S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 387–406 (2008) УДК 512.542.7
MSC 20B15

О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНЫМ В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ

А. В. КОНЫГИН

Abstract. Let G be a primitive permutation group on a finite set X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{y\}$ and $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. It is proved that, if G is of type I, type III(a), type III(c) (of the O'Nan–Scott classification) or G is of type II and $\mathrm{soc}(G)$ is not an exceptional group of Lie type or a sporadic simple group, then $G_{x,y} = 1$. In addition, it is proved that if G is of type III(b) and $\mathrm{soc}(G)$ is not a direct product of exceptional groups of Lie type or sporadic simple groups, then $G_{x,y} = 1$.

Keywords: primitive permutation group, O'Nan–Scott classification.

1. Введение

Настоящая работа посвящена следующему вопросу П. Камерона (см. [5] и [1, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x (стабилизатор точки x в группе G) действует регулярно на орбите $G_x(y)$ (т.е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, то есть, что $|G_x| = |G_x(y)|$?

Можно показать (см. предложение 5 ниже), что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$, при условии $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, эквивалентно свойству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

Konygin, A.V., On primitive permutation groups.

Работа поддержана РФФИ (грант 06-01-00378).

Поступила 18 сентября 2008 г., опубликована 2 октября 2008г.

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной абстрактной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался давно. В отдельных частных случаях положительный ответ был получен в работах [11], [12] и [13]. Легко видеть, что для транзитивной группы подстановок ответ на аналогичный вопрос, вообще говоря, отрицательный.

Напомним (теорема О'Нэна — Скотта, см. [10]), что любая конечная примитивная группа подстановок подстановочно изоморфна группе одного из следующих типов.

I. Примитивные группы с абелевой регулярной нормальной подгруппой.

II. Примитивные почти простые группы. Напомним, что группа G называется почти простой, если $\mathrm{Inn}(T) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(T)$ для некоторой конечной простой неабелевой группы T.

III. Примитивные группы с неабелевым не простым цоколем. Среди групп этого типа различают группы типов III(a), III(b) и III(c).

III(a) (simple diagonal action). Пусть S_k — симметрическая группа степени $k \geq 2$, T — простая неабелева группа и $W = \{(a_1, \ldots, a_k).\pi \mid a_i \in \mathrm{Aut}(T),\ \pi \in S_k,\ a_i a_j^{-1} \in \mathrm{Inn}(T),\ i, j \in \{1, \ldots, k\}\} \leq \mathrm{Aut}(T)\mathrm{wr}S_k$. Тогда представление группы W левыми сдвигами на множестве левых смежных классов W по $W_x = \{(a, \ldots, a).\pi \mid a \in \mathrm{Aut}(T),\ \pi \in S_k\}$ является примитивным представлением степени $|T|^{k-1}$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(a), если $\mathrm{soc}(W) \leq G \leq W$ для некоторой группы W.

III(b) (product action). Пусть S_m — симметрическая группа степени $m \geq 2$ и H — примитивная группа типа II или III(a) на конечном множестве Y. Положим $W = H\mathrm{wr}S_m$. Группа W естественным образом действует на $X = Y^m$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(b), если $K^m \leq G \leq W$, где $K = \mathrm{soc}(H)$, и G транзитивно переставляет m множителей группы K^m.

III(c) (twisted wreath action). Конечная примитивная группа G имеет тип III(c), если обладает единственной неабелевой регулярной нормальной подгруппой.

В работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что либо G — группа типа* I, III(a) *или* III(c), *либо G — группа типа* II *с цоколем, не являющимся исключительной группой лиева типа или спорадической простой группой. Тогда для G имеет место свойство* **(Pr)**. *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Теорема 2. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа* III(b), *$m \geq 2$ и $\mathrm{soc}(H)$ не является исключительной группой лиева типа или спорадической простой группой. Тогда для G имеет место свойство* **(Pr)**. *В частности,* *для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

При доказательстве теорем 1 и 2 используется описание максимальных подгрупп конечных классических групп, полученное в [3] и усовершенствованное в [8].

2. Используемые обозначения и результаты

Для произвольной конечной группы G через $\mathrm{soc}(G)$ будем обозначать цоколь группы G и через $O_p(G)$ — наибольшую нормальную p-подгруппа группы G для простого числа p. В дальнейшем мы иногда отождествляем, полагаясь на контекст, $\mathrm{Inn}(T)$ с T для конечной простой неабелевой группы T. Для конечных простых групп используются стандартные обозначения (см. [2]).

Все максимальные подгруппы знакопеременной группы описаны в [9]. В частности, верно следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $G \in \{A_n, S_n\}$, $n \geq 5$ и M — максимальная подгруппа группы G. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) $M = (S_m \times S_k) \cap G$, $n = m + k, k < m$;
(2) $M = (S_m \mathrm{wr} S_k) \cap G$, $n = mk, m > 1, k > 1$;
(3) $M = AGL_k(p) \cap G$, $n = p^k$, p — *простое* ;
(4) $M = (T^k.(\mathrm{Out}(T) \times S_k)) \cap G$, T — *простая неабелева группа*, $k \geq 2$, $n = |T|^{k-1}$;
(5) $M = (S_m \mathrm{wr} S_k) \cap G$, $n = m^k, m \geq 5$ *и* $k > 1$;
(6) $T \trianglelefteq M \leq \mathrm{Aut}(T)$, T — *неабелева простая группа.*

Конечная почти простая группа G называется классической, если $\mathrm{soc}(G)$ изоморфен, по-крайней мере, одной из следующих групп: $PSL_n(q)$, $n \geq 2$, $q \geq 4$; $PSU_n(q)$, $n \geq 2$, $q \geq 3$; $PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$, $q \geq 3$; $P\Omega_{2m+1}(q)$, $n \geq 3$, q — нечетное число и $q \geq 5$; $P\Omega^+_{2m}(q)$, $n \geq 4$, $q \geq 4$; $P\Omega^-_{2m}(q)$, $n \geq 4$, $q \geq 4$; причем $q = p^k$, p — простое число и $k \geq 1$.

При этом группа G называется *особенной*, если выполняется одно из следующих условий:
(1) $\mathrm{soc}(G) = PSp_4(q)$, q — четное и G содержит графовый автоморфизм группы $PSp_4(q)$;
(2) $\mathrm{soc}(G) = P\Omega^+_8(q)$ и G содержит графовый автоморфизм группы $P\Omega^+_8(q)$ порядка, делящегося на 3.

Описание максимальных подгрупп конечных почти простых классических групп, не являющихся особенными, дано в [8]. Пусть G — конечная почти простая классическая группа, не являющаяся особенной. Пусть $T = \mathrm{soc}(G) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(T) = A$. Через $\Gamma = \Gamma(V, \mathbb{F}, \kappa)$ обозначим группу всех полулинейных преобразований сохраняющих форму, соответствующего группе G векторного пространства $V = V(n, q)$ над полем $\mathbb{F}$ с формой κ (см. [8, Ch.2]). В [8, Ch.4] для таких групп Γ определены классы подгрупп $C_1(\Gamma)$, ..., $C_8(\Gamma)$. Для произвольной подгруппы H группы Γ через $\overline{H}$ обозначим фактор-группу группы H по подгруппе содержащихся в H гомотетий. Для $1 \leq i \leq 8$ положим $C_i(A) = \{N_A(\overline{H}) \mid H \in C_i(\Gamma)\}$. Наконец, для $1 \leq i \leq 8$ положим $C_i(G) = \{\overline{H} \cap G \mid H \in C_i(\Gamma)\}$, если $G \leq \overline{\Gamma}$, и $C_i(G) = \{H \cap G \mid H \in C_i(A)\}$, если $G \not\leq \overline{\Gamma}$.

В [8, Ch. 3, Main Theorem] показано, что для произвольной почти простой классической группы G, не являющейся особенной, все ее максимальные подгруппы, не содержащие $\mathrm{soc}(G)$, содержатся в объединении классов $C_1(G)$, ..., $C_8(G)$, $S(G)$, где $S(G)$ — класс почти простых подгрупп группы G, удовлетворяющих некоторым условиям „неприводимости“(см. [8, с. 3-4]).

Пусть G — конечная почти простая классическая группа, не являющаяся особенной. Тогда для каждого $H \in \cup_{1 \leq i \leq 8} C_i(\Gamma)$ существуют соответствующие группы $H_G \in \cup_{1 \leq i \leq 8} C_i(G)$ для всех групп $T \trianglelefteq G \leq A$.

Для $1 \leq i \leq 8$ положим $C_i = \cup_{T \leq G \leq A} C_i(G)$. Каждый класс подгрупп C_i распадается на несколько подклассов, которые называются *типами* (см. [8, Ch.4]). Если $\mathbb{T}$ — тип в C_i и H элемент из $\mathbb{T}$, то будем говорить, что H *имеет тип* $\mathbb{T}$.

