

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 5, стр. 339–350 (2008)

УДК 532.59

MSC 76B15

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК В НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ

К. Н. ГАВРИЛОВА

ABSTRACT. The structure of hydraulic jump in an inclined channel is considered within the framework of various models of shallow water theory. Stationary undular and turbulent bores are constructed. Joint influence of dispersion and mixing effects on the form of hydraulic jump is investigated. Dependence of wave front position in inclined channel on the height of obstacle is found.

Keywords: equations of shallow-water theory, homogeneous liquid, hydraulic jump, hyperbolic model with dispersion.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гидравлический прыжок — это процесс перехода от сверхкритического потока к докритическому, в котором генерируется турбулентность с последующей диссипацией энергии. Такие течения возникают в различных естественных и искусственных водоводах.

При математическом моделировании внутренняя структура гидравлического прыжка зависит от уровня используемой модели. Так волновой бор описывается в рамках второго приближения теории мелкой воды [1]. В работах [2], [3] предложена модель турбулентного бора, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии. Развитие этого метода в рамках двухслойной мелкой воды с турбулентным верхним слоем предложено в монографии [4].

Заметим, что эффекты дисперсии и турбулентного перемешивания влияют на структуру течения как внутри гидравлического прыжка, так и на

GAVRILOVA, K.N., HYDRAULIC JUMP IN AN INCLINED CHANNELS.

© 2008 Гаврилова К.Н.

Работа поддержана Международным фондом INTAS (код проекта 06-9236), а также Интеграционным грантом СО РАН ϵ 2.15 и грантом президента РФ поддержки Ведущих научных школ НШ-2826.2008.1.

Поступила 19 августа 2008 г., опубликована 2 сентября 2008 г.

достаточно большом расстоянии от фронта волны. Поэтому одной из нерешенных проблем гидравлики открытых русел является описание перехода от волнового бора к развитому турбулентному бору в рамках одной модели. Предложенная в [4] двухслойная схема течения, учитывающая генерацию поверхностного турбулентного слоя при обрушении волны, дает простейшую модель такого перехода в рамках теории мелкой воды.

Упомянутые выше модели относятся к течениям над ровным дном. В то же время в инженерных расчетах теория гидравлического прыжка связывается с течениями жидкости в наклонных каналах и водоводах, с транскритическими течениями в окрестности локальных препятствий и т.д., т.е. с проблемой генерации квазистационарных гидравлических прыжков над неровным дном. Экспериментальные данные по структуре гидравлических прыжков в наклонных каналах приведены в [5]–[6]. В работе [6] также изучена структура "затопленных" гидравлических прыжков, генерируемых в нижнем бьефе плотины.

В данной работе рассматривается структура гидравлического прыжка в различных моделях теории мелкой воды, учитывающих как дисперсионные эффекты, так и процессы турбулентного перемешивания. При этом гидравлический прыжок является частью локальной докритической зоны течения, контролируемой препятствием, расположенным ниже по потоку. Стационарные течения над наклонным дном являются удобным объектом исследования. При изменении параметров потока на входе в канал поток остается стационарным, изменение высоты препятствия влечет за собой только изменение положения бора. Показано, что в зависимости от числа Фруда набегающего потока гидравлический прыжок может представлять собой как квазистационарный волновой пакет, так и монотонный турбулентный бор. Построены профили волны в переходной зоне и проведено сравнение с экспериментальными данными. Найдена зависимость положения фронта волны в наклонном канале от высоты препятствия.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.

2.1. Модель 1. Классические уравнения мелкой воды.

$$(1) \quad \begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0, \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + gh + gz\right)_x &= 0, \end{aligned}$$

здесь g — ускорение свободного падения, $z(x)$ — рельеф дна, $h(x, t)$ — толщина слоя, $u(x, t)$ — средняя скорость.

