S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 51–67 (2008) УДК 517.51
MSC 42A30

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Г. А. АКИШЕВ

Abstract. In this paper the anisotropic Lorentz space of periodic functions is considered. The sufficient condition embedding classes in Lorentz spaces are obtained. We establish the upper estimate of the order of approximation O.V. Besov's classes by trigonometric polynomials in Lorentz spaces with anisotropic norm.

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$ имеющих 2π- период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

$\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ — множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0, \ \ \forall j = 1, ..., m.$$

$a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

Akishev, G. A., On degree of approximation of classes in Lorentz space.

Поступила 29 июня 2007 г., опубликована 10 марта 2008 г.

где

$$\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^{m} y_j x_j,\ \rho(\bar{s}) = \left\{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in Z^m : \quad 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}.$$

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in Z^m,} \in l_{\overline{p}}$ если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in Z^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[...\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}...\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

Рассмотрим класс О.В. Бесова

$$B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}} = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}} = \|f\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} + \left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le 1\right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \le p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$. Положим $\bar{\gamma} = \frac{\bar{r}}{r_1}$,$r_j > 0$ и

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\}.$$

$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\overline{\theta}}$- наилучшее приближение функции $f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$. $S_n^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}} a_{\bar{k}}(f)\cdot e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}$- частичная сумма ряда Фурье функции f.

Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К.И. Бабенко [2].

Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С.А. Теляковский [3], Б.С. Митягин [4], Я.С. Бугров [5], Н.С. Никольская [6], Э.М. Галеев [7], В.Н. Темляков [8], Динь Зунг [9], Н.Н. Пустовойтов [10], Э.С. Белинский [11], Б.С. Кашин и В.Н.Темляков [12], А.С. Романюк [13], [14], Б. Базарханов [15]. Обзор по этой теме дан в [16].

В частности для классов О.В. Бесова $B^{\bar{r}}_{p,\theta}$ в пространствах Лебега с изотропной нормой А.С. Романюк [13] доказал

Теорема (Романюк А.С.) *Пусть* $1 \le p < q < +\infty \quad 1 \le \tau < +\infty \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$. $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}, j = 1, ..., m$. *Тогда*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar{r}}_{p,\tau}\right)_q \asymp 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \cdot n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Известно, что справедливы включения $L^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}} \subset L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}$ в случае $p_j < q_j, j = 1, ..., m$ и $L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} \subset L^{*}_{\overline{p},\overline{q}}$ если $\theta_j < q_j, j = 1, ..., m$.

Отметим, что в одномерном случае вложение классов H_p^ω в пространство Лоренца $L_{p,q}, p < q$ впервые исследовано Н. Темиргалиевым [17], [18].

Точные оценки порядка приближения классов Никольского–Бесова в пространствах Лоренца с анизотропной метрикой случае $p_j < q_j, j = 1, ..., m$ установлены в [19], [20].

В настоящей заметке получена оценка сверху порядка величины,

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}} = \sup_{f\in B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}} E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\overline{q},\overline{\theta}}$$

в случае $m = 2, \theta_j < q_j, j = 1, 2$. Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2), \bar{q} = (q_1, q_2), 1 \le p_j < +\infty, 1 \le \theta_j < q_j < +\infty, j = 1, 2,$. *Если* $f \in L^*_{\bar{p},\bar{q}}(I^2)$ *и*

$$\sum_{s_2=1}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}}\Big[\sum_{s_1=1}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\right)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} < +\infty,$$

то $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^2)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \le C(p,q,\theta)\left\{\sum_{s_2=1}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}}\Big[\sum_{s_1=1}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\right)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2), \bar{q} = (q_1, q_2), 1 \le p_j < +\infty, 1 \le \theta_j < q_j < +\infty$, $r_j > 0, \gamma_j = \frac{r_j}{r_1}, j = 1, 2$. *Тогда имеет место соотношение*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{q}\bar{\tau}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \le C(r,q,p,\theta)2^{-nr_1}\cdot n^{\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}\right)+\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\tau_2}},$$

если $\theta_j < \tau_j, j = 1, 2$ *и*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{q}\bar{\tau}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \le C(p,q,\theta,\tau)\sup_{\bar{s}\in Y^2(\bar{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{2} 2^{-s_j r_j} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}}$$

в случае $\tau_j \le \theta_j, j = 1, 2$.

Для доказательства основных результатов сначала введем дополнительные обозначения и приведем вспомогательные утверждения. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями.