Справедливо (см. [8, Theorem 3.1.2], [8, Proposition 3.1.3]) следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть G — конечная почти простая классическая группа и $T = \mathrm{soc}(G)$. Предположим, что G не является особенной. Тогда либо $H_T = H_G \cap T$, либо H_T имеет тип $GL_1(q) \wr S_n$ в C_2.*

3. Предварительные результаты

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 3. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Если $G_x = G_y$, то $G_x = 1$ и G — циклическая группа простого порядка.*

Доказательство. Предположим, что $G_x = G_y$. Пусть g — такой элемент из G, что $g(x) = y$. Тогда $N_G(G_x) \geq \langle G_x, g \rangle = G$. Следовательно, $G_x = 1$, и предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X с цоколем T, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Если $T_x = T_y$, то $T_{x,y} = 1$.*

Доказательство. Предположим, что $T_x = T_y$. Тогда $T_{x,y} = T_x \trianglelefteq G_x$, $T_{x,y} = T_y \trianglelefteq G_y$ и $T_{x,y} \trianglelefteq \langle G_x, G_y \rangle = G$. Следовательно, $T_{x,y} = 1$, и предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что G_x действует регулярно на орбите $G_x(y)$. Тогда $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$.*

Доказательство. Справедливость предложения следует из совпадения $G_{x,y}$ с ядром действия G_x на $G_x(y)$.

Предложение 6. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Пусть $a \in G$ и $a(x) = y$. Если $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $G_{x,y} \cap aG_{x,y}a^{-1} \trianglelefteq G_{x,y}$.*

Доказательство. Действительно, пусть $h \in G_{x,y}$. Тогда $(G_{x,y} \cap (aG_{x,y}a^{-1}))^h = (G_{x,y})^h \cap (aG_{x,y}a^{-1})^h$. Поскольку $aG_{x,y}a^{-1} \trianglelefteq G_y$, то предложение доказано.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 7. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Предположим, что $H \trianglelefteq G_x$ и $H \trianglelefteq G_y$. Тогда $H = 1$.*

Предложение 8. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Пусть p — простое число. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $O_p(G_{x,y}) = 1$. В частности, $O_p(G_x) \cap G_{x,y} = 1$, $O_p(G_y) \cap G_{x,y} = 1$ и $[O_p(G_x), G_{x,y}] = 1$.*

Доказательство. Поскольку $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $O_p(G_{x,y}) = 1$ в случае, когда $O_p(G_x) = 1$. Предположим, что $O_p(G_x) \neq 1$ и $O_p(G_{x,y}) \neq 1$. Пусть $H = \langle O_p(G_{x,y}), O_p(G_y) \rangle = O_p(G_{x,y}) O_p(G_y)$. Если $O_p(G_y) \leq O_p(G_{x,y})$, то в силу $O_p(G_{x,y}) \leq O_p(G_x)$ имеем $O_p(G_y) \leq O_p(G_x)$ и, следовательно, $1 \neq O_p(G_x) = O_p(G_y)$, что невозможно. Таким образом, $O_p(G_{x,y}) \lneqq H$. В силу нормализаторного условия для p-группы H имеем $(N_H(O_p(G_{x,y})) \setminus O_p(G_{x,y})) \cap (O_p(G_y) \setminus O_p(G_{x,y})) \neq \emptyset$. Так как $(O_p(G_y) \setminus O_p(G_{x,y})) \cap G_x = \emptyset$, то $N_H(O_p(G_{x,y})) \setminus G_x \neq \emptyset$, вопреки $N_G(O_p(G_{x,y})) = G_x$. Противоречие. Таким образом, $O_p(G_{x,y}) = 1$. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$. Предположим, что $G_x \cong A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**) *(см. Введение).*

Доказательство. Предположим, что для группы G свойство (**Pr**) не выполняется. Тогда существует $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$.

Из 8 следует, что для произвольного простого числа p имеем $O_p(G_{x,y}) = 1$. Поскольку $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_x$, то $G_{x,y}$ содержит характеристическую подгруппу F, изоморфную группе T.

Пусть $a \in G$ и $a(x) = y$. Положим $H = G_{x,y} \cap aG_{x,y}a^{-1}$. Тогда, согласно предложению 6, $H \trianglelefteq G_{x,y}$. Далее, поскольку группа $G_y/aG_{x,y}a^{-1} \cong G_x/G_{x,y}$ является разрешимой, то $F \leq H$ и, следовательно, $F \trianglelefteq H$ (так как F характеристична в $G_{x,y}$).

Поскольку $aFa^{-1} \trianglelefteq aG_{x,y}a^{-1}$, то $F \cap aFa^{-1} \trianglelefteq H \cap aG_{x,y}a^{-1} = H$. В частности, $F \cap aFa^{-1} \trianglelefteq F$. Так как F — простая группа, то отсюда следует, что либо $F \cap aFa^{-1} = 1$, либо $F = aFa^{-1}$.

Если $F \cap aFa^{-1} = 1$, то $F \cong F/(F \cap aFa^{-1}) \lesssim G_y/aFa^{-1}$ и, следовательно, G_y/aFa^{-1} содержит подгруппу, изоморфную группе T, что противоречит структуре группы $G_y = aG_xa^{-1}$.

Если $F = aFa^{-1}$, то $G_y = N_G(aFa^{-1}) = N_G(F) = G_x$. Противоречие с предложением 3. Предложение доказано.

Непосредственным следствием гипотезы Шрайера, доказанной с использованием классификации конечных простых групп, является следующее

Предложение 10. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$. Тогда $G_x \cong (G_x \cap \mathrm{soc}(G)).D$ для некоторой разрешимой группы D.*

Предложение 11. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$. Предположим, что $G_x \cap \mathrm{soc}(G) \cong A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева* *группа. Тогда* $G_x \cong A.T.B.C$ *для некоторой разрешимой группы* C. (*В действительности, группа* C *изоморфна некоторой подгруппе из* $\mathrm{Out}(T)$.)

Доказательство. Следует из предложения 10.

Предложение 12. *Пусть* G — *примитивная группа подстановок на конечном множестве* X, $x \in X$. *Предположим, что* $G_x \cong A.H^k.B.S$, *где* A, B — *разрешимые группы,* H — *почти простая группа с цоколем* T, $k \geq 2$ *и* $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ *и* S *действует точно на изоморфных* T *множителях группы* $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$. *Тогда для группы* G *выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Предположим, что для группы G свойство (**Pr**) не выполняется. Тогда существует $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. В силу предложения 8 имеем $O_p(G_{x,y}) = 1$ для любого простого p и, следовательно, $G_{x,y} \cap A = 1$.

Если $G_{x,y} \cap A.H^k = 1$, то $G_{x,y}$ действует на изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$ тривиально, причем, $G_{x,y} \lesssim G_x/(A.H^k) \cong B.S$. Поскольку $O_p(G_{x,y}) = 1$ для любого простого p, то $G_{x,y} \lesssim S$. Так как S действует на изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$ точно, то получаем противоречие. Следовательно, $G_{x,y} \cap A.H^k \neq 1$. С учетом транзитивности действия S на изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$ группа $G_{x,y}$ содержит характеристическую в $A.H^k$ подгруппу $F \cong T^k$.

Пусть $a \in G$ и $a(x) = y$. Поскольку в силу $F \trianglelefteq G_x$ имеем $F \cap aFa^{-1} \trianglelefteq F$, то $F \cap aFa^{-1} \cong T^m$ для некоторого $m \leq k$. Тогда $F/(F \cap aFa^{-1})$ действует точно на $k - m$ изоморфных T множителях $aFa^{-1}/(F \cap aFa^{-1})$ и действует тривиально на m изоморфных T множителях $F \cap aFa^{-1}$. Следовательно, $T^{k-m} \lesssim S_{k-m}$, что невозможно (следует, например, в силу [6] и [4] из сравнения максимальных порядков максимальных абелевых 2-подгрупп).

Предложение доказано.

Предложение 13. *Пусть* G — *примитивная группа подстановок на конечном множестве* X *с регулярной нормальной подгруппой* N *и* $x \in X$. *Тогда* G_x *действует точно на каждой* G_x*-орбите, отличной от* $\{x\}$. *В частности, для группы* G *имеет место свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $y \in X \setminus \{x\}$. Положим $M = \{h \in N \mid h(x) \in G_x(y)\}$.

Покажем, что $N = \langle M \rangle$. Действительно, поскольку $\langle M \rangle$ является G_x-инвариантной подгруппой и $G = \langle M, G_x \rangle$, то $\langle M \rangle \trianglelefteq G$. Тогда $N = \langle M \rangle N_x = \langle M \rangle$.

