S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 427–439 (2008) УДК 517.54, 517.956, 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

ИТОГОВЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ ПО МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОМУ ИНТЕГРАЦИОННОМУ ПРОЕКТУ СО РАН: «РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ И ГРАВИМАГНИТОРАЗВЕДКЕ»

В. В. ВАСИН, В. Н. ДУБИНИН, В. Г. РОМАНОВ

Abstract. Investigations of inverse problems for differential or integro-differential equations are presented. Methods of numerical solutions for these problems are developed. These methods are used in some applied problems.

Keywords: inverse and ill-posed problems, Cauchy problem, electrodynamics, elasticity, transport equation, stability estimates, uniqueness, numerical methods.

1. Введение

Начиная с середины XX века, в математике началось стремительное изучение обратных и некорректных задач. Это было обусловлено как внутренней логикой развития математики, появлением электронных вычислительных машин (мощность которых также стремительно возрастала и продолжает расти) и необыкновенно широким кругом приложений обратных и некорректных задач. Если первые постановки таких задач возникли в физике, астрономии, геофизике, то сейчас уже трудно найти область

Vasin V.V., Dubinin V.N., Romanov V.G., Concluding scientific report for the project of Siberian Division of RAS: «A development of theory and computational technology for solving inverse and extremal problems with an application to mathematical physics and gravity-magneto-prospecting» .

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 24 ноября 2008 г.

естествознания, в которой бы исследователи не формулировали и не пытались решать обратные и некорректные задачи. Дело в том, что решая прямые задачи исследователи находят (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные явления, например, скорости распространение звука, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и многое другое. При этом свойства сред (коэффициенты уравнений), а также начальное состояние процесса (в нестационарном случае) или его свойства на границе (в случае ограниченной области) предполагаются известными. Но именно свойства среды часто являются искомыми. И тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. С этими коэффициентами связаны такие важные характеристики сред как плотность, электропроводность, теплопроводность, а также местоположение, форма и структура включений, дефектов, источников (тепла, колебаний, напряжения, загрязнения и т. д.). При таком широком наборе приложений теория обратных и некорректных задач является одной из наиболее актуальных и стремительно развивающихся областей мировой науки. Ее развитием и применением занимаются не только математики, но и исследователи, работающие в самых различных областях физики, химии, геофизики, медицины, биологии, в общем, всюду, где находят применение математические методы. Анализ текущей научной литературы и проводимых научных конференций показывает, что исследованию обратных задач уделяется большое внимание. Ежегодно проходит до десятка международных научных конференций, в которых это направление является одним из основных.

Настоящее исследование направлено, в основном, на изучение вопросов корректности новых обратных задач, создание численных методов их решения и программ, а также использованию развитых методов при решении конкретных прикладных проблем. Рассматриваемые задачи заключаются в определении переменных коэффициентов дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений внутри некоторой ограниченной области по информации о решениях краевых задач, заданных на границе рассматриваемой области. Создание методов и алгоритмов, перерабатывающих заданную информацию в искомые функции, является основной целью исследования. Попутно с этим решаются и некоторые смежные математические проблемы.

В выполнении проекта принимали участие сотрудники Института математики СО РАН, Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск), Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток), Института математики и механики УрО РАН, Института геофизики УрО РАН (г. Екатеринбург).

Отчет представлен в форме обзорных статей, в которых дается математическая постановка рассматриваемых задач и приводятся результаты их исследования. В следующем разделе резюмируются основные полученные результаты.

2. Основные результаты

При построении алгоритмов решения обратных задач часто используется процедура продолжения решения с границы области внутрь ее. В математическом отношении это связано с решением некорректной задачи Коши. В связи с этим, очень важной проблемой является построение оценки устойчивости решения соответствующей задачи. Эти оценки используются обычно при изучении скорости сходимости итерационных градиентных методов решения задачи, но представляют и самостоятельный интерес. Такие оценки были построены для уравнений электродинамики [44], уравнений упругости [71], гиперболического уравнения второго порядка [66].

В случае, когда электродинамические параметры среды и внешний ток не зависят от одной из координат, стационарная система уравнений Максвелла приводится к двум уравнениям Гельмгольца на плоскости относительно тех компонент электрического и магнитного поля, которые соответствуют этой координате, а остальные компоненты находятся дифференцированием. Поэтому, если характеристики поля измеряются только на части границы исследуемой области, то для нахождения векторов электрической и магнитной напряженностей поля внутри области требуется решить задачу Коши для уравнения Гельмгольца. Решение последней задачи дается формулами типа Карлемана [51]. В работе [52] подобная формула получена для более общего случая эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде.

