S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 448–455 (2008) УДК 517.55
MSC 35J25

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА ПЛОСКОСТИ

Э. В. АРБУЗОВ, А. Л. БУХГЕЙМ

Abstract. We consider the Cauchy problem for second-order elliptic equations in an arbitrary bounded planar domain with Cauchy data only on a part of the boundary of the domain. We derive a Carleman-type formula for a solution to this problem and give a conditional stability estimate. Then the result is applied to Maxwell's system.

Keywords: Cauchy problem, second-order elliptic equations, Carleman formula, Maxwell's system.

1. Введение

Система уравнений Максвелла для периодических по времени полей записывается в виде

$$\mathrm{rot} H = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E + \frac{4\pi}{c} j,$$
$$\mathrm{rot} E = \frac{i\omega\mu}{c} H,$$

где E, H — векторы напряженности электрического и магнитного поля, $j = j(x)$ — плотность внешних токов, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость, σ — проводимость среды, ω — частота колебаний.

Arbuzov, E.V., Bukhgeim, A.L., The Carleman formula for the Maxwell's equations on a plane.

© 2008 Арбузов Э.В., Бухгейм А.Л.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №48, РФФИ (грант 08-01-00207) и Совета по грантам президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ - 7157.2006.1. Работа поддержана NSF grant DMS-0505470.

Поступила 1 июля 2008 г., опубликована 24 ноября 2008 г.

В случае, когда электродинамические параметры среды и внешний ток не зависят от одной из координат, система уравнений Максвелла приводится к двум уравнениям Гельмгольца на плоскости относительно тех компонент электрического и магнитного поля, которые соответствуют этой координате, а остальные компоненты находятся дифференцированием.

Таким образом, если характеристики поля измеряются или задаются внешним током только на части границы исследуемой области, то для нахождения векторов E, H внутри области требуется решить задачу Коши для уравнения Гельмгольца.

Решение данной задачи дается формулами типа Карлемана. В работе данная формула получена для более общего случая эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде, при этом используется метод, предложенный в [1] Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым, позволяющий найти решение с помощью дополнительной функции со специальными свойствами на границе области.

2. Постановка задачи и основной результат

В дальнейшем будем рассматривать $\mathbb{R}^2$ как комплексную плоскость $\mathbb{C}$, где $x = (x_1, x_2) = x_1 + \mathrm{i}x_2, \quad \mathrm{i}^2 = -1$, и использовать следующие обозначения:

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + \mathrm{i}\partial_2), \quad \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - \mathrm{i}\partial_2), \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial} & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & b(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь a, b и u_j являются комплексно-значными функциями.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область, $M \subset \partial\Omega$ — участок границы, состоящий из объединения конечного числа замкнутых дуг, $\varphi(x)$ — аналитическая в Ω функция, такая что

$$\operatorname{Re}\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in M; \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus M. \end{cases} \tag{2.1}$$

Матрица $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}(x) \end{pmatrix}$.

Для вещественного числа $\tau > 0$ и функции $a(x)$ обозначим

$$a_{\pm\tau} = e^{\pm\mathrm{i}\tau 2\operatorname{Im}\varphi} a,$$

и определим матрицу $Q_\tau^t = \begin{pmatrix} 0 & a_{-\tau} \\ b_\tau & 0 \end{pmatrix}$.

Для решения задачи Коши

$$L\mathbf{u} = (\mathcal{D} + Q)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_M = \mathbf{u}_M,$$

справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $a \in L_\infty,\ b \in W^1_\infty,\ x_0 \in \Omega$ *и* $\widetilde{\mathbf{v}}(x) = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial}\mathcal{E}(x - x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, *где* $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(x_1^2 + x_2^2)$.