Покажем, что G_x действует точно на $G_x(y)$. Предположим, что $g \in G_x$ и $g(z) = z$ для всех $z \in G_x(y)$. Пусть $h \in M$. Так как $N \trianglelefteq G$, то $[g, h] \in N$. С другой стороны, в силу выбора g имеем $[g, h] = g^{-1}(h^{-1}gh) \in G_x$. Таким образом, $[g, h] = 1$ для произвольного $h \in M$. Следовательно, в силу равенства $N = \langle M \rangle$ имеем $[g, N] = [g, \langle M \rangle] = 1$. Таким образом, $g \in C_G(N) \cap G_x$. Поскольку N транзитивна, отсюда следует $g = 1$. Предложение доказано.

4. Группы типов I и III(c)

В этом параграфе устанавливается справедливость свойства (**Pr**) для примитивных групп типа I и типа III(c).

Предложение 14. *Пусть G — примитивная группа типа* I *или типа* III(c). *Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Если G — примитивная группа типа I или типа III(c), то $\mathrm{soc}(G)$ действует регулярно, и предложение следует из 13.

Замечание. Аналогичные рассуждения позволяют доказать справедливость свойства (**Pr**) для некоторых групп типа III(a). В параграфе 5 будет доказана справедливость гипотезы для всех групп типа III(a).

5. Группы типа III(a)

В этом параграфе устанавливается справедливость свойства (**Pr**) для примитивных групп типа III(a).

Пусть G — примитивная группа типа III(a) на конечном множестве X. Напомним, что тогда $G \leq W \leq Sym(X)$, где $W = \{(a_1, \ \dots, \ a_k).\pi \mid a_i \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k, \ a_i a_j^{-1} \in \mathrm{Inn}(T), \ i,j \in \{1,\dots,k\}\} \cong T^k.(\mathrm{Out}(T) \times S_k)$, T — простая неабелева, $k \geq 2$ и элементы $\pi \in S_k$ переставляют естественным образом компоненты a_i. Кроме того, $W_x = \{(a, \ \dots, \ a).\pi \mid a \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k\} \cong \mathrm{Aut}(T) \times S_k$ для $x \in X$. Положим $\mathcal{T}$ — множество изоморфных T множителей группы T^k. Тогда $T^k \leq G$ и либо G действует примитивно на $\mathcal{T}$, либо $k = 2$ и G действует тривиально на $\mathcal{T}$.

Элементами множества X являются левые смежные классы $(x_1, \dots, x_k).1G_x$, где $x_1, \dots, x_k \in \mathrm{Inn}(T)$, которые нам будет удобно обозначать через $[x_1, \dots, x_k]$ (следовательно, $[x_1, \dots, x_k] = [x'_1, \dots, x'_k]$ тогда и только тогда, когда $x_i^{-1}x'_i = x_j^{-1}x'_j$ для всех $i, j \in \{1, \ \dots, \ k\}$). В этих обозначениях для $g = (g_1, \ \dots, \ g_k).\sigma \in W$ и $[x_1, \dots, x_k] \in X$ имеем

$$g([x_1, \dots, x_k]) = [g_1 x_{\sigma(1)}, \dots, g_k x_{\sigma(k)}] = [1, g_2 x_{\sigma(2)} x_{\sigma(1)}^{-1} g_1^{-1}, \dots, g_k x_{\sigma(k)} x_{\sigma(1)}^{-1} g_1^{-1}].$$

Предложение 15. *Пусть G — примитивная группа типа* III(a) *на конечном множестве X. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Предположим, что для группы G свойство (**Pr**) не выполняется. Тогда существуют $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Без ограничения общности можно считать, что $x = [1, ..., 1]$, $y = [y_1, ..., y_k]$, $y_i \in T$ и $y_1 = 1$. Положим, $D = \{(a, ..., a).1 \mid a \in \mathrm{Aut}(T)\} \trianglelefteq W_x$, $S = \{(1, ..., 1).\pi \mid \pi \in S_k\} \trianglelefteq W_x$ и $C = D \cap G_{x,y}$. Пусть, кроме того, $A = \{a' \in \mathrm{Aut}(T) \mid (a', ..., a').1 \in C\}$. Так как $C^{\mathrm{soc}(D)} = D^{\mathrm{soc}(D)} \cap G_{x,y}^{\mathrm{soc}(D)} \subseteq D \cap G_{x,y}^{G_x} = C$, то $\mathrm{soc}(D)$ нормализует C.

Покажем, что $C = 1$. Пусть $(a, ..., a).1$ — произвольный элемент из C. Поскольку $\mathrm{soc}(D)$ нормализует C, то для произвольного $t \in T$ имеем $(a^t, ..., a^t).1 = (a, ..., a).1^{(t,...,t).1} \in G_{x,y}$. Следовательно, $[y_1, ..., y_k] = (a^t, ..., a^t).1([y_1, ..., y_k]) = [a^t y_1, ..., a^t y_k]$. Таким образом, для всех $1 \leq i \leq k$ и $t \in T$ имеем $y_i = a^t y_i (a^t)^{-1}$. Следовательно, $A \leq \cap_{1 \leq i \leq k} C_{\mathrm{Aut}(T)}(y_i)$ и $A^t = A$ для всех $t \in T$. Так как $A \cap T \trianglelefteq T$, то либо $A \cap T = 1$, либо $A \cap T = T$. Поскольку $A \cap T = T$ в силу $A \leq \cap_{1 \leq i \leq k} C_{\mathrm{Aut}(T)}(y_i)$ влечет $y_i = 1$ для всех $1 \leq i \leq k$, что невозможно, то $A \cap T = 1$. Так как T нормализует A, то, кроме того, $A \trianglelefteq \langle T, A \rangle \leq \mathrm{Aut}(T)$. Следовательно, $A = 1$, и потому $C = 1$.

Покажем, что $G_{x,y} \leq S$. Поскольку G_x нормализует $G_{x,y}$ и $G_{x,y} \cap D = C = 1$, то $[G_{x,y}, \mathrm{soc}(D)] = 1$. Следовательно, $G_{x,y} \leq C_{G_x}(\mathrm{soc}(D)) \leq C_{W_x}(\mathrm{soc}(D)) = S$.

Если $k = 2$, то группа $G_{x,y}$ (как подгруппа группы $S \cong S_2$) разрешима, что противоречит предложению 8.

Если $k \neq 2$, то G действует примитивно на $\mathcal{T}$. Так как T^k попадает в ядро действия G на $\mathcal{T}$ и $G = T^k G_x$, то G_x также действует примитивно на $\mathcal{T}$. В силу $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ группа $G_{x,y}$ действует на $\mathcal{T}$ либо транзитивно, либо тривиально. Если $G_{x,y}$ действует на $\mathcal{T}$ тривиально, то в силу $G_{x,y} \leq S$ имеем $G_{x,y} = 1$. Противоречие. Если $G_{x,y}$ действует на $\mathcal{T}$ транзитивно, то в силу $G_{x,y} \leq S$ имеем $y_i = y_j$ для всех $i, j \in \{1, ..., k\}$, т.е. $x = y$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

6. Случай групп типа III(b)

Пусть G — примитивная группа подстановок типа III(b). Напомним, что в этом случае $G \leq W$, где $W = H \mathrm{wr} S_m$, $m \geq 2$, H — примитивная группа подстановок типов II или III(a) причем G действует транзитивно на m множителях произведения $\mathrm{soc}(H)^m \leq G$. Заметим, что в силу транзитивности $\mathrm{soc}(H)^m$ на X группы G_x и G индуцируют на m множителях произведения $\mathrm{soc}(H)^m$ одну и ту же (транзитивную) группу подстановок.

В этом параграфе доказывается справедливость свойства (**Pr**) для группы G в случае, когда группа H является примитивной группой типа III(a). Если H является примитивной группой типа II, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G сводится к справедливости свойства (**Pr+**) для группы H.

Предложение 16. *Пусть G — примитивная группа подстановок типа* III(b) *на множестве X и H — примитивная группа подстановок типа* III(a) (*см. обозначения выше*). *Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что стабилизатор группы G при действии на m множителях $\mathrm{soc}(H)^m$ совпадает с H^m. Предположим, что для группы G свойство (**Pr**) не выполняется и $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ для $x = (x_1, ..., x_m) \in X$ и $y = (y_1, ..., y_m) \in X \setminus \{x\}$.

Если $G_{x,y}$ действует на m множителях $\mathrm{soc}(H)^m$, изоморфных H, тривиально, то нормальность $G_{x,y}$ в G_x означает нормальность H_{x_i,y_i} в H_{x_i} для произвольного $1 \leq i \leq m$. В силу 15 имеем $H_{x_i,y_i} = 1$ для всех $1 \leq i \leq m$. Противоречие с условием $G_{x,y} \neq 1$.

