицательности матрицы  $A$  эквивалентно следующему: действительная часть  $Re(z)$  каждого комплексного числа  $z \in e_A$  отрицательна. Обозначим через  $\sigma_A^+$  и  $\sigma_A^-$  примыкающие к ребру  $e_A$  треугольники  $\sigma(a/c, b/d, (a + b)/(c + d)$  и  $\sigma(a/c, b/d, (a - b)/(c - d)$ . Аналогично, единичная матрица  $E$  определяет треугольники  $\sigma_E^+ = \sigma(0/1, 1/0, 1/1)$  и  $\sigma_E^- = \sigma(0/1, 1/0, -1/1)$ . В следующей лемме мы предъявляем явную формулу для нахождения наименьшего расстояния между парами треугольников  $(\sigma_E^+, \sigma_E^-)$  и  $(\sigma_A^+, \sigma_A^-)$ .

**Лемма 3.**

- (i)  $\min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_A^\eta) = \max(\xi(A) - 2, 0);$   
 (ii) если матрица  $A$  отрицательна, то  $\xi(A) \geq 2$  и  $\min_{\eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^+, \sigma_A^\eta) = \xi(A) - 1.$

*Доказательство.* Рассмотрим треугольники

$$\begin{aligned}\sigma^+ &= \sigma(|a|/|c|, |b|/|d|, (|a| + |b|)/(|c| + |d|)), \\ \sigma^- &= \sigma(|a|/|c|, |b|/|d|, (|a| - |b|)/(|c| - |d|)).\end{aligned}$$

Простой анализ показывает, что если матрица  $A$  неотрицательна, то треугольники  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  совпадают с треугольниками  $\sigma_A^+$ ,  $\sigma_A^-$  (возможно без сохранения порядка), а если  $A$  отрицательна, то  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  получаются из  $\sigma_A^+$ ,  $\sigma_A^-$  отражением плоскости  $\mathbb{H}^2$  относительно мнимой оси. Так как указанное отражение переводит треугольники  $\sigma_E^+$ ,  $\sigma_E^-$  друг в друга, то

$$\min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_A^\eta) = \min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma^\eta).$$

Заметим, что  $\sigma^+$  является ближайшим треугольником к  $\sigma_E^+$  среди всех треугольников из  $\mathbb{F}$ , имеющих вершину в точке  $(|a| + |b|)/(|c| + |d|)$ . Поэтому из леммы 2 и определения  $\xi(A)$  следует  $d(\sigma_E^+, \sigma^+) = \xi(A) - 1$ . Дальнейшее рассуждение разобьем на два случая в зависимости от того, совпадают ли треугольники  $\sigma^+$  и  $\sigma_E^+$ .

1. Пусть треугольники  $\sigma^+$  и  $\sigma_E^+$  совпадают. Тогда справедливо

$$\min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma^\eta) = 0 \text{ и } \xi(A) = 1,$$

что удовлетворяет утверждению (i). Более того, этот случай возможен только тогда, когда  $A$  неотрицательна.

2. Пусть треугольники  $\sigma^+$  и  $\sigma_E^+$  различны. В этом случае  $\xi(A) \geq 2$  поскольку  $d(\sigma_E^+, \sigma^+) > 0$ . Тогда

$$\min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma^\eta) = d(\sigma_E^+, \sigma^-) = d(\sigma_E^+, \sigma^+) - 1 = \xi(A) - 2.$$

Кроме того, если матрица  $A$  отрицательна, то

$$\min_{\eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^+, \sigma_A^\eta) = \min_{\eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^-, \sigma^\eta) = d(\sigma_E^-, \sigma^-) = d(\sigma_E^+, \sigma^+) = \xi(A) - 1.$$

□

Применим эту лемму для вычисления расстояний между тэта-кривыми на торе. Пусть  $T$  — тор с фиксированной системой координат  $(\mu, \lambda)$ .

