

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 5, стр. 509–517 (2008)

УДК 517.988.68

MSC 65R30

РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Е. Н. АКИМОВА, Г. Г. СКОРИК

ABSTRACT. For solving three-dimensional inverse gravity problem on reconstruction interface between two media with constant density regular methods are supposed. The methods of the solution contain two stage. On the first stage from measured gravity field the anomalous effect is selected with using regularizing technique. On the second stage the iteratively regularized Newton and Fletcher-Reeves processes are applied to solve the nonlinear integral equation of gravimetry. Results of model numerical experiments on parallel computing system MVS-1000 are demonstrated.

Keywords: inverse gravity problem, integral equation, parallel regular algorithms, parallel computing system MVS-1000.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основное направление исследований, которое развивалось в рамках интеграционного проекта в Институте математики и механики УрО РАН совместно с Институтом геофизики УрО РАН, было связано с созданием вычислительных технологий решения обратной задачи гравиметрии. Эта технология включает все необходимые этапы: 1) полевые измерения гравитационного поля; 2) предварительная обработка измеренного поля и выделение аномального эффекта от поверхности раздела сред; 3) решение

AKIMOVA, E.N., SKORIK, G.G., THE REGULAR METHODS FOR INVERSE GRAVITY PROBLEM SOLVING.

© 2008 Акимова Е.Н., Скорик Г.Г.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана УрО РАН (Интеграционный проект с СО РАН и ДВО РАН) и частично РФФИ (грант 06-01-00116).

Поступила 17 июля 2008 г., опубликована 27 ноября 2008 г.

нелинейного двумерного интегрального уравнения первого рода относительно функции, описывающей разделяющую поверхность.

За отчетный период сотрудниками ИММ УрО РАН получены следующие основные результаты:

- а) разработаны и программно реализованы новые алгоритмы предварительной обработки геофизических полей;
- б) наряду с итеративно регуляризованным методом Ньютона был реализован новый алгоритм, основанный на регуляризованном варианте метода Флетчера-Ривса для задачи гравиметрии;
- в) все методы были протестированы на квазимодельных данных.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о восстановлении поверхности раздела между средами (геологической границы) по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности, разделенных искомой поверхностью S .

В предположении, что гравитационная аномалия создана отклонением искомой поверхности S от горизонтальной плоскости $z = H$, в декартовой системе координат функция $z = z(x, y)$, описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$(1) \quad A[z] \equiv f \Delta \sigma \iint_{a \ c}^{b \ d} \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} \right\} dx' dy' = F(x, y),$$

где f — гравитационная постоянная, $\Delta \sigma$ — скачок плотности на границе раздела сред, $F(x, y)$ — аномальное гравитационное поле, $z = H$ — асимптотическая плоскость для данной геологической границы.

3. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ АНОМАЛЬНОГО ПОЛЯ

Предварительная обработка гравитационных либо магнитных данных, связанная с выделением аномального поля (т.е. получением правой части уравнения (1)), выполняется по методике, разработанной П.С. Мартышко и И.Л. Пруткиным [1].

Кратко опишем методику выделения из измеренного поля гравитационного эффекта $\Delta g(x, y)$ непосредственно от искомой поверхности раздела при решении структурной обратной задачи гравиметрии (1).

По устоявшимся представлениям геофизиков считается, что при пересчете поля вверх на уровень $z = -H$ (ось z направлена вниз) влияние аномалиеобразующих объектов до глубины $z = H$ практически устраняется. Поэтому измеренное на земной поверхности поле $U(x, y, z)|_{z=0}$ сначала продолжается вверх на уровень $z = -H$. Пересчет на высоту H реализуется

по формуле Пуассона

$$(2) \quad U(x, y, H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} U(x', y', 0) dx' dy'.$$

Искажения, связанные с этой процедурой, наиболее значительны вблизи границы области D вследствие интегрирования не по бесконечной, а по конечной области D . Поэтому с целью уменьшения искажений из измеренного поля $U(x, y, 0)$ предварительно (т.е. до пересчета поля вверх) вычитаются значения функции $u(x, y)$, которая является решением плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$(3) \quad \Delta u(x, y) = 0, \quad u(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y).$$

Здесь $\varphi(x, y) = U(x, y, 0)$, т.е. искомая функция принимает на границе области D те же значения, что и заданное гравитационное поле.