Для линейной системы уравнений упругости рассмотрена задача о построении решения, отвечающего произвольно направленной сосредоточенной силе, и выписано лучевое разложение решения [45]. При этом удается детально охарактеризовать структуру не только сингулярной части решения, но и ее регулярной части. В частности, основываясь на полученном разложении, можно вычислить скачки решения и всех его производных при переходе через характеристические поверхности, отвечающие продольным и поперечным волнам. Последнее весьма актуально при исследовании обратных задач сейсмики.

Исследована двумерная обратная задача об определении ядра интегрального оператора в интегро-дифференциальном уравнении для упругой среды с памятью. Найдена оценка устойчивости решения задачи [72].

В работе [55] исследована многомерная обратная задача в шаре об определении скоростей распространения продольных и поперечных волн, зависящих от трех пространственных переменных и плотности среды, зависящей только от радиальной переменной. Предложен алгоритм определения этих трех характеристик, основанный на методе линеаризации. Получена оценка устойчивости решения линеаризованной задачи об определении всех упругих параметров среды.

Значительный интерес представляют исследования диффузионных процессов аномальной природы, которые встречаются во множестве физических систем. Для аномального диффузионного процесса характерно, что зависимость среднеквадратического смещения от времени отклоняется от линейного закона. При этом показатель аномальной диффузии определяет, будет ли процесс классифицирован как субдиффузионный (дисперсионный, медленный) или супердиффузионный (ускоренный, быстрый). Рассматриваемым моделям соответствуют дифференциальные уравнения дробного порядка по времени. В работах [53], [54] разработаны два подхода к численному решению краевых задач для уравнений аномальной диффузии. Первый подход основан на построении разностной схемы с использование производной Грюнвальда - Летникова. Второй подход является обобщением метода Монте Карло, предназначенным для статистического моделирования уравнений аномальной диффузии. На основе полученных "законов сохранения"для уравнения аномальной диффузии, построена многослойная разностная схема с переменным числом слоев и получено условие устойчивости схемы. Приведены результаты компьютерных экспериментов и дан сравнительный анализ этих подходов.

В монографии [32] исследован ряд численных алгоритмов решения обратных задач гравиразведки, основанных на продолжении поля вглубь Земли. Разработаны и исследованы оптимизационные алгоритмы решения задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерной постановке. Изучены условия сходимости по функционалу и сильной сходимости. Получены оценки скорости сходимости, на основе которых сформулировано правило условной устойчивости для выбора номера конечной итерации. Приведены численные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений , в том числе для волнового уравнения, уравнения акустики, системы уравнений Максвелла. В главе, посвященной общей теории некорректных задач, приведены новые результаты об использовании оценок условной устойчивости решения для получения оценок скорости сходимости градиентных методов и, что особенно важно для практических расчетов, приведены способы получения новых правил остановки регуляризирующего процесса, основанные на оценках условной устойчивости.

В книге [33] приведены новые методы и алгоритмы численного решения обратных задач по тематике гранта. Получена оценка скорости сильной сходимости метода итераций Ландвебера для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.

Разработан новый алгоритм определения интегральных характеристик плотности среды по данным акустического зондирования, основанный на методе граничного управления. Проведено численное тестирование алгоритма и его сравнение с многомерным аналогом метода Гельфанда-Левитана [16], [19].

Предложен численный алгоритм нахождения компонент электромагнитного поля гармонических источников для горизонтально-слоистых анизотропных сред. Решение находится по явным аналитическим выражениям в произвольной точке среды. Не существует ограничений на мощности слоев: модель среды может содержать как очень толстые, так и очень тонкие слои [34]. Проведенный в работе [35] численный эксперимент показал, что схема действий при оптимизационном решении обратной коэффициентной гиперболической задачи, часто используемая исследователями на практике, требует значительно большего времени вычислений, чем предложенная в статье.. Увеличение времени счета идет за счет использования более мелкой сети разбиения и увеличения количества итераций процесса минимизации функционала невязки для уменьшения его величины до определенного значения.