Уравнения (1) применяются для описания непрерывных течений над неровным дном. В частности, используются для анализа стационарных течений над локальным препятствием. Для стационарных течений следствиями являются сохранение расхода и интеграл Бернулли:

$$(2) \quad \begin{aligned} hu &= Q \equiv const, \\ \frac{1}{2}u^2 + g(h + z) &= J \equiv const. \end{aligned}$$

Разрывные решения, описывающие гидравлический прыжок определяются соотношениями, вытекающими из законов сохранения массы и импульса

$$(3) \quad \begin{aligned} h_1 u_1 &= h_2 u_2, \\ h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 &= h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2. \end{aligned}$$

где h_i, u_i ($i = 1, 2$) — состояния перед и за прыжком соответственно.

2.2. *Модель 2. Двухслойная модель мелкой воды с поверхностным турбулентным слоем.* Для описания процесса обрушения волн и формирования поверхностного турбулентного слоя используется следующая система уравнений:

$$(4) \quad \begin{aligned} (h + \eta)_t + (uh + v\eta)_x &= 0, \\ \eta_t + (v\eta)_x &= \sigma q, \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + g(h + \eta)\right)_x &= -gz_x, \\ (hu + v\eta)_t + (hu^2 + \eta v^2 + \frac{1}{2}g(h + \eta)^2)_x &= -g(h + \eta)z_x, \\ (hu^2 + \eta(v^2 + q^2) + g(h + \eta)^2)_t + (hu^3 + \eta v(v^2 + q^2) + \\ &+ 2g(h + \eta)(hu + \eta v))_x = -2g(hu + \eta v)z_x - \sigma \kappa q^3. \end{aligned}$$

Уравнения (4) представляют собой обобщение на случай неровного дна модели (1.17) в [4, гл. 5]. Здесь наряду с толщиной $h = h(x, t)$ слоя жидкости, примыкающего ко дну, и его средней скоростью $u = u(x, t)$ введены толщина $\eta = \eta(x, t)$ и скорость $v = v(x, t)$ приповерхностного слоя. Система (4) представляет собой уравнения двухслойной мелкой воды над неровным дном. Последнее уравнение используется для определения закона вовлечения жидкости из нижнего слоя в турбулентный, при этом скорость вовлечения полагается пропорциональной скорости q . Постоянная σ характеризует отношение вертикального и горизонтального масштабов и полагается равной $\sigma = 0.15$. Постоянная κ задает скорость диссипации турбулентной кинетической энергии. Система (4) применена в [4], [9] для описания структуры развитых турбулентных боров в однородной жидкости над ровным дном.

2.3. *Модель 3. Гиперболическая дисперсионная модель.* Гиперболическая модель диспергирующей среды возникает, когда для описания неравновесных процессов в поле силы тяжести наряду со средними характеристиками течения, такими как толщина $h(x, t)$ и скорость $u(x, t)$ используются внутренние переменные, характеризующие состояние потока в данной точке. В осредненных уравнениях движения влияние негидростатичности распределения давления может быть смоделировано функцией, представляющей дефицит давления на дно ([4, гл.6. ур-ния (3.1)–(3.3)]).

$$\begin{aligned}
& h_t + (uh)_x = 0, \\
(5) \quad & u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + gh + \alpha g(h - \zeta) + gz\right)_x = 0, \\
& \zeta_t + u\zeta_x = w, \\
& w_t + uw_x = 2\alpha g \frac{h-\zeta}{h}.
\end{aligned}$$

Здесь $\zeta(x, t)$ — мгновенная глубина, $w(x, t)$ — скорость жидкости на поверхности, α — дисперсионный параметр.

Характеристики системы (5) могут быть представлены в виде

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^\pm = u \pm \sqrt{(1 + \alpha)gh}.$$

Кроме того, имеется кратная контактная характеристика

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_0 = u.$$

При конечных значениях α система является промежуточной между первым и вторым приближениями теории мелкой воды. При $\alpha \rightarrow 0$ система (5) сводится к классическим уравнениям мелкой воды (1). При $\alpha \rightarrow \infty$ уравнения (5) переходят во второе приближение теории мелкой воды:

$$\begin{aligned}
(6) \quad & h_t + (uh)_x = 0, \\
& u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + gh + \frac{1}{2}h \frac{d^2h}{dt^2} + gz\right)_x = 0.
\end{aligned}$$