Таким образом, $G_{x,y}$ действует на m множителях $\mathrm{soc}(H)^m$ нетривиально. Положим $D := G_x \cap \mathrm{soc}(H)^m \cong T^m$. Покажем, что $D \leq G_{x,y}$. Действительно, если $D \cap G_{x,y} = 1$, то в силу $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $D \trianglelefteq G_x$ имеем $[D, G_{x,y}] = 1$, что противоречит нетривиальности действия $G_{x,y}$ на m множителях $\mathrm{soc}(H)^m$. Поэтому $D \cap G_{x,y} \cong T^j$ для $1 \leq j \leq m$. Поскольку G_x нормализует $G_{x,y}$ и действует транзитивно на m множителях $\mathrm{soc}(H)^m$, то $D \leq G_{x,y}$. В частности, для всех $1 \leq i \leq m$ группа H_{x_i,y_i} содержит подгруппу $H_{x_i} \cap \mathrm{soc}(H) \cong T$. Таким образом, если $1 \leq i \leq m$, $x_i = [1, ..., 1]$ и $y_i = [y_{i,1}, ..., y_{i,k}]$, $y_{i,j} \in \mathrm{Aut}(T)$, причем $y_{i,1} = 1$, то для произвольных $1 \leq j \leq k$ и $t = (t', ..., t') \in H_{x_i} \cap \mathrm{soc}(H)$, $t' \in T$ имеем $y_{i,j} = t' y_{i,j} t'^{-1}$. То есть $y_{i,j}$ действует тривиально на T и, следовательно, $y_{i,j} = 1$. Тогда $x = y$. Противоречие.

Пусть H — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве Y и $T = \mathrm{soc}(H)$. Будем говорить, что для группы подстановок H выполняется **свойство (Pr+)**, если *для произвольных $x \in Y$ и $y \in Y \setminus \{x\}$ из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $O_r(T_{x,y}) = 1$ для произвольного простого числа r*

следует $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$. Заметим, что если T действует примитивно на Y (другими словами, если для $x \in Y$ подгруппа T_x является максимальной), то из справедливости для группы T свойства (**Pr**) следует справедливость для групп T и H свойства (**Pr**+).

Предложение 17. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что для группы G выполняется свойство* (**Pr**+). *Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Положим $T := \mathrm{soc}(G)$. Покажем, что группы G выполняется свойство (**Pr**), то есть, что для всех $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ из $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ следует $G_{x,y} = 1$. Предположим противное. Тогда для некоторых $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ имеем $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. и, следовательно, $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$. В силу предложения 8 для произвольного простого числа r имеем $O_r(G_{x,y}) = 1$ и, следовательно, $O_r(T_{x,y}) = 1$. Из справедливости свойства (**Pr**+) для группы G следует, что $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$.

Покажем, что $T_{x,y} = 1$. Поскольку $T_{x,y} = G_{x,y} \cap T \trianglelefteq G_x$, то $N_G(T_{x,y}) \geq G_x$ и, следовательно, $N_G(T_{x,y}) \in \{G_x, G\}$. Если $N_G(T_{x,y}) = G_x$, то $N_T(T_{x,y}) = T \cap N_G(T_{x,y}) = T_x$, что противоречит справедливости свойства **(Pr+)** для группы G. Поэтому $N_G(T_{x,y}) = G$ и $T_{x,y} = 1$.

Поскольку $G_{x,y} \cap T = T_{x,y} = 1$, то в силу справедливости гипотезы Шрайера, доказанной с использованием классификации конечных простых групп, G_x является разрешимой группой. Получаем противоречие с предложением 8.

Предложение доказано.

Свойство (**Pr**+) интересует нас в связи со следующим утверждением.

Предложение 18. *Пусть G — примитивная группа подстановок типа* III(b) *на множестве X и H — примитивная группа подстановок типа* II. *Предположим, что для группы H выполняется свойство* (**Pr**+). *Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ для некоторых $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Пусть $B := \mathrm{soc}(H)^m = T^m$.

Предположим, что $G_{x,y} \cap B = 1$. Поскольку $B_x \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, то $G_{x,y} \times B_x \trianglelefteq G_x$. Следовательно, $G_{x,y} \leq H^m$. В силу $G_{x,y} \cap B = 1$, имеем $G_{x,y} \lesssim H^m/B$. В частности, $G_{x,y}$ является разрешимой группой (в силу справедливости гипотезы Шрайера, доказанной с использованием классификации конечных простых групп). Следовательно, по предложению 8 для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предположим, что $B_{x,y} = G_{x,y} \cap B \neq 1$. Поскольку, кроме того, $B_{x,y} \trianglelefteq G_x$ в силу $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $B \trianglelefteq G$, то $N_G(B_{x,y}) = G_x$. Пусть $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_m)$, Тогда $B_{x,y} \cong T_{x_1,y_1} \times ... \times T_{x_m,y_m}$. Если $t \in N_T(T_{x_i,y_i})$ для некоторого $1 \leq i \leq m$, то в силу $N_G(B_{x,y}) = G_x$ имеем $t \in T_{x_i}$. Поэтому, для произвольного $1 \leq i \leq m$ справедливо равенство $N_T(T_{x_i,y_i}) = T_{x_i}$. Кроме того, из предложения 8 следует, что для произвольного простого числа r выполняется $O_r(G_{x,y}) = 1$ и, следовательно, $O_r(B_{x,y}) = 1$. Но тогда $O_r(T_{x_i,y_i}) = 1$ для всех $1 \leq i \leq m$, и в силу выполнения свойства (**Pr**+) для группы H получаем противоречие. Предложение доказано.

Следующее предложение 19 очевидно.

Предложение 19. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X с цоколем T, $x \in X$. Предположим, что T_x — разрешимая группа. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Предложение 20. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X с цоколем T, $x \in X$. Предположим, что $T_x \cong A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, F — простая неабелева группа. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Доказательство. Предположим, что для группы G свойство (**Pr**+) не выполняется. Тогда существует $y \in X \setminus \{x\}$ такие, что $N_T(T_{x,y}) = T_x$ и $O_r(T_{x,y}) = 1$ для произвольного простого числа r. Поскольку $\mathrm{soc}(T_{x,y}) \trianglelefteq T_x$, то $T_{x,y}$ содержит характеристическую подгруппу L, изоморфную группе F.

Пусть $a \in T$ и $a(x) = y$. Положим $R := T_{x,y} \cap aT_{x,y}a^{-1} \trianglelefteq T_{x,y}$. Поскольку группа $T_y/aT_{x,y}a^{-1} \cong T_x/T_{x,y}$ является разрешимой, то $L \leq R$ и, следовательно, $L \trianglelefteq R$ (так как L характеристична в $T_{x,y}$).

Поскольку $aLa^{-1} \trianglelefteq aT_{x,y}a^{-1}$, то $L \cap aLa^{-1} \trianglelefteq R$. В частности, $L \cap aLa^{-1} \trianglelefteq L$. Так как L — простая группа, то отсюда следует, что либо $L \cap aLa^{-1} = 1$, либо $L = aLa^{-1}$.

Если $L \cap aLa^{-1} = 1$, то $L \cong L/(L \cap aLa^{-1}) \lesssim T_y/aLa^{-1}$ и, следовательно, T_y/aLa^{-1} содержит подгруппу, изоморфную группе F, что противоречит структуре группы $T_y = aT_xa^{-1}$.

Если $L = aLa^{-1}$, то $T_y = N_T(aLa^{-1}) = N_T(L) = T_x$. Противоречие с предложением 4. Предложение доказано.

7. Случай групп типа II с цоколем, являющимся знакопеременной группой

В этом параграфе устанавливается справедливость свойства (**Pr**), а затем, с использованием этого, свойства (**Pr**+), для примитивных групп типа II с цоколем, являющимся знакопеременной группой.

Предложение 21. *Пусть G — примитивная почти простая группа на конечном множестве X. Предположим, что $\mathrm{soc}(G) \cong A_n$, $n \geq 5$. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Если $n = 6$, то G_x является либо разрешимой группой, либо почти простой, и утверждение следует из предложений 8 и 9. Поэтому, далее, предполагаем, что $n \neq 6$.

Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G и, следовательно, для G_x выполняется одно из утверждений (1) — (6) предложения 1. Положим $\Omega = \{1, ..., n\}$.

Предположим, что выполняется (1). Тогда $G_x = (S_m \times S_k) \cap G$, $n = m+k, k < m$ и действие группы G на X совпадает с естественным действием группы G на множестве всех k-элементных подмножеств множества Ω. Следовательно, для любых двух точек $x, y \in X$ существует $g \in G$ со свойством $g(x) = y, g(y) = x$. В частности, для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предположим, что выполняется (2). Тогда $G_x = (S_m \mathrm{wr} S_k) \cap G$, $n = mk, m > 1, k > 1$ и действие группы G на X совпадает с естественным действием группы G на множестве всех разбиений множества Ω на k-элементные подмножества.