Через $S_{l_1,\infty}(f,\bar{x})$ обозначим частную сумму порядка l_1 по x_1 ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$ т.е.

$$S_{l_1,\infty}(f,\bar{x}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t,x_2)D_{l_1}(t)dt,$$

где

$$D_l(t) = \sum_{k=-l}^{l} e^{-kt}.$$

Аналогично

$$S_{\infty,l_2}(f,\bar{x}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1,x_2+t)D_{l_2}(t)dt,$$

$$S_{l_1,l_2}(f,\bar{x}) = \frac{1}{(\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)D_{l_1}(t_1)D_{l_2}(t_2)dt_1dt_2.$$

Положим $U_{l_1,l_2}(f.\bar{x}) = S_{l_1,\infty}(f,\bar{x}) + S_{\infty,l_2}(f,\bar{x}) - S_{l_1,l_2}(f,\bar{x})$.

Через $V_{l_1,\infty}(f,\bar{x})$ обозначим сумму Валле-Пуссена по x_1 ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$ т.е.

$$V_{0,\infty}(f,\bar{x}) = S_{0,\infty}(f,\bar{x}),\ \ V_{l_1,\infty}(f,\bar{x}) = \frac{1}{l_1}\sum_{k=l_1}^{2l_1-1} S_{k,\infty}(f,\bar{x}).$$

Далее обозначим

$$V_{\infty,0}(f,\bar{x})=S_{\infty,0}(f,\bar{x}),\quad V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})=\frac{1}{l_2}\sum_{k=l_2}^{2l_2-1}S_{\infty,k}(f,\bar{x}),$$

$$V_{l_1,l_2}(f,\bar{x})=V_{l_1,\infty}(V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})),$$

$$W_{l_1,l_2}(f,\bar{x})=V_{l_1,\infty}(f,\bar{x})+V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})+V_{l_1,l_2}(f,\bar{x}).$$

Тогда функция

$$\Delta_{\nu,\mu}(f,\bar{x})=W_{2^\nu,2^\mu}(f,\bar{x})-W_{2^\nu,[2^{\mu-1}]}(f,\bar{x})-W_{[2^{\nu-1}],2^\mu}(f,\bar{x})+W_{[2^{\nu-1}],[2^{\mu-1}]}(f,\bar{x})=$$
$$=-V_{2^\nu,2^\mu}(f,\bar{x})+V_{2^\nu,[2^{\mu-1}]}(f,\bar{x})+V_{[2^{\nu-1}],2^\mu}(f,\bar{x})-V_{[2^{\nu-1}],[2^{\mu-1}]}(f,\bar{x})$$

есть тригонометрический полином порядка $2^{\nu+1}-1$ по x_1 и порядка $2^{\mu+1}-1$ по x_2.

Введем обозначения $\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar{x})=-\Delta_{\nu,\mu}(f,\bar{x})$ и

$$\Phi_{k_1,k_2}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_2=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1}\sum_{\nu_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar{x}),$$

$$\Phi_{k_1,0}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\phi_{\nu_1,0}(\bar{x}),$$

$$\Phi_{0,k_2}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_2=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1}\phi_{0,\nu_2}(\bar{x}).$$

Отметим, что $\phi_{\nu_1,0}(\bar{x})$, $(\phi_{0,\nu_2}(\bar{x}))$ есть тригонометрический полином порядка 1 по x_2 (по x_1). Значит $\Phi_{k_1,0}(f,\bar{x})$, $(\Phi_{0,k_2}(f,\bar{x}))$ имеет такой же порядок по x_2 (по x_1).

Величина

$$Y_{l_1,\ldots,l_m}(f)_{\bar{p},\bar{\theta}}=\inf_{T_{l_j}}\|f-\sum_{j=1}^{m}T_{l_j}\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}\ ,\quad l_j=0,1,2,...$$

называется наилучшим приближением «углом» функции $f\in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$.

Наилучшее приближение «углом» в пространствах Лебега определено М.К. Потаповым [21], Я.С. Бугровым [22].

Положим

$$Y^m(\overline{\gamma},n)=\left\{\overline{s}=(s_1,...,s_m)\in Z_+^m:\sum_{j=1}^{m}s_j\gamma_j\geq n\right\},$$

$$Y_1^m(\overline{\gamma},n)=\left\{\overline{s}=(s_1,...,s_m)\in Z_+^m:\sum_{j=1}^{l}s_j\gamma_j\geq n-\sum_{j=l+1}^{\alpha}s_j\gamma_j,\ \sum_{j=l+1}^{\alpha}s_j\gamma_j<n\right\},$$

$$Y_2^m(\overline{\gamma},n)=\left\{\overline{s}=(s_1,...,s_m)\in Z_+^m:s_1,...,s_l\geq 0,\ \sum_{j=l+1}^{m}s_j\gamma_j\geq n\right\}.$$

Отметим, что $Y^m(\overline{\gamma},n)=Y_1^m(\overline{\gamma},n)\cup Y_2^m(\overline{\gamma},n)$.