**Определение.** Тэта-кривая  $\theta$  на торе  $T$  называется базовой, если кривые  $\mu$  и  $\lambda$  изотопны кривым, содержащимся в  $\theta$ .

С точностью до изотопии существует ровно две базовые тэта-кривые: положительная и отрицательная. Базовую тэта-кривую будем называть положительной и обозначать  $\theta^+$ , если  $\Psi_{\mu, \lambda}(\theta^+) = \sigma_E^+$ . Аналогично, базовая тэта-кривая  $\theta^-$  называется отрицательной, если  $\Psi_{\mu, \lambda}(\theta^-) = \sigma_E^-$ .

Пусть  $T_1, T_2$  — два тора с фиксированными системами координат  $(\mu_1, \lambda_1)$  и  $(\mu_2, \lambda_2)$ , соответственно. Обозначим через  $\theta_1^+ \subset T_1$ ,  $\theta_2^+ \subset T_2$  положительные, а через  $\theta_1^- \subset T_1$ ,  $\theta_2^- \subset T_2$  отрицательные базовые тэта-кривые на этих

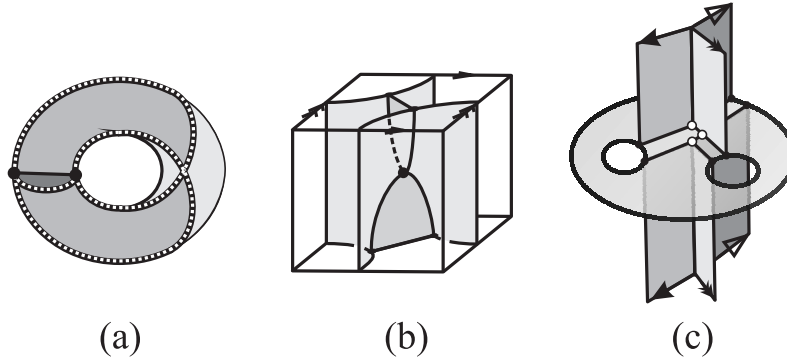


Рис. 3. Примеры простых относительных спайнов

торах. Пусть  $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$  — гомеоморфизм тора  $T_1$  на тор  $T_2$ , задаваемый в выбранных системах координат матрицей  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ . Тогда справедливы следующие формулы для нахождения расстояний между тэта-кривыми на торе  $T_2$ .

**Лемма 4.**

- (i)  $\min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\theta_2^\rho, \varphi(\theta_1^\eta)) = \max(\xi(A) - 2, 0)$ ;  
 (ii) если матрица  $A$  отрицательна, то  $\xi(A) \geq 2$  и  $\min_{\eta \in \{+, -\}} d(\theta_2^+, \varphi(\theta_1^\eta)) = \xi(A) - 1$ .

*Доказательство.* Следует из леммы 3, поскольку

$$\Psi_{\mu_2, \lambda_2}(\theta_2^\rho) = \sigma_E^\rho \text{ и } \Psi_{\mu_2, \lambda_2}(\varphi(\theta_1^\eta)) = \sigma_A^\eta,$$

где  $\rho, \eta \in \{+, -\}$ . □

#### 4. ПРОСТЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ СПАЙНЫ

**4.1. Относительные спайны.** Пусть  $M$  — компактное ориентируемое трехмерное многообразие с фиксированным графом  $\Gamma \subset \partial M$ . Граф  $\Gamma$  будем называть узором на крае многообразия  $M$ . Обозначим через  $\mathcal{T}$  класс всех таких многообразий  $(M, \Gamma)$ , у которых каждая компонента  $T$  края  $\partial M$  является двумерным тором, а  $T \cap \Gamma$  есть тэта-кривая.

**Определение.** Подполиэдр  $P \subset M$  называется относительным спайном многообразия  $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$ , если выполнены три условия:

- (1)  $M \setminus P$  есть открытый шар;
- (2)  $\partial M \subset P$ ;
- (3)  $\partial M \cap Cl(P \setminus \partial M) = \Gamma$ .