Далее, чтобы окончательно избавиться от влияния источников в горизонтальном слое от дневной поверхности до глубины H , пересчитанное вверх поле $\bar{U}(x, y, -H)$ затем продолжается вниз на глубину $z = H$. Для нахождения функции $u(x, y)$, описывающей это поле, необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$(4) \quad Ku \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{2H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2H)^2]^{3/2}} u(x', y') dx' dy' = \bar{U}(x, y, -H).$$

Уравнение (4) относится к классу некорректно поставленных задач, поэтому при его решении привлекается регуляризация сдвигом (схема Лаврентьева)

$$(K + \alpha I)u = \bar{U},$$

где α — параметр регуляризации.

Полученное решение можно трактовать как поле глубинных источников. Сумма этого поля, пересчитанного на земную поверхность, и решения задачи Дирихле используется как поле боковых и глубинных (т.е. сторонних) источников.

Разность измеренных значений гравитационного поля $U(x, y, 0)$ и полученного поля сторонних источников принимается в качестве гравитационного эффекта от искомой поверхности раздела и используется в качестве правой части при решении обратной задачи гравиметрии.

Аналогичная методика предварительной обработки используется при решении обратной задачи магнитометрии.

Таким образом, в соответствии с методикой *задача предварительной обработки гравитационных данных* сводится к последовательному решению трех задач:

- 1) решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа на всей или части границы исследуемой области (3);
- 2) вычислению интегрального оператора (2) для пересчета поля вверх;
- 3) решению двумерного интегрального уравнения первого рода (4) для пересчета поля вниз.

Для решения задачи Дирихле предлагаются следующие алгоритмы.

1) Итерационный метод Гаусса-Зейделя (МГЗ) для конечно-разностной схемы "крест" на пятиточечном шаблоне сетки (рис. 1)

$$(5) \quad u_{ij}^{k+1} = 0.25(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^{k+1} - h^2 \bar{\varphi}_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

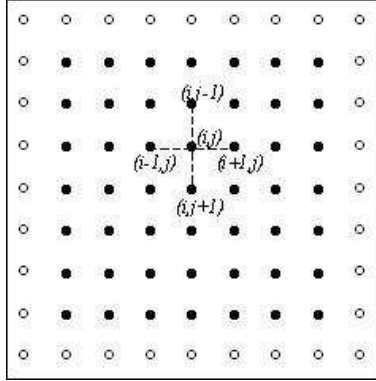


Рис. 1. Пятиточечный шаблон на сетке $N \times N$

2) Метод разделения переменных (МРП) в сеточной прямоугольной области [2].

Задача Дирихле для уравнения Лапласа (3) в прямоугольной области D сводится к задаче Дирихле для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями путем изменения правой части уравнения в приграничных узлах. Новая правая часть определяется формулами:

$$\bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{h_1^2} \varphi_1(x, y) + \frac{1}{h_2^2} \varphi_2(x, y),$$

где

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(0, y), & x = h_1; \\ 0, & 2h_1 \leq x \leq l_1 - 2h_1; \\ \varphi(l_1, y), & x = l_1; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, 0), & y = h_2; \\ 0, & 2h_2 \leq y \leq l_2 - 2h_2; \\ \varphi(x, l_2), & y = l_2; \end{cases}$$

$$l_1 = b - a, \quad l_2 = d - c.$$

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определяются из исходных данных, описывающих гравитационное поле на границе области D , с учетом условия $\varphi(x, y) = U(x, y, 0)$.

