S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 355–382 (2008) УДК 512.554.3
MSC 17B99

МЕТАБЕЛЕВЫ U-АЛГЕБРЫ ЛИ

Э. Ю. ДАНИЯРОВА

Abstract. This is the first in the series of three papers in which we develop algebraic geometry over metabelian Lie algebras. In this paper we introduce metabelian Lie U-algebras as a tool for the study of the class of irreducible coordinate algebras and present some approaches to their characterization.

Keywords: metabelian Lie algebra over a field, U-algebra, primary algebra.

Содержание

Daniyarova, E.Yu., Metabelian Lie U-algebras.

Работа поддержана Рос. фондом фунд. исслед. СО РАН 2007-2011 гг. (проект № 1.1.1.1).
Поступила 23 апреля 2007 г., опубликована 18 сентября 2008 г.

Введение

Данная статья является первой в цикле из трёх статей со следующими заголовками:

- "Метабелевы U-алгебры Ли",
- "Метабелевы Q-алгебры Ли",
- "Аксиомы метабелевых U-алгебр и Q-алгебр Ли".

Эти работы написаны в рамках проекта по построению алгебраической геометрии над метабелевыми алгебрами Ли. К уже опубликованным работам этого проекта относятся статьи [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

В работах Г. Баумслага, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [8] и А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [9] были заложены основы алгебраической геометрии над группами. Однако предложенная в статьях [8, 9] система определений и набор основных результатов могут быть без труда перенесены на произвольные алгебраические системы без предикатов. Так, элементы алгебраической геометрии над алгебрами Ли изложены в работе [1].

Основной задачей алгебраической геометрии над фиксированной алгеброй Ли A является классификация алгебраических множеств над A и соответствующих им координатных алгебр. В [1] показано, что любая конечно порождённая метабелева алгебра Ли A над полем k является нётеровой по уравнениям. Как правило, при решении классификационной задачи над нётеровой по уравнениям алгеброй A в первую очередь классифицируются неприводимые координатные алгебры и затем, используя полученную информацию, классифицируются все координатные алгебры. Как показано в работах [1, 8, 9], описание неприводимых координатных алгебр над нётеровой по уравнениям алгеброй A эквивалентно описанию конечно порождённых алгебр из универсального замыкания $\mathrm{ucl}(A)$, порождённого алгеброй A, а описание всех координатных алгебр над A эквивалентно описанию конечно порождённых алгебр из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(A)$.

В частности, если F — свободная конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k, то все координатные алгебры над F принадлежат квазимногообразию $\mathrm{qvar}(F)$, а все неприводимые координатные алгебры над F — универсальному замыканию $\mathrm{ucl}(F)$. Для описания алгебр из универсального класса $\mathrm{ucl}(F)$ и квазимногообразия $\mathrm{qvar}(F)$ мы вводим понятия метабелевых U-алгебр и Q-алгебр Ли соответственно.

Под U-алгеброй мы понимаем метабелеву алгебру Ли, радикал Фиттинга которой абелев и не имеет кручения как модуль над кольцом многочленов. Определение радикала Фиттинга и модульной структуры на нём даны в первом параграфе данной статьи. Под Q-алгеброй мы понимаем метабелеву алгебру Ли, радикал Фиттинга которой является Q-модулем над кольцом многочленов. Понятие Q-модуля введено в работе [7]. В первой и второй работах данной серии из трёх статей мы изучаем свойства и структуру U-алгебр и Q-алгебр, используя методы коммутативной алгебры, а в третьей статье даём описание U-алгебр и Q-алгебр на логическом языке.

Пусть $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ — класс всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k и $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ — класс всех метабелевых Q-алгебр Ли над полем k. Через $\mathfrak{U}$ мы обозначаем универсальное замыкание класса U-алгебр $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ ($\mathfrak{U} = \mathrm{ucl}(\mathcal{K}_{\mathrm{U}})$) и через $\mathfrak{Q}$ — квазимногообразие, порождённое классом Q-алгебр $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ ($\mathfrak{Q} = \mathrm{qvar}(\mathcal{K}_{\mathrm{Q}})$). Основным итогом трёх написанных работ является всестороннее описание универсального класса $\mathfrak{U}$ и квазимногообразия $\mathfrak{Q}$. Построены списки универсальных формул, аксиоматизирующих эти классы. Описаны конечно порождённые алгебры из классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$. В квазимногообразии $\mathfrak{Q}$ построена теория примарного разложения.

Результаты, которые удалось получить, зависят от мощности основного поля k: случаи конечного и бесконечного поля k принципиально отличаются. Если основное поле k конечно, то любая алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$ является U-алгеброй (то есть $\mathfrak{U} = \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$), а любая конечно порождённая алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ является Q-алгеброй. Эти утверждения доказаны в третьей статье цикла.

В случае бесконечного поля k универсальный класс $\mathfrak{U}$ шире класса всех U-алгебр, а квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ содержит конечно порождённые алгебры, отличные от Q-алгебр. Однако, нам удалось описать структуру конечно порождённых алгебр из универсальных классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$ над бесконечным полем k. Соответствующие алгебры получили названия U-примарных и Q-полупримарных метабелевых алгебр Ли. Эти новые понятия обобщают понятия U-алгебр и Q-алгебр соответственно.

Свойства U-примарных и Q-полупримарных алгебр описаны во второй работе цикла. Структура U-примарных алгебр тесно связана с диофантовыми проективными многообразиями над полем k. В отличие от U-алгебры радикал Фиттинга U-примарной алгебры, вообще говоря, имеет кручение, но оно поддаётся описанию: аннуляторы всех ненулевых элементов совпадают и равны радикалу некоторого (невырожденного) проективного многообразия над полем k. Примерно так же отличаются Q-полупримарные алгебры от Q-алгебр: если ассоциатор Q-алгебры состоит из линейных идеалов, то ассоциатор Q-полупримарной алгебры состоит из радикалов проективных многообразий над полем k.

Мы стремимся ко всестороннему описанию алгебр из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$. С этой целью во второй работе данного цикла построено примарное разложение метабелевых Q-алгебр и Q-полупримарных алгебр Ли. Доказано, что алгебра Ли является Q-алгеброй тогда и только тогда, когда она изоморфна подалгебре конечной прямой суммы U-алгебр. Аналогично, алгебра Ли является Q-полупримарной алгеброй тогда и только тогда, когда она изоморфна подалгебре конечной прямой суммы U-примарных алгебр.

В третьей статье цикла построен список универсальных формул, аксиоматизирующих универсальное замыкание $\mathfrak{U}$ класса U-алгебр, и список квазитождеств, аксиоматизирующих квазимногоборазие $\mathfrak{Q}$, порождённое классом Q-алгебр. Если поле k конечно, то соответствующие списки аксиом образуют рекурсивные множества формул. В частности, алгоритмически разрешимы универсальная и квазиэквациональная теории метабелевых U-алгебр Ли над конечным полем k.

Полученные результаты далее будут использованы при построении алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли F (и в более общей ситуации — над произвольной метабелевой U-алгеброй Ли). В то же время, результаты цикла из трёх статьей можно рассматривать как определённый вклад в теорию квазимногообразий алгебраических систем. К настоящему времени имеется не так много квазимногообразий, для которых описаны конечно порождённые объекты и даны удовлетворительные системы порождающих аксиом.

Данная работа является вводной в цикле из трёх статей. В ней собраны необходимые сведения о метабелевых алгебрах Ли и доказаны технические результаты, которые мы будем использовать в последующих работах. Статья включает в себя два параграфа. Первый параграф содержит предварительные сведения о метабелевых алгебрах Ли, о структуре радикалов Фиттинга, о порождающих элементах и определяющих соотношениях, о расширениях и о гомоморфизмах метабелевых алгебр Ли.

Ключевое понятие работы — понятие метабелевой U-алгебры Ли над полем k — приведено во втором параграфе. В разделе 2.1 кратко пересказаны основные результаты статьи [2], в которой получено описание метабелевых U-алгебр Ли на языке специальных матричных метабелевых алгебр Ли. Ряд вычислений в специальных матричных метабелевых алгебрах Ли проводить проще, чем в абстрактно определённых U-алгебрах, например, в них удобно выделяется радикал Фиттинга. Отметим, что работе [2] также показано, что свободная метабелева алгебра Ли F любого ранга является специальной матричной метабелевой алгеброй Ли.

В разделе 2.2 мы определяем примарные метабелевы алгебры Ли, обобщающие понятия U-алгебры. Потребность введения примарных алгебр обоснована выше, она связана с перспективой описания универсального класса $\mathfrak{U}$, порождённого всеми метабелевыми U-алгебрами Ли над полем k.

Материал всех трёх статей имеет нетривиальное пересечение с теорией модулей над коммутативными кольцами многочленов. Здесь существенно используются определения, обозначения и результаты работы [7]. За общими сведениями из коммутативной алгебры мы отсылаем к [10, 11].

Любая алгебра Ли над полем характеристики два является коммутативной. Коммутативные алгебры лежат за рамками наших исследований, поэтому в данном цикле работ мы всюду будем предполагать, что характеристика основного поля k не равна двум.

По умолчанию рассматриваемые в данной статье кольца многочленов R зависят от произвольного числа переменных, конечного или бесконечного; простой идеал кольца R — это всегда идеал, являющийся собственным подмножеством кольца R.

1. Предварительные сведения о метабелевых алгебрах Ли

Содержание этого параграфа составляет минимум сведений о метабелевых алгебрах Ли, которыми мы намерены пользоваться в последующих исследованиях. Часть утверждений здесь приводится без доказательств, так как они или являются известными фактами, или были доказаны в работе [2]. За общими сведениями об алгебрах Ли мы отсылаем к [12, 13, 14], по вопросам расширений и когомологий алгебр Ли — к [12, 15].

1.1. **Основные определения и обозначения.** Пусть A — алгебра над полем k с операцией умножения, которую мы будем обозначать символом " $\circ$ ". Напомним, что A называется алгеброй Ли, если на любых элементах $a, b, c, d \in A$ выполняются следующие тождества:

- *Тождество антикоммутативности*: $a \circ a = 0$;
  Отсюда, как известно, следует тождество: $a \circ b = -b \circ a$;
- *Тождество Якоби*: $(a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = 0$.

Алгебра A называется метабелевой, если выполнено дополнительное тождество:

- *Тождество метабелевости*: $(a \circ b) \circ (c \circ d) = 0$.

Как было отмечено во введении, мы всюду предполагаем, что $\mathrm{char}(k) \neq 2$. В этом случае алгебра Ли A над полем k абелева тогда и только тогда, когда $a \circ b = 0$ для любых $a, b \in A$.

Иногда мы будем сокращать запись и писать ab вместо $a \circ b$, а вместо левонормированного произведения $(\ldots((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ \ldots) \circ a_n$ — просто $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Для записи $a\underbrace{bb\ldots b}_{n}$ будем использовать сокращение ab^n.

Произведение n элементов с любой расстановкой скобок называется мономом или словом (длины или степени n). Известно, что в алгебре Ли произвольный моном длины n от букв $a_1, \ldots, a_n$ равен некоторой линейной комбинации левонормированных мономов длины n от этих же букв. Из тождеств метабелевой алгебры Ли выводится следствие: для любых элементов $a, b, c_1, \ldots, c_n \in A$ и любой перестановки τ на множестве из n элементов справедливо равенство $abc_1 \ldots c_n = abc_{\tau(1)} \ldots c_{\tau(n)}$.

Подалгебру алгебры A, порождённую её подмножеством X, будем обозначать через $\langle X \rangle$, а линейное подпространство, натянутое на множество X, — через $\mathrm{lin}_k\{X\}$. Символом $\oplus_k$ будем обозначать прямую сумму k-линейных пространств. Идеал алгебры A, порождённый подмножеством X, будем обозначать через $\mathrm{id}\langle X \rangle$. Отметим, что произвольный элемент $x \in \mathrm{id}\langle X \rangle$ можно записать как сумму следующего вида:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x^j a_1^j \ldots a_{r_j}^j, \quad x_i, x^j \in X,\ a_p^j \in A,\ \alpha_i, \beta_j \in k.$$

Линейная оболочка $\mathrm{lin}_k\{a \circ b \,|\, a, b \in A\}$ всех попарных произведений элементов алгебры A является её идеалом, который называется коммутантом алгебры A и обозначается через A^2. Центром алгебры A называется идеал $\mathrm{C}(A) = \{x \in A \,|\, x \circ a = 0 \ \forall\, a \in A\}$. Аналогично определяется централизатор произвольного подмножества X алгебры A: $\mathrm{C}_A(X) = \{a \in A \,|\, x \circ a = 0 \ \forall x \in X\}$. Идеал алгебры A, порождённый всеми элементами, входящими в нильпотентные идеалы алгебры A, называется радикалом Фиттинга и обозначается через $\mathrm{Fit}(A)$:

$$\mathrm{Fit}(A) \ = \ \mathrm{id}\ \langle x \in A \mid x \in I, \quad I \lhd A - \text{нильпотентный идеал} \rangle.$$

Через $\overline{a}$ мы будет обозначать образ элемента $a \in A$ в факторалгебре $A/\mathrm{Fit}(A)$.