2.4. Модель 4. Уравнения мелкой воды с дисперсией и перемешиванием. Объединяя два подхода к моделированию эффектов перемешивания и дисперсии, предполагаем, что в турбулентном слое достигается гидростатическое распределение давления. Поэтому негидростатичность проявляется только в нижнем слое. Таким образом, к системе (5) добавляются уравнения движения турбулентной прослойки с учетом вовлечения. Полная система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
(7) \quad & h_t + (uh)_x = -\sigma q, \\
& \eta_t + (v\eta)_x = \sigma q, \\
& u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + gh + g\eta + \alpha g(h - \zeta)\right)_x = -gz_x, \\
& v_t + \left(\frac{1}{2}v^2 + gh + g\eta\right)_x = \sigma q \frac{u-v}{\eta} - gz_x, \\
& q_t + vq_x = \frac{\sigma}{2\eta}((u-v)^2 - (1 + \kappa)q^2), \\
& \zeta_t + u\zeta_x = w, \\
& w_t + uw_x = 2\alpha g \frac{h-\zeta}{h}.
\end{aligned}$$

Для ровного дня $z \equiv 0$ уравнения (7) получены в ([4, гл.6. (4.1)]). Система (7) описывает течение однородного слоя с турбулентной прослойкой. Уравнения

(4) получаются из (7) предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$, а уравнения (5) при $\eta \rightarrow 0$.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ.

Рассматривается истечение плоской сверхкритической струи (h_0, u_0 — начальные глубина и скорость соответственно) из щели в открытый наклонный канал, в котором расположено гладкое удобообтекаемое двумерное препятствие. Длина препятствия мала по сравнению с характерным масштабом волн, и оно расположено недалеко от начала канала, так что трением о дно можно пренебречь.

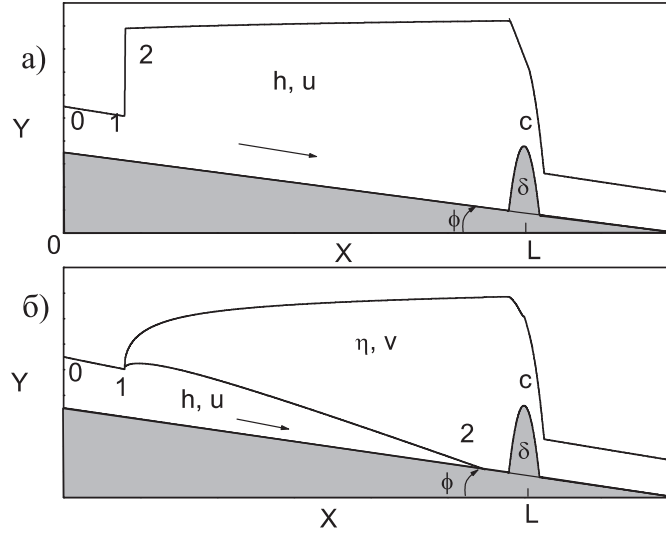


Рис. 1: Схема течения

Пусть изолированное препятствие высоты Δz и длины l расположено на склоне (угол наклона φ) на расстоянии L (рис.1). Геометрия течения задается следующими безразмерными параметрами $L_0 = L/h_0$ -расстояние от начала канала до препятствия, l/h_0 -длина препятствия, $\delta = \Delta z/h_0$ -высота препятствия и числом Фруда $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}$.

3.1. *Гидравлический прыжок над склоном (Модель 1)*. При малой ширине препятствия ($l \ll L$) возможны различные режимы его обтекания: сверхкритический, докритический, транскритический. В последнем случае необходимо, чтобы препятствие контролировало течение вверх по потоку, т.е. над гребнем реализовалось критическое течение.

Рассмотрим сверхкритическое течение, в котором генерируется прыжок перед препятствием, тогда уравнения перед прыжком имеют вид:

$$(8) \quad \begin{aligned} h_1 u_1 &= Q = h_0 u_0, \\ \frac{1}{2} u_1^2 + g h_1 + g z_1 &= J_0 = \frac{1}{2} u_0^2 + g h_0 + g z_0. \end{aligned}$$

Здесь 0 относится к течению на входе в канал, 1 обозначает состояние перед прыжком (рис1.а).