Исследована специальная задача интегральной геометрии [10], [11], в которой заданы интегралы по всем прямым от неизвестной кусочно-гладкой функции. Носитель этой функции принадлежит заданной ограниченной области в евклидовом пространстве любой размерности, а сама функция зависит не только от переменных, по которым производится интегрирование, но и от параметров, характеризующих прямые, пересекающие область. Искомыми считаются поверхности разрывов подынтегральной функции. К этой задаче сводятся некоторые проблемы рентгеновской томографии, ранее изученные авторами, в которых в качестве математической модели миграции фотонов в веществе использовалось интегро-дифференциальное уравнение переноса. Настоящее исследование отличается от проведенного ранее рядом предположений большей общности и вместе с тем большей простотой изложения. Кроме того, рассмотрен случай неполной информации. Есть основания предполагать, что результаты этой работы могут использоваться для дальнейшего развития теории рентгеновской томографии и в то же время представлять собой самостоятельную ценность, как элемент теории интегральной геометрии. Доказанная конструктивная теорема единственности, помимо теоретического значения, может быть использована для исследования проблем неразрушающего контроля объектов методами радиационной диагностики при весьма широких предположениях о характере источников излучения и при учете всех видов взаимодействий излучения с веществом.

Уравнения типа свертки тесно связаны с приложениями. Это задачи классической математической физики и ее обратные задачи, всевозможные задачи современной техники и экономики: ядерной физики, автоматического управления, игр, массового обслуживания и др. К настоящему времени, теория уравнений типа свертки далека от завершения. Не существует теории корректности с обозримыми условиями корректности. Успех в исследовании достигнут лишь в частных случаях. В работах [19]-[22] получены новые утверждения в теории уравнений в свертках на конечном интервале, найдены необходимые и достаточные условия корректности, исследована векторная задача Римана.

Иссследована обратная задача для нелинейного эволюционного уравнения 2-го порядка. Предложен новый способ конструктивного исследования поиска нелинейности эволюционного уравнения в комплекснозначном случае. Рассматриваемая обратная задача редуцирована к классическим проблемам: формулам Карлемана, групповому анализу, функциональным уравнениям, прямым задачам теории дифференциальных уравнений [48].

Разработан метод построения поля скоростей по кинематическим данным от глубокофокусных землетрясений, использующий трехмерную сплайн-аппроксимацию искомой функции [13], [69]. Метод применен к изучению поля скоростей продольных сейсмических волн в фокальной зоне Камчатки.

Систематизированы многочисленные формулы представления решений в обратных задачах для дифференциальных уравнений. Найдены новые представления. Основная цель этих исследований — получение наиболее общих формул для решения и коэффициентов эволюционных уравнений с последующим их использованием при изучении прямых и обратных задач [48]. Составлены таблицы, содержащие формулы более чем для 120 уравнений [49].

Предложены конструктивные методы исследования линейных и нелинейных обратных задач для эволюционных уравнений. В частности, изучена линейная обратная задача перевода субстанции из одного состояния в другое для эволюционного уравнения и получены формальные формулы для ее решения, сформулированы достаточные условия корректности этих формул, найдены новые формулы для решений и коэффициентов систем многомерных кинетических уравнений [14].

Рассмотрены вопросы существования преобразований дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, и поиска информации для построения преобразований с определенными условиями. Приведены некоторые примеры конструирования решений обратных задач на основе двумерного уравнения теплопроводности [42]. Получены точные представления решения и коэффициентов кинетического уравнения, описывающего движение частиц в плазме [69].

Рассмотрена задача определения источника в операторно-дифференциальном уравнении первого порядка [1]. Задача исследована методом введения параметра. Этот метод позволяет доказать теоремы существования и единственности решения. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратных задач определения коэффициента при младшей производной и правой части специального вида параболического уравнения второго порядка.