Коммутант A^2 метабелевой алгебры Ли и её центр $\mathrm{C}(A)$ являются абелевыми идеалами, поэтому имеют место включения: $A^2 \subseteq \mathrm{Fit}(A)$, $\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$. Первое включение может быть строгим, например, для случая ненулевой абелевой алгебры Ли. Второе включение будет строгим, в частности, для свободной неабелевой метабелевой алгебры Ли F. Если A — ненулевая метабелева алгебра Ли, то $\mathrm{Fit}(A) \neq 0$.

Через $\mathfrak{M}$ мы будем обозначать многообразие метабелевых алгебр Ли над полем k и через $\mathfrak{M}'$ — подкласс метабелевых алгебр Ли, в которых радикал Фиттинга является абелевым идеалом. Класс $\mathfrak{M}'$ замкнут относительно конечных декартовых произведений (что нетрудно доказывается и будет сделано в следующей работе данного цикла), но не замкнут относительно взятия подалгебр (см. пример 4 ниже). В частности, класс $\mathfrak{M}'$ не является ни многообразием, ни квазимногообразием, ни предмногообразием.

1.2. **Радикал Фиттинга.** В цикле работ, включающих данную, мы часто будем апеллировать к радикалам Фиттинга различных метабелевых алгебр Ли, поэтому приведём удобное для дальнейшей работы описание радикала Фиттинга.

Лемма 1.1. *Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k. Тогда*

(1) *элемент $x \in A$ лежит в радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ тогда и только тогда, когда идеал $\mathrm{id}\langle x\rangle$ нильпотентен;*

(2) *радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ определяется так:*

$$\mathrm{Fit}(A) \;=\; \{x \in A \mid \exists\, m \in \mathbb{N} \quad ax^m = 0 \quad \forall\, a \in A\}.$$

Доказательство. Заметим, что идеал $\mathrm{id}\langle x\rangle$ нильпотентен тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число m, что $ax^m = 0$ для любого $a \in A$. Если идеал $\mathrm{id}\langle x\rangle$ нильпотентен, то $x \in \mathrm{Fit}(A)$ по определению. С другой стороны, по теореме Фиттинга конечная сумма нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом. Следовательно, условие $x \in \mathrm{Fit}(A)$ влечет существование в алгебре A такого нильпотентного идеала I, что $x \in I$. Отсюда получаем, что идеал $\mathrm{id}\langle x\rangle$ также нильпотентен. □

Следствие 1.1. *Если $a \circ x = 0$ для всех $a \in A^2$, то $x \in \mathrm{Fit}(A)$.*

Справедливое для любой метабелевой алгебры Ли A включение $\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$ имеет следующее уточнение в случае, если радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — абелев идеал алгебры A, то есть когда $A \in \mathfrak{M}'$.

Лемма 1.2. *Пусть $A \in \mathfrak{M}'$ и X — некоторое множество элементов алгебры A, такое, что $A = \mathrm{lin}_k\{X\} \oplus_k \mathrm{Fit}(A)$. Тогда имеет место равенство:* $\mathrm{C}(A) = \mathrm{C}_A(X) \cap \mathrm{Fit}(A)$.

Доказательство. Включение $\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{C}_A(X) \cap \mathrm{Fit}(A)$ очевидно. Докажем противоположное включение. Предположим, что $z \in \mathrm{Fit}(A)$ и $z \in \mathrm{C}_A(X)$. Представим произвольный элемент $a \in A$ в виде суммы $a = x + b$, где $x \in \mathrm{lin}_k\{X\}$ и $b \in \mathrm{Fit}(A)$. Тогда $z \circ a = z \circ b$. И так как по условию радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, то $z \circ b = 0$, поэтому $z \circ a = 0$ и $z \in \mathrm{C}(A)$. □

Далее почти все рассматриваемые нами алгебры будут принадлежать классу $\mathfrak{M}'$. Если $A \in \mathfrak{M}'$, то радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ допускает структуру модуля над кольцом многочленов, которая в значительной степени определяет структуру самой алгебры A. В следующем разделе опишем алгоритм определения модульной структуры на радикале Фиттинга.

1.3. **Структура модуля на радикале Фиттинга.** Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k и M — некоторый абелев идеал алгебры A, содержащий коммутант A^2. Ниже мы определим на идеале M структуру модуля над коммутативным кольцом многочленов.

Так как $A^2 \subseteq M$, то факторалгебра A/M абелева. Пусть $\rho : A/M \to A$ — произвольное сечение, то есть k-линейное отображение, такое, что $\rho(x) \in x+M$, $x \in A/M$.

Для любой подалгебры $V \leq A/M$ определим на M структуру V-модуля, положив

$$y \cdot x = y \circ \rho(x), \quad x \in V, \quad y \in M.$$

Поскольку M — абелев идеал алгебры A, то произведение $y \cdot x$ в действительности не зависит от выбора сечения ρ. Билинейность умножения $\cdot$ очевидна. Чтобы утверждать, что идеал M с операцией $\cdot$ есть V-модуль, осталось проверить справедливость тождества

$$(y \cdot x_1) \cdot x_2 - (y \cdot x_2) \cdot x_1 = 0, \quad x \in V, \quad y \in M.$$

Действительно, $(y \cdot x_1) \cdot x_2 - (y \cdot x_2) \cdot x_1 = \rho(x_2) \circ \rho(x_1) \circ y$ и $\rho(x_2) \circ \rho(x_1) \circ y = 0$, так как $A^2 \subseteq M$.

Структура V-модуля на идеале M определяет на нём структуру $U(V)$-модуля, где $U(V)$ — универсальная обёртывающая алгебры Ли V (см., например, [14]). Поскольку V — абелева алгебра Ли, то её универсальную обёртывающую $U(V)$ также называют симметрической алгеброй и обозначают через $S(V)$. Симметрическая алгебра $S(V)$ канонически изоморфна кольцу многочленов над полем k. Соответствующий изоморфизм устанавливается с помощью фиксации базиса линейного пространства V: пусть $X = \{x_i,\, i \in I\}$ — базис V и $R = k[\,x_i,\, i \in I\,]$ — кольцо многочленов, тогда отображение $x_i \to x_i$, $i \in I$, определяет изоморфизм $U(V) = S(V) \cong R$.

Таким образом, на идеале M определена структура модуля над кольцом многочленов R. Поскольку при определении R-модульной структуры мы фиксировали базис линейного пространства V, то возникает естественный вопрос: если $R' = k[\,x_i,\, i \in I\,]$ — кольцо многочленов, соотвествующее базису $X' = \{x'_i,\, i \in I\}$ пространства V, то как связаны между собой структуры R- и R'-модулей на идеале M? Чтобы ответить на поставленный вопрос, заметим, что разложение элементов базиса X' по базису X определяет k-линейный однородный изоморфизм колец многочленов $\varphi : R' \to R$. Тогда для любого элемента $y \in M$ справедливо равенство: $y \cdot f' = y \cdot \varphi(f')$, $f' \in R'$.

Замечание. Если алгебра A конечно порождена, то $\dim_k(A/M) < \infty$ и R — кольцо многочленов от конечного числа переменных, а идеал M как R-модуль конечно порождён.

Пример 1. Пусть радикал Фиттинга алгебры A абелев, то есть $A \in \mathfrak{M}'$, и $M = \mathrm{Fit}(A)$, а $V = A/\mathrm{Fit}(A)$. Тогда по алгоритму, описанному выше, на радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ определяется структура $U(V)$-модуля. Кольцо многочленов, канонически изоморфное алгебре $U(V)$, будем обозначать через R_A. Далее, говоря о радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как о модуле над кольцом многочленов, по умолчанию будем подразумевать структуру R_A-модуля.

Пример 2. Пусть снова $A \in \mathfrak{M}'$, $M = \mathrm{Fit}(A)$, а $V = D/\mathrm{Fit}(D)$, где D — подалгебра алгебры A. Предположим, что $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$ (пример 3 ниже показывает, что это включение может нарушаться). Тогда $D \in \mathfrak{M}'$ и $V \subseteq A/\mathrm{Fit}(A)$.

И поскольку $U(V) \cong R_D$, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ обладает структурой R_D-модуля. При этом действие кольца R_D на $\mathrm{Fit}(D)$ и $\mathrm{Fit}(A)$ определено так, что радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ является подмодулем R_D-модуля $\mathrm{Fit}(A)$.

Напомним, что аннулятором элемента y модуля M над кольцом R называется идеал $\mathrm{Ann}(y) = \{f \in R \,|\, y \cdot f = 0\}$, соответственно, аннулятором $\mathrm{Ann}(M)$ модуля M называется пересечение аннуляторов всех его элементов. Ассоциатором $\mathrm{Ass}(M)$ модуля M называется множество, состоящее из тех аннуляторов элементов модуля M, которые являются простыми идеалами кольца R.

Определение. Под *ассоциатором* $\mathrm{Ass}(A)$ (соответственно, *аннулятором* $\mathrm{Ann}(A)$) алгебры $A \in \mathfrak{M}'$ будем понимать ассоцииатор (соответственно, аннулятор) радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуля над кольцом многочленов R_A.

Таким образом, $\mathrm{Ann}(A)$ — это множество всех многочленов $f \in R_A$, таких, что $y \cdot f = 0$ для любого $y \in \mathrm{Fit}(A)$.

Лемма 1.3. *Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$. Тогда в аннуляторе* $\mathrm{Ann}(A)$ *не существует ненулевых линейных однородных многочленов кольца R_A.*

Доказательство. Допустим, что x — линейный однородный многочлен кольца R_A и $x \in \mathrm{Ann}(A)$. Тогда $y \circ \rho(x) = 0$ для любого $y \in \mathrm{Fit}(A)$. Согласно следствию 1.1, $\rho(x) \in \mathrm{Fit}(A)$, то есть x как многочлен кольца R_A равен нулю. □

1.4. **Радикал Фиттинга подалгебры.** Предположим, что A — метабелева алгебра Ли над полем k и D — подалгебра алгебры A. В этом разделе мы ответим на вопрос: как радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ соотносится с радикалом Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$?

Лемма 1.4. *Для любой подалгебры D метабелевой алгебры Ли A имеет место включение* $\mathrm{Fit}(D) \supseteq D \cap \mathrm{Fit}(A)$.

Доказательство. Пусть $x \in D \cap \mathrm{Fit}(A)$, тогда по лемме 1.1 существует такое натуральное число m, что $ax^m = 0$ для любого $a \in A$. В частности, $ax^m = 0$ для любого $a \in D$, следовательно, $x \in \mathrm{Fit}(D)$. □

Таким образом, равенство $\mathrm{Fit}(D) = D \cap \mathrm{Fit}(A)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$. В примере ниже показано, что последнее включение не всегда имеет место.

Пример 3. Предположим, что A — метабелева алгебра Ли и $A \neq \mathrm{Fit}(A)$. Выберем любой элемент $a \notin \mathrm{Fit}(A)$ и обозначим через D подалгебру алгебры A, порождённую элементом a. Тогда алгебра D является абелевой, следовательно, $\mathrm{Fit}(D) = D$. Но при этом $\mathrm{Fit}(D) \nsubseteq \mathrm{Fit}(A)$.

Чтобы сформулировать одно из достаточных условий для выполнения включения $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$, дадим следующее определение.

Определение. Пусть M — правый модуль над кольцом многочленов R. Кручение $y \cdot f = 0$ ($0 \neq y \in M$ и $0 \neq f \in R$) будем называть *линейным*, если f — линейный однородный многочлен кольца R. Соответственно, если в M нет таких кручений, то будем говорить, что M — модуль без линейного кручения.

Через $\mathrm{Lt}(M)$ будем обозначать подмножество элементов $y \in M$, для которых существует такой ненулевой линейный однородный многочлен $f \in R$, что $y \cdot f^m = 0$ для некоторого натурального числа m. Ясно, что модуль M не имеет линейного кручения тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lt}(M) = \{0\}$. Таким образом, ненулевые модули M над R без линейного кручения являются частными случаями модулей, для которых справедливо неравенство $M \neq \mathrm{Lt}(M)$. Последнее неравенство выделяет класс модулей, имеющий особое значение для дальнейших рассуждений. Это неравенство означает, что в модуле M найдётся такой ненулевой элемент y, что $y \cdot f^m \neq 0$ для любого ненулевого линейного однородного многочлена $f \in R$ и любого натурального числа m.