Через $C(p,q,y,..)$ обозначим положительные величины зависящие лишь от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах.

Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$.

Лемма А. (см. [23]) *Пусть* $0 < \theta < +\infty$ *и даны положительные числа* a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots$.

a) Если

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq C \cdot a_n,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{k=n}^{\infty} b_k \Big)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{\theta}.$$

b) Если

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq C \cdot a_n,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k \Big)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n^{\theta}.$$

Лемма Б. (см. [24] ,[25]) *Пусть* $1 \leq p_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j < q_j < \infty$, $j = 1, 2$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \leq \bar{n}} a_{\bar{k}} e^{i \langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

имеет место неравенство

$$\|T_{\bar{n}}\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \leq C \cdot \prod_{j=1}^{2} (\ln(n_j + 1))^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}} \cdot \|T_{\bar{n}}\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}.$$

Теперь докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $1 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \ldots \leq \gamma_m$ $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $\beta_j \in R$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\beta_j} \right\}_{\overline{s} \in Y^m(\overline{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq C(\alpha, \theta, \gamma) 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=2}^{m} \frac{1}{\theta_j} + \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j}.$$

Замечание 1. *Отметим, что лемма 1 в случае* $\beta_j = 0, j = 1, \ldots, m$, *ранее доказана в [19], [20], а если кроме этого* $\theta_1 = \ldots = \theta_m$ *— В.Н. Темляковым [8].*

Пользуясь методом примененным в [26], [27], [10] докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2), \bar{q} = (q_1, q_2), 1 \leq p_j < +\infty, 1 \leq \theta_j < q_j < +\infty$. *Тогда имеет место неравенство*

$$I_1 \leq C(p, q, \theta) \left\{ \sum_{l_2=m_2}^{n_2} 2^{l_2 \theta_2 (\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{q_2})} \left[\sum_{l_1=m_1}^{n_1} 2^{l_1 \theta_1 (\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{q_1})} (\|\Phi_{\bar{l}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}},$$

где

$$I_1 = \left\| \sum_{k_1=m_1}^{n_1} \sum_{k_2=m_2}^{n_2} \Phi_{\bar{k}}(f) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}.$$

Доказательство. Обозначим $s_1 = [\theta_1] + 1$,

$$A_{k_2}(f, \bar{x}) = \sum_{k_1=m_1}^{n_1} |\Phi_{\bar{k}}(f, \bar{x})|.$$

Тогда по свойству нормы и невозрастающей перестановки функции имеем

$$I_1 = \left\| \sum_{k_2=m_2}^{n_2} A_{k_2}(f) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \Big(\sum_{k_2=m_2}^{n_2} A_{k_2}(f) \Big)^{*_1*_2} (y_1, y_2) dy_1 dy_2 \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}. \tag{1}$$

Из равенства

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} g^{*_1*_2}(t_1, t_2) du_1 du_2 = \sup_{e_2:mes(e_2)=t_2} \int_{e_2} \sup_{e_1:mes(e_1)=t_1} \int_{e_1} |g(x_1, x_2)| dx_1 dx_2.$$

следует

$$\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \Big(\sum_{k_2=m_2}^{n_2} A_{k_2}(f) \Big)^{*_1*_2} (y_1, y_2) dy_1 dy_2 \leq$$

$$\leq \sum_{k_2=m_2}^{n_2} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A_{k_2}^{*_1*_2}(f, \bar{y}) dy_1 dy_2.$$

Поэтому из (1) следует

$$I_1^{\theta_2} \leq \left\| \sum_{k_2=m_2}^{n_2} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A_{k_2}^{*_1*_2}(f, \bar{y}) dy_1 dy_2 \right\|^{*\theta_2}_{\bar{p},\bar{\theta}} = \tag{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \Big[\sum_{k_2=m_2}^{n_2} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A_{k_2}^{*_1*_2}(f, \bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\frac{\theta_1}{s_1} s_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1} - 1} dt_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2}{p_2} - 1} dt_2$$