Для дискретного аналога задачи теплопроводности в постановке "температура"с краевыми условиями второго рода предложен и обоснован экономичный неявный итерационный метод, позволяющий находить нормальное обобщенное решение, а для дискретного аналога задачи теплопроводности в постановке "потоки"с краевыми условиями второго рода предложен и обоснован экономичный неявный итерационный метод, позволяющий находить нормальное обобщенное решение и определить проекцию правой части задачи в постановке "температура"на подпространство разрешимости. Применяемый в методах переобусловливатель строится исходя из сопряженно-факторизованной структуры оператора задачи и в подпространстве разрешимости совпадает с переобусловливателем попеременно треугольного метода. Выбор оптимальных итерационных параметров основан на минимизации числа обусловленности и связан с использованием априорной спектральной информации [39], [46]. На примере конкретной задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка, обладающей сопряженно-операторной структурой, исследован метод пересчета граничных условий. Алгоритм, позволяет получать решение вырожденной (краевые условия) задачи с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решается задача с тем же самым дифференциальным оператором, но с краевыми условиями, гарантирующими ее невырожденность. Получена оценка скорости сходимости итерационного процесса. Алгоритм находит обобщенное решение вырожденной задачи.

Основное направление исследований, которое развивалось в рамках интеграционного проекта в Институте математики и механики УрО РАН совместно с Институтом геофизики УрО РАН, было связано с созданием вычислительных технологий решения обратной задачи гравиметрии. Эта технология включает все необходимые этапы: 1) полевые измерения гравитационного поля; 2) предварительная обработка измеренного поля и выделение аномального эффекта от поверхности раздела сред; 3) решение нелинейного двумерного интергального уравнения первого рода относительно функции, описывающей разделяющую поверхность.

В ИММ УрО РАН получены следующие основные результаты:

а) разработаны и программно реализованы новые алгоритмы предварительной обработки геофизических полей;

б) наряду с итеративно регуляризованным методом Ньютона был реализован новый алгоритм, основанный на регуляризованном варианте метода Флетчера-Ривса для задачи гравиметрии;

в) все методы были протестированы на квазимодельных данных.

Сотрудниками Института геофизики УрО РАН:

а) проведены площадные измерения магнитного поля для трех районов;

б) выполнена предварительная обработка по выделению аномального поля для полученных данных;

в) детально исследована структура аномалиеобразующего объекта в районе Башкирской магнитной аномалии.

Рассмотрена трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о восстановлении поверхности раздела между средами (геологической границы) по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности [2]-[7], [17]. Предложены и протестированы численные методы ее решения, проведены расчеты на основе реальных данных (район г. Оренбурга).

В последние два года в рамках интеграционного проекта сформировалась тематика, связанная с решением обратных задач термического зондирования атмосферы по определению вертикальных профилей температуры и концентрации парниковых газов по спектрам высокого разрешения, измеренным спутниковым сенсором. Задача сводится к решению сильно переопределенной системы нелинейных уравнений относительно температуры и концентрации газов как функций высоты.

Оказалось, что регулярные алгоритмы, разработанные для уравнений гравиметрии и магнитометрии, при некоторой модификации вполне пригодны для решения задач теплового зондирования. Были выполнены расчеты для синтетических и реальных спектров по восстановлению температуры и содержанию метана как функций высоты.

Работы по обратным задачам зондирования атмосферы были выполнены совместно с коллегами из лаборатории "Глобальной экологии и спутникового мониторинга" физического факультета Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

На основе полученных численных результатов построены карты полного содержания метана в атмосферном столбе для региона Западной Сибири, содержащем Ханты-Мансийский округ [18], [63].

Особую роль при математическом моделировании многих явлений играют кинетические уравнения. Кинетические уравнения характеризуют непрерывность движения субстанции и являются основополагающими уравнениями. Они широко используются для количественного и качественного описания на микроскопическом уровне физических, химических, биологических, социальных и других процессов. Ввиду большой роли кинетических уравнений в учении о движении материи, особенно необратимых процессов, их часто называют master equations — управляющие уравнения. Кинетические уравнения используются также для изучения задач рентгеновской и оптической томографии. В ДВО РАН рассмотрены задачи оптимизации и квазиоптимизации условий рентгенодиагностики среды, обеспечивающих наилучшее качество реконструкции внутренних неоднородностей, часть которых интерпретируется как дефекты. Наряду с общей постановкой такой оптимизационной задачи, изучается ее конкретный вариант поиска оптимальной энергии источников излучения при неизменных других условиях. Подходы к решению этих задач носят оригинальный характер и основаны на введении понятия меры видимости среды при ее рентгенодиагностике [8], [9].

Исследована обратная задача для стационарного векторного уравнения переноса поляризованного излучения в изотропной среде, в которой требуется определить коэффициент ослабления при заданном решении уравнения на границе среды. Получена формула, связывающая преобразование Радона от коэффициента ослабления с плотностью потока излучения на границе и доказана теорема единственности решения обратной задачи. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие преимущества алгоритма решения обратной задачи при использовании векторного уравнения над методом, который соответствует скалярной модели [36], [67].