МРП для задачи Дирихле для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями в области D имеет вид

$$(6) \quad \phi_k(i) = \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\varphi}(i, j) \sin \frac{k\pi j}{N}, \quad k, i = 1, \dots, N-1;$$

$$(7) \quad -\nu_k(i-1) + (2 + h^2 \lambda_k) \nu_k(i) - \nu_k(i+1) = h^2 \phi_k(i),$$

$$\nu_k(0) = \nu_k(N) = 0, \quad i, k = 1, \dots, N-1;$$

$$(8) \quad u_k(i, j) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \nu_k(i) \sin \frac{k\pi j}{N}, \quad i, j = 1, \dots, N - 1;$$

где

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2N}; \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

Численная реализация и распараллеливание алгоритмов для решения задачи предварительной обработки гравитационных данных выполнены на МВС-1000/32 с помощью библиотеки MPI на языке Фортран (см. [3]).

В соответствии с методикой предварительной обработки гравитационных данных *на этапе пересчета поля вверх* при вычислении интегрального оператора (2) используется параллельный алгоритм умножения матрицы на вектор, *на этапе пересчета поля вниз* при решении интегрального уравнения (4) используются описанные ниже параллельные итерационные методы градиентного типа.

Распараллеливание итерационного метода Гаусса-Зейделя (5) для решения задачи Дирихле в прямоугольной области основано на декомпозиции исходной области на вертикальные подобласти. В каждой подобласти значения функций u_{ij}^{k+1} вычисляются независимо. На границах подобластей граничные значения пересылаются в соседние процессоры. Host-процессор отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть решения.

Распараллеливание метода разделения переменных для решения задачи Дирихле в прямоугольной области реализовано в двух вариантах, отличающихся распределением исходных данных вертикальными либо горизонтальными полосами по процессорам (рис. 2).

В случае горизонтального разбиения исходной области на L подобластей (горизонтального распределения исходных данных по процессорам) суммы в (6) и (8) разбиваются на L частей, и каждый из процессоров вычисляет свою часть функций $\phi_k(i)$ и $u_k(i, j)$, где $k, j = 1, \dots, N - 1$. Краевые задачи (7) решаются методом обычной прогонки.

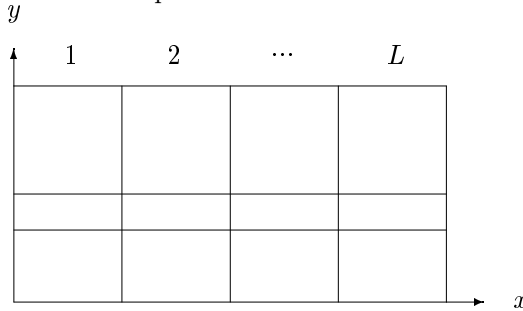


Рис. 2. Разбиение области на подобласти

В случае вертикального разбиения исходной области на L подобластей (вертикального распределения исходных данных по процессорам) функции $\phi_k(i)$ и $u_k(i, j)$ для $k, j = 1, \dots, N - 1$ вычисляются на процессорах независимо. Краевые задачи вида (7) решаются с помощью алгоритма распараллеливания прогонки, предложенного в работе [4] для решения краевой задачи для трехточечного разностного уравнения на отрезке.

Идея алгоритма распараллеливания прогонки заключается в разбиении исходного отрезка $(0, N)$ на L интервалов распараллеливания $(k, k + m)$,

$k = 0, m, \dots, N - m$ так, что $n = L \cdot m$. Точки разбиения отрезка $k = 0, m, \dots, N$ выбираются в качестве узлов распараллеливания, а искомые неизвестные в узлах — в качестве параметрических $-Y_k$. Относительно Y_k строится вспомогательная система уравнений, после решения которой остальные искомые неизвестные находятся на L интервалах независимо.