Стационарное течение за прыжком задается соотношениями:

$$(9) \quad \begin{aligned} h_2 u_2 &= Q = h_c u_c, \\ \frac{1}{2} u_2^2 + g h_2 + g z_2 &= J_2 = \frac{1}{2} u_c^2 + g h_c + g z_m. \end{aligned}$$

Здесь 2 — состояние течения за прыжком, с — критическое состояние над гребнем препятствия (рис1.а). На прыжке выполняется соотношение (3).

Условие критичности потока над препятствием имеет следующий вид:

$$(10) \quad \Delta_c = u_c^2 - g h_c = 0.$$

Кроме того выполняются равенства:

$$(11) \quad \begin{aligned} z_1 &= z_0 - x_1 \tan \varphi, \\ z_m &= z_0 - L \tan \varphi + \Delta z, \end{aligned}$$

здесь Δz — высота препятствия.

Течение строится следующим образом: по заданному расходу Q из (9)–(10) находим интеграл Бернулли J_2 , из (8) и (9) определяем величины h_1, u_1, h_2, u_2 как функции z_1 , далее из (3) находится значение z_1 и потом $x_1 = x_1(z_1)$ из (11).

На рис. 2 представлена зависимость $x_1 = x_1(\delta)$ при фиксированном параметре L_0 для различных начальных значений числа Фруда Fr_0 (сплошная линия).

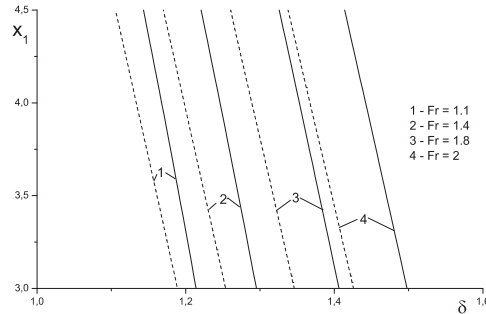


Рис. 2: Зависимость положения фронта волны от высоты препятствия

расчет по классической модели мелкой воды 1 и двухслойной модели мелкой воды с поверхностным турбулентным слоем 2. 1 - $Fr=1.1$, 2 - $Fr=1.4$, 3 - $Fr=1.8$, 4 - $Fr=2$.

Заметим, что при уменьшении δ положение разрыва сдвигается вниз по потоку и при $x_1 > L$ решение с гидравлическим прыжком не существует. При этом реализуется полностью сверхкритическое обтекание препятствия, определяемое соотношениями (2).

3.2. *Гидравлический прыжок над склоном (Модель 2).* Для стационарного течения над неровным дном уравнения (4) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 (uh)_x &= -\sigma q, \\
 (v\eta)_x &= \sigma q, \\
 (\frac{1}{2}u^2 + gh + g\eta)_x &= gz_x, \\
 (\frac{1}{2}v^2 + gh + g\eta)_x &= gz_x + \frac{\sigma q}{\eta}(u - v), \\
 vq_x &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - q^2).
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

В [4] для модели (4) над ровным дном построено стационарное решение, имеющее интегрируемую особенность в начале координат ($h(x) \sim |x|^{1/2}$, $\eta(x) \sim |x|^{1/2}$). Для наклонного дна характер особенности на фронте прыжка сохраняется, поэтому в окрестности точки $x = x_1$ справедливо представление $\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{C}(x - x_1)^{1/2}$, где \vec{U} — вектор неизвестных величин $\vec{U} = (u, v, h, \eta, q)^t$, \vec{U}_0 — постоянное решение $\vec{U}_0 = (u_0, v_0, h_0, \eta_0, q_0)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$. Подставляем это представление в стационарную систему (12), оставляя коэффициенты при главных членах. При этом получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= 0, \\
 \sigma((u_0 - v_0)^2 - q_0^2) &= 0, \\
 u_0 c_3 + h_0 c_1 &= 0, \\
 u_0 c_1 + g c_3 + g c_4 &= 0, \\
 g c_3 + g c_4 &= \frac{2\sigma q_0 u_0}{c_4}, \\
 c_2 c_4 &= \sigma q_0, \\
 c_4 c_2 c_5 &= 2\sigma(u_0(c_1 - c_2) + q_0 c_5).
 \end{aligned}$$