Рассмотрены краевые и экстремальные задачи в слоистых средах для стационарного уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения, моделирующими эффекты отражения и преломления света на контактных границах. Предложен подход к решению проблемы просветления в сильно рассеивающих средах и разработаны новые алгоритмы нахождения показателей преломления и оптических толщин многослойной системы по заданному потоку выходящего из среды излучения [43], [47], [70].

Изучен вопрос об определении химического состава неоднородного тела, состоящего из нескольких однородных частей. Предложен способ, использующий данные томографического просвечивания неизвестной среды в энергетическом диапазоне, содержащем резонансные уровни энергии на которых коэффициент ослабления излучения имеет разрывы первого рода. Компьютерное моделирование на модельных данных, соответствующим реальным веществам, показало эффективность метода в диапазоне мягкого рентгена для тел размеры, которых не превышают нескольких микрон. Использование больших значений энергии зондирующего излучения, при которых коэффициенты полного взаимодействия для веществ быстро убывают, оказывается невозможным ввиду отсутствия резонансных скачков у коэффициентов для таких энергий [41].

В проекте уделено внимание и некоторым общим вопросам теории условно-корректных задач. В рамках данного проекта, и в связи с фундаментальными вопросами грави-магнито-разведки, были получены новые утверждения теории потенциала. Разработан единый подход в теории симметризации, основанный на перестановках функций и понятии емкости обобщенного конденсатора. Изучены экстремальные свойства емкостей конденсаторов и установлены асимптотические формулы для вырождающихся конденсаторов. Получены новые результаты о граничном поведении аналитических функций. Доказаны новые неравенства для полиномов, рациональных и целых функций, усиливающие современные результаты Борвейна, Смейла, Тотика, Лукашова и многих других. Для изучения стационарных плоскопараллельных векторных полей введены и исследованы обобщенные конденсаторы на расширенной комплексной плоскости. Определена конформная емкость таких конденсаторов и установлены принципы монотонности и композиции. В частных случаях получена формула, связывающая емкость обобщенного конденсатора с различными видами приведенных модулей, введенных ранее другими математиками. Изучено поведение емкости конденсатора с параллельными пластинами при таких простейших конформных преобразованиях как взаимное движение пластин, излом пластин и сдвиг пробела. Рассмотрено поведение конформного модуля четырехугольника при сдвигах вершин, поворотах сторон и различных усреднениях. Для решения указанных выше задач разработаны новые подходы [24]-[31], [59]-[61].

3. Заключение

В ходе выполнения проекта выполнен широкий круг исследований, связанных с обратными и некорректными задачами для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, созданы новые вычислительные алгоритмы и проведено их тестирование на модельных и реальных данных, получен ряд прикладных результатов.

Полученные результаты существенно развивают теорию обратных и некорректных задач, многие из них имеют приоритетный характер и находятся на фронте мировых научных исследований.

При выполнении проекта осуществлялось сотрудничество научных учреждений Сибирского, Уральского и Дальневосточного отделений. В частности, исследование обратных задач для уравнений переноса и задач рентгеновской диагностики проводилось в тесном сотрудничестве коллективов ИМ СО РАН и ИПМ ДВО РАН. Задачи продолжения геофизических полей исследовались в ИМ СО РАН, ИММ УрО РАН, ИГ УрО РАН, ИПМ ДВО РАН. Созданием численных алгоритмов и программ решения обратных и некорректных прикладных задач занимались коллективы всех институтов, участвующих в проекте.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

[1] Абашеева Н. Л., *Линейная обратная задача для операторно-дифференциального уравнения с параметром*, Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007, 5–14.

[2] Акимова Е. Н., Васин В. В., Пересторонина Г. Я., Тимерханова Л. Ю., Мартышко П. С., Кокшаров Д.Е., *О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе*, Вычислительные методы и программирование. Москва: МГУ, **8**: 1 (2007), 107–116.

[3] Акимова Е. Н., Васин В. В., Скорик Г. Г., *Решение обратных задач магнитометрии и гравиметрии о восстановлении разделяющей поверхности сред*, Материалы 35-й сессии международного семинара им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей". Ухта: УГТУ, 2008, 8–11.

