S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 407–416 (2008) УДК 510.64
MSC 03B53

О МОДЕЛЯХ ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ ЛОГИКИ С АКСИОМАМИ КРАЙЗЕЛЯ-ПАТНЕМА И СКОТТА

М.В. СТУКАЧЕВА

Abstract. We combine the technique of canonical formulas for the class of extensions of minimal logic with the technique of Kripke j-frames. As a result, we characterize paraconsistent logic **Lskp** by finite Kripke frames.

Keywords: paraconsistent logic, canonical formulas, Kripke frame.

Основной целью данной работы является изучение возможности одновременного использования семантики Крипке и техники канонических формул при исследовании моделей логик класса расширений минимальной логики **Lj**. В этой работе мы определим характеризацию в терминах конечных j-шкал Крипке логики **Lskp** — паранепротиворечивого расширения минимальной логики аксиомами Крайзеля-Патнема (KP=$\{(\neg p \supset q \vee r) \supset (\neg p \supset q) \vee (\neg p \supset r)\}$) и Скотта ($S$=$\{((\neg\neg p \supset p) \supset p \vee \neg p) \supset \neg p \vee \neg\neg p\}$). Интерес к логике **Lskp** в указанном аспекте связан, во-первых, с результатами работы [7], где получена характеризация в терминах конечных j-шкал Крипке логики **Lkp**=**Lj**+KP — паранепротиворечивого аналога известной промежуточной логики Крайзеля-Патнема **KP**=**Li**+KP [1, 2], а, во-вторых, с результатами работы [10], где определена аксиоматизация каноническими формулами логики **Ls**=**Lj**+S — паранепротиворечивого аналога известной промежуточной логики Скотта **SL**=**Li**+S [1, 3].

В [4, 5] описывается структура класса расширений минимальной логики. В частности, пусть **JHN** — класс всех нетривиальных расширений минимальной логики **Lj**, **INT** — класс всех промежуточных логик (т.е. всех расширений

Stukacheva, M.V., On models of paraconsistent logic with Kreisel-Putnam's and Scott's axioms.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4413.2006.1).

Поступила 30 июня 2008 г., опубликована 29 октября 2008 г.

Lj, для которых справедлив закон $\bot\supset p$), **NEG** — класс негативных логик (расширений **Lj**, содержащих аксиому $\neg p$ (или $\bot$)) и **PAR** $\rightleftharpoons$ **JHN** – (**INT** $\cup$ **NEG**) — класс всех собственно паранепротиворечивых расширений **Lj**. Всякой логике $L \in \mathbf{JHN}$ сопоставляются ее наименьшее расширение L_{int} из класса промежуточных логик и наименьшее расширение L_{neg} из класса негативных логик, причем L_{int} и L_{neg} всегда существуют. Более того, в [5] было установлено, что для любых $L_1 \in \mathbf{INT}$ и $L_2 \in \mathbf{NEG}$ класс

$$Spec(L_1, L_2)=\{L \in \mathbf{JHN} | L_{int} = L_1,\, L_{ned} = L_2\}$$

образует интервал в решетке **JHN**, при этом интервалы вида *Spec* всегда не пусты, попарно не пересекаются для разных логик L_1, L_2 и

$$\mathbf{JHN}{=}\bigcup Spec(L_1, L_2).$$

В работах [10, 7] исследовались модели логик **Ls** и **Lkp** и было показано, что $\mathbf{Ls}_{int}$=**SL**, $\mathbf{Lkp}_{int}$=**KP** и $\mathbf{SL}_{neg}$=$\mathbf{KP}_{neg}$=**Ln** (где **Ln** — негативная логика). Кроме того, в указанных работах было показано, что **Ls** и **Lkp** отличны от граничных точек соответствующих интервалов $Spec(\mathbf{SL}, \mathbf{Ln})$ и $Spec(\mathbf{KP}, \mathbf{Ln})$.

1. Некоторые предварительные сведения

Мы рассматриваем пропозициональные логики в языке $\langle \wedge, \vee, \supset, \bot \rangle$, считая отрицание сокращением, $\neg\varphi = \varphi \supset\bot$, где $\bot$ – константа "абсурд". Как обычно, логика – это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens.

Подробную информацию о семантике Крипке и канонических формулах можно найти в следующих работах [4, 5, 6, 8]. Ниже приводятся некоторые необходимые определения и факты.

Будем называть *j-шкалой Крипке* (или просто j-шкалой), тройку $\mu = \langle W, R, Q \rangle$, где W – множество возможных миров, R – отношение достижимости такое, что $\langle W, R \rangle$ – обычная шкала Крипке для интуиционисткой логики, т.е. частично упорядоченное множество, $Q \subseteq W$ – конус относительно R, называемый *конусом ненормальных миров* (подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом* относительно отношения R, если из того, что $x \in X$ и xRy следует $y \in X$). Миры, не входящие в Q, называются *нормальными.* Шкала называется *острой*, если она имеет наименьший элемент. Для каждого подмножества $U \subseteq W$ положим:

$$U \uparrow W \rightleftharpoons \{x \in W \mid (\exists y \in U)(yRx)\},$$
$$U \downarrow W \rightleftharpoons \{x \in W \mid (\exists y \in U)(xRy)\}.$$

(В дальнейшем, в случаях, не вызывающих двусмысленности, вместо $U \uparrow W$ и $U \downarrow W$ мы будем писать $U \uparrow$ и $U \downarrow$.)