Лемма 1.5. *Пусть A — метабелева алгебра Ли, $A \in \mathfrak{M}'$, и D — её подалгебра. Допустим, что $\mathrm{Fit}(A) \neq \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$ и найдётся такой элемент $y \in \mathrm{Fit}(A) \setminus \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$, что $y \in D$. Тогда справедливо равенство $\mathrm{Fit}(D) = D \cap \mathrm{Fit}(A)$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$. Пусть $x \in D \setminus \mathrm{Fit}(A)$. По условию для любого натурального числа m произведение yx^m не равно нулю. Следовательно, $x \notin \mathrm{Fit}(D)$. □

Следствие 1.2. *Пусть A — метабелева алгебра Ли, $A \in \mathfrak{M}'$, причём радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет линейного кручения. Тогда для любой неабелевой подалгебры D алгебры A справедливо равенство $\mathrm{Fit}(D) = D \cap \mathrm{Fit}(A)$.*

Доказательство. Поскольку радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет линейного кручения, то $\mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A)) = \{0\}$. По условию алгебра D неабелева, поэтому найдутся такие элементы $y, z \in D$, что $y \circ z \neq 0$. Тогда $y \circ z \in D$ и $y \circ z \in \mathrm{Fit}(A) \setminus \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$, следовательно, по лемме 1.5, $\mathrm{Fit}(D) = D \cap \mathrm{Fit}(A)$. □

Пусть X — базис алгебры D по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$. Согласно лемме 1.4, имеет место включение $\mathrm{Fit}(D) \supseteq D \cap \mathrm{Fit}(A)$, следовательно, элементы множества X линейно независимы по модулю $\mathrm{Fit}(A)$. В том случае, когда множество X образует базис алгебры A по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, мы будем писать $R_D = R_A$.

Лемма 1.6. *Пусть D — подалгебра метабелевой алгебры Ли A и $R_D = R_A$. Тогда $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$.*

Доказательство. Действительно, произвольный элемент $d \in \mathrm{Fit}(D)$ представим в виде суммы $d = x + y$, где X — базис алгебры D по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ (и одновременно базис алгебры A по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$), а $y \in \mathrm{Fit}(A)$. Тогда $y = d - x \in D \cap \mathrm{Fit}(A)$, следовательно, по лемме 1.4, $y \in \mathrm{Fit}(D)$, и так как $d = x + y \in \mathrm{Fit}(D)$, то $x = 0$, то есть $d = y \in \mathrm{Fit}(A)$. □

Следствие 1.3. *Если $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_n$ — башня метабелевых алгебр Ли, причём $R_{A_1} = R_{A_n}$, то $\mathrm{Fit}(A_1) \subseteq \mathrm{Fit}(A_2) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Fit}(A_n)$.*

Доказательство. Пусть X_1 — базис алгебры A_1 по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A_1)$. По лемме 1.4 множество X_1 линейно независимо по модулю $\mathrm{Fit}(A_2)$, а значит, его можно дополнить до базиса X_2 алгебры A_2 по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A_2)$ и т. д. А так как по условию $X_1 = X_n$, то $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$, то есть $R_{A_1} = R_{A_2} = \ldots = R_{A_n}$. Отсюда получаем требуемое. □

1.5. **Система порождающих элементов и определяющих соотношений.** Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$. Зафиксируем базис $\{a_1, \ldots, a_r\}$ алгебры A по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ и систему $\{b_1, \ldots, b_l\}$ элементов радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, порождающих его как R-модуль, $R = R_A = k[x_1, \ldots, x_r]$. Тогда произвольный элемент $x \in A$ может быть записан в виде суммы:

$$x = (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r) + (b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l),\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in k,\ f_1, \ldots, f_l \in R.$$

Система элементов $\{a_1, \ldots, a_r\} \cup \{b_1, \ldots, b_l\}$ в работе [2] названа *канонической* системой порождающих алгебры A. Там же построена конечная система определяющих соотношений алгебры A, состоящая из соотношений трёх групп: I, II и III.

I группа соотношений выражает абелевость радикала Фиттинга:

$$b_i \circ b_j = 0, \quad b_i \circ a_s \circ b_j = 0, \quad i < j = 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, r.$$

II группа отражает соотношения радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуля над кольцом R. Каждое определяющее соотношение этой группы имеет вид:

$$b_1 \cdot f_1 + \ldots + b_l \cdot f_l = 0, \quad f_1, \ldots, f_l \in R.$$

Заменой переменных x_i на a_i, $i = \overline{1, r}$, по алгоритму, указанному в разделе 1.3, эта модульная запись переписывается в соотношение между каноническими порождающими алгебры A. Если алгебра A конечно порождена, то её радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов R конечно порождён, а поскольку R — нётерово кольцо, то $\mathrm{Fit}(A)$ — конечно определённый R-модуль, следовательно, в этом случае II группа соотношений алгебры A является конечным множеством.

III группа соотношений записывает тот факт, что для любой пары индексов (i, j) произведение $a_i \circ a_j$ принадлежит радикалу Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$:

$$a_i \circ a_j = b_1 \cdot g_{ij}^1 + \ldots + b_l \cdot g_{ij}^l, \quad i < j = 1, \ldots, r, \quad g_{ij}^1, \ldots, g_{ij}^l \in R.$$

Эти соотношения также необходимо переписать в сигнатуре метабелевых алгебр Ли.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли и радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев. Тогда канонические порождающие $a_1, \ldots, a_r$, $b_1, \ldots, b_l$ и описанные выше определяющие соотношения трёх групп, I, II и III, образуют представление алгебры A в категории всех метабелевых k-алгебр Ли.*

Замечание. Отметим, что такая же система порождающих элементов и определяющих соотношений может быть найдена и для бесконечно порождённой метабелевой алгебры Ли, но в этом случае любая из групп определяющих соотношений может оказаться бесконечной.

Как видно, модульная структура радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ вносит существенный вклад в структуру самой метабелевой алгебры Ли A. В следующем разделе покажем, как по данному модулю над кольцом многочленов построить метабелеву алгебру Ли.

1.6. **Расширения абелевых алгебр Ли.** Пусть V — абелева алгебра Ли над полем k, R — коммутативное кольцо многочленов, изоморфное универсальной обёртывающей $U(V)$ и M — правый модуль над алгеброй Ли V.

Напомним, что расширением V-модуля M при помощи абелевой алгебры Ли V называется точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} A \xrightarrow{\kappa} V \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где A — некоторая алгебра Ли над полем k, κ — гомоморфизм алгебр Ли, а ε — такое k-линейное отображение векторных пространств, что $\varepsilon(y) \circ a = \varepsilon(y \cdot \kappa(a))$ для любых $y \in M$ и $a \in A$ (см. [15]). Точность последовательности (1) означает, что κ — эпиморфизм, ε — мономорфизм и образ ε совпадает с ядром κ. Иногда расширением называют саму алгебру A (см. [12]). Например, любая метабелева алгебра Ли $A \in \mathfrak{M}'$ является расширением модуля $\mathrm{Fit}(A)$ с помощью абелевой алгебры Ли $A/\mathrm{Fit}(A)$. Вернёмся с общему случаю. Сечение $\rho : V \to A$ — это k-линейное вложение, такое, что $\kappa \circ \rho$ есть тождественное отображение пространства V в себя. Ясно что, для любого сечения $\rho : V \to A$ имеем изоморфизм k-линейных пространств $A \cong \rho(V) \oplus_k \varepsilon(M)$. Расширение A называется расщепляемым, если некоторое сечение $\rho : V \to A$ является гомоморфизмом алгебр Ли, другими словами, если образ $\rho(V)$ является абелевой подалгеброй алгебры A. Из того, что V есть абелева алгебра Ли и последовательность (1) точна, следует, что образ $\varepsilon(M)$ является абелевым идеалом алгебры A и $A^2 \subseteq \varepsilon(M)$, а отсюда, в частности, следует, что расширение A является метабелевой алгеброй Ли.

Отождествим M и V со своими изоморфными образами $\varepsilon(M)$ и $\rho(V)$, соответственно. Тогда расширение M с помощью V — это прямая сумма $V \oplus_k M$ линейных пространств с определённым образом заданным умножением. Причём, как видно из определения, умножение элементов из M друг на друга тривиально, умножение элементов из M на элементы из V однозначно определяется модульной структурой на M. Следовательно, два расширения могут отличаться только умножением элементов из V друг на друга, и это отличие определяется III группой соотношений из раздела 1.5. Так, расширение расщепляемо, если умножение элементов из V тривиально (при подходящем изоморфизме $V \cong \rho(V)$). Для описания расширений M с помощью V используют когомологический язык. Напомним необходимые определения, следуя [12].

Обозначим через $C^n(V, M)$ множество k-полилинейных кососимметричных отображений из $\underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n}$ в M, $n = 1, 2, \ldots$. Множество $C^n(V, M)$ является k-линейным пространством, а его элементы называются n-мерными коцепями со значениями в M. Отображение $\partial = \partial_n : C^n(V, M) \to C^{n+1}(V, M)$, задаваемое правилом

$$(\partial m)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} m(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) \cdot x_i, \quad m \in C^n(V, M),$$

называется оператором взятия кограницы. Элемент $m \in C^n(V, M)$ называется n-мерным коциклом, если $\partial m = 0$, и n-мерной кограницей, если найдётся коцепь $s \in C^{n-1}(V, M)$, такая, что $m = \partial s$. Множество n-мерных коциклов обозначается через $Z^n(V, M)$, а множество n-мерных кограниц — через $B^n(V, M)$. Имеет место равенство $\partial^2 = 0$, из которого следует, что $Z^n(V, M) \supseteq B^n(V, M)$.

Векторное факторпространство $H^n(V,M) = Z^n(V,M)/B^n(V,M)$ называется пространством n-мерных когомологий абелевой алгебры Ли V со значениями в V-модуле M. Два коцикла $m,s \in Z^n(V,M)$ называются когомологичными, если $m-s \in B^n(V,M)$.

Ниже для нас будут важны эти объекты только для случая $n=2$. Так, билинейное отображение $m: V\times V \to M$ является 2-коциклом, если

$$m(x_1,x_2)\cdot x_3 + m(x_2,x_3)\cdot x_1 + m(x_3,x_1)\cdot x_2 = 0 \quad \text{и} \quad m(x_1,x_2) = -m(x_2,x_1) \quad \text{для всех} \quad x_1,x_2,x_3 \in V.$$

Аналогично, билинейное отображение $m: V\times V \to M$ является 2-кограницей, если для некоторого линейного отображения $s: V \to M$

$$m(x_1,x_2) = s(x_2)\cdot x_1 - s(x_1)\cdot x_2 \quad \text{для всех} \quad x_1,x_2 \in V.$$

Каждому 2-коциклу m ставится в соответствие алгебра $V\oplus_m M$ — k-линейное пространство $V\oplus_k M$ с умножением

$$(x_1+y_1)\circ(x_2+y_2) = y_1\cdot x_2 - y_2\cdot x_1 + m(x_1,x_2), \quad x_1,x_2\in V,\ y_1,y_2\in M.$$

Лемма 1.8. *В обозначениях выше, $V\oplus_m M$ есть метабелева алгебра Ли, M — её абелев идеал, причём $(V\oplus_m M)^2 \subseteq M \subseteq \mathrm{Fit}(V\oplus_m M)$. Если $\dim_k V < \infty$ и модуль M конечно порождён над кольцом $R = U(V)$, то алгебра $V\oplus_m M$ конечно порождена.*

Доказательство. То, что $V\oplus_m M$ — метабелева алгебра Ли и M — её абелев идеал, содержащий коммутант, проверяется непосредственно. Включение $M\subseteq \mathrm{Fit}(V\oplus_m M)$ вытекает из следствия 1.1. Если $R = k[x_1,\dots,x_r]$ и Y — конечное множество, порождающее M как R-модуль, то множество $\{x_1,\dots,x_r\}\cup Y$ порождает алгебру $V\oplus_m M$. □

Далее, $V\oplus_k M$ — это расширение модуля M с помощью абелевой алгебры Ли V, и любое расширение можно построить таким образом (см. [12, теорема 1.6.8]). Расширение $V\oplus_m M$ расщепляемо тогда и только тогда, когда m есть 2-кограница. Если два коцикла m и s когомологичны, то расширения $V\oplus_m M$ и $V\oplus_s M$ изоморфны.