Относительный спайн  $P$  называется простым, если  $P$  является простым полиэдром.

**4.2. Примеры спайнов.** Кратко напомним три примера простых относительных спайнов многообразий класса  $\mathcal{T}$ , построенные в работах [3, 4, 7]. Оказывается, с их помощью можно построить простой спайн любого замкнутого граф-многообразия [4].



**ПРИМЕР 1.** Пусть  $V$  — полноторие с фиксированным меридианом  $\mu$ . Выберем простую замкнутую кривую  $\ell$  на  $\partial V$ , дважды пересекающую  $\mu$  в одном и том же направлении. Заметим, что  $\ell$  разбивает  $\mu$  на две дуги. Рассмотрим тэта-кривую  $\theta_V \subset \partial V$ , состоящую из кривой  $\ell$  и одной из дуг меридиана  $\mu$ . Тогда многообразие  $(V, \theta_V)$  имеет простой относительный спайн без внутренних вершин, образованный вложенным в полноторие  $V$  листом Мёбиуса и частью меридионального диска, ограниченного меридианом  $\mu$  (рис. 3а).

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $\theta_1, \theta_2$  — такие тэта-кривые на торе  $T$ , что  $\theta_2$  получается из  $\theta_1$  одним флип-преобразованием. Тогда многообразие

$$(T \times [0, 1], (\theta_1 \times \{0\}) \cup (\theta_2 \times \{1\}))$$

имеет простой относительный спайн  $P$  с одной внутренней вершиной (на рисунке 3б тор  $T$  представлен в виде квадрата с отождествленными сторонами). Заметим, что  $P$  удовлетворяет следующим условиям:

- для каждого  $t \in [0, 1/2)$  тэта-кривая  $\theta_t$ , где  $P \cap (T \times \{t\}) = \theta_t \times \{t\}$ , изотопна  $\theta_1$ ;
- для каждого  $t \in (1/2, 1]$  тэта-кривая  $\theta_t$  изотопна  $\theta_2$ ;
- $P \cap (T \times \{1/2\})$  есть букет двух окружностей.

**ПРИМЕР 3.** Пусть  $N^2$  — диск с двумя удаленными открытыми дисками. Выберем в  $N^2$  произвольную внутреннюю точку и соединим ее дугой с каждой компонентой края  $\partial N^2$  так, чтобы эти дуги не имели общих внутренних точек. Построенный букет трех отрезков обозначим через  $Y$ . В многообразии  $N^2 \times S^1$  рассмотрим полиэдр  $P$ , являющийся объединением  $\partial(N^2 \times S^1)$ ,  $N^2 \times \{*\}$  и  $Y \times S^1$ . При этом удобно считать, что объединение  $(N^2 \times \{*\}) \cup (Y \times S^1)$  получается приклеивкой  $Y \times [0, 1]$  к  $N^2 \times \{*\}$  посредством отображения  $\phi : (Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \rightarrow N^2 \times \{*\}$ . К сожалению, полиэдр  $P$  не является простым. Это легко исправить, меняя приклеивающее отображение  $\phi$  так, чтобы образы букетов  $Y \times \{0\}$  и  $Y \times \{1\}$  пересекались в точке, лежащей внутри их ребер (рис. 3с). Тогда новый полиэдр  $P$  является простым относительным спайном с тремя внутренними вершинами многообразия  $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$ , где  $M = N^2 \times S^1$  и  $\Gamma = \partial M \cap Cl(P \setminus \partial M)$ .