[4] Акимова Е. Н., Васин В. В., Пересторонина Г. Я., Тимерханова Л. Ю., Мартышко П. С., Кокшаров Д. Е., *О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе*, Вычислительные методы и программирование. Москва: МГУ, **8**: 1 (2007), 107–116.

[5] Акимова Е. Н., Васин В. В., Пересторонина Г.Я., *Решение обратной задачи магнитометрии с использованием параллельных технологий*, Материалы 33-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей". Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2006, 447–450.

[6] Акимова Е. Н., Васин В. В., *Решение обратной задачи магнитометрии на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000*, Материалы 34-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей". Москва: ИФЗ РАН, 2007, 8–11.

[7] Акимова Е. Н., Васин В. В., Скорик Г. Г., *Решение обратных задач магнитометрии и гравиметрии о восстановлении разделяющей поверхности сред*, Материалы 35-й сессии международного семинара им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей". – Ухта: УГТУ, 2008, 8–11.

[8] Аниконов Д. С., Прохоров И. В., *Постановка и численное решение задачи оптимизации в рентгеновской томографии*, ЖВМ и МФ, **46**: 1 (2006), 18–25.

[9] Аниконов Д. С., Прохоров И. В., *Выбор оптимальной энергии излучения в задаче рентгеновской дефектоскопии*, ДАН, **408**: 4 (2006), 1–5.

[10] Аниконов Д. С., *Специальная задача интегральной геометрии*, ДАН, **415**: 1 (2007), 7–9.

[11] Аниконов Д. С., *Индикатор контактных границ для задачи интегральной геометрии*, СМЖ, **49**: 4 (2008), 739–755.

[12] Аниконов Д. С., *Использование эффекта резонанса в рентгеновской томографии*, ДАН, **422**: 3 (2008), 1–4.

[13] Аниконов Ю. Е., Богданов В. В., Деревцов Е. Ю., Мирошниченко В. Л., Сапожникова Н. А., *Численное решение обратной кинематической задачи сейсмики с внутренними источниками*, Сиб. Ж. Индустриальной матем., **IX**: 4(28) (2006), 3–26.

[14] Аниконов Ю. Е., Аюпова Н. Б., *Формулы для решений начально-краевых задач и коэффициентов уравнений 2-го порядка*, Препринт № 171. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Новосибирск, 2006. 46 с.

[15] Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В., *Тождество для приближенных квантовых уравнений и обратные задачи*, Сибирский журнал индустриальной математики, 2007, 3–9.

[16] Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л., *Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости*, Сиб. Матем. Ж., **47**: 3 (2006), 518–526.

[17] Васин В. В., Акимова Е. Н., Скорик Г. Г., *Регулярные методы решения обратной задачи гравиметрии*, Сибирские Электронные Математические Известия, 1 (2008), 1–9.

[18] Грибанов К.Г., Захаров В.И., Васин В.В., *Итеративная регуляризация в задаче содержания CO_2 в атмосфере по данным спутникового зондирования*, Алгоритмический анализ неустойчивых задач (Тез. межд. конф., Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 г.). Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008, 119–120.

[19] Воронин А. Ф., *Интегральное уравнение первого рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром*, Сиб. журнал индустр. мат-ки, **11**: 1 (2008), 46–56.

[20] Воронин А. Ф., *Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром*, Сиб. матем. журнал, **49**: 4 (2008), 756–767.

[21] Воронин А. Ф., *Условия корректности уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром*, ДАН, **413**: 5 (2007), 594–595.

[22] Воронин А. Ф., *О корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом*, ДАН, **414**: 2 (2007), 156–158

[23] Деревцов Е. Ю., Светов И. Е., Волков Ю. С., *Использование B-сплайнов в задаче эмиссионной $2D$-томографии в рефрагирующей среде*, Сиб. Ж. Индустриальной матем., **XI**, 2008 (принята к печати).

[24] Дубинин В. Н., *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Гретша и симметризация*, Зап. научн. семин. ПОМИ. **337** (2006), 73–100.

[25] Дубинин В. Н., Прилепкина Е.Г., *О вариационных принципах конформных отображений*, Алгебра и анализ, **18**: 3 (2006), 39–62.

[26] Дубинин В. Н., *О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули*, Зап. научн. семин. ПОМИ. **337** (2006), 101–112.