Тогда найдётся число $\tau_0 > 0$, *такое что при всех* $\tau \geq \tau_0$ *существует векторо-значная функция* $\mathbf{w} \in W_p^1$, $1 < p < 2$, *которая является решением уравнения*

$$\mathcal{D}\mathbf{w} - Q_\tau^t \mathbf{w} = Q_\tau^t \widetilde{\mathbf{v}}, \tag{2.2}$$

и для первой компоненты решения $\mathbf{u}$ *справедливо равенство*

$$u_1(x_0) = \lim_{\tau\to\infty} \int_M e^{-\tau\varphi(x_0)}(e^{\tau\Phi(x)}\mathrm{N}\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w})\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

где $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = n_1 + \mathrm{i}n_2$ — *вектор единичной внешней нормали к границе области.*

При этом, для любого $\varepsilon > 0$ *выполняется оценка*

$$|u_1(x_0)| \leq \varepsilon l(\mathbf{u}) + C(\varepsilon)\|\mathbf{u}\|_{C(M)}, \tag{2.4}$$

где

$$l(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{C(\partial\Omega\setminus M)}, \quad C(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon/c)^{1/\mathrm{Re}\varphi(x_0)},$$

и константа c *не зависит от* τ.

При доказательстве этой теоремы использовались утверждения, приведенные в следующих разделах.

3. Оператор сжатия $\mathbb{S}$

Пусть $C^\alpha(\overline{\Omega})$ — гёльдеровское пространство функций с нормой $||\cdot||_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Обозначим через $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ пространство функций $u \in C^1(\overline{\Omega})$ с $\partial_j u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим $\mathbb{P}$ — интегральный оператор Коши

$$\mathbb{P}(u)(x) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{u(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = dy_1\,dy_2, \tag{3.1}$$

и $\overline{\mathbb{P}}$ — оператор с сопряженным ядром $\overline{(x-y)^{-1}}$.

Для вещественного числа $\tau > 0$ возьмём функции $a_{-\tau}, b_\tau$ и определим оператор $\mathbb{S}$

$$\mathbb{S}u = \frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}b_\tau \mathbb{P}a_{-\tau}u, \tag{3.2}$$

В силу свойств оператора Коши, доказанных в [2], для оператора $\mathbb{S}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для оператора* $\mathbb{S}$ *справедливы следующие оценки:*
1) При $a, b \in L_\infty$, $\tau > 0$

$$||\mathbb{S}u||_{W_p^1} \leq c||u||_{L_p}, \quad 1 < p < \infty. \tag{3.3}$$

2) При $a \in L_p$, $p > 2$, $b \in C^\alpha$, *и* $\tau > \tau_0$, *для некоторого числа* $\tau_0 > 0$

$$||\mathbb{S}u||_{1+\alpha} \leq c\tau^\alpha||u||_\alpha, \quad \alpha \in (0, 1-2/p). \tag{3.4}$$

3) Если $a \in L_\infty$, $b \in W_\infty^1$, *то для всех* $u \in L_p$, $1 < p < \infty$, *и при любом* $\tau > 0$

$$||\mathbb{S}u||_{L_p} \leq c\tau^{-1/3}||u||_{L_p}. \tag{3.5}$$

4) Если $a \in L_p, p > 2$, $b \in W_\infty^1$, *то существует* τ_0, *такое что для всех* $u \in C^\alpha$, $\alpha \in (0, 1-2/p]$, *и при любом* $\tau \geq \tau_0$

$$||\mathbb{S}u||_\alpha \leq c\tau^{-\beta}||u||_\alpha, \quad \beta = \frac{1-\alpha}{2p+1}. \tag{3.6}$$

Константы c в этих оценках зависят от соответствующих норм функций a и b, и не зависят от u или числа τ.

4. Специальное решение уравнения $L^t\mathbf{v} = \mathbf{f}$

Из формулы Грина

$$\int_\Omega (L\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathrm{d}x = \int_\Omega (\mathbf{u}, L^t\mathbf{v})\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\mathrm{N}\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathrm{d}s, \tag{4.1}$$

в которой $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2$, матрица $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{n} = n_1 + \mathrm{i}n_2$ — вектор единичной внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, определяется транспонированный оператор L^t:

$$L^t = -\mathcal{D} + Q^t, \quad Q^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Для данного оператора справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть* $a \in L_\infty$, $b \in W^1_\infty$, *и функция* $\widetilde{\mathbf{v}}(y) = \begin{pmatrix} 2\partial\mathcal{E}_\Delta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(x_1^2 + x_2^2)$.