Многообразие  $M = N^2 \times S^1$  является многообразием Зейферта  $(N^2, (1, 0))$  без особых слоев с базой  $N^2$ . Выбирая ориентации базы и многообразия, мы получим каноническую систему координат на каждом торе края  $\partial M$  (см. параграф 2.2). Заметим, что в зависимости от выбора ориентаций, узор  $\Gamma$  состоит либо из двух положительных и одной отрицательной, либо из одной положительной и двух отрицательных базовых тэта-кривых. Известно, что многообразие  $M$  не изменится, если мы одновременно заменим параметры  $(1, 0)$  его неособого слоя на параметры  $(1, -1)$  и каноническую систему координат  $(\mu, \lambda)$  на одном из краевых торов  $T \subset \partial M$  на систему  $(\mu - \lambda, \lambda)$ . С другой стороны, если базовая тэта-кривая  $T \cap \Gamma$  была отрицательной, то она станет положительной. Таким образом, справедлива следующая лемма.

**Лемма 5.** Пусть  $M = (N^2, (1, -1))$  — многообразие Зейферта с узорами  $\Gamma_1, \Gamma_2$  на его крае. Предположим, что  $\Gamma_1$  состоит только из положительных, а  $\Gamma_2$  — из двух положительных и одной отрицательной базовых тэта-кривых. Тогда многообразия  $(M, \Gamma_1)$  и  $(M, \Gamma_2)$  имеют простые относительные спайны с 3 внутренними вершинами.

**4.3. Операция сборки.** Пусть  $(M, \Gamma)$  и  $(M', \Gamma')$  — два многообразия из множества  $\mathcal{T}$  с непустыми краями и простыми относительными спайнами  $P$  и  $P'$ . Выберем два тора  $T \subseteq \partial M$ ,  $T' \subseteq \partial M'$  и гомеоморфизм  $\varphi : T \rightarrow T'$ , переводящий тэта-кривую  $\theta = T \cap \Gamma$  в тэта-кривую  $\theta' = T' \cap \Gamma'$ . Тогда можно построить новое многообразие  $(W, \Delta) \in \mathcal{T}$ , где  $W = M \cup_{\varphi} M'$  и  $\Delta = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$ . Простой относительный спайн многообразия  $(W, \Delta)$  получается склейкой спайна  $P$  со спайном  $P'$  при помощи гомеоморфизма  $\varphi$  и удалением из объединения  $P \cup_{\varphi} P'$  открытого диска, являющегося отождествлением диска  $T \setminus \theta$  с диском  $T' \setminus \theta'$ . Будем говорить, что многообразие  $(W, \Delta)$  получается сборкой многообразий  $(M, \Gamma)$  и  $(M', \Gamma')$ .

**4.4. Сборка общего вида.** Оказывается, операции сборки достаточно для построения простого относительного спайна многообразия  $(W, \Delta)$  в общем случае, когда тэта-кривые  $\varphi(\theta)$  и  $\theta'$  не изотопны.

**Лемма 6.** Пусть  $(M, \Gamma)$  и  $(M', \Gamma')$  — два многообразия из множества  $\mathcal{T}$  с непустыми краями, имеющие простые относительные спайны с  $v$  и  $v'$  внутренними вершинами. Пусть  $\varphi : T \rightarrow T'$  — такой гомеоморфизм тора  $T \subseteq \partial M$  на тор  $T' \subseteq \partial M'$ , что тэта-кривые  $\varphi(\theta)$  и  $\theta'$ , где  $\theta = T \cap \Gamma$  и  $\theta' = T' \cap \Gamma'$ , не изотопны. Тогда многообразие  $(W, \Delta)$ , где  $W = M \cup_{\varphi} M'$  и  $\Delta = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$ , имеет простой относительный спайн с  $v + v' + d(\varphi(\theta), \theta')$  внутренними вершинами.