Из этой системы определяются коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и константы v_0 и q_0 :

$$\begin{aligned}
 v_0 &= 0, q_0 = u_0, \\
 c_4 &= \sqrt{\frac{2\sigma q_0(u_0^2 - gh_0)}{gu_0}}, \\
 c_1 &= -\frac{2\sigma q_0}{c_4}, c_2 = \frac{\sigma q_0}{c_4}, \\
 c_3 &= \frac{2\sigma q_0 u_0 - g c_4^2}{g c_4}, \\
 c_5 &= \frac{2\sigma u_0(c_1 - c_2)}{c_2 c_4 - 2\sigma q_0}.
 \end{aligned}$$

Если также как для модели 1 заданы $Q_0 = h_0 u_0$ и $J_0 = \frac{1}{2}u_0^2 + gh_0$, то по состоянию 0 с помощью уравнений (8) определяются значения h_1, u_1 перед прыжком. Далее решается система (12) с учетом полученной выше асимптотики вплоть до момента достижения турбулентным слоем дна. При

этом из условия $h_2 = 0$ находится состояние 2 за скачком. Высота препятствия $\delta = \delta(x_1)$ находится из уравнений (9)–(10).

В отличие от модели 1 гидравлического прыжка с нулевой толщиной, модель 2 представляет прыжок как непрерывную стационарную зону течения конечной длины. Причем длина переходной зоны составляет несколько начальных глубин потока. Поэтому на плоскости определяющих параметров δ и x_1 (при фиксированном значении L_0) зависимости $x_1 = x_1(\delta)$ (пунктирные линии на рис. 2) существенно отличаются от соответствующих кривых, построенных по модели 1 (сплошные линии).

Сравнение с экспериментом [6]

В литературе представлено много работ, посвященных экспериментам по установлению гидравлических прыжков над ровным и наклонным дном. В работе [6] приведены результаты нескольких серий экспериментов для углов наклона дна, варьирующихся от $\tan \varphi = 0.005$ до $\tan \varphi = 0.07$. На рис. 3а представлены экспериментальные данные из работы [6], показывающие положение свободной поверхности над ровным дном (квадратами обозначены данные для числа Фруда $Fr = 4.5$, кругами - для $Fr = 5.65$.) Модель 2 (уравнения (12)) пригодна для описания течений с большими числами Фруда. Сплошные линии-результат расчетов стационарного течения по модели 2 при

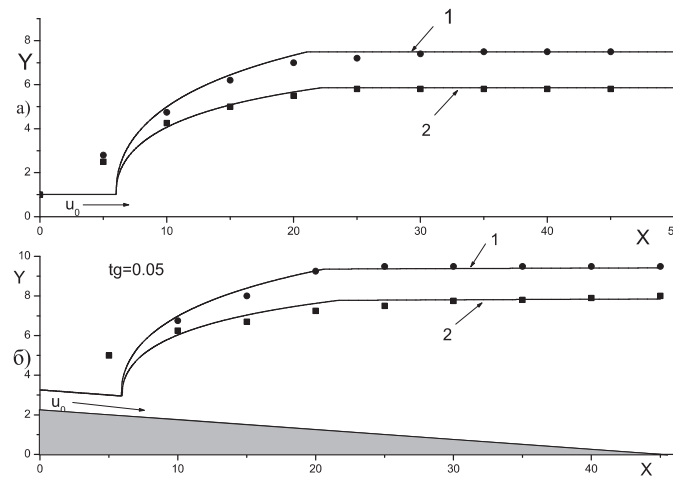


Рис. 3: Структура турбулентного бора над ровным и наклонным дном

1, 2 - стационарный расчет по уравнениям двухслойной мелкой воды (12) для $Fr=4.5$ и $Fr=5.65$, соответственно, ■ и ● - экспериментальные данные из работы [6] для $Fr=4.5$ и $Fr=5.65$, соответственно.