Говорим, что *логика* $L \in \mathbf{JHN}$ *истинна на* j*-шкале* μ (обозначаем $\mu \models L$), если $\mu \models \varphi$ для всех $\varphi \in L$. Для логики $L \in \mathbf{JHN}$ и класса j-шкал $\mathcal{K}$ определим

$$Mod(L) \rightleftharpoons \{\mu \mid \mu \models L\},\ L\mathcal{K} \rightleftharpoons \{\varphi \mid \forall \mu \in \mathcal{K}(\mu \models \varphi)\}.$$

Логика L из класса **JHN** *полна по Крипке*, если $L = LMod(L)$. Логика $L \in \mathbf{JHN}$ *характеризуется* (или *определяется*) классом j-шкал $\mathcal{K}$, если $L = L\mathcal{K}$. Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она характеризуется классом конечных шкал Крипке.

Пусть $L \in \mathbf{JHN}$. Множество формул x называется *L-полным* [6], если

a) $L \subseteq x$,

b) x является L-непротиворечивым, т.е. существует по крайней мере одна формула φ, для которой $x \nvdash_L \varphi$,

c) x замкнуто относительно *modus ponens*,

d) если $\varphi \vee \psi \in x$, то $\varphi \in x$ или $\psi \in x$.

Если $L \supseteq \mathbf{Lj}$, то *канонической моделью* логики L [6] называется модель Крипке $\mathcal{M}_L=\langle T_L, \subseteq, Q_L, V_L\rangle$, где элементами T_L являются L-полные множества формул, $Q_L=\{x \in T_L \mid \perp\in x\}$ и $V_L(p)=\{x \in T_L \mid p \in x\}$.

Теорема о канонической модели [6]

Для любой логики $L \in \mathbf{JHN}$ и любой формулы φ выполняется

$$\forall x \in T_L\ (\varphi \in x \text{ если и только если } \mathcal{M}_L \models_x \varphi).$$

Пусть $\mathcal{M}=\langle W, R, Q, V\rangle$ – произвольная модель и Ψ – множество формул, замкнутое относительно подформул. Отношение $x \sim y$, определяемое как

$$\forall \varphi \in \Psi\ [\mathcal{M} \models_x \varphi \leftrightarrow \mathcal{M} \models_y \varphi],$$

есть отношение эквивалентности на W. Пусть $[x]=\{y \in W \mid x \sim y\}$.
Модель $\mathcal{M}'=\langle W', R', Q', V'\rangle$ называется *фильтрацией* $\mathcal{M}$ по Ψ [6], где

$W'=\{[x] \mid x \in W\}$, $[x]R'[y] \leftrightarrow \forall \varphi \in \Psi[\mathcal{M} \models_x \varphi \to \mathcal{M} \models_y \varphi]$,

$Q'=\{[x] \in T' \mid \perp\in \Psi$ и $x \in Q\}$ и $V'(p)=\{[x] \in T' \mid p \in \Psi,\ x \in V(p)\}$.

Теорема Фильтрации [6]

Если $\mathcal{M}$ есть модель и Ψ – множество формул, замкнутое относительно подформул, то для любой формулы $\varphi \in \Psi$ и всех $x \in \mathcal{M}$ имеет место:

$$\mathcal{M} \models_x \varphi \text{ если и только если } \mathcal{M}' \models_{[x]} \varphi.$$

Модельной структурой [8] будем называть систему $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$, где

- $\mu = \langle W, R, Q\rangle$— j-шкала Крипке [5, 6];
- S— некоторая система подмножеств W такая, что $S \subseteq Up(W)$, $\emptyset \in S$, $Q \in S$, $W \in S$ и S замкнуто относительно $\cap$, $\cup$ и операции $\supset$, определенной следующим образом ($Up(W)$ — множество всех конусов шкалы μ относительно отношения R):

$$U \supset V=\{x \in W \mid \forall y \in W(xRy \text{ и } y \in U \Longrightarrow y \in V)\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$— произвольная модельная структура.
Модель на модельной структуре $\mathfrak{M}$ определим как $\mathcal{M}=\langle \mathfrak{M}, V\rangle$, где $V : Prop \longrightarrow S$. Определим отношение $\models$ индуктивно следующим образом:

1. $\mathcal{M} \models_a p_i \Longleftrightarrow a \in V(p_i)$,

2. $\mathcal{M} \models_a \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models_a \varphi$ и $\mathcal{M} \models_a \psi$,

3. $\mathcal{M} \models_a \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models_a \varphi$ или $\mathcal{M} \models_a \psi$,

4. $\mathcal{M} \models_a \varphi \supset \psi \Longleftrightarrow \forall x \in W(aRx$ и $x \models \varphi \Rightarrow x \models \psi)$,

5. $\mathcal{M} \models_a \perp \Longleftrightarrow a \in Q$.

Стандартно определяем отношения $\mathcal{M} \models \varphi$ и $\mathfrak{M} \models \varphi$. Логика $L \in \mathbf{JHN}$ *характеризуется (или определяется)* классом модельных структур $\mathcal{K}$, если

$$L = \{\varphi \mid \forall \mathfrak{M} \in \mathcal{K} \ (\mathfrak{M} \models \varphi)\}.$$

Заметим, что модели вида $\mathcal{M}=\langle \mu, Up(W), \models\rangle$— обычные j-модели Крипке.

Пусть $\mathfrak{M}_1=\langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$— модельная структура, $\mu=\langle W, R, Q\rangle$— конечная j-шкала модельной структуры $\mathfrak{M}=\langle \mu, Up(W)\rangle$.