Тогда найдётся число $\tau_0 > 0$, *такое что при всех* $\tau \geq \tau_0$ *существует решение уравнения* $L^t\mathbf{v} = -e^{\tau\varphi}\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$, *которое можно представить в виде*

$$\mathbf{v} = e^{\tau\Phi}(\widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w}),$$

где вектор-функция $\mathbf{w}$ *определяется формулами*

$$w_2 = (\mathrm{I} - \mathbb{S})^{-1}\overline{\mathbb{P}}b_\tau\partial\mathcal{E}_\Delta, \tag{4.2}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\mathbb{P}a_{-\tau}w_2. \tag{4.3}$$

При этом, $\mathbf{w} \in W^1_p$, $1 < p < 2$.

Лемма 4.2. *Пусть* $a \in L_\infty$, $b \in W^1_\infty$, *и функция* $\widetilde{\mathbf{v}}(y) = \begin{pmatrix} 2\partial\mathcal{E}_\Delta \\ b_\tau\mathcal{E}_\Delta \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(x_1^2 + x_2^2)$.

Тогда найдётся число $\tau_0 > 0$, *такое что при всех* $\tau \geq \tau_0$ *существует решение уравнения* $L^t\mathbf{v} = -e^{\tau\varphi}\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$, *которое можно представить в виде*

$$\mathbf{v} = e^{\tau\Phi}(\widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w}),$$

где вектор-функция $\mathbf{w}$ *определяется формулами*

$$w_2 = (\mathrm{I} - \mathbb{S})^{-1}\big(\frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}b_\tau\mathbb{P}g_1 + \frac{1}{2}\overline{\mathbb{P}}g_2\big), \tag{4.4}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\mathbb{P}g_1 + \frac{1}{2}\mathbb{P}a_{-\tau}w_2, \tag{4.5}$$

для

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} ab \\ -2(\partial b)_\tau - \tau b_\tau 2\partial\varphi \end{pmatrix}\mathcal{E}_\Delta.$$

При этом, $\mathbf{w} \in W^1_p \cap C^\alpha$, $p > 2$, $\alpha \in (0, 1 - 2/p]$.

Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и возьмём функцию $\mathbf{v}(x)$ из леммы 4.1, в которой $\mathcal{E}_\Delta = \mathcal{E}_\Delta(x - x_0)$. Тогда для решения уравнения $L\mathbf{u} = 0$ из формулы Грина (4.1) получим формулу для представления первой компоненты векторозначной функции $\mathbf{u}$ в точке x_0:

$$u_1(x_0) = \int_{\partial\Omega} e^{-\tau\varphi(x_0)}(e^{\tau\Phi(x)}\mathrm{N}\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w})\mathrm{d}s.$$

Из данной формулы, с учётом свойств функции φ следует формула типа Карлемана (2.3).

Если определить $\mathbf{v}$ по формуле из леммы 4.2, то вектор-функция $\mathbf{w}$ будет зависеть от τ и $\partial\varphi$. В этом случае, для получения формулы типа Карлемана, функция φ выбирается следующим образом. Пусть $\partial\Omega \in C^{1+\alpha}$ и M' — замкнутое подмножество $\mathrm{int}M$ ненулевой меры, тогда в качестве φ выберем аналитическую в Ω функцию, такую что

$$\operatorname{Re}\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in M'; \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus M; \end{cases} \qquad \operatorname{Re}\varphi(x) \in C^\infty(\partial\Omega).$$

5. Формула Карлемана для эллиптического уравнения второго порядка

Пусть $M \subset \partial\Omega_1$ — участок границы области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из объединения конечного числа замкнутых дуг. Для функции $u(x, y) \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_1)$ рассматривается задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде:

$$\Delta u + a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} + a_0 u = 0, \tag{5.1}$$

$$u|_M = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial n}u|_M = u_0',$$

где коэффициенты $a_0 \in C(\overline{\Omega}_1)$, $a_1, a_2 \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, и данные Коши $u_0 \in C^1(M)$, $u_0' \in C(M)$.