Следовательно, для любых двух точек $x, y \in X$ существует $g \in G$ со свойством $g(x) = y, g(y) = x$. В частности, для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предположим, что выполняется (3). Тогда $G_x = AGL_k(p) \cap G$, $n = p^k$, p — простое число. В силу предложений 8 и 9 для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предположим, что выполняется (4). Тогда $G_x = (T^k.(\mathrm{Out}(T) \times S_k)) \cap G$, T — простая неабелева группа, $k \geq 2$, $n = |T|^{k-1}$. Поскольку группа S_k действует точно на изоморфных T множителях группы T^k, то применимо предложение 12 и, следовательно, для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предположим, что выполняется (5). Тогда $G_x = (S_m \mathrm{wr} S_k) \cap G$, $n = m^k, m \geq 5$. По предложению 12 для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предположим, что выполняется (6). Тогда $T \trianglelefteq G_x \leq \mathrm{Aut}(T)$, T — простая неабелева группа. Теперь применимо предложение 9 и, следовательно, для группы G выполняется свойство (**Pr**).

Предложение полностью доказано.

Предложение 22. *Пусть G — примитивная почти простая группа на конечном множестве X. Предположим, что* $\mathrm{soc}(G) \cong A_n$*, $n \geq 5$ Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Доказательство. Предположим, что $1 \neq G_{x,y} \cap \mathrm{soc}(G) \trianglelefteq G_x \cap \mathrm{soc}(G)$ для $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$. В силу предложения 21, достаточно рассмотреть случай, когда $G_x \cap \mathrm{soc}(G)$ не является максимальной подгруппой группы $\mathrm{soc}(G)$. В частности, тогда $G \leq S_n$. Из [9] следует, что в этом случае либо G_x является почти простой группой, либо $G_x \cap \mathrm{soc}(G)$ имеет вид: $2^3.S_4$, 7.3, 11.5, 17.8 или 23.11. Теперь утверждение следует из предложений 19 и 20.

8. Случай групп типа II с цоколем, являющимся простой классической группой

В этом параграфе устанавливается справедливость свойства (**Pr**), а затем, с использованием этого, свойства (**Pr**+), для примитивных групп типа II с цоколем, являющимся простой классической группой.

Далее предполагаем, что G — примитивная почти простая классическая группа на конечном множестве X, $T = \mathrm{soc}(G)$ и $x \in X$. С группой G естественным образом связано векторное пространство, которое мы будем обозначать через V, над полем $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Через p обозначим характеристику поля $\mathbb{F}$. Напомним, что в этом случае подгруппа T изоморфна, по-крайней мере, одной из следующих групп: $PSL_n(q)$, $n \geq 2$, $q \geq 4$; $PSU_n(q)$, $n \geq 2$, $q \geq 3$; $PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$, $q \geq 3$; $P\Omega_{2m+1}(q)$, $n \geq 3$, q — нечетное число и $q \geq 5$; $P\Omega^+_{2m}(q)$, $n \geq 4$, $q \geq 4$; $P\Omega^-_{2m}(q)$, $n \geq 4$, $q \geq 4$; причем $q = p^k$, p — простое число и $k \geq 1$.

Далее, если не сказано обратное, мы предполагаем, что для группы G выполнены следующие условия:
(1) если $T = Sp_4(q)$, где q — четное, то G не содержит графовый автоморфизм группы T;
(2) если $T = P\Omega^+_8(q)$, то G не содержит графовый автоморфизм группы T порядка, делящегося на 3.
Строение группы G при этом предположении G_x описано в [8].

Из [8] следует, что для некоторого $H \in C(\Gamma)$ имеем $H_T \leq H_G$ и $H_G \leq N_G(H_T)$. (см. параграф 2.)

Предложение 23. *Пусть $O_r(H_T) \neq 1$ для некоторого простого r. Тогда $O_r(H_G) \neq 1$.*

Доказательство. Поскольку $H_T \leq H_G$ и $H_G \leq N_G(H_T)$, то $O_r(H_T) \trianglelefteq H_G$. Следовательно, $O_r(H_G) \neq 1$.

Предложение 24. *Пусть $O_p(H_T) \neq 1$. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. В силу предложения 23 имеем $O_p(H_G) \neq 1$. Поскольку H_G — максимальная подгруппа группы G, то H_G — параболическая подгруппа группы G и, следовательно, $C_{H_G}(O_p(H_G)) \leq O_p(H_G)$. Теперь утверждение следует из предложения 8.

Предложение 25. *Предположим, что $H_T = H_G \cap T$ и $H_T \cong A.F.B$, где A, B разрешимые группы, а F — простая группа. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Предложение следует из 11 и 9.

Предложение 26. *Предположим, что $H_T = H_G \cap T$ и $H_T \cong A.H^k.B.S$, где A, B — разрешимые группы, H — почти простая группа с цоколем T, $k \geq 2$, $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ и S действует точно на изоморфных T множителях группы* $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$. *Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Из предложения 10 следует, что $H_G \cong A.H^k.B.S.D$ для некоторой разрешимой группы D. Поскольку группа S индуцирует на k изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$ группу A_k или S_k имеем $H_G \cong A.H^k.\hat{B}.\hat{S}$, где $\hat{B}$ — разрешимая группа, являющаяся ядром действия группы $B.S.D$ на изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$, $\hat{S} \in \{A_k, S_k\}$, $\hat{S} \neq A_2$ и $\hat{S}$ действует точно на изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.H^k/A)$. Теперь утверждение следует из предложения 12.

Предложение 27. *Если $H \in C_1(\Gamma)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Предположим, что $T = PSL_n(q)$. Тогда H_T имеет один их следующих типов: P_m, $P_{m,n-m}$ или $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$ (см. параграф 2). Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Proposition 4.1.17] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Если H_T имеет тип $P_{m,n-m}$, то по [8, Proposition 4.1.22] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Пусть, теперь, H_T имеет тип $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$. Если группа H_T является разрешимой или имеет вид $A.F.B$ для разрешимых групп A, B и простой неабелевой группы F, то утверждение следует из предложений 24, 2 и 25. Поэтому предположим, что это не так. Предположим, кроме того, что для группы G свойство (**Pr**) не выполняется. Тогда существуют $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Очевидно, $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$. Рассмотрим естественный гомоморфизм ϕ группы $SL_n(q)$ в группу $PSL_n(q)$. Тогда $\phi^{-1}(T_x)$ (соответственно, $\phi^{-1}(T_y)$) — стабилизатор в $SL_n(q) = SL(V)$ разложения $V =$

$U_1 \oplus U_2$ (соответственно, $V = W_1 \oplus W_2$). В силу предложения 8 имеем $T_{x,y} \neq 1$. Теперь, из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, предложения 24 и [8, Proposition 4.1.4] следует, что $\phi^{-1}(T_{x,y})$ действует на U_i, $i \in \{1,2\}$, как $SL(U_i)$ и действует на U_j, $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$, как подгруппа из $Z(SL(U_j))$. Поскольку $\phi^{-1}(T_{x,y})$ сохраняет разложение $W_1 \oplus W_2$, то при отображении точки x в точку y элементом из T подгруппа $\phi^{-1}(T_x)$ перейдет в подгруппу $\phi^{-1}(T_y)$ и, следовательно, $\phi^{-1}(T_{x,y})$ действует на подпространстве W_k для некоторого $k \in \{1,2\}$ как группа, изоморфная $SL(U_i)$. Поэтому имеем $U_i \leq W_k$. Поскольку $T_{x,y} = T_x \cap T_y$, то $U_i = W_k$ и, следовательно, $T_{x,y} \trianglelefteq T_y$. С другой стороны, $T_{x,y} = G_{x,y} \cap T \trianglelefteq G_x$. Тогда получаем, что $T_{x,y} \trianglelefteq \langle G_x, T_y \rangle = G$, противоречие. Следовательно, предложение в этом случае выполняется.

Предположим, что $T = PSU_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m или $GU_m(q) \perp GU_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Proposition 4.1.18] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Если H_T имеет тип $GU_m(q) \oplus GU_{n-m}(q)$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$.

Предположим, что $T = PSp_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m или $Sp_m(q) \perp Sp_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Proposition 4.1.19] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Если H_T имеет тип $Sp_m(q) \perp Sp_{n-m}(q)$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$.

Предположим, что $T = P\Omega_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m или $O_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Proposition 4.1.6] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Если H_T имеет тип $O_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$.

Предположим, что $T = P\Omega^+_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов P_m, $O^{\epsilon}_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$ или $Sp_{n-2}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Proposition 4.1.20] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Если H_T имеет тип $O_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип $Sp_{n-2}(q)$, то по [8, Proposition 4.1.7] $H_T \cong Sp_{n-2}(q)$ и утверждение следует из предложений 2 и 25.