Отметим также, что разность $\delta = \rho_2 - \rho_1$ двух сечений $\rho_2: V\to V\oplus_m M$ и $\rho_1: V\to V\oplus_m M$ есть 1-коцепь $\delta: V\to M$, и наоборот, сумма $\rho_2 = \rho_1+\delta$ сечения $\rho_1: V\to V\oplus_m M$ и коцепи $\delta: V\to M$ есть сечение $\rho_2: V\to V\oplus_m M$.

Лемма 1.9. *Если в обозначениях выше $M\neq \mathrm{Lt}(M)$, то справедливо равенство $\mathrm{Fit}(V\oplus_m M) = M$. В этом случае $V\oplus_m M\in\mathfrak{M}'$ и $R_{V\oplus_m M} = R$.*

Доказательство. Справедливость включения $M\subseteq \mathrm{Fit}(V\oplus_m M)$ доказана в лемме 1.8. Докажем обратное включение $\mathrm{Fit}(V\oplus_m M)\subseteq M$. Предположим, что $x\in V\oplus_m M$ и $x\notin M$. Тогда для любого элемента $y\in M\setminus \mathrm{Lt}(M)$ и любого натурального числа m произведение yx^m не равно нулю. Следовательно, $x\notin \mathrm{Fit}(V\oplus_m M)$.

Так как $M^2=0$, то радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(V\oplus_m M)$ абелев, то есть $V\oplus_m M\in \mathfrak{M}'$. Поскольку алгебра $V\oplus_m M$ как k-линейное пространство раскладывается в прямую сумму подпространств V и M, то из равенства $\mathrm{Fit}(V\oplus_m M) = M$ следует, что линейный базис пространства V является максимальным линейно независимым по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(V\oplus_m M)$ множеством в алгебре $V\oplus_m M$, то есть $R_{V\oplus_m M} = R$. □

Замечание. Равенство $\mathrm{Fit}(V \oplus_m M) = M$ выполняется и в других случаях, но для нас важен только этот.

Следующий пример показывает, что класс $\mathfrak{M}'$ метабелевых алгебр Ли с абелевым радикалом Фиттинга не замкнут относительно взятия подалгебр.

Пример 4. Пусть $V = \mathrm{lin}_k\{x\}$ — одномерное линейное пространство, $R = k[x]$ — кольцо многочленов, T — свободный однопорождённый модуль над кольцом R с порождающим элементом t и M — однопорождённый модуль над R с порождающим элементом y и единственным определяющим соотношением $y \cdot x^n = 0$, где n — фиксированное натуральное число, $n > 1$. Через $T \oplus_R M$ будем обозначать прямую сумму R-модулей T и M, через B — расщепляемое расширение ($m \equiv 0$) модуля $T \oplus_R M$ с помощью аблелевой алгебры Ли V. Так как подмодуль модуля $T \oplus_R M$, порождённый элементом t, не имеет кручения, то $T \oplus_R M \neq \mathrm{Lt}(T \oplus_R M)$ и, по лемме 1.9, $B \in \mathfrak{M}'$. Обозначим через D подалгебру алгебры B, порождённую элементами x и y. Очевидно, что алгебра D является расщепляемым расширением модуля M с помощью линейного пространства V. Так как $y \cdot x \neq 0$, то алгебра D неабелева. Покажем, что при этом $D = \mathrm{Fit}(D)$. В силу леммы 1.8, $y \in \mathrm{Fit}(D)$. А так как в модуле M справедливо тождество $y \cdot x^n = 0$ и $D = \langle x, y\rangle$, то отсюда следует, что $x \in \mathrm{Fit}(D)$ (см. лемму 1.1). Таким образом, $D = \mathrm{Fit}(D)$, в частности, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ неабелев, то есть $D \notin \mathfrak{M}'$.

1.7. **Расширения радикала Фиттинга.** Этот раздел посвящён операции расширения метабелевой алгебры Ли A за счёт увеличения её радикала Фиттинга. Ниже описана общая схема таких расширений и два её наиболее важных частных случая. Всюду в этом разделе будем полагать, что $A \in \mathfrak{M}'$ — метабелева алгебра Ли над полем k, $V = A/\mathrm{Fit}(A)$ и $R = R_A = U(V)$.

Представим метабелеву алгебру A как расширение V-модуля $\mathrm{Fit}(A)$ с помощью абелевой алгебры Ли A:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fit}(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \xrightarrow{\kappa} V \longrightarrow 0.$$

Здесь ε — тождественное вложение и $\kappa : A \to A/\mathrm{Fit}(A)$ — канонический гомоморфизм.

Пусть N — правый модуль над кольцом многочленов R и $\mu : \mathrm{Fit}(A) \to N$ — гомоморфизм R-модулей. Для фиксированного сечения $\rho : V \to A$ определим 2-коцепь $m_\rho \in C^2(V, N)$ по правилу

$$m_\rho(x_1, x_2) = \mu(\rho(x_1) \circ \rho(x_2)), \quad x_1, x_2 \in V.$$

Поскольку

$$\mu(\rho(x_1) \circ \rho(x_2)) \cdot x_3 + \mu(\rho(x_2) \circ \rho(x_3)) \cdot x_1 + \mu(\rho(x_3) \circ \rho(x_1)) \cdot x_2 =$$
$$= \mu(\ \rho(x_1) \circ \rho(x_2) \circ \rho(x_3) + \rho(x_2) \circ \rho(x_3) \circ \rho(x_1) + \rho(x_3) \circ \rho(x_1) \circ \rho(x_2)\ ) = 0,$$

то m_ρ является 2-коциклом ($m_\rho \in Z^2(V, N)$).

Обозначим через $A \circ_\mu N$ расширение модуля N при помощи абелевой алгебры Ли V и коцикла m_ρ ($A \circ_\mu N = V \oplus_{m_\rho} N$). Структура алгебры $A \circ_\mu N$ не зависит от выбора сечения ρ, она полностью определяется структурой алгебры A, R-модуля M и модульного гомоморфизма μ.

Действительно, покажем, что коциклы m_{ρ_1} и m_{ρ_2}, соответствующие двум различным сечениям ρ_1 и ρ_2, когомологичны. Разность $\delta = \rho_1 - \rho_2$ двух сечений есть линейное отображение $\delta : V \to \mathrm{Fit}(A)$, следовательно, композиция $\mu \circ \delta$ есть линейное отображение $\mu \circ \delta : V \to N$, то есть $\mu \circ \delta \in C^1(V, N)$. Имеем

$$m_{\rho_1}(x_1, x_2) - m_{\rho_2}(x_1, x_2) = \mu(\rho_1(x_1) \circ \rho_1(x_2) - \rho_1(x_1) \circ \rho_1(x_2)) =$$
$$= \mu(\delta(x_2) \circ \rho_1(x_1) - \delta(x_1) \circ \rho_1(x_2) + \delta(x_1) \circ \delta(x_2)) = \mu(\delta(x_2)) \cdot x_1 - \mu(\delta(x_1)) \cdot x_2,$$

что даёт $m_{\rho_1} - m_{\rho_2} \in B^2(V, N)$, то есть коциклы m_{ρ_1} и m_{ρ_2} когомологичны. Отсюда следует, что алгебры $V \oplus_{m_{\rho_1}} N$ и $V \oplus_{m_{\rho_2}} N$ изоморфны.

Чтобы сформулировать следующую лемму, представим алгебру A как линейное пространство в виде прямой суммы подпространств:

$$A = \rho(V) \oplus_k \mathrm{Fit}(A).$$

Лемма 1.10. *В обозначениях выше, k-линейное отображение $\lambda : A \to A \circ_\mu N$, определённое правилом*

$$\lambda(a) = \overline{a}, \quad a \in \rho(V), \quad \lambda(b) = \mu(b), \quad b \in \mathrm{Fit}(A),$$

является гомоморфизмом алгебр Ли. Если μ — вложение, то и λ — вложение.

Доказательство. Чтобы доказать, что λ — гомоморфизм алгебр Ли, достаточно проверить, что под действием λ сохраняются определяющие соотношения алгебры A, приведённые в разделе 1.5. Соотношения I группы сохраняются, так как по лемме 1.8, N — абелев идеал алгебры $V \oplus_{m_\rho} N$. Соотношения II группы сохраняются, потому что μ — гомоморфизм R-модулей. Сохранение III группы соотношений следует из определения умножения в алгебре $V \oplus_{m_\rho} N$. Второе утверждение леммы доказывается непосредственно. □

Далее мы будем рассматривать только те алгебры $A \circ_\mu N$, в определении которых модульный гомоморфизм μ является вложением. В этом случае A вкладывается в $A \circ_\mu N$, поэтому алгебру $A \circ_\mu N$ будем называть расширением алгебры A.

Среди всех возможных расширений алгебры A вида $A \circ_\mu N$ выделим два частных случая, особо важных для дальнейших приложений. Первый — прямое расширение радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, второй — локализация радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$.

Прямое расширение. Возьмём правый модуль M над кольцом многочленов R. Пусть $\mathrm{Fit}(A) \oplus_R M$ — прямая сумма R-модулей и $\mu : \mathrm{Fit}(A) \to \mathrm{Fit}(A) \oplus_R M$ — естественное вложение. Алгебру $A \circ_\mu (\mathrm{Fit}(A) \oplus_R M)$ в этом случае будем обозначать через $A \oplus M$. Как следует из леммы 1.8, алгебра $A \oplus M$ конечно порождена, если конечно порождены модуль M и алгебра A.

Заметим, что алгебра $A \oplus M$, вообще говоря, не совпадает с прямой суммой алгебры Ли A и абелевой алгебры Ли M в обычном смысле. При этом алгебра $A \oplus M$ имеет естественную структуру: как векторное пространство она распадается в прямую сумму двух подпространств A и M, умножение элементов из A друг на друга такое же, как в алгебре A, умножение внутри $\mathrm{Fit}(A) \oplus M$ тривиально, а умножение элементов из M на элементы из A индуцируется модульной структурой на M.

Лемма 1.11. *Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$, и M — правый модуль над кольцом R_A. Если справедливо хотя бы одно из неравенств $\mathrm{Fit}(A) \neq \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$ или $M \neq \mathrm{Lt}(M)$, то*

(1) $\mathrm{Fit}(A \oplus M) = \mathrm{Fit}(A) \oplus_R M$ *и* $R_{A \oplus M} = R_A$;

(2) $A \oplus M \in \mathfrak{M}'$.

Кроме того, в этом случае для любой алгебры Ли D из башни $A \le D \le A \oplus M$ справедливы следующие утверждения:

(3) $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A \oplus M)$ *и* $R_A = R_D = R_{A\oplus M}$;

(4) $D \in \mathfrak{M}'$;

(5) *алгебра D имеет структуру алгебры $A \oplus N$ для некоторого подмодуля N модуля M.*

Доказательство. В предположениях данной леммы применима лемма 1.9, откуда имеем (1) и (2). Далее, (4) следует из (3), а (3) — из (1) и следствия 1.3. Чтобы показать (5), положим $N = \mathrm{Fit}(D) \cap M$. Тогда $\mathrm{Fit}(D) = \mathrm{Fit}(A) \oplus_R N$ и $D = A \oplus N$. □

Локализация. Следующий далее способ расширения алгебры A мы называем локализацией, заимствуя это понятие из коммутативной алгебры. Пусть p — простой идеал кольца многочленов R и R_p — локализация кольца R по идеалу p. Для любого модуля M над кольцом R через M_p будем обозначать локализацию модуля M по простому идеалу p кольца R и через μ_p канонический гомоморфизм R-модулей $\mu_p : M \to M_p$. Напомним, что ядро $\ker \mu_p$ состоит из тех элементов $y \in M$, для которых $\mathrm{Ann}(y) \not\subseteq p$. Обозначим через $M\langle p\rangle$ следующее подмножество R-модуля M:

$$M\langle p\rangle \;=\; \{y \in M \mid \mathrm{Ann}(y) \subseteq p\} \cup \{0\}, \quad p \lhd R.$$

Тогда равенство $M\langle p\rangle = M$ означает, что обображение $\mu_p : M \to M_p$ инъективно.

Алгебру $A_p = A \circ_{\mu_p} \mathrm{Fit}(A)_p$ будем называть *локализацией* алгебры A по простому идеалу p кольца R_A. Согласно лемме 1.10, если $\mathrm{Fit}(A)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A)$, то алгебра A вкладывается в алгебру A_p, то есть $A \le A_p$. В случае, когда p — нулевой идеал кольца R, будем использовать обозначения $\ddot{R}$, $\ddot{M}$, $\ddot{\mu}$, $\ddot{A}$ взамен соответствующих обозначений с индексом p.