Рассмотрим функцию $A = a_1 - \mathrm{i}a_2$, и определим векторозначную функцию $\mathbf{u}$ с компонентами

$$u_1 = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}u, \qquad u_2 = e^{\frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}A}(2\bar{\partial}u + \frac{1}{2}\bar{A}u).$$

Теорема 5.1. *Пусть $x_0 \in \Omega_1$, и $\Omega \subset \Omega_1$ — односвязная область с границей класса $C^{1+\alpha}$, такая что $x_0 \in \Omega$ и $M \subset \partial\Omega$. Функция φ — аналитическая в Ω и определяется формулами (2.1), матрицы $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \bar{\varphi} \end{pmatrix}$, и $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = n_1 + \mathrm{i}n_2$ — вектор единичной внешней нормали к границе области $\partial\Omega$.*

Тогда решение уравнения (5.1) в точке x_0 находится по формуле

$$u(x_0) = e^{-\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}\lim_{\tau\to\infty}\int_M e^{-\tau\varphi(x_0)}(e^{\tau\Phi(x)}\mathrm{N}\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w})\mathrm{d}s, \tag{5.2}$$

где $\widetilde{\mathbf{v}}(y) = \begin{pmatrix} 2\partial\mathcal{E}_\Delta(x - x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(x_1^2 + x_2^2)$, а функция $\mathbf{w}$ находится по формулам (4.2)-(4.3) для

$$a = e^{\frac{1}{4}(\overline{\mathbb{P}}A - \mathbb{P}\bar{A})}(a_0 - \partial\bar{A} - \frac{1}{4}|A|^2), \quad b = -e^{\frac{1}{4}(\mathbb{P}\bar{A} - \overline{\mathbb{P}}A)}.$$

Эллиптические уравнения общего вида, с помощью соответствующей замены переменных, можно привести к каноническому виду во всей рассматриваемой области ([2]).

6. Приложение к системе уравнений электродинамики

Электромагнитное поле характеризуется векторами E и H напряженностей электрического и магнитного полей и векторами D и B электрической и магнитной индукции. Полная система уравнений Максвелла, связывающая эти величины, имеет вид (в Гауссовой системе CGS):

$$\mathrm{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j + \frac{4\pi}{c} j^e, \qquad \mathrm{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$
$$\mathrm{div} B = 0, \qquad \mathrm{div} D = 4\pi\rho,$$

где j — объемная плотность токов проводимости, j^e — объемная плотность токов проводимости, происходящих от действия внешних ЭДС, ρ — объемная плотность зарядов, c — скорость света в вакууме.

Для изотропных покоящихся сред и квазистационарных полей (когда процессы поляризации и намагничивания успевают следовать за изменениями поля) система дополняется материальными уравнениями:

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H, \quad j = \sigma E,$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — магнитная проницаемость среды, σ — проводимость.

Уравнения для дивергенций, с учетом закона сохранения заряда, определяют константы интегрирования, поэтому полную систему уравнений Максвелла можно записать в виде

$$\mathrm{rot} H = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma E + \frac{4\pi}{c} j^e, \qquad \mathrm{rot} E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.1}$$

В случае, когда величины, характеризующие электромагнитное поле, являются периодическими с частотой колебаний ω

$$E = Re\tilde{E}\ e^{-i\omega t}, \quad H = Re\tilde{H}\ e^{-i\omega t},$$
$$j^e = Re\tilde{j}^e\ e^{-i\omega t}, \quad \rho = Re\tilde{\rho}\ e^{-i\omega t},$$

переходя к комплексным амплитудам, систему (6.1) можно записать в виде

$$\mathrm{rot} H = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c} E + \frac{4\pi}{c} j^e, \qquad \mathrm{rot} E = \frac{i\omega\mu}{c} H. \tag{6.2}$$

Если электродинамические параметры среды и внешний ток не зависят от одной из координат (например, от x_3), то система уравнений Максвелла приводится к двум дифференциальным уравнениям относительно тех компонент электрического и магнитного поля, которые соответствуют этой координате:

$$\mathrm{div}(\frac{1}{\beta}\nabla H^3) + \alpha H^3 = -\partial_{x_1}(\frac{\gamma}{\beta} j^{e\,2}) - \partial_{x_2}(\frac{\gamma}{\beta} j^{e\,1}), \tag{6.3}$$

$$\mathrm{div}(\frac{1}{\alpha}\nabla E^3) + \beta E^3 = -\gamma j^{e\,3}, \tag{6.4}$$