$h > 0$, далее расчет производился по стационарным уравнениям (1). Излом в решении обусловлен сменой модели расчета. Расхождения на фронте волны объясняется особенностью стационарных решений. В модели игнорируется возвратное течение в верхнем слое в виде так называемого "вальца" в развитом турбулентном боре, однако хорошо воспроизводится профиль основной части

переходной зоны. На рис 3б для наклонного дна ($\tan \varphi = 0.05$) показаны экспериментальные данные и соответствующие теоретические кривые, рассчитанные по модели 2. Здесь также, как и для течений над ровным дном, различия между экспериментальными и теоретическими кривыми на фронте прыжка обусловлены сингулярностью решения при $x = x_1$.

Нестационарный расчет

Для нестационарного расчета гидравлического прыжка использовалась модель (4), записанная в виде неоднородной системы законов сохранения. В представленных на рис. 3б расчетах положение фронта турбулентного

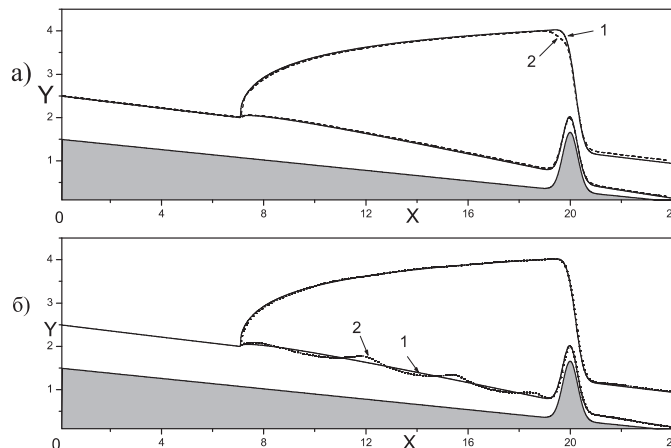


Рис. 4: Турбулентный бор на наклонной плоскости

а) 1 и 2 — стационарный и нестационарный расчет по модели двухслойной мелкой воды (4), соответственно

б) 1 — стационарный расчет по модели с перемешиванием (4), 2 — стационарный расчет по уравнениям мелкой воды с дисперсией и перемешиванием (7)

бора задавалось. Так как течение за переходной зоной докритическое то, как и в модели 1, положение фронта над наклонной плоскостью определяется условиями ниже по потоку, в частности, высотой локального препятствия, контролирующего поток. Для построения самосогласованного решения о локальной докритической зоне перед локальным препятствием, содержащей развитый турбулентный бор, был проведен расчет над склоном методом установления потока.

Для численного решения системы (4) использовался метод Годунова, основанный на задаче о распаде произвольного разрыва.

На рис. 4а представлено сравнение профилей волн, полученных в результате стационарного и нестационарного расчетов уравнений (4) с препятствием, заданным уравнением $z(x) = z_m e^{-k(x-L_0)^2}$, где k - коэффициент, характеризующий ширину препятствия ($k = 6, L_0 = 20, \tan \varphi = 0.06, Fr = 2.4, \delta = z_m/h_0 = 1.4, \kappa = 2$). Из рисунка видно, что установившееся течение

в нестационарном расчете (пунктирная линия) почти полностью совпадает с результатами стационарного расчета (сплошная линия), что свидетельствует об устойчивости построенного выше стационарного течения.