[27] Дубинин В. Н., *Неравенства для критических значений полиномов*, Матем. сборник, **197**: 8 (2006), 63–72.

[28] Дубинин В. Н., *Лемниската и неравенства для логарифмической емкости континуума*, Матем. заметки, **80**: 1 (2006), 33–37.

[29] Дубинин В. Н., Калмыков С. И., *Принцип мажорации для мероморфных функций*, Матем. сборник, **198**: 12 (2007), 37–46.

[30] Дубинин В. Н., Ким В. Ю., *О покрытии радиальных отрезков при p–листных отображениях круга и кольца*, Дальневост. матем. журнал, **7**: 1-2 (2007), 40–47.

[31] Дубинин В. Н., Ким В. Ю., *Теоремы искажения для регулярных и ограниченных в круге функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ. **350** (2007), 26–39.

[32] Кабанихин С. И., Искаков К. Т., *Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений*, Алматы, КазНПУ, 2007.

[33] Кабанихин С. И., *Обратные и некорректные задачи*, Москва, Издательский центр Академия, 2008.

[34] Карчевский А. Л., *Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред*, Геология и Геофизика, **48**: 8 (2007), 889–898.

[35] Карчевский А. Л., *Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом*, Сибирский журнал вычислительной математики, **11**:2 (2008), 139–149.

[36] Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В., *Численное решение обратной задачи для уравнения переноса поляризованного излучения*, Сибирский журнал вычислительной математики, **11**: 1 (2008), 55–68.

[37] Кожанов А. И., *О разрешимости первой начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа высокого порядка*, Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2007, 172–181.

[38] Кожанов А. И., Валитов И. Р., *О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами*, Математические заметки ЯГУ, **14** (2007), 3–16.

[39] Коновалов А. Н., Трегубов И. А., *Адаптивные итерационные методы*, Всероссийская конф. по выч. математ. КВМ-2007, 2007, Новосибирск.

[40] Коновалова Д. С., *Некоторые свойства решений уравнения переноса*, Дифференциальные уравнения, **42**: 5 (2006), 684–689.

[41] Назаров В. Г., *Определение химического состава и структуры неоднородной среды методом рентгеновской томографии*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **47**: 8 (2007), 1413–1422.

[42] Нещадим М. В., *Некоторые вопросы конструктивных методов в теории обратных задач*, Сибирский журнал индустриальной математики, **10** (2007), 101–109.

[43] Прохоров И. В., Яровенко И. П. *Исследование задач оптической томографии методами теории переноса излучения*, Оптика и спектроскопия, **101**: 5 (2006), 817–824.

[44] Романов В. Г., *Оценка устойчивости решения задачи для уравнений электродинамики с данными на времениподобной поверхности*, Доклады АН, **411**: 1 (2006), 16–19.

[45] Романов В. Г., *Асимптотическое разложение решения системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой*, Сибирский журн. индустр. матем., **XI**:3 (2008).

[46] Сорокин С. Б., *Попеременно-треугольный метод в подпространстве разрешимости для численного решения вырожденной задачи Пуассона*, Вестник НГУ, (в печати).

[47] Яровенко И. П., *Численное решение краевых задач для уравнения переноса излучения в оптическом диапазоне*, Вычислительные методы и программирование, **7** (2006), 93–104.

[48] Anikonov Yu. E., *Selected formulas of the theory of inverse problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **15** (2007), 549–568.

[49] Anikonov Yu. E., Ayupova N. B., *Table of solutions and coefficient for second-order differential equations and inverse problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **15** (2007), 867–892.

[50] Anikonov Yu. E., Bogdanov V. V., Derevtsov E. Yu., Miroshnichenko V. L., Pivovarova N. B., Slavina L. B., *Some approaches to a numerical solution for the multidimensional inverse kinematic problem of seismics with inner sources*, J. Inverse Ill-Posed Problems, **16** (2008), to appear.