Лемма 1.12. *Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$, и справедливо неравенство* $\mathrm{Fit}(A) \ne \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$. *Тогда для любого простого идеала p кольца многочленов R_A, такго, что* $\mathrm{Fit}(A)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A)$, *имеем*

(1) $\mathrm{Fit}(A_p) = \mathrm{Fit}(A)_p$ *и* $R_A = R_{A_p}$;

(2) $A_p \in \mathfrak{M}'$;

(3) $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(A_p)$ *и* $\mathrm{Fit}(A_p)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A_p)$.

Кроме того, в этом случае для любой алгебры Ли D из башни $A \le D \le A_p$ справедливы следующие утверждения:

(4) $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A_p)$ *и* $R_A = R_D = R_{A_p}$;

(5) $D \in \mathfrak{M}'$;

(6) $\mathrm{Fit}(D)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(D)$.

Доказательство. Так как $\mathrm{Fit}(A) \ne \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$ и $\mathrm{Fit}(A)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A)$, то $\mathrm{Fit}(A)_p \ne \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A)_p)$, в частности, применима лемма 1.9, из которой следуют (1) и (2). Из равенства $\mathrm{Fit}(A)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A)$ следует, что $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(A)_p$, а также $\mathrm{Fit}(A)_p\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A)_p$, что в сумме с (1) даёт (3).

Пункты (4) и (5) следуют из (1) и следствия 1.3. Равенство $\mathrm{Fit}(D)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(D)$ непосредственно следует из равенства $\mathrm{Fit}(A_p)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A_p)$. □

1.8. **Гомоморфизмы метабелевых алгебр Ли.** Предположим, что A и B — две метабелевы алгебры Ли над полем k. Напомним, что отображение $\lambda : A \to B$ является гомоморфизмом алгебр тогда и только тогда, когда λ — k-линейное отображение, удовлетворяющее тождеству $\lambda(a \circ b) = \lambda(a) \circ \lambda(b)$ для любых $a, b \in A$.

Нас интересует ответ на вопрос: в каких случаях справедливо включение $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$? Ясно, что если B — абелева алгебра, то $B = \mathrm{Fit}(B)$ и данное включение выполнено. Ниже следует пример, в котором, напротив, это включение нарушается.

Пример 5. Пусть A — одномерное линейное пространство с тривиальным умножением, $A = \mathrm{lin}_k\{a\}$, а B — неабелева метабелева алгебра Ли, причём $B \neq \mathrm{Fit}(B)$. Возьмём произвольный элемент $b \in B \setminus \mathrm{Fit}(B)$ и определим действие λ, положив $\lambda(a) = b$. Отображение λ естественным образом доопределяется до гомоморфизма алгебр Ли. Поскольку алгебра A абелева, она совпадает со своим радикалом Фиттинга, в частности, $a \in \mathrm{Fit}(A)$. Но при этом $\lambda(a) \notin \mathrm{Fit}(B)$.

Лемма 1.13. *Если отображение $\lambda : A \to B$ является эпиморфизмом метабелевых k-алгебр Ли A и B, то справедливо включение $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{Fit}(A)$ и $\lambda(a) = b$. Существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $ca^m = 0$ для любого $c \in A$. Взяв произвольный элемент $d \in B$, можно найти такой элемент $c \in A$, что $\lambda(c) = d$. Следовательно, $\lambda(ca^m) = \lambda(c)\lambda(a)^m = db^m = 0$. Таким образом, $b \in \mathrm{Fit}(B)$. □

Лемма 1.14. *Предположим, что $\lambda : A \to B$ — гомоморфизм метабелевых k-алгебр Ли, $A, B \in \mathfrak{M}'$, и существует такой элемент $b \in \mathrm{Fit}(A)$, образ которого $\lambda(b)$ лежит в радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(B)$, причём аннулятор $\mathrm{Ann}(\lambda(b))$ не содержит ни одного ненулевого линейного однородного многочлена кольца R_B. Тогда справедливо включение $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. Для любого элемента $y \in \mathrm{Fit}(A)$ имеем $b \circ y = 0$, следовательно, $\lambda(b) \circ \lambda(y) = 0$, то есть $\lambda(y) \in \mathrm{Ann}(\lambda(b))$, следовательно, $\lambda(y) \in \mathrm{Fit}(B)$. □

Следствие 1.4. *Пусть A и B — метабелевы k-алгебры Ли, $A, B \in \mathfrak{M}'$, причём радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(B)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет линейного кручения. Если $A^2 \nsubseteq \ker \lambda$, то справедливо включение $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. По условию найдутся такие два элемента $a, c \in A$, что $\lambda(a \circ c) \neq 0$. Тогда элемент $b = a \circ c$ удовлетворяет требованиям леммы 1.14. Следовательно, включение $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$ имеет место. □

Далее всюду в этом разделе будем полагать, что $A, B \in \mathfrak{M}'$. Представим алгебру A как расширение модуля $\mathrm{Fit}(A)$ с помощью абелевой алгебры Ли $A/\mathrm{Fit}(A)$, то же сделаем для алгебры B, записав обе точные последовательности строчками одной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fit}(B) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B/\mathrm{Fit}(B) & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (2)$$

Мы ставим перед собой следующую задачу: 1) выяснить, при каких условиях, имея заданный гомоморфизм алгебр Ли λ, можно построить k-линейные отображения μ и φ, так, чтобы диаграмма (2) была бы коммутативной; и наоборот, 2) при каких условиях, имея заданные k-линейные отображения μ и φ, можно построить гомоморфизм алгебр Ли λ, так, чтобы диаграмма (2) была бы коммутативной.

Коммутативность диаграммы (2) означает, что

- $\lambda(y) = \mu(y)$ для любого $y \in \mathrm{Fit}(A)$ и
- $\overline{\lambda(a)} = \varphi(\overline{a})$ для любого $a \in A$.

Сформулируем три условия, необходимые для коммутативности диаграммы (2) (их необходимость доказывается в лемме 1.15 ниже):

(C1) $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$;

(C2) $\mu(y \circ a) = \mu(y) \cdot \varphi(\overline{a})$, для любых $y \in \mathrm{Fit}(A)$, $a \in A$;

(C3) $\mu(\rho(x_1) \circ \rho(x_2)) - \varrho(\varphi(x_1)) \circ \varrho(\varphi(x_2)) \in B^2(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B))$ *для любых* сечений $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ и $\varrho : B/\mathrm{Fit}(B) \to B$.

Здесь $B^2(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B))$ — пространство 2-кограниц с коэффициентами в $\mathrm{Fit}(B)$ как в модуля над абелевой алгеброй Ли $A/\mathrm{Fit}(A)$. Структура $A/\mathrm{Fit}(A)$-модуля на $\mathrm{Fit}(B)$ определяется естественным образом: $y \cdot x = y \cdot \varphi(x)$, $y \in \mathrm{Fit}(B)$, $x \in A/\mathrm{Fit}(A)$. Запишем также слабую форму условия (C3):

(C3′) $\mu(\rho(x_1) \circ \rho(x_2)) - \varrho(\varphi(x_1)) \circ \varrho(\varphi(x_2)) \in B^2(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B))$ *для некоторых* сечений $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ и $\varrho : B/\mathrm{Fit}(B) \to B$.

Отметим, что при фиксированных сечениях ρ и ϱ условие (C3) записывается так: существует коцепь $s(x) \in C^1(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B))$ (то есть k-линейное отображение $s : A/\mathrm{Fit}(A) \to \mathrm{Fit}(B)$), такая, что

$$\mu(\rho(x_1) \circ \rho(x_2)) - \varrho(\varphi(x_1)) \circ \varrho(\varphi(x_2)) = s(x_2) \cdot \varphi(x_1) - s(x_1) \cdot \varphi(x_2) \tag{3}$$

для любых $x_1, x_2 \in A/\mathrm{Fit}(A)$.

Лемма 1.15. *Если диаграмма* (2) *коммутативна, то справедливы утверждения* (C1), (C2), (C3).

Доказательство. В самом деле, утверждение (C1) следует из того, что $\lambda(y) = \mu(y)$, $y \in \mathrm{Fit}(A)$. Проверим (C2): $\mu(y \circ a) = \lambda(y \circ a) = \lambda(y) \circ \lambda(a) = \mu(y) \cdot \overline{\lambda(a)} = \mu(y) \cdot \varphi(\overline{a})$.

Для доказательства (C3) в первую очередь покажем, что $s(x) = \varrho(\varphi(x)) - \lambda(\rho(x)) \in C^1(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B))$. Линейность отображения $s(x)$ следует из линейности отображений $\lambda, \rho, \varphi, \varrho$. Проверим, что $s(A/\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$. Пусть $x \in A/\mathrm{Fit}(A)$ и $\rho(x) = a$, $a \in A$. Тогда $\varphi(x) = \varphi(\overline{a}) = \overline{\lambda(a)}$, следовательно, $s(x) = \varrho(\overline{\lambda(a)}) - \lambda(a) \in \mathrm{Fit}(B)$. Таким образом, $s \in C^1(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B))$. Теперь требуемое равенство (3) непосредственно следует из трёх равенств: $\mu(\rho(x_1) \circ \rho(x_2)) = \lambda(\rho(x_1)) \circ \lambda(\rho(x_2))$ и $\lambda(\rho(x_i)) = \varrho(\varphi(x_i)) - s(x_i)$, $i = 1, 2$. □

Первый вопрос поставленной выше задачи о коммутативности диаграммы (2) разрешается просто с помощью следующей леммы.

Лемма 1.16. *Пусть* $A, B \in \mathfrak{M}'$ *— метабелевы алгебры Ли над полем* k *и* $\lambda : A \to B$ *— гомоморфизм алгебр Ли. Тогда условие* (C1) *является необходимым и достаточным для того, чтобы существовали* k*-линейные отображения* $\mu : \mathrm{Fit}(A) \to \mathrm{Fit}(B)$ *и* $\varphi : A/\mathrm{Fit}(A) \to B/\mathrm{Fit}(B)$*, делающие диаграмму* (2) *коммутативной.*

Доказательство. Необходимость включения $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$ обоснована в лемме 1.15. Покажем достаточность. Определим отображение μ как ограничение λ на радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, а отображение φ зададим правилом $\varphi(\overline{a}) = \overline{\lambda(a)}$, $a \in A$. При этом коммутативность диаграммы (2) очевидна. $\square$

Для дальнейших приложений нам удобно вывести отдельно одно следствие из леммы 1.16.

Следствие 1.5. *Пусть $A, B \in \mathfrak{M}'$ — метабелевы алгебры Ли над полем k и $\lambda : A \to B$ — эпиморфизм алгебр Ли. Тогда действие λ опускается до эпиморфизма линейных пространств $\varphi : A/\mathrm{Fit}(A) \to B/\mathrm{Fit}(B)$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.13 выполнено включение $\lambda(\mathrm{Fit}(A)) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$, и мы оказываемся в условиях леммы 1.16. $\square$

Следующая лемма даёт ответ на второй вопрос задачи о коммутативности диаграммы (2).

Лемма 1.17. *Пусть $A, B \in \mathfrak{M}'$ — метабелевы алгебры Ли над полем k, а $\mu : \mathrm{Fit}(A) \to \mathrm{Fit}(B)$ и $\varphi : A/\mathrm{Fit}(A) \to B/\mathrm{Fit}(B)$ — k-линейные отображения. Тогда необходимым и достаточным условием существования гомоморфизма $\lambda : A \to B$, делающего диаграмму (2) коммутативной, является выполнения условий (C2) и (C3′).*

При фиксированных сечениях $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ и $\varrho : B/\mathrm{Fit}(B) \to B$ искомый гомоморфизм λ как k-линейное отображение $\lambda : \rho(A/\mathrm{Fit}(A)) \oplus_k \mathrm{Fit}(A) \to B$ определяется правилом:

$$\lambda(b) = \mu(b), \quad b \in \mathrm{Fit}(A), \tag{4}$$

$$\lambda(a) = \varrho(\varphi(\overline{a})) - s(\overline{a}), \quad a \in \rho(A/\mathrm{Fit}(A)), \tag{5}$$

где $s(x)$ — коцепь из тождества (3).