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ БАЗОВОГО УРАВНЕНИЯ

4.1. Итеративно регуляризованный метод Ньютона. После дискретизации уравнения (1), на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $F(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора A по квадратурным формулам имеем систему нелинейных уравнений

$$(9) \quad A_n[z] = F_n.$$

Для решения системы уравнений вида (9) используется итеративно регуляризованный метод Ньютона [5]–[6]

$$(10) \quad z^{k+1} = z^k - [A'_n(z^k) + \alpha_k I]^{-1}(A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n)$$

Здесь $A_n(z^k)$ и F_n — конечномерные аппроксимации интегрального оператора и правой части в уравнении (1), $A'_n(z^k)$ — производная Фреше операторов A либо B в точке z^k , I — единичный оператор, α_k — последовательность положительных параметров регуляризации.

Нахождение очередного приближения z^{k+1} по найденному z^k сводится к решению СЛАУ

$$(11) \quad A_n^k z^{k+1} = F_n^k,$$

где $A_n^k = A'_n(z^k) + \alpha_k I$ — несимметричная заполненная $n \times n$ матрица,

$F_n^k = A_n^k z^k - (A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n)$ — вектор размерности n .

Таким образом, для нахождения очередного приближения z^{k+1} метода Ньютона (10) необходимо решать СЛАУ (11) с несимметричной полностью заполненной $n \times n$ матрицей.

На каждом шаге метода Ньютона используются прямые методы Гаусса или Гаусса-Жордана или итерационные методы градиентного типа в регуляризованном варианте для решения СЛАУ с симметричной матрицей. С этой целью система уравнений (11) приводится к виду

$$(12) \quad B^k z^{k+1} \equiv [(A_n^k)^T A_n^k + \alpha'_k I] z^{k+1} = (A_n^k)^T F_n^k \equiv b,$$

где $(A_n^k)^T$ — транспонированная матрица, α'_k — параметры регуляризации.

Для решения системы уравнений (12) используются следующие итерационные методы.

1) Итеративно регуляризованный метод простой итерации (МПИ)

$$(13) \quad z^{k+1} = z^k - \frac{1}{\lambda_{max}} [(A + \alpha E) z^k - b],$$

где λ_{max} — максимальное собственное значение матрицы $A + \alpha E$ (симметричный случай). Здесь максимальное собственное значение λ_{max} матрицы находится с помощью степенного метода

$$(14) \quad Y_k = AX_{k-1}, \quad X_k = Y_k / \|Y_k\|, \quad \lambda_{max} \approx \|AX_k\|.$$

2) Метод сопряженных градиентов (МСГ)

$$(15) \quad z^{k+1} = z^k - \gamma_k(Az^k - b) + \beta_k(z^k - z^{k-1}),$$

где γ_k и β_k вычисляются по известным формулам [7]

$$\gamma_k = \frac{\|r^k\|^2 (Ap^k, p^k) - (r^k, p^k)(Ar^k, p^k)}{(Ar^k, r^k)(Ap^k, p^k) - (Ar^k, p^k)^2}, \quad r^k = Az^k - b,$$

$$\beta_k = \frac{\|r^k\|^2 (Ar^k, p^k) - (r^k, p^k)(Ar^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)(Ap^k, p^k) - (Ar^k, p^k)^2}, \quad p^k = z^k - z^{k-1},$$

а первое приближение z^1 находится методом наискорейшего спуска.

$$z^1 = z^0 - \frac{\|r^0\|^2 \cdot (Az^0 - b)}{(Ar^0, r^0)}, \quad r^0 = Az^0 - b.$$

Условием останова итерационных процессов является $\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon$.

Численная реализация и распараллеливание итерационных методов для решения обратной задачи гравиметрии (1) выполнены на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС-1000/32 с помощью библиотеки MPI [8] на языке Фортран.

Распараллеливание итерационных методов градиентного типа [9] основано на разбиении матрицы A горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части b СЛАУ на m частей так, что $n = m \times L$, где n — размерность системы уравнений, m — число процессоров, L — число строк матрицы в блоке (рис. 3).