Частичным p-морфизмом из $\mathfrak{M}_1$ на μ будем называть всякое частичное отображение f из W_1 на W, удовлетворяющее условиям:

1. $(\forall a, b \in f^{-1}(W))(aR_1b \Longrightarrow f(a)Rf(b))$;

2. $(\forall x, y \in W)(xRy \Longrightarrow (\forall a \in f^{-1}(x))(\exists b \in f^{-1}(y))(aR_1b))$;

3. $(\forall x \in W)(W_1 \backslash (f^{-1}(x) \downarrow) \in S_1)$;

4. $f^{-1}(Q) \subseteq Q_1$.

Частичным p-морфизмом из шкалы $\mu_1 = \langle W_1, R_1, Q_1\rangle$ на конечную шкалу $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ будем называть частичный p-морфизм из модельной структуры $\langle \mu_1, Up(W_1)\rangle$ на μ.

Далее рассмотрим конечную j-шкалу общего вида $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, в которой $e_0, ..., e_n$ – все ее различные элементы, причем e_0 – наименьший, $e_0, ..., e_m \notin Q$, $0 \leq m \leq n$, $e_{m+1}, ..., e_n \in Q$.

Дизъюнктивной областью шкалы $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ (в дальнейшем *d-областью*) будем называть всякую пару $(\overline{x}, \overline{y}) = \delta$ не пустых наборов элементов из W, удовлетворяющих условиям:

(1) в каждом из наборов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ элементы попарно не сравнимы, $|\overline{x}| \geq 2$;
(2) $(\forall x \in \overline{x})(\forall y \in \overline{y})(\neg xRy)$;
(3) $(\forall z \in W)(z \in \bigcap_{x\in\overline{x}} x \downarrow \Longrightarrow z \in \bigcup_{y\in\overline{y}} y \downarrow)$.

В работе [8] по шкале μ и некоторому (возможно пустому) множеству $\mathcal{D}$ дизъюнктивных областей шкалы μ построена, так называемая, каноническая формула $J(\mu, \mathcal{D})$.

Пусть $\mathfrak{M}_1=\langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ – модельная структура, а $\mu=\langle W, R, Q\rangle$ – конечная j-шкала. Модельная структура $\mathfrak{M}_1$ называется *допустимой для формулы* $J(\mu, \mathcal{D})$, если существует частичный p-морфизм $f\colon \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \langle W, R, Q\rangle$, удовлетворяющий условиям:

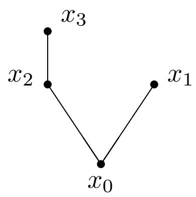
(A) если $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}$ и $c \in f^{-1}(W) \uparrow$,
то $c \in \bigcap_{x\in\overline{x}}(f^{-1}(x) \downarrow) \Longrightarrow c \in \bigcup_{y\in\overline{y}}(f^{-1}(y) \downarrow)$;

(B) $c \in f^{-1}(W) \uparrow \backslash Q_1 \Longrightarrow c \in f^{-1}(W \backslash Q) \downarrow$.

Теорема 1.1. [8]
$\mathfrak{M}_1 \not\models J(\mu, \mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда модельная структура $\mathfrak{M}_1$ допустима для формулы $J(\mu, \mathcal{D})$.

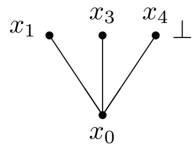
2. О моделях паранепротиворечивой логики **Lskp**

В работе [10] определены пять конечных j-шкал специального вида, с выделенными на них некоторыми d-областями



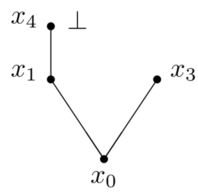
шкала η_1

$\mathcal{D}^1 = \{(\{x_1, x_3\}, \{x_2\})\}$



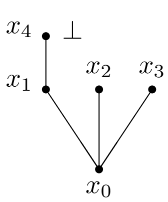
шкала η_2

$\mathcal{D}^2 = \{(\{x_1, x_3\}, \{x_4\})\}$



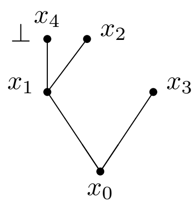
шкала η_3

$\mathcal{D}^3 = \emptyset$



шкала η_4

$\mathcal{D}^4 = \{(\{x_2, x_3\}, \{x_4\})\}$



шкала η_5

$\mathcal{D}^5 = \{(\{x_2, x_3\}, \{x_4\})\}$

Теорема 2.1. [10]
$\mathbf{Lj}{+}\mathbf{S} = \mathbf{Lj} + J(\eta_1, \mathcal{D}^1) + J(\eta_2, \mathcal{D}^2) + J(\eta_3, \mathcal{D}^3) + J(\eta_4, \mathcal{D}^4) + J(\eta_5, \mathcal{D}^5)$

В работе [7] была найдена характеризация логики **Lkp** в терминах конечных j-шкал Крипке, а именно был определен класс

$\mathbf{C_{kp}} \rightleftharpoons \{\mu = \langle W, R, Q\rangle \mid \mu$ – конечная острая шкала и удовлетворяет условию $(\star)$: $\forall z \in W$ множество $\{z\}\uparrow$ обладает свойством $\#\}$, где

множество U обладает свойством $\#$, если и только если $\forall E \subseteq U$ выполняется: множество $U \setminus (E\uparrow \setminus Q)\downarrow$ либо пустое, либо имеет наименьший элемент.