Доказательство. Необходимость (C2) и (C3′) для коммутативности диаграммы (2) доказана в лемме 1.15. Проверим достаточность. Пусть утверждения (C2) и (C3′) истинны. Прежде всего, покажем, что определённое формулами (4), (5) k-линейное отображение λ является гомоморфизмом алгебр Ли, то есть $\lambda(a \circ b) = \lambda(a) \circ \lambda(b)$ для любых $a, b \in A$. Представим элементы a, b в виде сумм: $a = \rho(\overline{a}) + y$ и $b = \rho(\overline{b}) + z$, где $y, z \in \mathrm{Fit}(A)$. Тогда $a \circ b = \rho(\overline{a}) \circ \rho(\overline{b}) + y \circ b - z \circ a$. Следовательно,

$$\lambda(a \circ b) = \mu(\rho(\overline{a}) \circ \rho(\overline{b})) + \mu(y) \cdot \varphi(\overline{b}) - \mu(z) \cdot \varphi(\overline{a}).$$

По определению $\lambda(a) = \varrho(\varphi(\overline{a})) - s(\overline{a}) + \mu(y)$ и $\lambda(b) = \varrho(\varphi(\overline{b})) - s(\overline{b}) + \mu(z)$. Посчитаем $\lambda(a) \circ \lambda(b)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda(a) \circ \lambda(b) = \\
&\quad = \varrho(\varphi(\overline{a})) \circ \varrho(\varphi(\overline{b})) \; + \; s(\overline{b}) \cdot \varphi(\overline{a}) - s(\overline{a}) \cdot \varphi(\overline{b}) \; + \; \mu(y) \cdot \varphi(\overline{b}) - \mu(z) \cdot \varphi(\overline{a}) = \\
&\qquad\qquad = \mu(\rho(\overline{a}) \circ \rho(\overline{b})) + \mu(y) \cdot \varphi(\overline{b}) - \mu(z) \cdot \varphi(\overline{a}).
\end{aligned}$$

Итак, тождество $\lambda(a \circ b) = \lambda(a) \circ \lambda(b)$ доказано, и λ является гомоморфизмом алгебр Ли. Осталось проверить справедливость условий, определяющих коммутативность диаграммы (2): $\lambda(y) = \mu(y)$, $y \in \mathrm{Fit}(A)$, — по определению λ, и $\overline{\lambda(a)} = \overline{\lambda(\rho(\overline{a}) + y)} = \overline{\lambda(\rho(\overline{a}))} = \varphi(\overline{a})$, $a \in A$. $\square$

Следствие 1.6. *Если $\varphi \equiv 0$, то гомоморфизм алгебр Ли $\lambda : A \to B$, делающий диаграмму* (2) *коммутативной, существует в том и только том случае, когда $A^2 \subseteq \ker \mu$.*

В лемме 1.17 построен гомоморфизм алгебр Ли λ, делающий диаграмму (2) коммутативной, однако предложенное описание λ не всегда удобно для приложений, поэтому приведём определение гомоморфизма λ в более наглядной форме.

Следствие 1.7. *В обозначениях леммы 1.17 предположим, что $\{a_i, i \in I\}$ — максимальное семейство элементов алгебры A, линейно независимое по модулю $\mathrm{Fit}(A)$, и $\varphi(a_i)$ — некоторый зафиксированный прообраз элемента $\varphi(\overline{a}_i) \in B/\mathrm{Fit}(B)$ в алгебре B, $i \in I$. Если верно* (C2) *и существуют элементы $b_i \in \mathrm{Fit}(B)$, $i \in I$, такие, что*

$$\mu(a_i \circ a_j) - \varphi(a_i) \circ \varphi(a_j) = b_j \circ \varphi(a_i) - b_i \circ \varphi(a_j), \quad i, j \in I, \tag{6}$$

то k-линейное отображение $\lambda : A \to B$, определённое правилом

$$\lambda(a_i) = \varphi(a_i) - b_i, \quad i \in I, \quad \lambda(y) = \mu(y), \quad y \in \mathrm{Fit}(A),$$

является гомоморфизмом алгебр Ли.

В радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(B)$ не всегда существуют элементы b_i, $b \in I$, удовлетворяющих равенствам (6). Далее мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях такие элементы удаётся подобрать в надлежащем расширении B' алгебры B, а именно, в локализации B_p алгебры B по подходящему простому идеалу p кольца R_B. Напомним, что локализованная алгебра B_p является расширением алгебры B, если $\mathrm{Fit}(B)\langle p \rangle = \mathrm{Fit}(B)$. Если к тому же выполнено неравенство $\mathrm{Fit}(B) \neq \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(B))$, то по лемме 1.12, $\mathrm{Fit}(B) \subseteq \mathrm{Fit}(B_p)$ и $B/\mathrm{Fit}(B) = B_p/\mathrm{Fit}(B_p)$. В этом случае диаграмма (2) индуцирует диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \big\downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fit}(B) \subseteq \mathrm{Fit}(B_p)) & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & B_p/\mathrm{Fit}(B_p) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{7}$$

Лемма 1.18. *Пусть $A, B \in \mathfrak{M}'$ — метабелевы алгебры Ли над полем k, а $\mu : \mathrm{Fit}(A) \to \mathrm{Fit}(B)$ и $\varphi : A/\mathrm{Fit}(A) \to B/\mathrm{Fit}(B)$ — k-линейные отображения, причём верно* (C2). *Предположим также, что алгебра B обладает следующими свойствами:*

- *выполняется неравенство $\mathrm{Fit}(B) \neq \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(B))$ и*
- *существует такой простой идеал p кольца многочленов R_B, что $\mathrm{Fit}(B)\langle p \rangle = \mathrm{Fit}(B)$ и $\mathrm{Im}\,\varphi \nsubseteq p$ (то есть найдётся такой элемент $x_0 \in A/\mathrm{Fit}(A)$, что $\varphi(x_0) \notin p$).*

Тогда при фиксированных сечениях $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ и $\varrho : B/\mathrm{Fit}(B) \to B$ линейное отображение $\lambda : A \to B_p$, определённое формулами (4), (5), *где*

$$s(x) = \frac{\mu(\rho(x_0) \circ \rho(x)) - \varrho(\varphi(x_0)) \circ \varrho(\varphi(x)) - s(x_0) \cdot \varphi(x)}{\varphi(x_0)} \tag{8}$$

и $s(x_0) \in \mathrm{Fit}(B_p)$ — произвольный фиксированный элемент, является гомоморфизмом алгебр Ли, делающим диаграмму (7) *коммутативной.*

Доказательство. В силу леммы 1.17, достаточно показать, что $s : A/\mathrm{Fit}(A) \to \mathrm{Fit}(B_p)$ — кограница и верно тождество (3). Из линейности отображений $\rho, \mu, \varphi, \varrho$ следует, что $s(x)$ — линейное отображение из $A/\mathrm{Fit}(A)$ в локализованный модуль $\mathrm{Fit}(B)_p$. Однако, по лемме 1.12, справедливо равенство $\mathrm{Fit}(B)_p = \mathrm{Fit}(B_p)$, следовательно, $s(x) \in C^1(A/\mathrm{Fit}(A), \mathrm{Fit}(B_p))$. Проверим истинность тождества (3):

$$\begin{aligned}
&s(x_2)\cdot\varphi(x_1) - s(x_1)\cdot\varphi(x_2) = \\
&\quad = (\ (\ \mu(\rho(x_0)\circ\rho(x_2))\cdot\varphi(x_1) - \mu(\rho(x_0)\circ\rho(x_1))\cdot\varphi(x_2)\ ) - \\
&\quad - (\ \varrho(\varphi(x_0))\circ\varrho(\varphi(x_2))\cdot\varphi(x_1) - \varrho(\varphi(x_0))\circ\varrho(\varphi(x_1))\cdot\varphi(x_2)\ ) - \\
&\quad - (\ s(x_0)\cdot\varphi(x_2)\cdot\varphi(x_1) - s(x_0)\cdot\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)\ )\ )\ :\ \varphi(x_0) = (*)
\end{aligned}$$

К первой строчке этой цепочки применим тождество (C2), а третья строчка равна нулю, так как радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(B_p)$ абелев по лемме 1.12. Продолжим вычисление:

$$\begin{aligned}
&(*) = (\ (\ \mu(\rho(x_0)\circ\rho(x_2)\circ\rho(x_1) - \rho(x_0)\circ\rho(x_1)\circ\rho(x_2))\ ) - \\
&- (\ \varrho(\varphi(x_0))\circ\varrho(\varphi(x_2))\circ\varrho(\varphi(x_1)) - \varrho(\varphi(x_0))\circ\varrho(\varphi(x_1))\circ\varrho(\varphi(x_2))\ )\ )\ :\ \varphi(x_0) = \\
&= (\ \mu(\rho(x_1)\circ\rho(x_2)\circ\rho(x_0)) - \varrho(\varphi(x_1))\circ\varrho(\varphi(x_2))\circ\varrho(\varphi(x_0))\ )\ :\ \varphi(x_0) = \\
&= (\ \mu(\rho(x_1)\circ\rho(x_2))\cdot\varphi(x_0) - \varrho(\varphi(x_1))\circ\varrho(\varphi(x_2))\cdot\varphi(x_0)\ )\ :\ \varphi(x_0) = \\
&= \mu(\rho(x_1)\circ\rho(x_2)) - \varrho(\varphi(x_1))\circ\varrho(\varphi(x_2)),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемму 1.18 мы неоднократно будем использовать при решении так называемых “задач о построении гомоморфного образа”, речь о которых пойдёт в следующем разделе.

1.9. **Задача о построении гомоморфного образа.** При изучении алгебр из класса $\mathfrak{M}'$ возникает ряд естественных задач, в которых заданное отображение радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ на некоторый модуль M требуется поднять до гомоморфизма алгебр Ли, достроив при этом модуль M до подходящей метабелевой алгебры Ли. Дадим строгую формулировку проблем данного типа.

“ Задача о построении гомоморфного образа”. *Даны:*

1. *метабелева алгебра Ли A над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$;*
2. *абелева алгебра Ли V над полем k и k-линейный эпиморфизм $\varphi : A/\mathrm{Fit}(A) \to V$;*
3. *V-модуль M и k-линейный эпиморфизм $\mu : \mathrm{Fit}(A) \to M$, такой, что $\mu(y\cdot x) = \mu(y)\cdot\varphi(x)$ для любых $y \in \mathrm{Fit}(A)$ и $x \in A/\mathrm{Fit}(A)$.*

Требуется найти метабелеву алгебру Ли $D \in \mathfrak{M}'$ над полем k, такую, что $V = D/\mathrm{Fit}(D)$ и $M \subseteq \mathrm{Fit}(D)$, и эпиморфизм алгебр Ли $\lambda : A \to D$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
0 & \longrightarrow & M \subseteq \mathrm{Fit}(D) & \longrightarrow & D & \longrightarrow & V = D/\mathrm{Fit}(D) & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{9}$$

коммутативной.

Далее мы приведём некоторые достаточные условия, при которых “задача построения гомоморфного образа” разрешима. Предварительно введём некоторые обозначения.

Во-первых, положим $R = U(V)$ и будем смотреть на M как на модуль над кольцом многочленов R.

Во-вторых, зафиксируем два сечения: $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ и $\phi : V \to A/\mathrm{Fit}(A)$ ($\varphi \circ \phi$ — тождественное отображение V в себя). Композицию $\rho \circ \phi$ обозначим через τ. Для любых $y \in \mathrm{Fit}(A)$ и $x \in V$ имеем $\mu(y) \cdot x = \mu(y) \cdot \varphi(\phi(x)) = \mu(y \cdot \phi(x)) = \mu(y \circ \tau(x))$. Теперь определим коцикл $m \in Z^2(V, M)$:

$$m(x_1, x_2) = \mu(\tau(x_1) \circ \tau(x_2)), \quad x_1, x_2 \in V.$$

Доказательство того, что m действительно коцикл, такое же как доказательство для коцикла m_ρ из раздела 1.7.

В-третьих, положим $B = V \oplus_m M$ — расширение M с помощью абелевой алгебры Ли V и 2-коцикла m.

Предложение 1.19. *Если в обозначениях выше модуль M удовлетворяет условиям*

- *$M \neq \mathrm{Lt}(M)$ и*
- *в кольце R найдётся такой простой идеал p, что $M\langle p\rangle = M$ и $\mathrm{Im}\,\varphi \nsubseteq p$,*

то “задача о построении гомоморфного образа” имеет решение. Искомый гомоморфизм λ может быть найден как гомоморфизм $\lambda : A \to B_p$ из леммы 1.18, а искомая алгебра D есть образ $\lambda(A)$.