*Доказательство.* Сначала индукцией по  $n = d(\varphi(\theta), \theta')$  построим простой относительный спайн многообразия

$$(M'', \Gamma'') = (T' \times [0, 1], (\varphi(\theta) \times \{0\}) \cup (\theta' \times \{1\}))$$

с  $n$  внутренними вершинами. Если  $n = 1$ , то искомый спайн описан в примере 2. Пусть  $n > 1$ . По лемме 1 существует такая последовательность  $\{\theta_i\}_{i=0}^n$  попарно различных тэта-кривых на торе  $T'$ , что  $\theta_0 = \varphi(\theta)$ ,  $\theta_n$  изотопна  $\theta'$  и для каждого  $i = 1 \dots n$  тэта-кривая  $\theta_i$  получается из тэта-кривой  $\theta_{i-1}$  одним флип-преобразованием. По предположению индукции многообразие

$$(1) \quad (T' \times [0, 1/2], (\theta_0 \times \{0\}) \cup (\theta_{n-1} \times \{1/2\}))$$

имеет простой относительный спайн с  $n - 1$  внутренней вершиной. Простой относительный спайн многообразия

$$(2) \quad (T' \times [1/2, 1], (\theta_{n-1} \times \{1/2\}) \cup (\theta_n \times \{1\}))$$

с 1 внутренней вершиной описан в примере 2. Тогда искомый спайн получается в процессе сборки по тождеству многообразий (1) и (2).

Теперь заметим, что последовательная сборка многообразий  $(M, \Gamma)$ ,  $(M'', \Gamma'')$  и  $(M', \Gamma')$  по естественным гомеоморфизмам, переводящим каждую точку  $x \in T$  в точку  $(\varphi(x), 0) \in T' \times \{0\}$ , а каждую точку  $(y, 1) \in T' \times \{1\}$  — в точку  $y \in T'$ , приводит к многообразию  $(W, \Delta)$  и его простому относительному спайну с  $v + v' + d(\varphi(\theta), \theta')$  внутренними вершинами.  $\square$

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для упрощения доказательства теоремы выделим наиболее существенные моменты в отдельные предложения.

Рассмотрим двухзвенную ломаную, ребра которой ориентированы от вершин валентности 1 к вершине валентности 2. Каждой вершине ломаной

сопоставим многообразию Зейферта  $(N^2, (1, -1))$ , а ребра пометим матрицами  $A_1, A_2 \in G$ . Таким образом, мы имеем меченную молекулу, определяющую некоторое граф-многообразие  $M$  с краем.

**Предложение 1.** Пусть  $(M, \Gamma)$  — описанное выше многообразие с узором  $\Gamma$ , состоящим из пяти положительных базовых тэта-кривых. Тогда  $(M, \Gamma)$  имеет простой относительный спайн с  $\Omega(A_1, A_2) + 9$  внутренними вершинами.

*Доказательство.* С помощью меченной молекулы, описанной выше, построим простой относительный спайн многообразия  $(M, \Gamma)$  с  $\omega(A_1, A_2) + 9$  внутренними вершинами. Обозначим через  $M_1, M_2$  многообразия, сопоставленные вершинам молекулы валентности 1, через  $M_3$  — многообразие, сопоставленное вершине валентности 2. Пусть  $T_1 \subseteq \partial M_1, H_1 \subseteq \partial M_2, T_2, H_2 \subseteq \partial M_3$  — торы на крае многообразий  $M_1, M_2, M_3$ , соответствующие ребрам молекулы, а  $\varphi_1 : T_1 \rightarrow T_2, \varphi_2 : H_1 \rightarrow H_2$  — гомеоморфизмы, задаваемые матрицами  $A_1, A_2$ . На каждой компоненте края многообразий  $M_1, M_2, M_3$  зададим узор, являющийся базовой тэта-кривой. Тип (положительный или отрицательный) каждой из базовых тэта-кривых  $\theta_1 \subset T_1, \theta_2 \subset T_2, \vartheta_1 \subset H_1, \vartheta_2 \subset H_2$  выбирается так, чтобы числа  $d(\varphi_1(\theta_1), \theta_2)$  и  $d(\varphi_2(\vartheta_1), \vartheta_2)$  были наименьшие из возможных. Заметим, что тэта-кривая  $\theta_2$  будет отрицательной тогда и только тогда, когда матрица  $A_1$  отрицательна. Аналогичное утверждение справедливо для тэта-кривой  $\vartheta_2$  и матрицы  $A_2$ . Далее делаем поправку: если обе тэта-кривые  $\theta_2, \vartheta_2$  выбраны отрицательными, то мы меняем тэта-кривую  $\vartheta_2$  с отрицательной на положительную. Наконец, на каждой из оставшихся компонент края многообразий  $M_1, M_2, M_3$  зададим положительную тэта-кривую.