Теорема 2.2. [7]
Логика **Lkp** *характеризуется классом* $\mathbf{C_{kp}}$ *конечных j-шкал Крипке.*

Пусть $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ – произвольная j-шкала Крипке, а
$\eta_i = \langle W_i, R_i, Q_i\rangle$, $i = 1, \ldots, 5$ – одна из определенных ранее шкал.

Будем говорить, что *частичный p-морфизм* $f : \mu \longrightarrow \eta_i$ *удовлетворяет условию* (B_i) тогда и только тогда, когда

(B_i)**:** из $a \in f^{-1}(W_i)\uparrow \setminus Q$ следует $a \in f^{-1}(W_i \setminus Q_i)\downarrow$.

Будем говорить, что *частичный p-морфизм* $f : \mu \longrightarrow \eta_1$ *удовлетворяет условию* (A_1), если

(A_1)**:** из $a \in f^{-1}(W_1)\uparrow$ следует

$$a \in f^{-1}(x_1)\downarrow \cap f^{-1}(x_3)\downarrow \Longrightarrow a \in f^{-1}(x_2)\downarrow.$$

Аналогично, будем говорить, что *частичный p-морфизм* $f : \mu \longrightarrow \eta_2$ *удовлетворяет условию* (A_2), если

(A_2): из $a \in f^{-1}(W_2)\uparrow$ следует

$$a \in f^{-1}(x_1)\downarrow \cap f^{-1}(x_3)\downarrow \Longrightarrow a \in f^{-1}(x_4)\downarrow.$$

Так как $\mathcal{D}^3{=}\{(\overline{x},\overline{y})\}{=}\emptyset$, то условие

(A_3): из $a \in f^{-1}(W_3)\uparrow$ следует

$$a \in \bigcap_{x\in\overline{x}} f^{-1}(x)\downarrow \Longrightarrow a \in \bigcup_{y\in\overline{y}} f^{-1}(y)\downarrow,$$

очевидно является тождественно истинным, поэтому всякий частичный p-морфизм $f : \mu \longrightarrow \eta_3$ этому условию удовлетворяет.

Далее будем говорить, что *частичный p-морфизм* $f : \mu \longrightarrow \eta_4$ *удовлетворяет условию* (A_4), если

(A_4): из $a \in f^{-1}(W_4)\uparrow$ следует

$$a \in f^{-1}(x_2)\downarrow \cap f^{-1}(x_3)\downarrow \Longrightarrow a \in f^{-1}(x_4)\downarrow.$$

И, наконец, будем говорить, что *частичный p-морфизм* $f : \mu \longrightarrow \eta_5$ *удовлетворяет условию* (A_5), если

(A_5): из $a \in f^{-1}(W_5)\uparrow$ следует

$$a \in f^{-1}(x_2)\downarrow \cap f^{-1}(x_3)\downarrow \Longrightarrow a \in f^{-1}(x_4)\downarrow.$$

Определим класс конечных j-шкал Крипке $\mathbf{C_{skp}}$:

$\mathbf{C_{skp}} \rightleftharpoons \{\mu{=}\langle W, R, Q\rangle \mid \mu$ – конечная шкала и
1). для любого $z \in W$ множество $\{z\}\uparrow$ обладает свойством $\#$,
2). не существует частичного p-морфизма $h_i : \mu \longrightarrow \eta_i$ $(1 \leq i \leq 5)$, удовлетворяющего соответствующим условиям (A_i) и $(B_i)\}$.

Теорема 2.3. *Логика* **Lskp** *характеризуется классом* $\mathbf{C_{skp}}$ *конечных j-шкал Крипке.*

Доказательство. Утверждение о корректности очевидно в силу теорем 1.1, 2.1, 2.2. Докажем полноту данной логики относительно указанного класса шкал.

Пусть **Lskp** $\nvdash \psi$ для некоторой формулы ψ. Тогда $\mathcal{M}_{Lskp} \not\models \psi$, где $\mathcal{M}_{Lskp}{=}\langle T_{Lskp}, \subseteq, Q_{Lskp}, V_{Lskp}\rangle$– каноническая модель логики **Lskp**.

Пусть Ψ_0 – множество подформул формулы ψ, а Ψ – замыкание $\Psi_0 \cup \bot$ относительно $\wedge$, $\supset$.

Рассмотрим модель $\mathcal{M}'{=}\langle T', R', Q', V'\rangle$– фильтрацию $\mathcal{M}_{Lskp}$ по Ψ, где
T' есть множество классов эквивалентности $(x \sim y \iff x \cap \Psi = y \cap \Psi)$,
$Q'{=}\{[x] \in T' \mid \bot \in x\}$,
$[x]R'[y] \iff x \cap \Psi \subseteq y \cap \Psi$ и
$V'(p) = \{[x] \in T' | p \in \Psi$ и $p \in x\}$.

По Теореме фильтрации $\mathcal{M}' \not\models' \psi$, а по аналогу Теоремы Диего для расширений минимальной логики [9] шкала $\mathcal{M}'$ конечна. Покажем, что шкала μ' модели $\mathcal{M}'$ принадлежит классу $\mathbf{C_{skp}}$. Предположим противное, тогда либо

(I): существует такой элемент $[a_0] \in T'$, что для некоторого $E_0 \subseteq [a_0]\uparrow$ множество $[a_0]\uparrow \backslash (E_0\uparrow \backslash Q')\downarrow$ не пусто и не имеет наименьшего элемента, либо

(II): существует частичный p-морфизм $f_i : \mu' \longrightarrow \eta_i$ для некоторого $1 \leq i \leq 5$, причем f_i удовлетворяет условиям (A_i) и (B_i).