На каждой итерации каждый из m процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы A на вектор z каждый из m процессоров умножает свою часть строк матрицы A на вектор z . В случае матричного умножения $A^T A$ каждый из m процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы A^T на всю матрицу A . Host-процессор отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

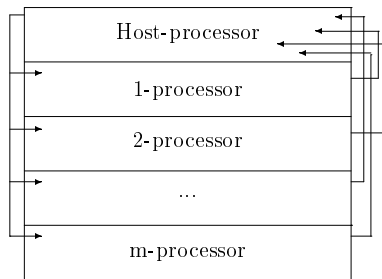


Рис. 3. Схема распределения данных по процессорам для итерационных методов

4.2. Метод Флетчера-Ривса. Предлагается новый подход к решению задачи (1) о восстановлении геологической границы по гравитационной аномалии и известному скачку плотности при переходе искомой границы. Для решения уравнения (1) реализован следующий двухэтапный алгоритм:

1) уравнение (1) регуляризуется методом Тихонова

$$(16) \quad \min \{ \|A(z) - f\|_{L_2}^2 + \gamma_1 \|z - H\|_{L_2}^2 + \gamma_2 (\|z'_x\|_{L_2}^2 + \|z'_y\|_{L_2}^2) : z \in W_2^1 \};$$

2) для решения задачи минимизации применяется один из вариантов метода Флетчера–Ривса

$$(17) \quad \begin{aligned} \Phi_\gamma(z) &= \|A(z) - f\|_{L_2}^2 + \gamma_1 \|z - H\|_{L_2}^2 + \gamma_2 (\|z'_x\|_{L_2}^2 + \|z'_y\|_{L_2}^2), \\ z_{k+1} &= z_k - \alpha_k p_k, \quad \Phi_\gamma(z_{k+1}) = \min_\alpha \Phi_\gamma(z_k - \alpha_k p_k), \\ p_0 &= \Phi'_\gamma(z_0), \quad p_{k+1} = \Phi'_\gamma(z_{k+1}) - \beta_k p_k, \\ \beta_k &= \langle \Phi'_\gamma(z_{k+1}), \Phi'_\gamma(z_{k+1}) - \Phi'_\gamma(z_k) \rangle / \langle \Phi'_\gamma(z_k), \Phi'_\gamma(z_k) \rangle, \end{aligned}$$

где Φ_γ — минимизируемый функционал из (16). Формула (17) для β_k найдена из условия $\langle p_k, \Phi''_\gamma(z_{k+1}) p_{k+1} \rangle = 0$ в первом приближении.

Для дискретизации область интегрирования разбивалась на прямоугольники размером h_x на h_y с центром в (x_i, y_j) и в каждом прямоугольнике значение функции z принималось постоянным $z(x, y) = z_{ij}$. Для вычисления интеграла (1) использовалась следующая приближенная формула

$$(18) \quad \int_{x_i - \frac{h_x}{2}}^{x_i + \frac{h_x}{2}} \int_{y_j - \frac{h_y}{2}}^{y_j + \frac{h_y}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_{i'})^2 + (y-y_{j'})^2 + z^2}} \right) dy dx \approx \frac{h_x h_y}{a \sqrt{R_1^2 + z^2} + (1-a) \sqrt{R_2^2 + z^2}},$$

где параметры a , R_1 и R_2 зависят от $|i - i'|$ и $|j - j'|$ и выбираются так, чтобы совпадали первые несколько членов разложения в ряд Тейлора обеих частей уравнения (18) в точке $z = 0$.

Для примера, при $h_x = 0.5$ и $h_y = 2$, относительная погрешность приближения (18) не превышает 2% и быстро затухает при увеличении $\max\{|i - i'|, |j - j'|\}$.