Далее к сумме применяя неравенство Иенсена ([28], стр. 125) $\frac{\theta_1}{s_1} < 1$, к интегралу по переменной t_1 применяя неравенство Гельдера для нескольких сомножителей с показателями $s_1 > 1$ (см. [29]), затем снова неравенство Иенсена (если $\frac{\theta_2}{\theta_1} \leq 1$) из (2) получим

$$I_1^{\theta_2} \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \Big(\sum_{k_2=m_2}^{n_2} \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A_{k_2}^{*_1*_2}(f, \bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\frac{\theta_1}{s_1}} \Big)^{s_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1} - 1} dt_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2}{p_2} - 1} dt_2 \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu_2(1)=m_2}^{n_2} \cdots \sum_{\nu_2(s_1)=m_2}^{n_2} \prod_{j=1}^{s_1} \Big(\int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A_{\nu_2(j)}^{*_1*_2}(f, \bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1} - 1} \times \right.$$

$$\left. \times dt_1 \Big)^{\frac{1}{s_1}} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2}{p_2} - 1} dt_2$$

$$\sum_{\nu_2(1)=m_2}^{n_2} \dots \sum_{\nu_2(s_1)=m_2}^{n_2} \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{s_1} \Big(\int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A^{*_1*_2}_{\nu_2(j)}(f,\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} \times$$

$$\times dt_1 \Big)^{\frac{\theta_2}{s_1\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2}{p_2}-1} dt_2. \qquad (3).$$

Положим

$$\delta_{\nu_2(j)}(f,t_2) = \Big(t_2^{\frac{\theta_2}{p_2}} \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A^{*_1*_2}_{\nu_2(j)}(f,\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1 \Big)^{\frac{\theta_2}{s_1\theta_1}}.$$

Тогда учитывая равенство

$$\prod_{j=1}^{s} \delta_{\nu_j} = \Big[\prod_{1\le i<j\le s} \delta_{\nu_i}\delta_{\nu_j} \Big]^{\frac{1}{s-1}} \qquad (4)$$

и применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau_1 = \frac{s_1(s_1-1)}{2}$, а затем показателем $\beta > 1$, $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta_1} = 1$ получим

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{s_1} \Big(\int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A^{*_1*_2}_{\nu_2(j)}(f,\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1 \Big)^{\frac{\theta_2}{s_1\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2}{p_2}-1} dt_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{s_1} \delta_{\nu_2(j)}(f,t_2) \frac{dt_2}{t_2} = \int_0^{2\pi} \Big[\prod_{1\le i<j\le s_1} \delta_{\nu_2(i)}(f,t_2)\delta_{\nu_2(j)}(f,t_2) \Big]^{\frac{1}{s-1}} \frac{dt_2}{t_2} \le$$

$$\le \prod_{1\le i<j\le s_1} \Big[\int_0^{2\pi} \Big(\delta_{\nu_2(i)}(f,t_2)\delta_{\nu_2(j)}(f,t_2) \Big)^{\frac{s_1}{2}} \frac{dt_2}{t_2} \Big]^{\frac{1}{\tau_1}} \le \prod_{1\le i<j\le s_1} \lambda_i \hat{\lambda_j}, \qquad (5)$$

где

$$\lambda_i = \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big(\delta_{\nu_2(i)}(f,t_2) \Big)^{\frac{s_1\beta}{2}} t_2^{-1} dt_2 \Big\}^{\frac{1}{\beta\tau_1}} \qquad (6)$$

$$\hat{\lambda_j} = \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big(\delta_{\nu_2(j)}(f,t_2) \Big)^{\frac{s_1\beta_1}{2}} t_2^{-1} dt_2 \Big\}^{\frac{1}{\beta_1\tau_1}}. \qquad (7)$$

Рассмотрим

$$B_i(t_2) = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} A^{*_1*_2}_{\nu_2(i)}(f,\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1.$$

Учитывая обозначение $A_{\nu_2(i)}(f,\bar{y})$, свойства невозрастающей перестановки, пользуясь неравенством Иенсена и равенством (4) получим

$$B_i(t_2) = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \Big(\sum_{k_1=m_1}^{n_1} |\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)| \Big)^{*_1*_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1 \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} \Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \Big(\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f) \Big)^{*_1*_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big]^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1$$

$$\int_0^{2\pi} \Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1} \Big(\frac{1}{t_2} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \Big(\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f) \Big)^{*_1*_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1}{s_1}} \Big]^{s_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1 =$$

$$= \sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1} \dots \sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1} \int_0^{2\pi} \prod_{1\le j<l\le s_1} \Big(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \Big(\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f) \Big)^{*_1 *_2} (\bar{y}) dy_1 \times$$

$$\times dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1}{s_1(s_1-1)}} t_1^{-1} dt_1 \cdot$$

$$\cdot \Big(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} (\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f))^{*_1 *_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1}{s_1(s_1-1)}} t_1^{-1} dt_1. \qquad (8)$$