3.3. *Модель 3.* Система (5) над ровным дном в стационарном случае имеет вид:

$$(13) \quad \begin{aligned} uh &= u_0 h_0, \\ \frac{1}{2}u^2 + gh + \alpha g(h - \zeta) &= \frac{1}{2}u_0^2 + gh_0, \\ u\zeta' &= w, \\ uw' &= 2\alpha g \frac{h-\zeta}{h}. \end{aligned}$$

После введения обозначения $G(h) = \frac{1}{2}u_0^2(1 - \frac{h_0^2}{h^2}) - g(h - h_0)$ и $a(h) = 1 + \frac{1}{\alpha g}(g - \frac{u_0^2 h_0^2}{h^3})$ система (13) принимает вид

$$(14) \quad u_0^2 h_0^2 \left(\frac{a(h)h'}{h} \right)' = 2G(h).$$

Домножив уравнение (14) на $a(h)h'/h$, получаем

$$(15) \quad \frac{1}{2}u_0^2 h_0^2 \left(\left(\frac{a(h)h'}{h} \right)^2 \right)' = F'(h) = \frac{2G(h)a(h)h'}{h}.$$

Поведение функции $F(h) = \int_{h_0}^h \frac{2G(x)a(x)}{x} dx$ в окрестности точки h_0 определяет стационарное решение. Функция $F(h)$ положительна при выполнении условия $\sqrt{gh_0} < u_0 < \sqrt{(1+\alpha)gh_0}$. Если u_0 удовлетворяет этому неравенству, то решение представляет собой солитон. Если $u_0 > \sqrt{(1+\alpha)gh_0}$ гладкого решения не существует, возможна конфигурация типа прыжок-волна, состоящая из гидравлического прыжка и примыкающего к нему периодического решения.

Над ровным дном все ограниченные решения в виде бегущих волн (включая стационарные течения) являются периодическими решениями либо солитонами [4]. Поэтому аналогом гидравлического прыжка в модели (5) является волновой бор, представляющий квазистационарный волновой пакет, в котором происходит переход от сверхкритического к докритическому течению. При этом длина пакета зависит от скорости диссипации энергии в волновом пакете. Для гиперболической неоднородной системы (5) диссипация энергии осуществляется из-за нелинейных волновых взаимодействий.

На рис. 5а показан квазистационарный волновой пакет, полученный в результате нестационарного расчета по модели (5) при следующих значениях параметров: число Фруда в начальной точке $Fr_0 = 1.12$, $\tan \varphi = 0.005$, $L_0 = 300$, $\delta = z_m/h_0 = 0.8$, дисперсионный параметр $\alpha = 1$ (тонкая линия — мгновенная глубина η , жирная линия — средняя глубина h).

На рис. 5б представлена (η, v) диаграмма решения (выделенного рамкой) рисунка 5а (тонкая линия). Так как в представленном случае $u_1 > \sqrt{(1+\alpha)gh_1}$, то передняя часть волнового пакета представляет течение типа "прыжок-волна" т.е. состоит из разрыва и следующего за ним периодического участка волн. Амплитуда в этом пакете убывает из-за эффективной диссипации

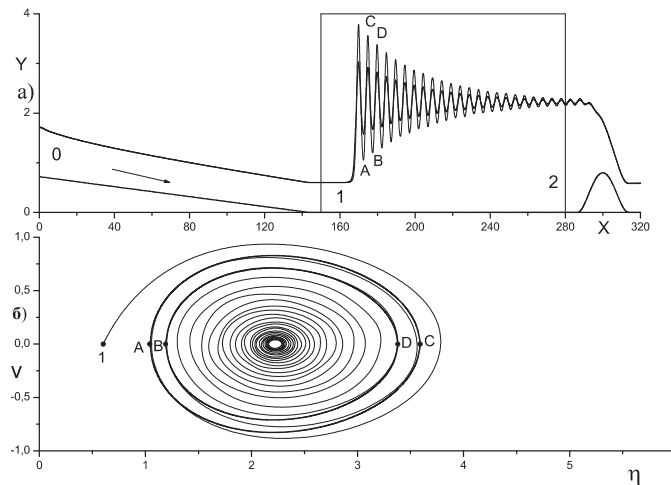


Рис. 5: Волновой пуг над наклонной плоскостью

- а) жирные и тонкие линии — средняя и мгновенная глубины, рассчитанные по нестационарной гиперболической дисперсионной модели (5),
 б) атонкая линия — (η, v) -диаграмма, полученная по нестационарной гиперболической дисперсионной модели (5), жирная линия — стационарный расчет по модели (13), 0 — состояние на входе в канал, 1 — состояние перед прыжком, 2 — состояние перед препятствием, A, B — первый и второй нижние гребни волнового пакета, C, D — второй и третий верхние гребни волнового пакета, соответственно.