Доказательство. Во-первых, согласно лемме 1.9, $\mathrm{Fit}(B) = M$, $B \in \mathfrak{M}'$ и $R_B = U(V)$. Следовательно, по лемме 1.12, $M \subseteq \mathrm{Fit}(D)$, $R = R_D$ и $D \in \mathfrak{M}'$ для любой алгебры D из башни $B \leq D \leq B_p$. Таким образом, если $\lambda : A \to B_p$ — гомоморфизм алгебр Ли из леммы 1.18 и $D = \lambda(A)$, то пара (D, λ) доставляет решение “задачи о построении гомоморфного образа”. □

Итак, искомый гомоморфизм λ можно построить с помощью леммы 1.18, но эта леммы, по сути, предлагает целую серию гомоморфизмов, зависящих от параметров: от сечений $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ и $\varrho : B/\mathrm{Fit}(B) \to B$, от точки $x_0 \in A/\mathrm{Fit}(A)$ и фиксированного значения $s(x_0) \in \mathrm{Fit}(B_p)$. Далее мы построим пример гомоморфизма λ при некоторых фиксированных параметрах и опишем некоторые его свойства.

Сечение $\rho : A/\mathrm{Fit}(A) \to A$ уже зафиксировано выше. Отображение $\varrho : B/\mathrm{Fit}(B) \to B$ будем полагать тождественным: в данном случае $B/\mathrm{Fit}(B) = V$ и V — строго определённое подпространство алгебры B. Представим пространство $A/\mathrm{Fit}(A)$ в виде прямой суммы $A/\mathrm{Fit}(A) = \phi(V) \oplus_k \ker\varphi$. В качестве x_0 выберем произвольный элемент $x_0 \in \phi(V \setminus p)$ и положим $s(x_0) = 0$.

Посчитаем $s(x)$. Предположим сначала, что $x \in \phi(V)$. Найдутся такие элементы, $z, z_0 \in V$, что $x = \phi(z)$ и $x_0 = \phi(z_0)$. Умножение в алгебре B определено так, что $z \circ z_0 = \mu(\tau(z) \circ \tau(z_0))$, следовательно, $s(x) = (z \circ z_0 - \mu(\tau(z) \circ \tau(z_0))) : \varphi(x_0) = 0$. Пусть теперь $x \in \ker\varphi$, тогда $s(x) = \mu(\rho(x_0) \circ \rho(x)) : \varphi(x_0)$.

Оказывается, что определение кограницы $s(x)$ не зависит от выбора x_0, другими словами, для любого другого элемента $x_1 \in \phi(V \setminus p)$ имеем равенство

$$s(x) = \frac{\mu(\rho(x_0) \circ \rho(x))}{\varphi(x_0)} = \frac{\mu(\rho(x_1) \circ \rho(x))}{\varphi(x_1)}, \quad x \in \ker\varphi. \tag{10}$$

В самом деле, $\mu(\rho(x_0)\circ\rho(x))\cdot\varphi(x_1)-\mu(\rho(x_1)\circ\rho(x))\cdot\varphi(x_0) = \mu(\rho(x_0)\circ\rho(x_1))\cdot\varphi(x) = 0$. Так как $\varphi(x_0), \varphi(x_1) \notin p$ и аннулятор $\operatorname{Ann}(y)$ любого ненулевого элемента $y \in M_p$ содержится в идеале p, то имеем равенство (10).

Представим алгебру A как линейное пространство в виде прямой суммы своих подпространств:

$$A = U \oplus_k W \oplus_k \operatorname{Fit}(A),$$

где $U = \rho(\phi(V))$ и $W = \rho(\ker\varphi)$.

Следствие 1.8. *В предположениях предложения 1.19 и обозначениях выше, искомый гомоморфизм λ для "задачи о построении гомоморфного образа" может быть определён правилом:*

$$\lambda(y) = \mu(y), \quad y \in \operatorname{Fit}(A),$$

$$\lambda(u) = \varphi(\overline{u}), \quad u \in U,$$

$$\lambda(w) = \frac{\mu(w \circ u_0)}{\varphi(\overline{u}_0)}, \quad w \in W,$$

где u_0 — произвольный элемент из U, для которого $\varphi(\overline{u}_0) \notin p$.

Следствие 1.9. *В обозначениях выше, если элемент $a \in A$ принадлежит ядру $\ker\lambda$, то $a \in W \oplus_k \operatorname{Fit}(A)$.*

Следствие 1.10. *В обозначениях выше, $\mu(w_1 \circ w_2) = 0$ для любых $w_1, w_2 \in W$.*

Доказательство. Действительно, $\mu(w_1 \circ w_2) \cdot \varphi(\overline{u}_0) = \mu(u_0 \circ w_2) \cdot \varphi(\overline{w}_1) + \mu(w_1 \circ u_0) \cdot \varphi(\overline{w}_2) = 0$. □

Иногда "задачу о построении гомоморфного образа" удаётся решить без использования локализации. В этом случае искомая алгебра D совпадет с $V \oplus_m M$.

Следствие 1.11. *Если в предположениях предложения 1.19 и обозначениях выше для любого элемента $w \in W$ найдётся такой элемент $c_w \in \operatorname{Fit}(A)$, что $\mu(w \circ u_0) = \mu(c_w \circ u_0)$, то "задача построении гомоморфного образа" решается без использования локализации: $D = V \oplus_m M$ и искомый гомоморфизм алгебр Ли $\lambda : A \to D$ определяется правилом*

$$\lambda(y) = \mu(y), \quad y \in \operatorname{Fit}(A),$$

$$\lambda(u) = \varphi(\overline{u}), \quad u \in U,$$

$$\lambda(w) = \mu(c_w), \quad w \in W.$$

Замечание. Если $w \in W$ и существует такой элемент $c_w \in \operatorname{Fit}(A)$, что $\mu(w \circ u_0) = \mu(c_w \circ u_0)$ для некоторого $u_0 \in U$, такого, что $\varphi(\overline{u}_0) \notin p$. Тогда для любого $u \in U$, если $\varphi(\overline{u}) \notin p$, то $\mu(w \circ u) = \mu(c_w \circ u)$.

2. Метабелевы U-алгебры Ли и примарные метабелевы алгебры Ли

Следующее определение впервые было введено в препринте [5].

Определение. Метабелева алгебра Ли A над полем k называется *U-алгеброй*, если

(1) радикал Фиттинга $\operatorname{Fit}(A)$ абелев;
(2) $\operatorname{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет кручения.

Замечание. Несмотря на то, что модульная структура на радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ зависит от выбора базиса факторпространства $A/\mathrm{Fit}(A)$, свойство алгебры A “быть или не быть U-алгеброй” инвариантно относительно переходов к любым другим базисам. Действительно переход от одного базиса факторпространства $A/\mathrm{Fit}(A)$ к другому определяется с помощью k-линейного однородного автоморфизма кольца R_A (см. раздел 1.3), что, очевидно, не влияет на наличие или отсутствие кручения в R_A-модуле $\mathrm{Fit}(A)$.

Различают два типа метабелевых U-алгебр Ли над полем k:

(1) Абелевы алгебры Ли. В этом случае:
$$A = \mathrm{Fit}(A) = \mathrm{C}(A), \quad A^2 = 0 \quad \text{и} \quad R_A = k.$$

(2) Неабелевы U-алгебры. Для них справедливы обратные утверждения:
$$A \neq \mathrm{Fit}(A), \quad \mathrm{C}(A) = 0, \quad A^2 \neq 0 \quad \text{и} \quad R_A \neq k.$$

2.1. **Специальные матричные метабелевы алгебры Ли.** В работах В. А. Артамонова [16, 17] дано представление свободной метабелевой алгебры Ли в свободном модуле над кольцом многочленов. Отметим, что это представление есть вариация более общей конструкции А. Л. Шмелькина о вложении алгебр Ли специального типа в вербальное сплетение алгебр Ли [18]. В препринте [5] и статье [2] мы заимствовали идеи этих представлений для построения специальных матричных метабелевых алгебр Ли. Там же можно найти структурное описание U-алгебр на языке специальных матричных метабелевых алгебр Ли. Напомним вкратце, о чём идёт речь.

Пусть k — поле, K — коммутативное кольцо многочленов от переменных $\{x_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ с коэффициентами из поля k, T — правый свободный модуль над кольцом K с базой $\{t_i,\ i \in I\}$. Через $M_{I,\Lambda}$ обозначим множество специальных матриц:

$$M_{I,\Lambda} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle|\ u \in T,\ f \in K - \text{линейный однородный многочлен} \right\}.$$

Операции сигнатуры k-алгебр Ли на $M_{I,\Lambda}$ определяются следующим образом:

$$\alpha \cdot \left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \alpha \cdot f & \alpha \cdot u \\ 0 & 0 \end{array} \right), \alpha \in k;$$
$$\left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} g & v \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} f+g & u+v \\ 0 & 0 \end{array} \right);$$
$$\left(\begin{array}{cc} f & u \\ 0 & 0 \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{cc} g & v \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & u \cdot g - v \cdot f \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

Множество $M_{I,\Lambda}$ замкнуто относительно операций $" + "$, $" \circ "$, $"\alpha \cdot "$, $\alpha \in k$, и образует метабелеву k-алгебру Ли.

Определение. Алгебра A над полем k называется *специальной матричной метабелевой алгеброй Ли*, если она является подалгеброй алгебры $M_{I,\Lambda}$ для некоторых множеств I и Λ.

В работах [2, 5] доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Любая специальная матричная метабелева алгебра Ли является U-алгеброй. И наоборот, любая конечно порождённая U-алгебра является специальной матричной метабелевой алгеброй Ли.*

Теорема 2.2. *Пусть* $z_\lambda = \begin{pmatrix} x_\lambda & t_\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \Lambda$, *— элементы специальной матричной метабелевой алгебры Ли* $M_{\Lambda,\Lambda}$, *а* F_Λ *— подалгебра, порождённая этими элементами. Тогда* F_Λ *— свободная метабелева алгебра Ли над полем* k *со свободной базой* $\{z_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$.

Следствие 2.1. *Свободная метабелева алгебра Ли любого ранга является U-алгеброй.*

Представление U-алгебр в специальных матричных метабелевых алгебрах Ли доставляет один из способов описания U-алгебр. Кроме того, это представление выгодно тем, что в специальных матричных метабелевых алгебрах Ли удобно проводить вычисления. Например, в любой специальной матричной метабелевой алгебре Ли A просто вычисляется радикал Фиттинга: если алгебра A неабелева, то радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ состоит в точности из тех её элементов, матрицы которых имеют нулевую главную диагональ [2, лемма 3.1.1].

2.2. **Примарные метабелевы алгебры Ли.** В этом разделе мы вводим понятие примарной метабелевой алгебры Ли, которое обобщает понятие метабелевой U-алгебры Ли. Предварительно для избежания недоразумений договоримся об использовании термина “примарный модуль” из коммутативной алгебры.

Напомним, что подмодуль N модуля M над кольцом R называется *примарным подмодулем*, если $N \neq M$ и любой элемент $f \in R$ на фактормодуле M/N действует либо инъективно, либо нильпотентно. В определение примарного подмодуля заложено неравенство $N \neq M$, то есть про сам модуль M не говорят, что он примарен. Нам не удалось найти в литературе по коммутативной алгебре понятие *примарного модуля*, поэтому мы вводим соответствующий термин. Модуль M назовём *примарным*, если примарен его нулевой подмодуль 0, причём каждый элемент $f \in R$ и действует на M либо инъективно, либо тривиально. Дадим эквивалентную форму этого определения.

Определение. Модуль M над кольцом R будем называть *примарным*, если $M \neq 0$ и аннуляторы всех его ненулевых элементов совпадают и равны некоторому простому идеалу p кольца R. В этом случае $\mathrm{Ass}(M) = \{p\}$ и $\mathrm{Ann}(M) = p$. Будем говорить, что простой идеал p *ассоциирован* с модулем M.

Замечание. Требование простоты идеала p в определении выше излишее. Действительно, если $M \neq 0$ и аннуляторы всех ненулевых элементов модуля M совпадают, то соответствующий идеал обязан быть простым.

Существует следующее соответствие между примарными модулями и модулями без кручения. Если M — примарный модуль над кольцом R с ассоциированным простым идеалом p, то M обладает структурой R/p-модуля. Очевидно, что M как R/p-модуль не имеет кручения. С другой стороны, если N — модуль без кручения над кольцом R/p и $\varphi : R \to R/p$ — канонический эпиморфизм колец, то N со структурой R-модуля, определённой правилом:

$$y \cdot f = y \cdot \varphi(f), \quad y \in N, \quad f \in R,$$

является примарным модулем с ассоциированным идеалом p.

Определение. Метабелеву алгебру Ли A над полем k назовём *примарной*, если

(1) радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев;
(2) $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов является примарным.

Если p — идеал кольца R_A, ассоциированный с $\mathrm{Fit}(A)$, то также будем говорить, что идеал p *ассоциирован* с алгеброй A, и писать $\mathrm{Ass}(A) = \{p\}$ или $\mathrm{Ann}(A) = p$.