где $\alpha = \frac{i\omega\mu}{c}$, $\beta = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c}$, $\gamma = \frac{4\pi}{c}$, а остальные компоненты находятся дифференцированием:

$$E^1 = \frac{1}{\beta}\, H^3_{x_2} - \frac{\gamma}{\beta}\, j^{e\,1}, \quad E^2 = -\frac{1}{\beta}\, H^3_{x_1} - \frac{\gamma}{\beta}\, j^{e\,2},$$

$$H^1 = \frac{1}{\alpha}\, E^3_{x_2}, \quad H^2 = -\frac{1}{\alpha}\, E^3_{x_1}.$$

Если характеристики поля измеряются или задаются внешним током только на части границы исследуемой области, то для нахождения векторов E, H внутри области требуется решить задачу Коши для уравнений (6.3)–(6.4).

В случае, когда параметры среды являются гладкими функциями, после замены $E' = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}E^3$, $H' = -\frac{1}{\sqrt{\beta}}H^3$ соответствующие компоненты электрического и магнитного полей будут являться решениями уравнений Гельмгольца. Поэтому для определения компонент электромагнитного поля можно использовать формулу типа Карлемана (5.2) для уравнения (5.1), в котором $a_1 = a_2 = 0$.

7. Замечания

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [3] Т. Карлеман доказал формулу, дающую решение уравнения Коши — Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г. М. Голузин и В. И. Крылов [1] получили результат для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных односвязных областей.

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора со специальными свойствами (названное функцией Карлемана) была получена М. М. Лаврентьевым [4]. Применяя этот метод, Ш. Я. Ярмухамедов [5] построил функции Карлемана для операторов Лапласа и Гельмгольца с постоянным коэффициентом для пространственных областей специального вида, когда часть границы области, где данные неизвестны, является конической поверхностью либо гиперповерхностью $\{x_3 = 0\}$.

В работе [6] Н. Н. Тархановым и А. А. Шлапуновым проведено исследование достаточно общих эллиптических систем и даны критерии разрешимости соответствующих задач Коши, а также формулы для их решения в терминах базисов с двойной ортогональностью.

Используя экспоненциально растущие решения, Икехата [7] получил формулу для решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом для областей в пространстве, где неизвестные данные расположены на участке гиперповерхности $\{x \cdot s = t\}$.

Также в работах [8]–[14] получены формулы типа Карлемана для различных эллиптических уравнений и систем.

Список литературы

[1] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, *Обобщенная формула Carleman'a и ее применения к аналитическому продолжению функций*, Матем. сборник, **40**: 2 (1933), 144–149.

[2] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, Москва, 1988.

[3] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.

[4] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

[5] Ш. Я. Ярмухамедов, *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, ДАН СССР, **235**: 2 (1977), 281–283.
[6] A. A. Shlapunov and N. N. Tarkhanov, *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbol*, Proc. London Math. Soc., **71**: 3 (1995), 1–52.
[7] M. Ikehata, *The enclosure method and its applications. Analytic Extension Formulas and their Applications*, Kluwar Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2001.
[8] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1990.
[9] Л. А. Айзенберг, Н. Н. Тарханов, *Абстрактная формула Карлемана*, ДАН СССР, **298**: 612 (1988), 1292–1296.
[10] Ш. Я. Ярмухамедов, Т. И. Ишанкулов, О. И. Махмудов, *О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве*, Сиб. мат. журнал, **33**: 1 (1992), 186–190.
[11] О. И. Махмудов, И. Э. Ниезов, *Регуляризация решений задачи Коши для системы теории упругости в бесконечной области*, Матем. заметки, **68**: 4 (2000), 548–553.
[12] О. И. Махмудов, *О задаче Коши для эллиптических систем в пространстве* $\mathbb{R}^m$, Матем. заметки, **75**: 6 (2004), 849–860.
[13] E. V. Arbuzov and A. L. Bukhgeim, *Carleman's formulas for A-analitic functions in a half-plane*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **5**:6 (1997), 491–505.
[14] Э. В. Арбузов, *Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости*, Сиб. мат. журнал, **44**: 1 (2003), 3–20.

Эдуард Витальевич Арбузов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: arbuzov@math.nsc.ru

Александр Львович Бухгейм
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Wichita State University,
Department of Mathematics and Statistics,
1845 N.Fair-mount,Wichita,KS, 67260-0033,USA
E-mail address: boukhgueim@math.wichita.edu