Предположим, что $T = P\Omega^-_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m, $O^{\zeta}_m(q) \perp O^{-\zeta}_{n-m}(q)$ или $Sp_{n-2}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Proposition 4.1.20] группа H_T является p-локальной и утверждение следует из предложения 24. Если H_T имеет тип $O_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип $Sp_{n-2}(q)$, то по [8, Proposition 4.1.7] $H_T \cong Sp_{n-2}(q)$ и утверждение следует из предложений 2 и 25.

Предложение полностью доказано.

Предложение 28. *Если $H \in C_1(G)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Доказательство. В силу предложения 27 свойство (**Pr**+) достаточно проверить в случае, когда H_T не является максимальной подгруппой группы T.

Предположим, что $T = PSL_n(q)$. Тогда H_T имеет один их следующих типов: P_m, $P_{m,n-m}$ или $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$ (см. параграф 2). Если H_T имеет тип P_m, то по [8, Table 3.5.A] группа H_T является максимальной подгруппой группы T. Если H_T имеет тип $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше в доказательстве предложения 27 для группы $T = PSL_n(q)$ и группы H_T типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип $P_{m,n-m}$, $m < n/2$, то по [8, Proposition 4.1.22] имеем $H_T \cong [q^{2mn-3m^2}] : A.(PSL_m(q)^2 \times PSL_{n-2m}(q)).B$, где $[q^{2mn-3m^2}]$ — разрешимая группа порядка q^{2mn-3m^2} и A, B — разрешимые группы. Если для группы G свойство (**Pr**+) не выполняется, то существуют $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ такие, что $N_T(T_{x,y}) = T_x$ и $O_r(T_{x,y}) = 1$ для всех простых чисел r. В этом случае, $T_{x,y}$ содержит нормальную подгруппу N, изоморфную $PSL_m(q)$ или $PSL_{n-m}(q)$. Теперь, рассуждения, аналогичные приведенным выше в доказательстве предложения 27 для группы $T = PSL_n(q)$ и группы H_T типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$, дают $N \trianglelefteq T_y$ и, следовательно, $T_{x,y} \trianglelefteq T_y$. Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется.

Предположим, что $T = PSU_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m или $GU_m(q) \perp GU_{n-m}(q)$. Следовательно, (см. [8, Table 3.5.B]) группа H_T является максимальной подгруппой группы T.

Предположим, что $T = PSp_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m или $Sp_m(q) \perp Sp_{n-m}(q)$. Следовательно, (см. [8, Table 3.5.C]) группа H_T является максимальной подгруппой группы T.

Предположим, что $T = P\Omega_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m или $O_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то (см. [8, Table 3.5.D]) группа H_T является максимальной подгруппой группы T. Если H_T имеет тип $O_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.D]) группа H_T не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда $q = 3$, $m = n-2$, $\epsilon = +$. В последнем случае в силу [8, Proposition 4.1.6] имеем $T_x \cong (\Omega_{n-2}(3) \times \Omega^+_2(3)).[4]$ (для произвольного n через $[n]$ обозначается группа порядка n). Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = P\Omega^+_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m, $O^{\epsilon}_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$ или $Sp_{n-2}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то (см. [8, Table 3.5.E]) группа H_T не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда $m = n/2 - 1$. В последнем случае в силу [8, Proposition 4.1.20] имеем либо $H_T \cong [q^a].(GL_{n/2-1}(q) \times \Omega^+_2(q)).2$, либо $H_T \cong [q^a].\frac{1}{2}(GL_{n/2-1}(q)$, где $a = mn - \frac{m}{2}(3m+1)$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20. Если H_T имеет тип $O^{\epsilon}_m(q) \perp O^{\epsilon}_{n-m}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.E]) группа H_T не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда $m = 2$, $\epsilon = +$, $q \le 3$. В последнем случае в силу [8, Proposition 4.1.6] имеем либо $T_x \cong (\Omega^+_2(q) \times \Omega^+_{n-2}(q)).2$, либо $T_x \cong (\Omega^+_2(q) \times \Omega^+_{n-2}(q)).[4]$, либо $T_x \cong 2.(P\Omega^+_2(q) \times P\Omega^+_{n-2}(q)).[4]$ и $q \le 3$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20. Если H_T имеет тип $Sp_{n-2}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.E]) группа H_T является максимальной подгруппой группы T.

Предположим, что $T = P\Omega^-_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: P_m, $O^{\zeta}_m(q) \perp O^{-\zeta}_{n-m}(q)$ или $Sp_{n-2}(q)$. Если H_T имеет тип P_m, то (см. [8, Table 3.5.F]) группа H_T является максимальной подгруппой группы T. Если H_T имеет тип $O^{\zeta}_m(q) \perp O^{-\zeta}_{n-m}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.F]) группа H_T не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда

$m = 2$, $\zeta = +$, $q \leq 3$. В последнем случае в силу [8, Proposition 4.1.6] имеем либо $T_x \cong (\Omega_2^+(q) \times \Omega_{n-2}^-(q)).2$, либо $T_x \cong (\Omega_2^+(q) \times \Omega_{n-2}^-(q)).[4]$, либо $T_x \cong 2.(P\Omega_2^+(q) \times P\Omega_{n-2}^-(q)).[4]$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20. Если H_T имеет тип $Sp_{n-2}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.F]) группа H_T является максимальной подгруппой группы T.

Предложение полностью доказано.

Предложение 29. *Если $H \in C_2(G)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Из [8, Theorem 3.1.2] и [8, Proposition 3.1.3] следует, что выполняется одно из следующих утверждений:

(1) H_G содержит графовый автоморфизм группы T, и группа H_T имеет тип $GL_1(q) \wr S_n$ (см. [8]), где либо $q = 2$ и n — четное, либо $(q, n) \in \{(5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$;
(2) $H_T = T \cap H_G$.

Предположим, что выполняется (1). Тогда (см. замечание к [8, Theorem 3.1.2]) $H_G/(T \cap H_G)$ является разрешимой группой и $H_T \cong A.F.B$ для некоторых разрешимых групп A, B и простой группы F. Следовательно, $H_G \cong A.F.C$, где C — разрешимая группа, и утверждение следует из предложения 9.

Далее предполагается, что имеет место (2). Предположим, что $T = PSL_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GL_m(q) \wr S_t$ и утверждение следует из [8, Proposition 4.2.9] и предложения 26. Предположим, что $T = PSU_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GU_m(q) \wr S_t$ или тип $GL_{n/2}(q^2).2$. Если H_T имеет тип $GU_m \wr S_t$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.9] и предложения 26. Если H_T имеет тип $GL_{n/2}(q^2).2$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.4] и предложения 25. Предположим, что $T = PSp_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $PSp_m(q) \wr S_t$ или тип $GL_{n/2}(q^2).2$. Если H_T имеет тип $PSp_m(q) \wr S_t$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.10] и предложения 26. Если H_T имеет тип $GL_{n/2}(q).2$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.5] и предложения 25.

Если $T = P\Omega_n(q)$, то H_T имеет один из следующих типов: $O_m(q) \wr S_t$, $O_1(q) \wr S_n$. Предположим, что H_T имеет тип $O_m(q) \wr S_t$. Тогда утверждение следует из [8, Proposition 4.2.14] и предложения 26. Если H_T имеет тип $O_1(q) \wr S_n$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.15] и предложения 25.

Предположим, что $T = P\Omega_n^+(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: $O_m^\epsilon(q) \wr S_t$, $O_1(q) \wr S_n$, $GL_{n/2}(q).2$, $O_{n/2}(q)^2$. Если H_T имеет тип $O_m^\epsilon(q) \wr S_t$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.11], [8, Proposition 4.2.14] и предложения 26. Если H_T имеет тип $O_1(q) \wr S_n$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.15] и предложения 25. Если H_T имеет тип $GL_{n/2}(q).2$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.7] и предложения 25. Если H_T имеет тип $O_{n/2}(q)^2$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше в доказательстве предложения 27 для группы $T = PSL_n(q)$ и группы H_T типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$ (заметим, что эти рассуждения остаются верными при $m = n/2$).

Предположим, что $T = P\Omega_n^-(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: $O_m^\epsilon(q) \wr S_t$, $O_1(q) \wr S_n$, $O_{n/2}(q)^2$. Если H_T имеет тип $O_m^\epsilon(q) \wr S_t$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.11], [8, Proposition 4.2.14] и предложения 26. Если H_T имеет тип $O_1(q) \wr S_n$, то утверждение следует из [8, Proposition 4.2.15] и предложения 25. Если H_T имеет тип $O_{n/2}(q)^2$, то справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше в доказательстве предложения 27 для группы $T = PSL_n(q)$ и группы H_T типа $GL_m(q) \oplus GL_{n-m}(q)$

Предложение полностью доказано.