Замечание. Так как при автоморфизмах кольца многочленов R_A простые идеалы переходят в простые, определение примарной метабелевой алгебры Ли корректно, то есть не зависит от деталей определения модульной структуры на радикале Фиттинга.

Ясно, что любая метабелева U-алгебра Ли A является примарной. С U-алгеброй A ассоциирован нулевой идеал.

Лемма 2.3. *Пусть A — примарная метабелева алгебра Ли. Тогда радикал Фиттинга* $\mathrm{Fit}(A)$ *как модуль над кольцом многочленов не имеет линейного кручения.*

Доказательство. Допустим, что $0 \neq y \in \mathrm{Fit}(A)$, x — линейный однородный многочлен кольца R_A и $y \cdot x = 0$. Тогда $x \in \mathrm{Ann}(A)$, и, по лемме 1.3, x как многочлен кольца R_A равен нулю. □

Следствие 2.2. *Для любой примарной метабелевой алгебры Ли A справедливо неравенство* $\mathrm{Fit}(A) \neq \mathrm{Lt}(\mathrm{Fit}(A))$.

Следствие 2.3. *Пусть A — примарная метабелева алгебра Ли. Тогда* $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$. *Причём, если A — неабелева алгебра, то* $\mathrm{C}(A) = 0$.

Доказательство. Если A — абелева алгебра, то $A^2 = 0$. Если алгебра A неабелева, то $\mathrm{C}(A) = 0$. Действительно, в этом случае найдётся элемент $a \in A \setminus \mathrm{Fit}(A)$. Если $0 \neq x \in \mathrm{C}(A)$, то $x \in \mathrm{Fit}(A)$ и $x \circ a = 0$. Это противоречит тому, что в алгебре A отсутствует линейное кручение. □

Лемма 2.4. *Любая подалгебра примарной метабелевой алгебры Ли является примарной метабелевой алгеброй Ли. Любая подалгебра метабелевой U-алгебры Ли является метабелевой U-алгеброй Ли.*

Доказательство. Пусть A — примарная метабелева алгебра Ли, $\mathrm{Ann}(A) = p$, и D — подалгебра алгебры A. Если алгебра D абелева, то доказывать нечего. Если D — неабелева, то согласно следствию 1.2, справедливо включение $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$. Таким образом, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ абелев. Пример 2 показывает, что $\mathrm{Fit}(D)$ — это подмодуль радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как R_D-модуля. Покажем, что $\mathrm{Fit}(A)$ является примарным R_D-модулем. Пусть $0 \neq y \in \mathrm{Fit}(A)$, тогда тогда аннулятор $\mathrm{Ann}_{R_D}(y)$ является полным прообразом аннулятора $\mathrm{Ann}_{R_A}(y)$ при k-линейном однородном мономорфизме $\varphi : R_D \to R_A$, то есть $\mathrm{Ann}_{R_D}(y) = \varphi^{-1}(p)$. Прообраз $\varphi^{-1}(p)$ простого идеала p является простым идеалом. Таким образом, $\mathrm{Fit}(A)$ — примарный R_D-модуль, а следовательно, $\mathrm{Fit}(D)$, как подмодуль $\mathrm{Fit}(A)$, также примарен, откуда заключаем, что D — примарная метабелева алгебра Ли. В частности, если A — U-алгебра, то $p = 0$, следовательно, $\varphi^{-1}(p) = 0$ и D — U-алгебра. □

Докажем лемму, в которой решается полезная для дальнейших приложений задача о построении некоторого специального расширения конечно порождённой примарной метабелевой алгебры Ли.

Лемма 2.5. *Любая конечно порождённая примарная метабелева алгебра Ли A над полем k вкладывается в конечно порождённую примарную метабелеву алгебру Ли B над полем k, такую, что*

(1) $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(B), \quad R_A = R_B$;
(2) $\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(B)$;
(3) *радикал Фиттинга* $\mathrm{Fit}(B)$ *как* $R_B/\mathrm{Ann}(B)$*-модуль свободен.*

Доказательство. Пусть $R = R_A$ и $p = \mathrm{Ann}(A)$. Поскольку радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как R/p-модуль конечно порождён и не имеет кручения, то он вкладывается в некоторый свободный конечно порождённый модуль T над кольцом R/p. Пусть $\mu : M \to T$ — соответствующее R/p-вложение. По алгоритму, указанному выше, определим на T структуру R-модуля. Тогда T — примарный R-модуль и $\mathrm{Ann}(T) = p$, следовательно, отображение μ является также R-вложением.

Пусть $B = A \circ_\mu T$ — расширение алгебры A по схеме из раздела 1.7. По лемме 2.3 идеал p не содержит ненулевых линейных однородных многочленов, следовательно, T как R-модуль не имеет линейного кручения. Тогда, согласно лемме 1.9, $\mathrm{Fit}(B) = T$, $B \in \mathfrak{M}'$ и $R_B = R$. Таким образом, B — примарная метабелева алгебра Ли и $\mathrm{Ann}(B) = p$. Осталось лишь заметить, что по лемме 1.10, алгебра A вкладывается в алгебру B, причём $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(B)$. □

Согласно следствию 2.2, к любой примарной метабелевой алгебре Ли A применимы результаты раздела 1.7.

Утверждение 2.6. *Пусть A — примарная метабелева алгебра Ли над полем k и M — примарный модуль над кольцом многочленов R_A такой, что* $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(A)$. *Тогда алгебра $A \oplus M$ также является примарной, причём* $\mathrm{Ann}(A \oplus M) = \mathrm{Ann}(A)$. *В частности, если A — U-алгебра и M — модуль без кручения над кольцом многочленов R_A, то $A \oplus M$ — U-алгебра.*

Доказательство. Очевидно, что прямая сумма модулей $\mathrm{Fit}(A)$ и M является примарным модулем с ассоциированным идеалом $\mathrm{Ann}(A)$. Согласно лемме 1.11, $\mathrm{Fit}(A \oplus M) = \mathrm{Fit}(A) \oplus M$ и $A \oplus M \in \mathfrak{M}'$, следовательно, $A \oplus M$ — примарная метабелева алгебра Ли с ассоциированным идеалом $\mathrm{Ann}(A)$. □

Следствие 2.4. *В обозначениях утверждения 2.6 всякая алгебра D из башни $A \leq D \leq A \oplus M$ является примарной метабелевой алгеброй Ли, причём* $\mathrm{Ann}(D) = \mathrm{Ann}(A)$, *и имеет структуру алгебры $A \oplus N$ для некоторого подмодуля N модуля M.*

Доказательство. Требуемое следует из утверждения 2.6 и леммы 1.11. □

Утверждение 2.7. *Пусть A — примарная метабелева алгебра Ли над полем k и p — простой идеал кольца многочленов R_A, такой, что* $\mathrm{Ann}(A) \subseteq p$. *Тогда*

(1) *алгебра A является подалгеброй своей локализации A_p по идеалу p;*
(2) $\mathrm{Fit}(A) \subseteq \mathrm{Fit}(A_p) = \mathrm{Fit}(A)_p$ *и* $R_{A_p} = R_A$;
(3) A_p — *примарная метабелева алгебра Ли и* $\mathrm{Ann}(A_p) = \mathrm{Ann}(A)$.

В частности, если A — U-алгебра, то для любого простого идеала p кольца R_A локализованная алгебра A_p является U-алгеброй.

Доказательство. Так как $\mathrm{Ann}(A) \subseteq p$, то имеет место равенство $\mathrm{Fit}(A)\langle p\rangle = \mathrm{Fit}(A)$, следовательно, $A \leq A_p$ и справедливы все заключения леммы 1.12. Далее, так как $\mathrm{Fit}(A)$ — примарный модуль с ассоциированным идеалом $\mathrm{Ann}(A)$ и $\mathrm{Ann}(A) \subseteq p$, то, как нетрудно проверить, локализация $\mathrm{Fit}(A)_p$ также является примарным модулем над кольцом R_A с ассоциированным идеалом $\mathrm{Ann}(A)$. И поскольку $\mathrm{Fit}(A_p) = \mathrm{Fit}(A)_p$, заключаем, что A_p — примарная метабелева алгебра Ли, причём $\mathrm{Ann}(A_p) = \mathrm{Ann}(A)$. □

Следствие 2.5. *В предположениях утверждения 2.7 любая алгебра Ли D из башни $A \leq D \leq A_p$ является примарной метабелевой алгеброй Ли и* $\mathrm{Ann}(D) = \mathrm{Ann}(A)$.

Доказательство. Требуемое следует из утверждения 2.7 и леммы 1.12. □

2.3. **Задача о построении гомоморфного образа в примарной метабелевой алгебре Ли.** В разделе 1.9 сформулирована "задача о построении гомоморфного образа" и показано, что при некоторых дополнительных требованиях она имеет решение (предложение 1.19). Ниже мы рассмотрим два частных случаев этой задачи.

Под "задачей построения гомоморфного образа в примарной алгебре" будем понимать задачу из раздела 1.9 со следующими дополнительными условиями:

(1) $V \neq 0$;
(2) M *— примарный модуль без линейного кручения над кольцом* $U(V)$;
(3) *искомая алгебра D также должна быть примарной, причём* $\mathrm{Ann}(D) = \mathrm{Ann}(M)$.

Частным случаем последней задачи является "задача построения гомоморфного образа в U-алгебре", в которой дополнительным требованием является условие $\mathrm{Ann}(M) = 0$, то есть мы предполагаем, что данный модуль M не имеет кручения и ставим задачу поиска соответствующей метабелевой U-алгебры Ли D.

Утверждение 2.8. *"Задача о построении гомоморфного образа в примарной алгебре" всегда имеет решение.*

Доказательство. Ясно, что все требования предложения 1.19 выполнены, следовательно, справедливы и его выводы. Искомая метабелева алгебра Ли D является подалгеброй локализации B_p алгебры $B = V \oplus_m M$ по простому идеалу $p = \mathrm{Ann}(M)$. Согласно следствию 2.5, алгебра D является примарной и $\mathrm{Ann}(D) = p$. □

Следствие 2.6. *"Задача о построении гомоморфного образа в U-алгебре" всегда имеет решение.*

Список литературы

[1] Э. Ю. Даниярова, *Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли*, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2007), 8–39.

[2] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и универсальные классы*, Фундам. и прикл. мат., **9**: 3 (2003), 37–63.
http://mech.math.msu.su/~fpm/rus/k03/k033/k03304h.htm

[3] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли II: Случай конечного поля*, Фундам. и прикл. мат., **9**: 3 (2003), 65–87.
http://mech.math.msu.su/~fpm/rus/k03/k033/k03305h.htm

[4] Э. Ю. Даниярова, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли III: Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств*, Препринт, Омск: Изд-во ОмГУ, 130 с., 2005.

[5] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и A-модули*, Препринт №34, Омск: ОмГАУ, 25 с., 2001.

[6] E. Yu. Daniyarova, I. V. Kazatchkov, V. N. Remeslennikov, *Semidomains and metabelian product of metabelian Lie algebras*, J. Math. Sci., **131**: 6 (2005), 6015–6022.

[7] Э. Ю. Даниярова, *Q-идеалы в кольцах многочленов и Q-модули над кольцами многочленов*, Сибирские электронные математические известия, 2007.
http://semr.math.nsc.ru/v4/p64-84.pdf

[8] G. Baumslag, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and Ideal Theory*, J. Algebra, **219** (1999), 16–79.
http://ofim.okno.ru/~remesl/articles/algeom1.pdf

[9] A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups II: Logical Foundations*, J. Algebra, **234** (2000), 225–276.
http://ofim.okno.ru/~remesl/articles/algeom2.pdf

[10] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, Москва, 1968.

[11] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Мир, Москва, 1971.

[12] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, Москва, 1985.

[13] А. И. Ширшов, *Избранные труды, Кольца и алгебры*, Наука, Москва, 1984.

[14] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, Москва, 1969.

[15] А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, Иностранная литература, Москва, 1960.

[16] V. A. Artamonov, *The categories of free metabelian groups and Lie algebras*, Commentationes mathematicae universitatis Carolinae, **18**: 1 (1977), 142–159.

[17] В. А. Артамонов, *Проективные метабелевы алгебры Ли конечного ранга*, Изв. Акад. Наук СССР, сер. мат., **36** (1972), 510–522.

[18] А. Л. Шмелькин, *Сплетения алгебр Ли и их применение в теории групп*, Труды московского математического общества, **29** (1973), 247–260.

Даниярова Эвелина Юрьевна
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: evelina.omsk@list.ru