[51] Arbuzov E. V. and Bukhgeim A. L., *The Carleman formula for the Helmholtz equation on the plane*, Siberian Mathematical Journal, **47**: 3 (2006), 425–432.
[52] Arbuzov E. V. and Bukhgeim A. L., *The Cauchy problem for elliptic equation of second order on the plane*, J. Inv. Ill-Posed Problems (submitted).
[53] Bondarenko A. N. Ivaschenko D. S., *Generalized Sommerfeld problem for time fractional diffusion equation: analytical and numerical approach*, J. Inv. Ill-Posed Problems (submitted).
[54] Bondarenko A. N., Ivaschenko D. S., *Numerical methods for solving inverse problems for time fractional diffusion equation with variable coefficient*, J. Inv. Ill-Posed Problems (submitted).
[55] Bugueva T. V., *Multidimensional inverse problem for isotropic elasticity system in a sphere*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **15**: 9 (2007), 893–934.
[56] Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V. and Uhlmann G., *Unique continuation for hyperbolic equations with memory*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **15** (2007), 587–598.
[57] Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster T., *Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions*, J. Inverse Ill-Posed Problems, **15**: 1 (2007), 1–38.
[58] Derevtsov E. Yu., Svetov I. E., Volkov Yu. S. and Schuster T., *Numerical B-spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorbtion and refraction*, Proceedings 2008 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08, Novosibirsk Scientific Center, Novosibirsk, Russia, July 21–25, 2008, 212–217.
[59] Dubinin V. N., Vuorinen M., *Robin functions and distortion theorems for regular mappings*, Reports in Math. Depart. of Math. and Stat. Univ. of Helsinki. Preprint 454, 2007, P. 21.
[60] Dubinin V. N., Karp D. B., *Capacities of certain plane condensers and sets under simple geometrics transformations*, Complex Variables, **53**: 6 (2008), 607–622.
[61] Dubinin V. N., Vuorinen M., *On conformal modules of polygonal quadrilaterals.* // Israel Journal Math. 2008 (submitted).
[62] Dyatlov G. V., Gilev K. V. , Semyanov K. A. and Maltsev V. P., *The Scanning Flow Cytometer Modified for Measurement of Two-Dimensional Light-Scattering Pattern of Individual Particles*, Meas. Sci. Technol. **19** (2008) (015408).
[63] Gribanov K. G., Toptygin A. Yu., Zakharov V. I., *Application of multilayer perceptron to high-resolution infrared measurement retrieval*, SPIE Proc., 6580, 65800R, 2006.
[64] Kabanikhin S. I. and Shishlenin M. A., *The Gel'fand-Levitan-Krein method in an inverse acoustic problem*, Applicable Analysis, 2008 (submitted).
[65] Kabanikhin S. I. and Shishlenin M. A., *Determination of some properties of the density in multidimensional inverse acoustic problem*, Journal of Physics: Conference Series, 2008 (submitted).
[66] Kazantsev S. G. and Bukhgeim A. A., *The Chebyshev ridge polynomials in 2D tensor tomography*, // J. of Inverse and Ill-Posed Problems (2006), Vol. 14, N 2, 157-188.
[67] Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V. *Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation*, Journal Inverse and Ill-Posed Problems, **14**: 6 (2006), 609–620.
[68] Lavrent'ev M. M., Savel'ev L. J., *Operator Theory and Ill-Posed Problems*, Netherlands, Brill Academic Publishers, Martinus Nijhoff Publishers and VSP, Leiden-Boston, 2006. P. 680.
[69] Neshchadim M. V. *Inverse problems for the Boltsmann-Vlasov kinetic equations representaation for solutions and coefficients*, Journal of Applied and Indusrial Mathematics, 1 (2007), 90–99.
[70] Prokhorov I. V., Yarovenko I. P. and Nazarov V. G., *Optical tomography problems at layered media*, IOP Publishing LTD. Inverse Problems, **24**: 2 (2008), (025019), (13pp).
[71] Romanov V. G., *A stability estimate for the solution to the ill-posed Cauchy problem for elasticity equations*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **16**: 6 (2008).
[72] Lorenzi A., Messina F. and Romanov V. G., *Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system*, // Applicable Analysis, **86**: 11 (2007), 1375–1395.

Защищенные по теме проекта диссертации:

Яровенко И.П. Математическое моделирование процесса переноса излучения в широком диапазоне энергий с приложениями к задачам рентгеновской и оптической томографии. //Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18. Владивосток. 2007. 144с.

Прохоров И.В. Математические задачи теории переноса излучения. //Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18. Владивосток. 2007. 256с.

Владимир Васильевич Васин
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской 16,
620219, Екатеринбург, Россия
E-mail address: vasin@imm.uran.ru

Владимир Николаевич Дубинин
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: dubinin@iam.dvo.ru

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru