S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 440–447 (2008)

УДК 517.958

MSC 44A12

ВОЗМОЖНОСТИ ОБРАЩЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА И РЕНТГЕНОВСКАЯ ТОМОГРАФИЯ

Д. С. АНИКОНОВ, Д. С. КОНОВАЛОВА

Abstract. This paper is a review of the authors articles [1–3]. They are devoted to a new problem of integral geometry in which the known data are integrals along all straight lines in plane. The integrand is an unknown function depending of space points and parameters characterizing straight lines. The surfaces of integrand discontinuity are desired quantity. It is connected with certain problems of X-Ray tomography solved as inverse problems for transport equation [4,5]. The obtained results [1,2] differ from the corresponding fragments in [4,5] by higher generality and simplicity. Also a question of incomplete data has been studied [3]. Probably the statements in this article have its own value and can be used in development of tomography.

Keywords: integral geometry, tomography, Radon transform, indicator of boundaries.

В настоящем сообщении дается обзор авторских работ [1–3], в которых рассматривается новая постановка задачи интегральной геометрии. К этой задаче сводятся некоторые проблемы рентгеновской томографии, ранее изученные авторами в [4–5], где в качестве математической модели миграции фотонов в веществе использовалось интегро-дифференциальное уравнение переноса. Исследование в настоящей работе отличается от соответствующих фрагментов в [4–5] рядом предположений большей общности и вместе с

Anikonov D.S., Konovalova D.S., Generalized Radon Transform and X-ray Tomography.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 24 ноября 2008 г.

тем большей простотой изложения. Кроме того рассмотрен случай неполной информации [3]. Есть основания предполагать, что результаты этой работы могут использоваться для дальнейшего развития теории рентгеновской томографии и в то же время представлять собой самостоятельную ценность, как элемент теории интегральной геометрии.

Пусть $\mathcal{D}$ – ограниченная область в R^2. Ее диаметр обозначим d. Рассмотрим систему области $\mathcal{D}_i$, $i = 1, ..., p$ таких, что

$$\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}; \quad \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \varnothing, \quad i \neq j; \quad \mathcal{D}_0 = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{D}_i, \quad \overline{\mathcal{D}}_0 = \overline{\mathcal{D}}.$$

Нетрудно видеть, что объединение границ $\partial\mathcal{D}_i$ областей $\mathcal{D}_i$, $i = 1, ..., p$ совпадает с границей $\partial\mathcal{D}_0$ объединения этих же областей. Считаем, что замкнутые линии $\partial\mathcal{D}_i$ являются кусочно–гладкими класса C^2. Точнее говоря, сделаем следующие предположения. Условимся обозначать координаты точек x, y, z, ω из R^2 в основной системе координат соответственно $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (\omega_1, \omega_2)$. Определим точку $z \in \partial\mathcal{D}_0$ как контактную для областей $\mathcal{D}_j$ и $\mathcal{D}_l$, $1 \leq j, \ l \leq p$, если в некоторой окрестности $V(z)$ точки z нет точек областей $\mathcal{D}_i$, кроме $\mathcal{D}_j$ и $\mathcal{D}_l$, а общий участок двух границ: $V(z) \cap \partial\mathcal{D}_j = V(z) \cap \partial\mathcal{D}_l$ может быть представлен графиком гладкой функции в локальных координатах. Считается, что в этой локальной системе координат с центром в точке z первая ось направлена вдоль касательной к ∂D_j (или к $\partial\mathcal{D}_l$) в точке z. Вторая ось направлена по единичному вектору внутренней нормали $n_j(z)$ к $\partial\mathcal{D}_j$ в точке z. Используя для любой точки $y \in R^2$ локальные координаты (ξ, η), предполагаем:

$$V(z) \cap \partial\mathcal{D}_j = V(z) \cap \partial\mathcal{D}_l = \{(\xi, \ \eta), \ |\xi| < \delta, \ \eta = \psi(\xi)\},$$

$$\psi(\xi) \in C^2(-\delta, \delta), \quad \psi(0) = \psi^{'}(0) = 0.$$

Отметим, что положительное число δ и функция $\psi(\xi)$, вообще говоря, зависят от z. Будем считать, что в множестве $\partial\mathcal{D}_0 \setminus \partial\mathcal{D}$ все точки – контактные, кроме, быть может, их конечного числа.

Легко видеть, что выполняется неравенство $|\psi(\xi)| \leq const|\xi|^2$. Здесь и далее символ $const$ обозначает некоторое положительное число.

Рассмотрим круг, круговое кольцо и единичную окружность в R^2:

$$B(x, r) = \{y : y \in R^2, |y - x| < r\}, \ B(x, r_1, r_2) = \{y : y \in R^2, 0 < r_1 < |y - x| < r_2\},$$

$$\Omega = \{\omega : \omega \in R^2, |\omega| = 1\}.$$

Для векторов единичной окружности Ω будем использовать обозначение ω, иногда заменяя ω на s, когда желательно подчеркнуть представление $s = (y - x)/|y - x|$. Для любой контактной точки $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$ определим полуплоскости:

$$R^+(x) = \{y : y \in R^2, \ (y - x, n_j(z)) > 0\}, \ \ R^-(x) = \{y : y \in R^2, \ (y - x, n_j(z)) \leq 0\},$$

$$R^+(z) = \{y : y \in R^2, \ (y - z, n_j(z)) > 0\}, \ \ R^-(z) = \{y : y \in R^2, \ (y - z, n_j(z)) \leq 0\}.$$

Пусть для $(x, y, \omega) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \Omega$ задана функция $g(x, y, \omega)$, имеющая при $(x, y, \omega) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}_i \times \Omega$, $i = 1, ..., p$ равномерно непрерывные частные производные первого порядка по x_1 и x_2. Для описания гладкости функций, заданных на Ω, используем следующую трактовку [6]. Продолжим $g(x, y, \omega)$ по ω в круговое кольцо $B(0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < 1 < r_2$, считая $g(x, y, t\omega)$ постоянной при $t \in (r_1, r_2)$ и потребуем, чтобы таким образом продолженная функция $g(x, y, v),\ v = (v_1, v_2),\ v \in B(0, r_1, r_2)$ имела первые частные производные по v_1, v_2, равномерно непрерывные в $\mathcal{D} \times \mathcal{D}_i \times B(0, r_1, r_2),\ i = 1, ..., p$. Значения этих производных при $v = \omega$ и будут считаться производными от $g(x, y, \omega)$ по ω_1, ω_2. Обратим внимание, что в подробной записи функция g зависит от шести переменных: $g(x_1, x_2, y_1, y_2, \omega_1, \omega_2)$. Имея в виду эту запись, через $D_k g(x, y, \omega)$ будем обозначать частную производную по k-ой переменной, $k = 1, 2, 5, 6$. Относительно переменной y, функция $g(x, y, \omega)$ и ее частные производные $D_k g(x, y, \omega),\ k = 5, 6$ считаются кусочно-непрерывными по Гельдеру, точнее говоря, существует такое число $\alpha,\ \ 0 < \alpha \leq 1$, что:

$$
\begin{gathered}
|g(x, y, \omega) - g(x, u, \omega)| + |D_k g(x, y, \omega) - D_k(x, u, \omega)| \leq const|y - u|^{\alpha}, \\
k = 5, 6, \quad y, u \in \mathcal{D}_i, \quad i = 1, ..., p,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где число $const$ не зависит от $i, k, x, y, u, \omega, \alpha$.

Из сделанных предположений следует, что при всех $(x, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega$ существуют конечные пределы функции $g(x, y, \omega)$ и производных $D_k g(x, y, \omega),\ k = 5, 6$ при $y \to z,\ z \in \partial\mathcal{D}_j,\ y \in \mathcal{D}_j,\ j = 1, ..., p$, которые обозначим $g_j(x, z, \omega),\ D_k g_j(x, z, \omega)$. Более того, имеет место неравенство

$$
\begin{gathered}
|g(x, y, \omega) - g_j(x, z, \omega)| + |D_k g(x, y, \omega) - D_k g_j(x, z, \omega)| \leq const|y - z|^{\alpha}, \\
y \in \mathcal{D}_j,\ k = 1, 2.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Считая, что z — контактная точка для $\mathcal{D}_j$ и $\mathcal{D}_l$, определим скачок функции $g(x, y, \omega)$ при $y = z$ по формуле: $[g(x, z, \omega)]_{j,l} = g_j(x, z, \omega) - g_l(x, z, \omega)]$.

Заметим, что для удобства оформления функция $g(x, y, z)$ определена для всех $y \in \mathcal{D}$, но при этом, значения $g(x, z, \omega)$ и $g_j(x, z, \omega)$ не обязаны совпадать. Аналогично [7], будем предполагать, что множество $\mathcal{D}_0$ является обобщенно выпуклым, т.е любой луч $L_{x,\omega} = \{x + t\omega,\ t \geq 0\},\ (x, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega$ пересекает линию $\partial\mathcal{D}_0$ в конечном числе точек. Отсюда, в частности, следует, что при фиксированных x, ω функция $g(x, x + t\omega, \omega)$ является кусочно-непрерывной по t, имеющей не более конечного числа точек разрыва. Для упрощения записи будем предполагать, что функция $g(x, y, \omega)$ продолжена по y нулем вне $\mathcal{D}$.

В данной работе приведено исследование единственности решения следующей задачи интегральной геометрии.

Задача. *Найти линию $\partial\mathcal{D}_0$ из следующего уравнения*

$$
\int\limits_{-d}^{d} g(x, x + t\omega, \omega) dt = H(x, \omega),\ (x, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega,
\tag{3}
$$

где задана только область $\mathcal{D}$ и функция $H(x, \omega)$.

Отметим, что для простоты формулировки искомой объявлена вся линия $\partial\mathcal{D}_0$. Но поскольку ее часть $\partial\mathcal{D}$ известна, фактически ищется только $\partial\mathcal{D}_0 \setminus \partial\mathcal{D}$.

Поставленная задача довольно необычна. В ней известны интегралы от $g(x, y,$
$\omega)$ по y вдоль любых прямых $\{x + t\omega,\ t \in R^1\}$. Найти полностью функцию $g(x, y, \omega)$ из уравнения (3) не представляется возможным, ввиду ее зависимости от слишком большого числа переменных. Поэтому ставится более скромная задача об отыскании только линии разрывов неизвестной функции.

Говоря об общности поставленной задачи, отметим что заменой переменных к уравнению (3) сводится ряд других подобных проблем, где интегрирование производится вдоль кривых из определенного семейства линий.

Несмотря на свою необычность, рассматриваемая задача имеет аналоги, изученные и другими авторами. Так, опубликован ряд работ, посвященных исследованию задачи, в которой функция $g(x, y, \omega)$ была представлена в виде произведения $g(x, y, \omega) = w_1(x, y, \omega) w_2(y)$, причем интегрирование производилось, как правило, вдоль кривых из заданного семейства линий. Весовая функция $w_1(x, y, \omega)$ предполагалась известной, а искомой считалась функция $w_2(y)$. Однако и для такой, более традиционной задачи, доказанные теоремы единственности охватывают лишь некоторые специфические случаи. Например в [8, 9] доказаны теоремы единственности при условиях определенной симметрии весовой функции, малости ее производных или диаметра области $\mathcal{D}$.

Имеются также работы, в которых предполагалось, что $w_1(x, y, \omega) \equiv 1$. При таком условии левая часть уравнения (3) представляет собой преобразование Радона функции $w_2(y)$. В рентгеновской томографии это соответствует лучевому приближению. Для этого случая доказаны теоремы единственности определения функции $w_2(y)$ и построены многочисленные алгоритмы ее вычисления [10–14]. Однако, если при этом ограничиваться поиском только линии разрывов подынтегральной функции, то появляется возможность создания значительно более быстрых алгоритмов [12–14]. Последнее обстоятельство весьма важно, например, в медицинской томографии. Стоит еще отметить работы близкой направленности, касающихся проблем векторной и тензорной томографии [15, 16].

Сделаем некоторые преобразования уравнения (3). Рассмотрим произвольную вспомогательную функцию $\beta(x, \omega)$, $(x, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega$, равномерно непрерывную вместе со всеми своими частными производными первого порядка. Умножая обе части равенства (3) на $\beta(x, \omega)$ и обозначая $q(x, y, \omega) = \beta(x, \omega) g(x, y, \omega)$, $Q(x, \omega) = \beta(x, \omega) H(x, \omega)$, получаем

$$\int_{-d}^{d} q(x, x + t\omega, \omega) dt = Q(x, \omega). \tag{4}$$

Важно отметить, что относительно $q(x, y, \omega)$ выполняются все предположения, сделанные относительно функции $g(x, y, \omega)$, и, в частности, выполняются неравенства (1), (2), если в левых частях произвести замену g на q.

Далее, проинтегрируем последнее равенство по $\omega \in \Omega$. Предварительно, интеграл в (4) разобьем на два: один по $t \in [0, d]$ и второй по $t \in [-d, 0]$. Используя замену переменных $y = x + t\omega$, получаем

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{f(x, y, s)}{|y - x|} dy = \int_{\Omega} Q(x, \omega) d\omega, \ (x, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega, \ s = \frac{y - x}{|y - x|}, \tag{5}$$

где

$$f(x, y, s) = q(x, y, s) + q(x, y, -s). \tag{6}$$

В дальнейшем исследовании единственности решения задачи будем вместо (3) использовать уравнение (5).

Для $x \in \mathcal{D}_0$ определим функцию $\mathcal{I}(x)$ по следующей формуле

$$\mathcal{I}(x) = \left|\nabla \int\limits_{\Omega} Q(x,\omega)d\omega\right|, \tag{7}$$

где $Q(x,\omega)$ является правой частью уравнения (4). Верно следующее утверждение [5–6]

Теорема 1. *Функция $\mathcal{I}(x)$ является непрерывной в $\mathcal{D}_0$, а для любой контактной точки $z,\ z \in \partial\mathcal{D}_j \cap \partial\mathcal{D}_l$ и для точек $x = z + \tau n_j(z),\ 0 < \tau \le \delta$ выполняется равенство*

$$\mathcal{I}(x) = M(z)\big|\ln|x-z|\big| + O(1), \tag{8}$$

где

$$M(z) = 2|[q(z,z,\omega_0(z)) + q(z,z,-\omega_0(z))]_{j,l}|, \quad (\omega_0(z), n_j(z)) = 0. \tag{9}$$

Из теоремы 1 легко сделать следующий вывод.

Следствие 1. *Непрерывная в $\mathcal{D}_0$ функция $\mathcal{I}(x)$, ограничена на всяком компакте в $\mathcal{D}_0$; а при $x \to z$ стремится к бесконечности, если $M(z) > 0$.*

Иначе говоря, $\mathcal{I}(x)$ может быть неограниченной только вблизи искомой линии. Именно это свойство и послужило основанием для того, чтобы назвать функцию $\mathcal{I}(x)$ индикатором контактных границ в области $\mathcal{D}$.

Следующая часть работы посвящена вопросу единственности решения задачи интегральной геометрии, представленной уравнением (3). Для этого понадобятся следующие обозначения. Пусть в области $\mathcal{D}$ имеются две системы подобластей $\{\mathcal{D}_i^m\}$, $m = 1,2,\ i = 1,...,p_m$. Соответственно, задаются два множества $\mathcal{D}_0^m$ и две функции $g_m(x,y,\omega)$, $(x,y,\omega) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\Omega$. Равенство (3), где в левой части на место функции $g(x,y,\omega)$ подставлены $g_m(x,y,\omega)$, определяет две функции $H_m(x,\omega)$, $(x,\omega) \in \mathcal{D}\times\Omega$, $m = 1,2$. Разумеется, относительно областей $\mathcal{D}_i^m$ и функций $g_m(x,y,\omega)$ выполнены все предположения, сделанные для $\mathcal{D}_i$ и для $g(x,y,\omega)$. В этих обозначениях имеет место теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть для всякой контактной точки $z,\ z \in \partial\mathcal{D}_{j_m}^m \cap \partial\mathcal{D}_{l_m}^m$ и для каждого $m,\ m = 1,2$ выполняется хотя бы одно из неравенств:*

$$\big[g_m(z,z,\omega_0(z))\big]_{j_m,l_m} \ne 0,\ \big[g_m(z,z,-\omega_0(z))\big]_{j_m,l_m} \ne 0,\ (\omega_0(z), n_{j_m}(z)) = 0. \tag{10}$$

Тогда из совпадения функций $H_1(x,\omega)$ и $H_2(x,\omega)$, $(x,\omega) \in \mathcal{D}\times\Omega$ следует совпадение линий $\partial\mathcal{D}_0^1$ и $\partial\mathcal{D}_0^2$.

Как видно, доказанная теорема единственности имеет несколько условный характер. Действительно, в ней содержится ограничение о наличии ненулевого скачка неизвестной функции в точках искомой линии и для, хотя бы одного, касательного направления. Однако заметим, что это требование есть один из вариантов условия существования линии разрывов, при отсутствии которого рассмотренная задача теряла бы содержательный смысл.

Полезно отметить, что наличие явных формул для индикатора $\mathcal{I}(x)$ и их простота, позволяют надеяться на создание соответствующего устойчивого алгоритма решения задачи интегральной геометрии, что уже было успешно реализовано в одном частном случае [4–5].

Как уже говорилось, рассмотренная задача интегральной геометрии может быть использована в теории рентгеновской томографии. Особенно интересен случай неполной информации, когда известная функция $H(x, \omega)$ задана только для конечного числа направлений ω. Тогда для построения индикатора нет достаточно данных, но, тем не менее, можно провести подобное исследование, получив только часть искомой информации. Такое исследование начато в [3] для задачи рентгеновской томографии, заключающейся в определении границы внутреннего включения в среде по заданной на внешней границе среды плотности излучения. В этом исследовании используется математическая модель движения фотонов в веществе, основанная на стационарном полихроматическом уравнении переноса без интеграла столкновений, т.е. из всех видов взаимодействия фотонов со средой учитываются только поглощение и однократное рассеяние, что соответствует использованию рентгеновского излучения невысокой энергии, когда эффект многократного рассеяния незначителен. Для многих веществ этот диапазон приблизительно составляет интервал от 1 кэв до 50 кэв [18–20]. Однако, этот интервал может быть несколько расширен за счет применения коллимированных внешних источников и детекторов, как это делается, например, в классической томографии [21].

С математической точки зрения, исследуемая задача является обратной задачей теории переноса. Вообще говоря, имеется значительное число работ, посвященных подобным вопросам. Отметим, в частности, работы [22–25], где для аналогичного уравнения исследовалась задача определения изотропной правой части уравнения переноса.

В работе [26] была исследована более общая задача об определении индикатрисы рассеяния или плотности внутренних источников в изотропном случае. Однако, во всех перечисленных работах неизвестной предполагалась только одна функция при заданных остальных. Такое предположение следует рассматривать как априорную информацию о внутреннем строении среды, что заметно уменьшает возможность практического применения полученных теоретических результатов.

Что же касается данного исследования, то здесь, в отличие от упомянутых выше работ, используется меньше данных, а именно, лишь плотность выходящего излучения. Остальные характеристики излучения считаются неизвестными. Кроме того, метод исследования имеет локальный характер и позволяет получать информацию о внутреннем строении среды по частям, в зависимости от количества использованных данных: можно остановиться после конечного числа операций, получив лишь часть искомой информации, если такой уровень осведомленности достаточен для практики. Именно, доказана принципиальная возможность и дан алгоритм нахождения конечного набора прямых, касательных к искомой линии. Тем самым указывается приблизительное местоположение искомого объекта.

К числу недостатков данного исследования следует отнести тот факт, что объектом поиска является поверхность разрывов коэффициентов уравнения, что представляет собой меньшую информацию, чем сами коэффициенты, а также предположение о наличии всего одного включения в среде и его строгая выпуклость. В дальнейшем авторы намерены обобщить полученные результаты и тем самым расширить класс описываемых случаев.

Список литературы

[1] Аниконов Д.С., *Специальная задача интегральной геометрии*, ДАН, **415**: 1 (2007), 7–9.

[2] Аниконов Д.С., *Индикатор контактных границ для задачи интегральной геометрии*, СМЖ, **49**: 4 (2008).

[3] Д.С. Коновалова, *Поэтапное решение задачи томографии*, Тезисы доклада на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 75-летию академика М. М. Лаврентьева 20–25 августа 2007, Новосибирск, Россия.

[4] Anikonov D. S., *Integro-differential heterogeneity indicator in tomography problem*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **7**: 1 (1999), 17–59.

[5] Д.С. Аниконов, А.Е. Ковтанюк, И.В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии* М.: Логос, 2000, 3–224.

[6] Михлин С.Г., *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, М.: Физматгиз, 1962, 3–254.

[7] Владимиров В.С., *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц*, Труды МИАН СССР, **61** (1961), 3–158.

[8] Лаврентьев М.М, Савельев Л.Я., *Теория операторов и некорректные задачи*, Изд. ИМ СО РАН, 1999, 3–701.

[9] Романов В.Г., *Обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Изд. НГУ, 1973, 3–252.

[10] Гельфанд И.М., Гончаров А.Б., *Нахождение функции с компактным носителем по интегралам вдоль линий, пресекающих заданное множество точек в пространстве*, Доклады АН СССР, **290** (1986), 1037–1040.

[11] Palamodov V. P., *Some singular problems of tomography*, Math. Sos., Providence, RI, V. **81** (1990), 123–140.

[12] Вайнберг Э.Н, Казак И.А, Файнгойз М.Л., *Рентгеновская вычислительная томография по методу обратного проецирования с фильтрацией двойным дифференцированием*, Дефектоскопия, 2 (1985), 31–39.

[13] Louis A. K., Maass P. *Contour Reconstruction in 3-D X-Ray CT*, IEEE Trans. Med. Imag., **12**: 4 (1993), 109–115.

[14] Katsevich A.I., Ramm A.G., *New method for finding jumpsof a function from its local tomographic data*, Inverse Problems, **11** (1995), 1005–1023.

[15] Derevtsov E.Yu., Picralov V.V., Schuster T., Louis A.K., *Reconstruction of singularities in local vector and tensor tomography*, Abstracts of the International Conference "Inverse Problems: Modelling and Simulation May 29-June 02, 2006, Turrey, 38–40.

[16] V. Sharafutdinov, M. Skonan, G. Uhlmann., *Regularity of ghosts in tensor tomography* Препринт №136, Изд. ИМ СО РАН, 2004, С. 50.

[17] Аниконов Д. С., *Об ограниченности сингулярного интегрального оператора в пространстве* $C^{\alpha}(\overline{G})$, Матем. сборник, **104(146)**: 4(12) (1977), 515–534.

[18] Лейпунский О.И., Новожилов Б.А., Сахаров В.И., *Распространение гамма-квантов в веществе*, Москва: ГИМФЛ, 1960, С. 208.

[19] Фано У., Спенсер Л., Бергер М., *Перенос гамма излучения*, Москва: Госатомиздат, 1963, С. 296.

[20] Hubbell J.H., Seltzer S.M., *Tables of X-RAY Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients 1 keV to 20 MeV for Elements Z=1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest*, NISTIR-5632, Nat. Inst. of Stand. And Technol., Gaithersburg, 1995, p. 111.

[21] Наттерер Ф., *Математические аспекты компьютерной томографии*, Москва: Мир, 1990, С. 279.

[22] Arbuzov E.V., Bukhgeim A.L. and Kazantsev S.G., *Two-dimensional tomography problems and the theory ofA-analytic functions, inAlgebra, Geometry, Analysis and Mathematical Physics*, (Novosibirsk, 1996), (Reshetnyak Yu.G., Bokut' L.A., Vodop'yanov S.K. and

Taimanov I.A., eds.), 6–20, 189, Izdat. Ross. Akad. Nauk Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., Novosibirsk, 1997 (Russian).English transl.:Siberian Adv. Math. **8** (1998), 1–20.

[23] Novikov R.G., *An inversion formula for the attenuated X-ray transformation*, Preprint CNRS, UMR 6629, Departement of Mathematics, Universite de Nantes, 2000.

[24] Bukhgeim A.A., Kazantsev S.G., *Inversion formula for the fan-beam attenuated Radon transform in a unit disc*, Preprint RAS. Siberian Dep. Institute of Mathematics, Novosibirsk, N 99, 2002.

[25] Kazantsev S.G., Bukhgeim A.A., *Inversion of the Scalar and Vector Attenuated X-Ray Transforms in a Unit Disc*, J. Inverse and Ill-Posed Probl., **15**: 7 (2007), 735–765.

[26] Аниконов Д.С., *Многомерные обратные задачи для уравнения переноса*, Дифференциальные уравнения, **20**: 5 (1984), 817–824.

Аниконов Дмитрий Сергеевич, Коновалова Дина Сергеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anik@math.nsc.ru; dsk@math.nsc.ru