S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 251–254 (2008) УДК 517.925
Краткие сообщения MSC 34C10

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Е. П. ВОЛОКИТИН, С. А. ТРЕСКОВ

Abstract. A predator-prey model of a special type is considered. It is shown that the model has a phase portrait with two limit cycles enclosing a hyperbolic equilibrium each for some values of parameters. This result supplements previous results of the authors of the model.

Keywords: predator-prey model, limit cycles.

В работе [1] была рассмотрена плоская автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющая математическую модель популяции типа "хищник–жертва следующего вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(1-x) - \tfrac{x}{a+x^2}y, \\ &\dot{y} = y(\delta - \beta\tfrac{y}{x}), \\ &x(t) > 0,\ y(t) > 0,\ a > 0,\ \delta > 0,\ \beta > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Исследованию системы (1) в рамках качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и посвящена работа [1]. В этой работе выяснены некоторые свойства системы (1), такие, например, как наличие положительно инвариантной области на фазовой плоскости, количество и возможный характер стационаров внутри этой области и т. д. Было показано, что в системе возможно наличие одного или трех гиперболических стационаров; в случае трех стационаров один из них является седлом, два других — антиседлами (устойчивыми или неустойчивыми узлами или фокусами). При исследовании системы изучались встречающиеся в ней локальные бифуркации коразмерности один и два: бифуркация слияния двух или трех стационаров, бифуркация рождения цикла из сложного фокуса, бифуркация двукратного состояния равновесия с нильпотентной клеткой в линейной части

Volokitin, E.P., Treskov, S.A., About periodic solutions of predator-prey system.

Представлена В.М. Гордиенко 5 июня 2008 г., опубликована 10 июня 2008 г.

и сопутствующая последней нелокальная бифуркации коразмерности один петли седла.

Особое внимание было уделено вопросу о существовании периодических решений и выяснению их свойств. В частности, в работе [1] было сформулировано утверждение о том, что у системы (1) отсутствуют фазовые портреты, на которых имеются три стационара и два предельных цикла, каждый из которых окружает гиперболический стационар. В настоящей заметке мы покажем, что это утверждение неверно.

Пусть (x_0, y_0) — стационар системы (1), J — матрица линейного приближения системы в окрестности этого стационара. В таком случае

$$F \equiv x_0^3 - x_0^2 + (a + \tfrac{\delta}{\beta})x_0 - a = 0,\ y_0 = \tfrac{\delta}{\beta}x_0,$$
$$\mathrm{det}J = k_1(-a\beta + a\beta x_0 + \delta x_0 - \beta x_0^2 + \beta x_0^3),\ k_1 > 0,$$
$$\mathrm{tr}J = k_2(a\delta + a x_0 - 2x_0^2 + \delta x_0^2 + 3x_0^3),\ k_2 > 0.$$

Условия $F = 0$, $\mathrm{det}J = 0$ после исключения переменой x_0 выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество S, отвечающее наличию в системе кратного стационара, [2]. Это множество может быть задано следующим образом

$$a = \tau^2 - 2\tau^3,\ \beta = \frac{\delta}{2\tau(1-\tau)^2},\ \delta > 0,\ 0 < \tau < 1.$$

Рис. 1 дает представление о строении поверхности S. Точкам внутри ограниченного ею угла отвечает наличие у системы (1) трех простых стационарных состояний (седла и двух антиседел), точкам вне этого угла — наличие единственного стационара (узла или фокуса). Точкам на поверхности S отвечает наличие в системе одного двукратного и одного простого состояний равновесия, а точкам на ребре возврата — наличие единственного трехкратного состояния равновесия.

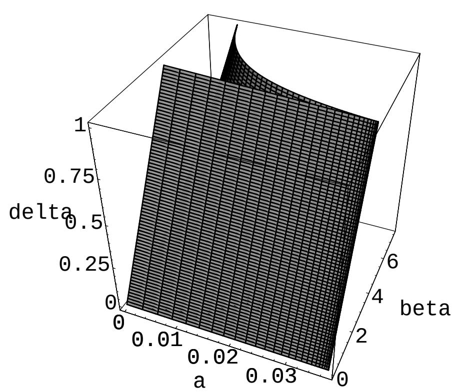

Рис. 1

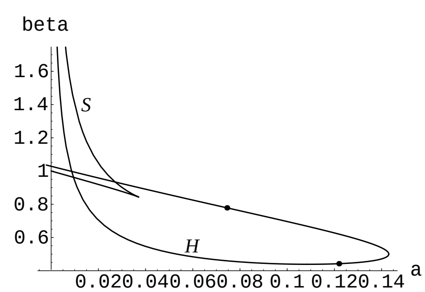

Рис. 2

Аналогично условия $F = 0$, $\mathrm{tr}J = 0$, $\mathrm{det}J > 0$ после исключения переменой x_0 выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество H, отвечающее наличию в системе сложного фокуса (собственные числа матрицы линейного приближения являются чисто мнимыми). Это множество может быть задано следующим образом

$$a = \frac{\tau^2(2-\delta-3\tau)}{\delta+\tau},\ \beta = \frac{\delta(\delta+\tau)}{2\tau(1-\tau)^2},\ 1-\delta-\tau > 0,\ \delta > 0,\ 0 < \tau < 1.$$

Поверхность H имеет довольно сложное строение, поэтому мы не будем здесь изображать ее полностью, отметим лишь, что эта поверхность имеет точки самопересечения, находящиеся внутри области множественности стационаров — факт, который понадобится при построении интересующего нас фазового портрета. При пересечении поверхности H в пространстве параметров соответствующий фокус меняет устойчивость и вокруг него появляется или исчезает предельный цикл - имеет место бифуркация Андронова-Хопфа. Устойчивость цикла и направление бифуркации зависят от знака первой ляпуновской величины.