Случай **(I)** рассматривается в точности так, как это было сделано в [7] (теорема 2.3).
Рассмотрим случай **(II)**.

Пусть существует частичный p-морфизм $f : \mu' \longrightarrow \eta_1$, удовлетворяющий условиям (A_1) и (B_1).

Для произвольного элемента $[a] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$ выполняется:

$$\text{для любого } [b] \in f^{-1}(W_1) \uparrow \setminus f^{-1}(x_3) \uparrow \text{ неверно, что } [a]R'[b].$$

Тогда по определению отношения R' существует формула $\varphi_{a,b} \in \Psi$ такая, что $[a] \models' \varphi_{a,b}$ и $[b] \not\models' \varphi_{a,b}$. Пусть $\varphi_a = \bigwedge_{[b]\in f^{-1}(W_1)\uparrow \setminus f^{-1}(x_3)\uparrow} \varphi_{a,b}$ для $[a] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$. Понятно, что $\varphi_a \in \Psi$, $[a] \models' \varphi_a$ и для любого элемента $[b] \in f^{-1}(W_1) \uparrow \setminus f^{-1}(x_3) \uparrow$ выполняется $[b] \not\models' \varphi_a$. Далее, положим $\varphi = \bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow} \varphi_a$.
Тогда

1. для любого $[a] \in f^{-1}(W_1) \uparrow$ выполняется
$$[a] \models' \varphi \Longleftrightarrow [a] \in f^{-1}(x_3) \uparrow;$$
действительно, если $[a] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$, то $[a] \models' \varphi_a$, следовательно $[a] \models' \varphi$. Обратно, пусть $[a] \models' \varphi$, тогда $[a] \models' \varphi_{a_1}$ для некоторого $[a_1] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$. Предположим, что $[a] \in f^{-1}(W_1) \uparrow \setminus f^{-1}(x_3) \uparrow$, тогда $[a] \not\models' \varphi_{a_1,a}$ по определению формулы $\varphi_{a_1,a}$, а следовательно $[a] \not\models' \varphi_{a_1}$, противоречие;
2. если $[a] \in f^{-1}(x_1) \uparrow$, то $[a] \models' \varphi \supset \bot$;
действительно, предположим противное, пусть $[a] \in f^{-1}(x_1) \uparrow$ и $[a] \not\models' \varphi \supset \bot$. Тогда существует элемент $[b] \in [a] \uparrow$ такой, что $[b] \models' \varphi$ и $[b] \not\models' \bot$, поэтому, учитывая 1), получаем, что $[b] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$. Кроме того, так как $[b] \in f^{-1}(W_1) \uparrow \setminus Q'$ имеем $[b] \in f^{-1}(W_1 \setminus Q_1) \downarrow$, что возможно только при условии $[b] \in f^{-1}(x_3) \downarrow$. Поскольку элемент $[a] \in f^{-1}(x_1) \uparrow$ и $[a]R'[b]$, получаем $[b] \in f^{-1}(x_1) \uparrow$ и, кроме того, $[b] \in f^{-1}(x_3) \downarrow$, а значит $x_1 R_1 x_3$, противоречие;
3. если $[a] \in f^{-1}(x_2)$, то $[a] \models' (\varphi \supset \bot) \supset \bot$ и $[a] \not\models' \varphi$;
действительно, так как $[a] \in f^{-1}(x_2)$ имеем $[a] \not\models' \varphi$. Предположим, что $[a] \not\models' (\varphi \supset \bot) \supset \bot$, тогда существует элемент $[b] \in [a] \uparrow$ такой, что $[b] \models' (\varphi \supset \bot)$ и $[b] \not\models' \bot$. Так как $[b] \in f^{-1}(x_2) \uparrow \setminus Q'$, то $[b] \in f^{-1}(x_3) \downarrow \cup f^{-1}(x_1) \downarrow$. Если $[b] \in f^{-1}(x_1) \downarrow$, то существует элемент $[c] \in f^{-1}(x_1)$ такой, что $[b]R'[c]$, а значит, учитывая, что $[b] \in f^{-1}(x_2) \uparrow$, имеем $x_2 R_1 x_1$, противоречие. Если $[b] \in f^{-1}(x_3) \downarrow$, то $[b] \not\models' \varphi \supset \bot$, так как для любого элемента $[c] \in f^{-1}(x_3)$ выполняется $[c] \models' \varphi$ и $[c] \not\models' \bot$. Итак, мы показали, что в рассматриваемом случае $[a] \models' (\varphi \supset \bot) \supset \bot$;
4. для любого элемента $[a] \in f^{-1}(x_0)$ выполняется:
$$[a] \not\models' \varphi \supset \bot \text{ и } [a] \not\models' (\varphi \supset \bot) \supset \bot;$$
так как f – частичный p-морфизм, то для всякого $[a] \in f^{-1}(x_0)$ существует элемент $[b] \in f^{-1}(x_1)$ такой, что $[a]R'[b]$, следовательно $[b] \models' \varphi \supset \bot$ и $[b] \not\models' \bot$. С другой стороны, для любого $[a] \in f^{-1}(x_0)$ существует элемент $[c] \in f^{-1}(x_3)$ такой, что $[a]R'[c]$, причем $[c] \models' \varphi$ и $[c] \not\models' \bot$.

Лемма 2.1. $a_0 \models (\bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\neg\neg\varphi \supset \varphi_a)) \supset \varphi \vee \neg\varphi$,
где элемент $a_0 \in T_{L_{skp}}$ *является представителем класса* $[a_0] \in f^{-1}(x_0)$.