По лемме 5 каждое из многообразий  $M_1, M_2, M_3$  с построенным узором имеет простой относительный спайн с 3 внутренними вершинами. Последовательно применим к этим многообразиям сборку общего вида посредством гомеоморфизмов  $\varphi_1, \varphi_2$ . Мы получим многообразие  $(M, \Gamma)$ , которое по лемме 6 имеет простой относительный спайн с  $9 + d(\varphi_1(\theta_1), \theta_2) + d(\varphi_2(\vartheta_1), \vartheta_2)$  внутренними вершинами. Из леммы 4 следует, что число внутренних вершин этого спайна равно  $9 + \omega(A_1, A_2)$ .

Завершая доказательство, рассмотрим множество всех меченных молекул, получаемых из исходной молекулы многообразия  $(M, \Gamma)$  последовательным применением операции  $X_5$ . Как было показано выше, каждая молекула этого множества задает простой относительный спайн многообразия  $(M, \Gamma)$ . Выберем среди этих спайнов спайн  $P$  с наименьшим числом внутренних вершин. Несложно заметить, что число внутренних вершин спайна  $P$  равно  $\Omega(A_1, A_2) + 9$ .  $\square$

**Предложение 2.** Пусть  $T$  — компонента края многообразия  $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$  с фиксированной системой координат. При этом  $T \cap \Gamma$  есть положительная базовая тэта-кривая на  $T$ . Предположим, что многообразие  $(M, \Gamma)$  имеет простой относительный спайн с  $v$  внутренними вершинами. Тогда многообразие  $(W, \Delta)$ , получающееся заклеивкой компоненты  $T$  края  $\partial M$  полноторием с параметрами  $(p, q)$ , где  $p > 0, q > 0$  и  $\Delta = \Gamma \setminus (T \cap \Gamma)$ , имеет простой относительный спайн с  $S(p, q) - 2 + v$  внутренними вершинами.

*Доказательство.* Напомним, что многообразии  $(V, \theta_V)$ , рассмотренное в примере 1, имеет простой относительный спайн без внутренних вершин.

Заметим, что ни одна из трех кривых, содержащихся в  $\theta_V$ , не изотопна меридиану  $\mu$  полнотория  $V$ . С другой стороны, если к  $\theta_V$  применить флип-преобразование вдоль ребра, лежащего в  $\mu$ , мы получим тэта-кривую  $\theta \subset \partial V$ , которая содержит меридиан.

Обозначим через  $(m, \ell)$  заданную условием предложения систему координат на  $T$ . Среди всех гомеоморфизмов тора  $\partial V$  на тор  $T$ , которые переводят меридиан  $\mu$  в кривую  $m^p \ell^q$ , выберем такой гомеоморфизм  $\varphi$ , что тэта-кривая  $\varphi(\theta)$  будет ближайшей к тэта-кривой  $T \cap \Gamma$  среди всех тэта-кривых на торе  $T$ , содержащих кривую  $m^p \ell^q$ . Поскольку  $V \cup_{\varphi} M = W$ , то по лемме 6 многообразие  $(W, \Delta)$  имеет простой относительный спайн с  $v + d(\varphi(\theta_V), T \cap \Gamma)$  внутренними вершинами. Нам осталось доказать, что  $d(\varphi(\theta_V), T \cap \Gamma) = S(p, q) - 2$ .