На рис. 2 приведено сечение поверхностей H и S гиперплоскостью $\delta = c$ при значении $c = .25$. В этом сечении поверхности изображаются кривыми, на которые мы будем по-прежнему ссылаться как на кривые $H,\ S$.

Кривая S имеет характерное острие, отвечающее ребру возврата. Кривая H имеет точку самопересечения, расположенную в области значений параметров, при которых система имеет три стационара. Таким образом при значении параметров, соответствующих точке самопересечения кривой H ($a \approx 0.00870171,\ b \approx 0.997569,\ \delta = 0.25$), мы имеем в системе одновремено два сложных фокуса.[1]

Первая ляпуновская величина[2] сложного фокуса с координатами (x_0, y_0) с точностью до положительного множителя совпадает с величиной

$$\begin{aligned} l_1 = \quad & 6\delta - 11\delta^2 + 8\delta^3 - 2\delta^4 + 4x_0 - 39\delta x_0 + 42\delta^2 x_0 - 14\delta^3 x_0 - 24x_0^2 + \\ & + 72\delta x_0^2 - 33\delta^2 x_0^2 + + 36x_0^3 - 33\delta x_0^3 - 12x_0^4. \end{aligned}$$

На кривой H отмечены точки, в которых обращается в ноль величина l_1. На сегменте кривой H между этими точками имеем $l_1 < 0$, на участках примыкающих к этим точкам снаружи $l_1 > 0$. Поэтому на этих участках независимо друг от друга возникают неустойчивые предельные циклы при пересечении кривой H в направлении влево на крутом участке и в направлении вверх на пологом участке. Таким образом, в области, расположенной в непосредственной близости от точки самопересечения найдутся значения параметров, при которых вокруг каждого из устойчивых стационаров имеется неустойчивый цикл малого радиуса. Поскольку весь фазовый портрет погружен в положительно инвариантную область, имеется «большой» устойчивый цикл, содержащий внутри себя седло и указанные неустойчивые циклы. На рис. 3 представлен фазовый портрет системы (1) при значениях параметров $a = 0.007,\ \beta = 1.01,\ \delta = 0.25$, отражающий описанную ситуацию.

Замечание. Следует отметить, что область значений параметров, при которых реализуется фазовый портрет описанного типа, чрезвычайно мала. Ее размеры и форма могут быть уточнены на основе полной бифуркационной диаграммы системы (1). Для получения этой диаграммы необходимо рассмотреть все имеющие в системе место бифуркации до коразмерности три включительно. В работе [1] был построен фрагмент бифуркационной диаграммы в параметрической окрестности вырождения коразмерности 2+1 (двукратное состояние равновесия с нильпотентной клеткой в линейной части

[1] В таких ситуациях принято говорить, что мы имеем дело с «бифуркацией коразмерности 1+1».

[2] При подсчете ляпуновских величин мы использовали алгоритм, предложенный Пуанкаре (подробнее см. [3], [4]).

+ сложный фокус кратности один). На основе проведенного исследования был предъявлен список возможных фазовых портретов системы (1). Как показывает наше исследование этот список заведомо не полон. Построению полной бифуркационной диаграммы системы (1) мы намерены посвятить наши следующие работы.

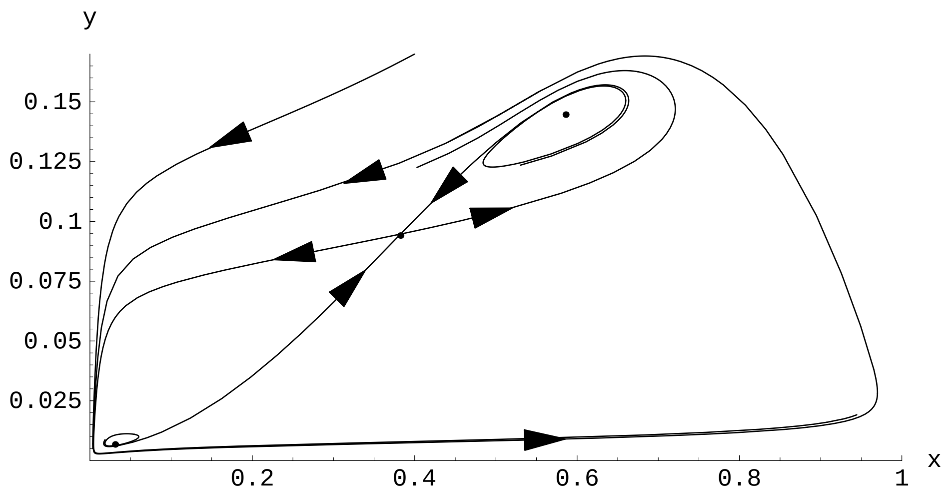

Рис. 3

Список литературы

[1] Li Y., Xiao D, *Bifurcanions of a predator-prey system of Holing and Leslie types* //Ghaos, Solitons and Fractals, **34** (2007), 606–620.

[2] Kuznetsov Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, New York. Springer-Verlag, 1995.

[3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва, Ленинград. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.

[4] Волокитин Е. П., Тресков С. А., *О ляпуновских величинах сложного фокуса динамической системы на плоскости* // Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1997. **1**: 1 (1997), 59–72.

Евгений Павлович Волокитин, Сергей Андреевич Тресков
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `volok@math.nsc.ru; treskov@math.nsc.ru`