Доказательство. Предположим противное,
$a_0 \not\models (\bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\neg\neg\varphi \supset \varphi_a)) \supset \varphi \vee \neg\varphi$, тогда существует элемент $b \in a_0 \uparrow$ такой, что $b \models \neg\neg\varphi \supset \varphi_{a_1}$ для некоторого $[a_1] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$ и $b \not\models \varphi$, $b \not\models \neg\varphi$, последнее в свою очередь влечет $[b] \notin Q'$. Так как $a_0 \subseteq b$ имеем $[a_0]R'[b]$, поэтому $[b] \in f^{-1}(W_1) \uparrow \setminus Q'$.

Заметим, что $\mathbf{Lj} \vdash ((\theta_1 \vee \theta_2) \supset \theta) \supset ((\theta_1 \supset \theta) \wedge (\theta_2 \supset \theta))$ и
$\mathbf{Lj} \vdash ((\theta_1 \supset \theta) \wedge (\theta_2 \supset \theta)) \supset ((\theta_1 \vee \theta_2) \supset \theta)$, поэтому формула $\neg\varphi$ эквивалентна относительно $\mathbf{Lj}$ формуле $\bigwedge_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\varphi_a \supset \bot)$, которая принадлежит множеству Ψ. Кроме того, так как $\varphi_a \in \Psi$, получаем, что $[b] \models' \neg\neg\varphi \supset \varphi_{a_1}$, $[b] \not\models' \neg\varphi$. Так как $[b] \not\models' \varphi \supset \bot$, то существует элемент $[c] \in [b] \uparrow$ такой, что $[c] \models' \varphi$ и $[c] \not\models' \bot$. В этом случае получаем, что $[c] \in f^{-1}(W_1 \setminus Q_1) \downarrow$ и, учитывая, что $[c] \models' \varphi$ имеем $[c] \in f^{-1}(x_3) \uparrow \cap f^{-1}(x_3) \downarrow$, поэтому $[b] \in f^{-1}(x_3) \downarrow$. Предположим, что $[b] \notin f^{-1}(x_3) \uparrow$, тогда $[b] \not\models' \varphi$, следовательно $[b] \not\models' \varphi_{a_1}$, что влечет $[b] \not\models' \neg\neg\varphi$. Тогда существует элемент $[d] \in [b] \uparrow$ такой, что $[d] \models' \varphi \supset \bot$ и $[d] \not\models' \bot$. Так как $[d] \in f^{-1}(W_1) \uparrow \setminus Q'$, то $[d] \in f^{-1}(W_1 \setminus Q_1) \downarrow$, причем $[d] \notin f^{-1}(x_3) \downarrow$, иначе $[d] \not\models' \varphi \supset \bot$. Следовательно $[d] \in f^{-1}(x_1) \downarrow$, а значит и $[b] \in f^{-1}(x_1) \downarrow$. Поскольку $[b] \in f^{-1}(x_1) \downarrow \cap f^{-1}(x_3) \downarrow$ и отображение f удовлетворяет условию (A_1), то $[b] \in f^{-1}(x_2) \downarrow$. Так как для всякого элемента $[a] \in f^{-1}(x_2)$ выполняется $[a] \models' \neg\neg\varphi$ и $[a] \not\models' \varphi$, то $[b] \not\models' \neg\neg\varphi \supset \varphi_{a_1}$, противоречие. Таким образом, мы показали, что $[b] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$. Тогда $[b] \models' \varphi$, а значит $[b] \models' \varphi_{a_2}$ для некоторого $[a_2] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$. Так как $\varphi_{a_2} \in \Psi$, то $b \models \varphi_{a_2}$, а следовательно $b \models \varphi$, противоречие. □

Так как $a_0 \in T_{L_{skp}}$, то $a_0 \models (\neg p \supset q \vee r) \supset (\neg p \supset q) \vee (\neg p \supset r)$ и $a_0 \models S$, поэтому применив достаточное число раз аксиому Крайзеля-Патнема получим

$$a_0 \models (\neg\neg\varphi \supset \varphi) \supset \bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\neg\neg\varphi \supset \varphi_a).$$

Используя лемму и последний факт получаем, что

$$a_0 \models (\neg\neg\varphi \supset \varphi) \supset (\varphi \vee \neg\varphi).$$

Применив аксиому Скотта получим, что $a_0 \models \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$. Однако, имеем
$[a_0] \not\models' \neg\varphi$ и $[a_0] \not\models' \neg\neg\varphi$, а формулы $\neg\varphi$ и $\neg\neg\varphi$ эквивалентны относительно $\mathbf{Lj}$ определенным формулам из Ψ, поэтому $a_0 \not\models \neg\varphi$ и $a_0 \not\models \neg\neg\varphi$, противоречие.

Пусть существует частичный p-морфизм $f : \mu' \longrightarrow \eta_2$, удовлетворяющий условиям (A_2) и (B_2).