Напомним, что отображение  $\Psi_{m, \ell}$  сопоставляет каждой тэта-кривой тора  $T$  треугольник триангуляции Фарея. Опишем треугольники, соответствующие тэта-кривым  $T \cap \Gamma$ ,  $\varphi(\theta_V)$ ,  $\varphi(\theta)$ . Так как  $T \cap \Gamma$  есть положительная базовая тэта-кривая на  $T$ , то ей соответствует треугольник  $\sigma_E^+ = \sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ . Из условия выбора гомеоморфизма  $\varphi$  следует, что  $\Psi_{m, \ell}(\varphi(\theta)) = \sigma(p/q)$ , где  $\sigma(p/q)$  — ближайший к  $\sigma_E^+$  треугольник среди всех треугольников, имеющих вершину в точке  $p/q$ . Наконец, поскольку тэта-кривая  $\theta_V$  получается из тэта-кривой  $\theta$  одним флип-преобразованием и  $\theta_V$  не содержит меридиан  $\mu$ , то треугольник  $\sigma_V = \Psi_{m, \ell}(\varphi(\theta_V))$  имеет общее ребро с треугольником  $\sigma(p/q)$ , но точка  $p/q$  не является его вершиной.

Теперь, переходя от тэта-кривых к соответствующим треугольникам и применяя лемму 2, мы имеем

$$d(\varphi(\theta_V), T \cap \Gamma) = d(\sigma_V, \sigma_E^+) = d(\sigma(p/q), \sigma_E^+) - 1 = S(p, q) - 2.$$

□

*Доказательство теоремы.* Последовательно применяя предложения 1 и 2 мы из заданной меченной молекулы восстановим многообразие  $M$  вместе с его простым спайном  $P$ . Поскольку число вершин  $P$  равно  $\sum_{i=1}^5 S(p_i, q_i) + \Omega(A_1, A_2) - 1$ , то справедливость верхней оценки сложности  $c(M)$  доказана.

Проверка точности этих оценок для всех 1548 многообразий класса  $\Xi$ , сложность которых не превосходит 12, была выполнена В.В. Таркаевым при помощи компьютера. □

## 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛА $\Omega(A_1, A_2)$

В заключительном параграфе мы объясним, как вычислять число  $\Omega(A_1, A_2)$ . Будем говорить, что функция, области определения и значений которой есть  $\mathbb{Z}$ , обладает свойством (\*), если существуют такие  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $n_1 \leq n_2$ , что функция 1) строго монотонно убывает на множестве  $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq n_1\}$ ; 2) постоянна на множестве  $\{n \in \mathbb{Z} : n_1 \leq n \leq n_2\}$ ; 3) строго монотонно возрастает на множестве  $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_2\}$ . Рассмотрим вспомогательную функцию  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , определенную формулой

$$f(n) = \omega \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^n \cdot A_1, \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-n} \cdot A_2 \right).$$

Если мы докажем, что функция  $f$  обладает свойством (\*), то очевидный способ вычисления числа  $\Omega(A_1, A_2)$  следует из равенства  $\Omega(A_1, A_2) = \min_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ .

Напомним, что каждой целочисленной матрице  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с определителем  $\pm 1$  сопоставляются ребро  $e_A$  триангуляции Фарея и два примыкающих к нему треугольника  $\sigma_A^+$ ,  $\sigma_A^-$  (см. параграф 3.3). Обозначим через  $B_n$  матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot A$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что функция

$$g(n) = \min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_{B_n}^\eta)$$

обладает свойством (\*). Действительно, изометрия  $\tau : z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$  гиперболической плоскости  $\mathbb{H}^2$  переводит ребро  $e_{B_n^{-1}}$  в ребро  $e_E$ , а ребро  $e_E$  — в ребро  $e_{B_n}$ . Поэтому

$$g(n) = \min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_{B_n^{-1}}^\eta)$$