энергии. На рис.5б замкнутой жирной линией показано стационарное решение системы (13): передний фронт волн практически совпадает с нестационарным решением, на заднем склоне происходит диссипация энергии, что влечет существенное различие стационарного и нестационарного решений (одинаковыми буквами на рис. 5а и 5б обозначены соответствующие друг другу точки).

3.4. *Модель 4.* Численные расчеты стационарной и нестационарной задач показывают, что при малых значениях числа Фруда $Fr = 1 - 1.5$ дисперсионные эффекты доминируют в полной модели (7), гидравлический прыжок описывается волновым пакетом аналогично модели 3 (рис. 5а), обрушения нет. При больших значениях числа Фруда ($Fr > 2$) доминирует обрушение в процессе образования волн. При увеличении числа Фруда влияние дисперсионных эффектов уменьшается, и при больших значениях Fr решение приближается к структуре турбулентного бора, описанного в разделе 2.2. На рис. 4б для числа Фруда $Fr_0 = 2.4$ показано сравнение профилей волн, полученных по модели с дисперсией и перемешиванием (7) (штрих-пунктирная линия) и модели с перемешиванием (4) (стационарный расчет по модели — сплошная линия). Влияние дисперсии в этом случае проявляется только на нижней границе турбулентного слоя.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Рассмотренная иерархия моделей пригодна для решения ряда задач. Классические уравнения мелкой воды (модель 1) упрощают структуру гидравлического прыжка, передавая переходную зону разрывом. Добавление членов, отвечающих за дисперсию и перемешивание, дает новые модели, более адекватно передающие структуру гидравлического бора. Так двухслойная модель мелкой воды с поверхностным турбулентным слоем (модель 2) пригодна для турбулентных боров достаточно большой амплитуды. Сравнение с имеющимися экспериментальными данными развитого гидравлического прыжка показывает: боры передаются ею, кроме фронта волны, так как здесь переходная зона моделируется не прыжком, а конечным участком волны длиной в несколько начальных глубин. Для малых чисел Фруда гиперболическая дисперсионная модель (модель 3) эффективна для описания структуры волнового бора, представляющего квазистационарный волновой пакет, в котором происходит переход от сверхкритического к докритическому течению. Уравнения мелкой воды с дисперсией и перемешиванием (модель 4) дают переход от волнового бора к турбулентному, когда оба этих эффекта - явления одного масштаба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] El G.A., Grimshaw R.H.J. and Smyth N.F., *Asymptotic description of solitary wave trains in fully nonlinear shallow-water theory*, PHYSICA D (in press) (2008).
- [2] Madsen P.A., Svendsen I.A., *Turbulent bores and hydraulic jumps*, J. Fluid Mech, **129** (1983), 1–25.
- [3] Svendsen I.A., Madsen P.A., *A turbulent bore on a beach*, J. Fluid Mech, **148** (1984), 73–96.
- [4] Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М., *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [5] Mustafa Gunal and Rangaswami Narayanan, *Hydraulic jump in sloping channels* J. of Hydraulic Engineering, **109**: 5 (1983), 684–701.
- [6] V.A. Bakhmeteff and A.E. Matzke, *The hydraulic jump in sloped channels* (1938), 111–118.
- [7] John A. McCorquodale, A.M. ASCE and Abdelkawi Khalifa, *Internal flow in hydraulic jumps* J. of Hydraulic Engineering, **109**: 5 (1983), 684–701.
- [8] Abdul A. Khan and Peter M. Steffler, *Physically based hydraulic jump model for depth-averaged computations* J. of Hydraulic Engineering, **122**: 10 (1996), 540–548.
- [9] Ляпидевский В.Ю., *Гидравлический прыжок перед препятствием ДСС*. **118** (2001), 122–125.

Кира Николаевна Гаврилова
 Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
 пр. академика Лаврентьева 15,
 630090, Новосибирск, Россия
 E-mail address: kirgvr@ngs.ru