Для произвольного элемента $[a] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$ выполняется:

$$\text{для любого } [b] \in f^{-1}(W_2) \uparrow \setminus f^{-1}(x_3) \uparrow \text{ неверно, что } [a]R'[b].$$

Тогда по определению отношения R' существует формула $\varphi_{a,b} \in \Psi$ такая, что $[a] \models' \varphi_{a,b}$ и $[b] \not\models' \varphi_{a,b}$. Пусть $\varphi_a = \bigwedge_{[b]\in f^{-1}(W_2)\uparrow\setminus f^{-1}(x_3)\uparrow} \varphi_{a,b}$ для элемента
$[a] \in f^{-1}(x_3) \uparrow$. Понятно, что $\varphi_a \in \Psi$, $[a] \models' \varphi_a$ и для любого
$[b] \in f^{-1}(W_2) \uparrow \setminus f^{-1}(x_3) \uparrow$ выполняется $[b] \not\models' \varphi_a$. Далее, положим
$\varphi = \bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow} \varphi_a$.

Тогда

1. для любого $[a] \in f^{-1}(W_2)\uparrow$ выполняется
$$[a] \models' \varphi \Longleftrightarrow [a] \in f^{-1}(x_3)\uparrow;$$
действительно, если $[a] \in f^{-1}(x_3)\uparrow$, то $[a] \models' \varphi_a$, следовательно $[a] \models' \varphi$. Обратно, пусть $[a] \models' \varphi$, тогда $[a] \models' \varphi_{a_1}$ для некоторого $[a_1] \in f^{-1}(x_3)\uparrow$. Предположим, что $[a] \in f^{-1}(W_2)\uparrow \setminus f^{-1}(x_3)\uparrow$, тогда $[a] \not\models' \varphi_{a_1,a}$ по определению формулы $\varphi_{a_1,a}$, а следовательно $[a] \not\models' \varphi_{a_1}$, противоречие;
2. если $[a] \in f^{-1}(x_1)\uparrow$, то $[a] \models' \varphi \supset \bot$;
действительно, предположим противное, пусть $[a] \in f^{-1}(x_1)\uparrow$ и $[a] \not\models' \varphi \supset \bot$. Тогда существует элемент $[b] \in [a]\uparrow$ такой, что $[b] \models' \varphi$ и $[b] \not\models' \bot$, поэтому, учитывая 1), получаем, что $[b] \in f^{-1}(x_3)\uparrow$. Кроме того, так как $[b] \in f^{-1}(W_1)\uparrow \setminus Q'$ имеем $[b] \in f^{-1}(W_1 \setminus Q_1)\downarrow$, что возможно только при условии $[b] \in f^{-1}(x_3)\downarrow$. Учитывая, что $[a] \in f^{-1}(x_1)\uparrow$ и $[a]R'[b]$, получаем $[b] \in f^{-1}(x_1)\uparrow$ и $[b] \in f^{-1}(x_3)\downarrow$, а значит $x_1R_2x_3$, противоречие;
3. если $[a] \in f^{-1}(x_4)$, то $[a] \models' (\varphi \supset \bot) \supset \bot$ и $[a] \not\models' \varphi$;
действительно, так как $[a] \in f^{-1}(x_4)$ имеем $[a] \not\models' \varphi$, иначе $x_3R_2x_4$; кроме того, $[a] \in Q'$, поэтому $[a] \models' \neg\neg\varphi$;
4. для любого элемента $[a] \in f^{-1}(x_0)$ выполняется:
$$[a] \not\models' \varphi \supset \bot \text{ и } [a] \not\models' (\varphi \supset \bot) \supset \bot;$$
так как f – частичный p-морфизм, то для всякого $[a] \in f^{-1}(x_0)$ существует элемент $[b] \in f^{-1}(x_1)$ такой, что $[a]R'[b]$, а значит выполняется $[b] \models' \varphi \supset \bot$ и $[b] \not\models' \bot$. С другой стороны, для любого $[a] \in f^{-1}(x_0)$ существует элемент $[c] \in f^{-1}(x_3)$ такой, что $[a]R'[c]$, причем $[c] \models' \varphi$ и $[c] \not\models' \bot$.

Лемма 2.2. *$a_0 \models (\bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\neg\neg\varphi \supset \varphi_a)) \supset \varphi \vee \neg\varphi$, где элемент $a_0 \in T_{L_{skp}}$ является представителем класса $[a_0] \in f^{-1}(x_0)$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть имеет место $a_0 \not\models (\bigvee_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\neg\neg\varphi \supset \varphi_a)) \supset \varphi \vee \neg\varphi$, тогда существует элемент $b \in a_0\uparrow$ такой, что $b \models \neg\neg\varphi \supset \varphi_{a_1}$ для некоторого $[a_1] \in f^{-1}(x_3)\uparrow$ и $b \not\models \varphi$, $b \not\models \neg\varphi$, последнее в свою очередь влечет $[b] \notin Q'$. Так как $a_0 \subseteq b$ имеем $[a_0]R'[b]$, поэтому $[b] \in f^{-1}(W_2)\uparrow \setminus Q'$, а значит $[b] \in f^{-1}(W_2 \setminus Q_2)\downarrow$.