Предложение 30. *Если $H \in C_2(G)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Доказательство. В силу предложения 29 справедливость свойства (**Pr**+) для группы G достаточно проверить в случае, когда H_T не является максимальной подгруппой группы T.

Предположим, что $T = PSL_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GL_m(q) \wr S_t$ и (см. [8, Table 3.5.A]) не является максимальной подгруппой группы T лишь при $m = q = 2$ или $m = 1$, $q \leq 4$. Из [8, Proposition 4.2.9] следует, что если $m = 1, q = 2$, то $T_x \cong S_n$; если $m = 1, q = 3$, то $T_x \cong \frac{2^{(n-1)}}{(2,n)}.S_n$; если $m = 1, q = 4$, то $T_x \cong \frac{3^{(n-1)}}{(3,n)}.S_n$; если $m = 2, q = 2$, то $T_x \cong S_3^{n/2}.S_{n/2}$. Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = PSU_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: $GU_m(q) \wr S_t$, $GL_{n/2}(q^2).2$ и (см. [8, Table 3.5.B]) не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда H_T имеет тип $GU_m(q) \wr S_t$ и $m = q = 2$. Из [8, Proposition 4.2.9] следует, что тогда $T_x \cong \frac{3^{(n/2-1)}}{(3,n/2)}.S_3.S_{n/2}$. Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = PSp_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: $Sp_m(q) \wr S_t$, $GL_{n/2}(q).2$ и (см. [8, Table 3.5.C]) не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда H_T имеет тип $Sp_m(q) \wr S_t$ и $m = q = 2$. Из [8, Proposition 4.2.10] следует, что тогда $T_x \cong S_3 \wr S_{n/2}$. Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = P\Omega_n(q)$. Тогда H_T имеет один из следующих типов: $O_m(q) \wr S_t$, $O_1(q) \wr S_n$ и (см. [8, Table 3.5.D]) не является максимальной подгруппой группы T лишь в случае, когда H_T имеет тип $O_m(q) \wr S_t$ и $m = q = 3$. Из [8, Proposition 4.2.14] следует, что тогда $T_x \cong (2^{n/3-1} \times \Omega_3(3)^{n/3}.2^{n/3-1}).S_{n/3}$. Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = P\Omega_n^+(q)$. Если H_T не является максимальной подгруппой группы T, то (см. [8, Table 3.5.F]) выполняется одно из следующих условий:

(1) H_T имеет тип $O_m^\epsilon(q) \wr S_t$, где $O_m^\epsilon(q)$ изоморфна одной из следующих групп: $O_2^+(2)$, $O_2^\pm(3)$, $O_2^+(4)$, $O_2^+(5)$, $O_3(3)$, $O_4^+(2)$;

(2) H_T имеет тип $GL_{n/2}(q).2$, где $n/2$ нечетно и (см. [8, Proposition 4.2.7]) либо $T_x \cong GL_{n/2}(q)$, либо $T_x \cong \frac{q-1}{2}.PSL_{n/2}.(q-1, n/2)$, либо $T_x \cong \frac{q-1}{4}.PSL_{n/2}.(q-1, n/2)$.

Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = P\Omega_n^-(q)$. Если H_T не является максимальной подгруппой группы T, то (см. [8, Table 3.5.F]) H_T имеет тип $O_m^\epsilon(q) \wr S_t$ и $(q, m) \in \{(3, 2), (3, 3)\}$. Следовательно, свойство (**Pr**+) для группы G выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предложение полностью доказано.

Предложение 31. *Если H принадлежит одному из следующих классов: $C_3(G)$, $C_5(G)$, $C_6(G)$, $C_8(G)$, то для группы G выполняются свойства* $(\mathbf{Pr})$ *и* $(\mathbf{Pr}+)$.

Доказательство. Из предложений [8, 4.3.6-7], [8, 4.3.10], [8, 4.3.14], [8, 4.3.16-18], [8, 4.3.20], [8, 4.5.3-8], [8, 4.5.10], [8, 4.6.5-9] и [8, 4.8.3-6] следует, что $H_T \cong A.F.B$ для некоторых разрешимых групп A, B и простой группы F. Из предложений 2 и 25 следует теперь, что для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$. Поскольку группа H принадлежит одному из классов: $C_3(G)$, $C_5(G)$, $C_6(G)$, $C_8(G)$, то группа H_T является максимальной подгруппой группы T (см. [8, Table 3.5.A-F]). Следовательно, для группы G также выполняется свойство $(\mathbf{Pr}+)$.

Предложение 32. *Если $H \in C_4(G)$, то для группы G выполняется свойство* $(\mathbf{Pr})$.

Доказательство. Предположим, что $T = PSL_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GL_{n_1}(q) \otimes GL_{n_2}(q)$ (см. параграф 2) и $n_1 n_2 = n$. Если группа H_T является разрешимой или имеет вид $A.F.B$ для разрешимых групп A, B и простой неабелевой группы F, то утверждение следует из предложений 24, 2 и 25. Поэтому предположим, что это не так. Предположим, кроме того, что для группы G свойство $(\mathbf{Pr})$ не выполняется. Тогда существуют $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Очевидно, $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$. Рассмотрим естественный гомоморфизм ϕ группы $SL_n(q)$ в группу $PSL_n(q)$. Тогда $\phi^{-1}(T_x)$ (соответственно, $\phi^{-1}(T_y)$) — стабилизатор в $SL_n(q)$ тензорного разложения $V = U_1 \otimes U_2$ (соответственно, $V = W_1 \otimes W_2$). В силу предложения 8 имеем $T_{x,y} \neq 1$. Теперь, из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, предложения 24 и [8, Proposition 4.4.10] следует, что $\mathrm{soc}(T_{x,y})' \cong PSL_{n_i}(q)$, где $i \in \{1,2\}$, и $\phi^{-1}(T_{x,y}) \leq SL_{n_i}(q) \otimes Z(SL_{n_j}(q))$ для $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$. Поскольку $\phi^{-1}(T_{x,y})$ стабилизирует тензорное разложение $W_1 \otimes W_2$, то $T_{x,y} \trianglelefteq T_y$. С другой стороны, $T_{x,y} = G_{x,y} \cap T \trianglelefteq G_x$. Таким образом, имеем $T_{x,y} \trianglelefteq \langle G_x, T_y \rangle = G$, что невозможно. Следовательно, для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$.

Предположим, что $T = PSU_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GU_{n_1}(q) \otimes GU_{n_2}(q)$, и справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для группы $T = PSL_n(q)$. Следовательно, для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$.

Предположим, что $T = PSp_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $PSp_{n_1}(q) \otimes O^{\epsilon}_{n_2}(q)$, и справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для группы $T = PSL_n(q)$. Следовательно, для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$.

Предположим, что $T = P\Omega_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $O_{n_1}(q) \otimes O_{n_2}(q)$, и справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для группы $T = PSL_n(q)$. Следовательно, для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$.

Предположим, что $T = P\Omega^+_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $Sp_{n_1}(q) \otimes Sp_{n_2}(q)$ или тип $O^{\epsilon_1}_{n_1}(q) \otimes O^{\epsilon_2}_{n_2}(q)$, и справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для группы $T = PSL_n(q)$. Следовательно, для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$.

Предположим, что $T = P\Omega^-_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $O_{n_1}(q) \otimes O^-_{n_2}(q)$ и справедливы рассуждения, аналогичные приведенным выше для группы $T = PSL_n(q)$. Следовательно, для группы G выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$.

Предложение 33. *Если $H \in C_4(G)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Доказательство. В силу предложения 32 свойство (**Pr**+) достаточно проверить в случае, когда H_T не является максимальной подгруппой группы T.

Предположим, что $T = PSL_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GL_{n_1}(q) \otimes GL_{n_2}(q)$, и (см. [8, Table 3.5.A]) не является максимальной подгруппой группы T лишь при $n_1 = q = 2$. Из [8, Proposition 4.4.10] следует, что тогда $T_x \cong S_3 \times PSL_{n/2}(2)$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = PSU_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $GU_{n_1}(q) \otimes GU_{n_2}(q)$, и (см. [8, Table 3.5.B]) не является максимальной подгруппой группы T лишь при $n_1 = q = 2$. Из [8, Proposition 4.4.10] следует, что тогда $T_x \cong S_3 \times PSU_{n/2}(2)$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = PSp_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $Sp_m(q) \otimes O^{\epsilon}_{n/m}(q)$, и (см. [8, Table 3.5.C]) не является максимальной подгруппой группы T лишь при $q = n/m = 3$. Из [8, Proposition 4.4.11] следует, что тогда $T_x \cong PSp_m(3) \times PO_3(3)$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = P\Omega_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $O_m(q) \otimes O_{n/m}(q)$, и (см. [8, Table 3.5.D]) не является максимальной подгруппой группы T лишь при $m = q = 3$. Из [8, Proposition 4.4.18] следует, что в этом случае $T_x \cong (\Omega_3(3) \times \Omega_{n/3}(3)).2$ Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предположим, что $T = P\Omega^+_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $Sp_{n_1}(q) \otimes Sp_{n_2}(q)$ или $O^{\epsilon_1}_{n_1}(q) \otimes O^{\epsilon_2}_{n_2}(q)$. Если H_T имеет тип $Sp_{n_1}(q) \otimes Sp_{n_2}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.E]) H_T не является максимальной подгруппой группы T лишь при $q = n_1 = 2$. В силу [8, Proposition 4.4.12] имеем $T_x \cong PSp_2(2) \times PSp_{n/2}(2)$. Если H_T имеет тип $O^{\epsilon_1}_{n_1}(q) \otimes O^{\epsilon_2}_{n_2}(q)$, то (см. [8, Table 3.5.E]) H_T не является максимальной подгруппой группы T лишь при $q = n_2 = 3$ или $n_1 = 4$, $\epsilon_1 = +$, n_2 — нечетное. В силу [8, Proposition 4.4.14-17] имеем либо $T_x \cong (PSO^+_{n_1}(q) \times PSO_{n_2}(q)).[2]$, либо $T_x \cong (PSO^+_{n_1}(q) \times PSO_{n_2}(q)).[4]$, либо $T_x \cong (PSO^-_{n_1}(q) \times PSO_{n_2}(q)).[4]$, либо $T_x \cong P\Omega^{\epsilon_1}_{n_1}(q) \times SO_{n_2}(q)$. Если группа T_x является разрешимой или имеет вид $A.F.B$ для некоторых разрешимых групп A, B и простой неабелевой группы F, то свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20. В противном случае, имеем $T_x \cong P\Omega^+_4(q) \times SO_{n_2}(q)$. Поскольку T_x является стабилизатором тензорного разложения пространства V, то предложение следует из рассуждений, аналогичных приведенным выше в доказательстве предложения 32 для группы $T = PSL_n(q)$.

Предположим, что $T = P\Omega^-_n(q)$. Тогда H_T имеет тип $O_m(q) \otimes O^-_{n/m}(q)$, и (см. [8, Table 3.5.F]) не является максимальной подгруппой группы T лишь при $m = q = 3$. Из [8, Proposition 4.4.17] следует, что тогда $T_x \cong P\Omega_3(3) \times SO_{n/3}(3)$. Следовательно, свойство (**Pr**+) выполняется в силу предложений 19 и 20.

Предложение полностью доказано.

Предложение 34. *Если $H \in C_7(G)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Из предложений [8, 4.7.3-8] следует, что выполняется одной из следующих условий:

(1) $H_T = T \cap H_G$, $H_T \cong A.F^k.B.S$, где A, B — разрешимые группы, F — почти простая группа, $k \geq 2$, $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ и S действует точно на изоморфных $\mathrm{soc}(F)$ множителях группы $\mathrm{soc}(A.F^k/A)$;
(2) H_G является стабилизатором в группе G тензорного разложения пространства $V = V_1 \otimes V_2$.

Если выполняется (1), то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 26. Если выполняется (2), то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве предложения 32 для группы $T = PSL_n(q)$. Предложение доказано.

Предложение 35. *Если $H \in C_7(G)$, то для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

Доказательство. В силу предложения 34 свойство (**Pr**+) достаточно проверить в случае, когда H_T не является максимальной подгруппой группы T. То есть (см. [8, Table 3.5.A-F]) когда $T = P\Omega_n^+(q)$, H_T имеет тип $Sp_m(q) \wr S_t$, $m \leq 4$ и q — четное. Из [8, Proposition 4.7.5] следует, что либо $T_x \cong PSp_m(q)^2$, либо $T_x \cong PSp_m(q)^t.S_t$ и S_t точно действует на изоморфных $PSp_m(q)$ множителях группы $PSp_m(q)^t$. Если $T_x \cong PSp_m(q)^2$, то T_x является стабилизатором тензорного разложения пространства V, и свойство (**Pr**+) для группы G вытекает из рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве предложения 32 для группы $T = PSL_n(q)$. В оставшемся случае, когда $T_x \cong PSp_m(q)^t.S_t$, предположим, что свойство (**Pr**+) для группы G не выполняется и, следовательно, $N_T(T_{x,y}) = T_x$. В силу предложения 20 группа $PSp_m(q)$ является простой. Ясно, что $\mathrm{soc}(T_x) \cong PSp_m(q)^t$. Поскольку $1 \neq T_{x,y} \trianglelefteq T_x$, то $T_{x,y} \cap \mathrm{soc}(T_x) \neq 1$ и, следовательно, $\mathrm{soc}(T_x) \leq T_{x,y}$. Легко показать, что тогда $T_{x,y} \trianglelefteq T_y$, что невозможно. Предложение доказано.

Предложение 36. *Если $G_x \in S(G)$, то для группы G выполняются свойство* (**Pr**) *и* (**Pr**+).

Доказательство. Поскольку $G_x \in S(G)$, то G_x является почти простой группой. Следовательно, свойство (**Pr**) следует из предложения 9, а свойство (**Pr**+) следует из предложения 20.

Рассмотрим оставшиеся случаи, когда для группы G не выполняются условия (1) и (2) (см. начало настоящего параграфа).

Предложение 37. *Пусть $T = Sp_4(q)$, q — четное и G содержит графовый автоморфизм группы T. Тогда для группы G выполняются свойства* (**Pr**) *и* (**Pr**+).

Доказательство. Согласно [3] подгруппа G_x имеет вид $A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, F — простая неабелева группа. Теперь утверждение следует из предложений 25 и 20.

Предложение 38. *Пусть $T = P\Omega_8^+(q)$ и G содержит графовый автоморфизм группы T порядка, делящегося на 3. Тогда для группы G выполняются свойства* (**Pr**) *и* (**Pr**+).

Доказательство. Предположим, что группа T_x является максимальной подгруппой группы T. Тогда из предложений 27 — 36 следует справедливость свойств (**Pr**) и (**Pr+**) для группы T. Предположим, что для группы G не выполняется свойство (**Pr**). Тогда существуют $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ со свойством $1 \neq G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. При этом, очевидно, имеем $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$. Поскольку для группы T выполняется свойство (**Pr**), то $T_{x,y} = 1$ и, в частности, для группы G выполняется свойство (**Pr+**). Согласно предложению 17 для группы G выполняется также свойство (**Pr**).

Предположим, что группа T_x не является максимальной подгруппой группы T. Согласно [7] группа G_x либо является разрешимой группой, либо имеет вид $A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, F — простая неабелева группа. Теперь утверждение следует из предложений 25 и 20.

Из предложений 14, 15, 21, 27, 29, 31, 32, 34, 36, 37 и 38 следует теорема 1.

Из предложений 16, 18, 22, 28, 30, 31, 33, 35, 36, 37 и 38 следует теорема 2.

Список литературы

[1] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2002.

[2] Aschbacher M., *Finite group theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[3] Aschbacher M., *On the maximal subgroups of the finite classical groups* , Invent. Math. **76** (1984), 469–514.

[4] Burns J.M., *Maximal order abelian subgroups of symmetric groups*, J. M. Burns, B. Goldsmith, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 70–72.

[5] Camerom P.J., *Suborbits in transitive permutation groups*, Combinatorics (Proc. NATO Advanced Study Inst., Breukelen, 1974), Part 3: Combinatorial group theory, 98–129. Math. Cantre Tracts, No.57. Math. Centrum, Amsterdam, 1974.

[6] Feit W., *Solvability of groups of odd order* , W. Feit, J. G. Thompson, Pacific J. Math. **13** (1963), 775–1029.

[7] Kleidman P., *The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+(q)$ and their automorphism groups*, J. Algebra. **110**: 1 (1987), 173–242.

[8] Kleidman P., *The subgroup structure of the finite classical groups*, P. Kleidman, M. Liebeck, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., 129 Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990

[9] Liebeck M.W., *A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups*, M.W. Liebeck, Ch.E. Praeger, J. Saxl, J. Algebra. **111** (1987),365–383.

[10] Liebeck M.W., *On the O'Nan — Scott theorem for finite primitive permutation groups*, M.W. Liebeck, Ch.E. Praeger, J. Saxl, J. Austral. Math. Soc. Series A. **44** (1988), 389–396.

[11] Reitz H.L., *On primitive groups of odd order*, Amer. J. Math. **26**(1904), 1–30.

[12] Weiss M. J., *On simply transitive groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 401–405.

[13] Wielandt H., *Finite permutation groups*, New York: Acad. Press, 1964.

Антон Владимирович Коныгин
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: konygin@imm.uran.ru