Так как для любого  $n \in \mathbb{Z}$  ребро  $e_{B_n^{-1}}$  имеет вершину в точке  $-b/a$ , а ребра  $e_{B_n^{-1}}$ ,  $e_{B_{n+1}^{-1}}$  принадлежат одному треугольнику, то функция  $g$  обладает свойством (\*). Полезно также заметить, что множество всех чисел  $n$ , для которых матрица  $B_n$  отрицательна, совпадает либо с множеством  $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq n_1^g\}$ , либо с множеством  $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_2^g\}$ , где  $n_1^g, n_2^g$  — числа, определенные свойством (\*) для функции  $g$ . Действительно, так как изометрия  $\tau$  переводит треугольник  $\sigma_{B_n^{-1}}^-$  в треугольник  $\sigma_E^-$ , то условие отрицательности матрицы  $B_n$  равносильно тому, что треугольник  $\sigma_{B_n^{-1}}^-$  расположен ближе к паре треугольников  $\sigma_E^+$  и  $\sigma_E^-$ , чем треугольник  $\sigma_{B_n^{-1}}^+$ .

Так как функция  $g$  обладает свойством (\*), то функция

$$h(n) = \min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_{C_n}^\eta) + \min_{\rho, \eta \in \{+, -\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_{D_n}^\eta),$$

где  $C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot A_1$ ,  $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-n} \cdot A_2$ , также обладает свойством (\*). Применяя лемму 3 легко заметить, что если обе матрицы  $C_n, D_n$  отрицательны, то  $f(n) = h(n) + 1$ , иначе  $f(n) = h(n)$ . Пусть  $n_1^h, n_2^h$  — числа, определенные свойством (\*) для функции  $h$ . Простой анализ показывает, что множество всех чисел  $n$ , для которых обе матрицы  $C_n, D_n$  отрицательны, совпадает либо с множеством  $\{n \in \mathbb{Z} : n_1^h \leq n \leq n_2^h\}$ , либо с множеством  $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq n_3^h\}$ , либо с множеством  $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_4^h\}$ , где  $n_3^h \leq n_1^h, n_4^h \geq n_2^h$ . Поэтому функция  $f$  обладает свойством (\*).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.С. Анисов, *Флит-эквивалентность триангуляций поверхностей*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика, **2** (1994), 61–67.
- [2] С.В. Матвеев, *Табулирование трехмерных многообразий*, Успехи математических наук, **60** (2005), 97–122.
- [3] М.А. Овчинников, *Представление гомотопий тора простыми полиэдрами с краем*, Математические заметки, **66** (1999), 533–539.
- [4] М.А. Овчинников, *Построение простых спайнов многообразий Вальдгаузена*, Сборник трудов международной конференции “Маломерная топология и комбинаторная теория групп”, Киев: Институт математики НАН Украины, 2000, 65–86.
- [5] S. Anisov, *Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds*, Moscow Mathematical Journal, **5:2** (2005), 305–310.
- [6] R. Frigerio, V. Martelli, C. Petronio, *Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds*, Pacific Journal of Mathematics, **210** (2003), 283–297.

- [7] B. Martelli, C. Petronio, *3-manifolds having complexity at most 9*, Experimental Mathematics, **10** (2001), 207–236.
- [8] B. Martelli, C. Petronio, *Complexity of geometric 3-manifolds*, Geometriae Dedicata, **108** (2004), 15–69.
- [9] S.V. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Springer ACM-monographs, **9**, 2003.

ЕВГЕНИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ ФОМИНЫХ  
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
ул. БРАТЬЕВ КАШИРИНЫХ 129,  
454021, ЧЕЛЯБИНСК, РОССИЯ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УРО РАН,  
ул. С. КОВАЛЕВСКОЙ 16,  
620219, ЕКАТЕРИНБУРГ, РОССИЯ  
*E-mail address:* [fominykh@csu.ru](mailto:fominykh@csu.ru)