Как и ранее $\mathbf{Lj} \vdash ((\boldsymbol{\theta_1} \vee \boldsymbol{\theta_2}) \supset \theta) \supset ((\boldsymbol{\theta_1} \supset \theta) \wedge (\boldsymbol{\theta_2} \supset \theta))$ и $\mathbf{Lj} \vdash ((\boldsymbol{\theta_1} \supset \theta) \wedge (\boldsymbol{\theta_2} \supset \theta)) \supset ((\boldsymbol{\theta_1} \vee \boldsymbol{\theta_2}) \supset \theta)$, поэтому формула $\neg\varphi$ эквивалентна относительно $\mathbf{Lj}$ формуле $\bigwedge_{[a]\in f^{-1}(x_3)\uparrow}(\varphi_a \supset \bot)$, которая принадлежит множеству Ψ. Кроме того, так как $\varphi_a \in \Psi$, получаем, что $[b] \models' \neg\neg\varphi \supset \varphi_{a_1}$, $[b] \not\models' \neg\varphi$. Так как $[b] \not\models' \varphi \supset \bot$, то существует элемент $[c] \in [b]\uparrow$ такой, что $[c] \models' \varphi$ и $[c] \not\models' \bot$. В этом случае получаем, что $[c] \in f^{-1}(W_2 \setminus Q_2)\downarrow$ и, учитывая, что $[c] \models' \varphi$ имеем $[c] \in f^{-1}(x_3)\uparrow \cap f^{-1}(x_3)\downarrow$, поэтому $[b] \in f^{-1}(x_3)\downarrow$. Предположим, что $[b] \notin f^{-1}(x_3)\uparrow$, тогда $[b] \not\models' \varphi$, следовательно $[b] \not\models' \varphi_{a_1}$, что влечет $[b] \not\models' \neg\neg\varphi$. Тогда существует элемент $[d] \in [b]\uparrow$ такой, что $[d] \models' \varphi \supset \bot$ и $[d] \not\models' \bot$. Так как $[d] \in f^{-1}(W_2)\uparrow \setminus Q'$, то $[d] \in f^{-1}(W_2 \setminus Q_2)\downarrow$, причем $[d] \notin f^{-1}(x_3)\downarrow$, иначе $[d] \not\models' \varphi \supset \bot$. Следовательно $[d] \in f^{-1}(x_1)\downarrow$, а значит и $[b] \in f^{-1}(x_1)\downarrow$. Поскольку $[b] \in f^{-1}(x_1)\downarrow \cap f^{-1}(x_3)\downarrow$ и отображение f удовлетворяет условию (A_2), то $[b] \in f^{-1}(x_4)\downarrow$. Так как для всякого элемента $[a] \in f^{-1}(x_4)$ выполняется $[a] \models' \neg\neg\varphi$ и $[a] \not\models' \varphi$, то $[b] \not\models' \neg\neg\varphi \supset \varphi_{a_1}$, противоречие. Таким образом, мы показали, что $[b] \in f^{-1}(x_3)\uparrow$. Тогда $[b] \models' \varphi$, а значит $[b] \models' \varphi_{a_2}$ для некоторого $[a_2] \in f^{-1}(x_3)\uparrow$. Так как $\varphi_{a_2} \in \Psi$, то $b \models \varphi_{a_2}$, а следовательно $b \models \varphi$, противоречие. □

Так как $a_0 \in T_{L_{skp}}$, то $a_0 \models (\neg p \supset q \vee r) \supset (\neg p \supset q) \vee (\neg p \supset r)$ и $a_0 \models S$, поэтому применив достаточное число раз аксиому Крайзеля-Патнема получим

$$a_0 \models (\neg\neg\varphi \supset \varphi) \supset \bigvee\nolimits_{[a] \in f^{-1}(x_3)\uparrow} (\neg\neg\varphi \supset \varphi_a).$$

Используя лемму и последний факт получаем, что

$$a_0 \models (\neg\neg\varphi \supset \varphi) \supset (\varphi \vee \neg\varphi).$$

Применив аксиому Скотта получим, что $a_0 \models \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$. Однако, имеем $[a_0] \not\models' \neg\varphi$ и $[a_0] \not\models' \neg\neg\varphi$, а формулы $\neg\varphi$ и $\neg\neg\varphi$ эквивалентны относительно **Lj** определенным формулам из Ψ, поэтому $a_0 \not\models \neg\varphi$ и $a_0 \not\models \neg\neg\varphi$, противоречие. Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Указанная характеризация логики **Lskp** и Теорема Харропа [2] дают возможность легко утверждать, что

Следствие 2.1. *Логика* **Lskp** *разрешима.*

Список литературы

[1] Chagrov A., Zakharyaschev M.,*Modal Logic*, Oxford, Clarendon press, 1997.

[2] D. Gabbay, *The decidability of the Kreisel-Putnam system*, The Journal of Symbolic Logic, **35**: 1 (1970), 54–63.

[3] P. Minari, *On the extensions of intuitionistic propositional logic with Kreisel-Putnam's and Scott's schemes*, Studia Logica, **45**: 1 (1986), 55–68.

[4] S. Odintsov, *On the structure of paraconsistent extensions of Johansson's logic*, Journal of Applied Logic 3 (2005), 43–65

[5] S. Odintsov, *Representation of j-algebras and Segerberg's logics*, Logique at Analyse, **165-166** (1999), 81–106.

[6] K. Segerberg, *Propositional Logics Related to Heyting's and Johansson's*, Theoria, **34** (1968), 26–61.

[7] М. Стукачева, *Некоторые замечания о конструктивных расширениях минимальной логики*, Вестник Новосибирского государственного университета, серия: Математика, механика, информатика, **5**: 3 (2005), 3–16.

[8] М. Стукачева, *О канонических формулах для расширений минимальной логики*, Сибирские электронные математические известия, **3** (2006), 312–334 (`http://semr.math.nsc.ru`).

[9] М. Стукачева, *О дизъюнктивном свойстве в классе паранепротиворечивых расширений минимальной логики*, Алгебра и логика, **43**: 2 (2004), 235–252.

[10] М. Стукачева, *О канонических формулах паранепротиворечивого аналога логики Скотта*, Алгебра и Логика, сдано в печать.

Марина Викторовна Стукачева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: stukacheva@math.nsc.ru