Алгоритм Флетчера–Ривса тестировался на модельной задаче с $h_x = 0.5$, $h_y = 2$ и числом точек дискретизации 100×30 [10]. Геологическая граница задавалась по формуле

$$(19) \quad \tilde{z}(x, y) = 5 + \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{5} x - 10 \right) + \sin \frac{\pi}{30} y, \quad H = 5.$$

Правая часть (1) для модели рассчитывалась при $G = 6.67$, $\Delta\sigma = 0.5$ и с добавлением случайного шума с амплитудой 4, что дало 10% погрешность от максимального по модулю значения $f(x, y)$.

В качестве начального приближения в итерационном процессе Флетчера–Ривса принималась функция $z_0(x, y) = 0.1$. Правилom остановки итераций служило условие $\|\Phi'_\gamma(z_k)\|_{L_2} < 0.01$. Относительная погрешность полученного решения z_γ составила 2.7%.

На рис. 4 изображена модельная граница (S_1), а на рис. 5 — приближенное решение (S_2).

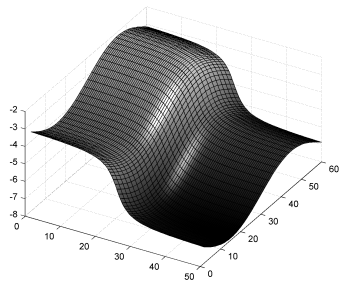


Рис. 4. Модельная граница S_1 , рассчитанная по формуле (19)

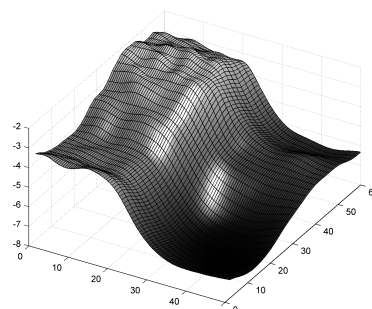


Рис. 5. Решение S_2 по методу Флетчера–Ривса с параметрами $\gamma_1 = 1.78$, $\gamma_2 = 16$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мартышко П.С., Пруткин И.Л., *Технология разделения источников гравитационного поля по глубине*, Геофизический журнал, **25**: 3 (2003), 159–168.
- [2] Самарский А.А., Николаев Е.С., *Методы решения сеточных уравнений*, М.: Наука, 1978. 590 с.
- [3] Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В., *Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое*, Труды института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, **13**: 3 (2007), 3–21.
- [4] Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов С.В., *Об организации параллельных вычислений и "распараллеливания" прогонки*, Численные методы механики сплошной среды, **9**: 7 (1978), 139–146.
- [5] Bakushinsky, A., Goncharky, A., *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Cluver Publishers, 1994.
- [6] Акимова Е.Н., *О сходимости метода Ньютона при решении обратной задачи гравиметрии*, Алгоритмический анализ неустойчивых задач (Тез. межд. конф., Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 г.). Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008, 12–13.
- [7] Фаддеев В.К., Фаддеева В.Н., *Вычислительные методы линейной алгебры*, М.: Гос. издат. физ.- мат. литературы, 1963, 734 с.
- [8] Baranov A.V., Latsis A.O., Sazhin C.V., Khramtsov M.Yu., *The MVS-1000 System User's Guide* // <http://parallel.ru/mvs/user.html>.
- [9] Акимова Е.Н., Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Тимерханова Л.Ю., Мартышко П.С., Кокшаров Д.Е., *О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе*, Вычислительные методы и программирование. Москва: МГУ, **8**: 1 (2007), 107–116.
- [10] Акимова Е.Н., Васин В.В., Скорик Г.Г., *Решение обратных задач магнитометрии и гравиметрии о восстановлении разделяющей поверхности сред*, Материалы 35-й сессии международного семинара им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей". Ухта: УГТУ, 2008, 8–11.

ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА АКИМОВА, ГЕОРГИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ СКОРИК
 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УРО РАН,
 ул. С. Ковалевской 16,
 620219, ЕКАТЕРИНБУРГ, РОССИЯ
 E-mail address: aen@imm.uran.ru