Применяя неравенство Гельдера с показателем $\tau_1 = \frac{s_1(s_1-1)}{2}$, а затем показателем $\alpha = \frac{\theta_1+q_1}{\theta_1}$, $\alpha_1 = \frac{\theta_1+q_1}{q_1}$ из (8) получим

$$B_i(t_2) \le$$

$$\le \sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1} \dots \sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1} \prod_{1\le j<l\le s_1} \Big[\int_0^{2\pi} \Big(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} (\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f))^{*_1 *_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1}{2}} \cdot$$

$$\Big(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} (\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f))^{*_1 *_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1}{2}} \frac{dt_1}{t_1} \Big]^{\frac{1}{\tau_1}} \le$$

$$\sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1} \dots \sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1} \prod_{1\le j<l\le s_1} \Big[\int_0^{2\pi} \Big(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} (\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f))^{*_1 *_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1 \cdot \alpha}{2}} \times$$

$$\times \frac{dt_1}{t_1} \Big]^{\frac{1}{\tau_1 \cdot \alpha}} \cdot$$

$$\cdot \Big[\int_0^{2\pi} \Big(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} (\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f))^{*_1 *_2} (\bar{y}) dy_1 dy_2 \Big)^{\frac{\theta_1 \cdot \alpha_1}{2}} \frac{dt_1}{t_1} \Big]^{\frac{1}{\tau_1 \cdot \alpha_1}} =$$

$$= \sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1} \dots \sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1} \prod_{1\le j<l\le s_1} a_{k_1(j)} \hat{a}_{k_1(l)} = \prod_{j=1}^{s_1} \sum_{k_1(j)=m_1}^{n_1} a_{k_1(j)}^{s_1-j} \cdot \hat{a}_{k_1(j)}^{j-1}. \qquad (9)$$

Используя оценку (9) (см. (6)) , применяя неравенство Гельдера с показателем s_1, затем неравенство Миньковского будем иметь

$$\lambda_i \le \left\{ \int_0^{2\pi} \Big(\prod_{j=1}^{s_1} \sum_{k_1(j)=m_1}^{n_1} a_{k_1(j)}^{s_1-j} \cdot \hat{a}_{k_1(j)}^{j-1} \Big)^{\frac{\theta_2 \cdot \beta}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2 \cdot \beta}{2p_2}-1} dt_2 \right\}^{\frac{1}{\beta\tau_1}} \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{s_1} \left\{ \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k_1(j)=m_1}^{n_1} a_{k_1(j)}^{s_1-j} \cdot \hat{a}_{k_1(j)}^{j-1} \Big)^{\frac{\theta_2 \cdot \beta s_1}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2 \cdot \beta}{2p_2}-1} dt_2 \right\}^{\frac{1}{\beta\tau_1 s_1}} \le$$

$$\le \left\{ \sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1} \dots \sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1} \prod_{j=1}^{s_1} \Big[\int_0^{2\pi} \Big(a_{k_1(j)}^{s_1-j} \cdot \hat{a}_{k_1(j)}^{j-1} \Big)^{\frac{\theta_2 \cdot \beta s_1}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2 \cdot \beta}{2p_2}-1} dt_2 \Big]^{\frac{2\theta_1}{\theta_2 \beta s_1}} \right\}^{\frac{\theta_2}{2\theta_1 \tau_1}}$$

$$= \left\{ \sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1} \dots \sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1} A_{k_1(1),\dots,k_1(s_1)} \right\}^{\frac{\theta_2}{2\theta_1 \tau_1}}. \qquad (10)$$

Применяя неравенство Гельдера с показателем $\epsilon = \frac{s_1-1}{s_1-j}$, $\epsilon' = \frac{s_1-1}{j-1}$ получим

$$A_{k_1(1),\dots,k_1(s_1)} \le \prod_{j=1}^{s_1} \Big[\int_0^{2\pi} a_{k_1(j)}^{\frac{\theta_2 \cdot \beta s_1(s_1-1)}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2 \cdot \beta}{2p_2}-1} dt_2 \Big]^{\frac{2\theta_1(s_1-j)}{\theta_2 \beta s_1(s_1-1)}}.$$

$$\Big[\int_0^{2\pi} \hat{a}_{k_1(j)}^{\frac{\theta_2\cdot\beta s_1(s_1-1)}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2\cdot\beta}{2p_2}-1} dt_2\Big]^{\frac{2\theta_1(j-1)}{\theta_2\beta s_1(s_1-1)}} =$$

$$= \prod_{l=1}^{s_1-1}\prod_{j=l+1}^{s_1}\Big\{\int_0^{2\pi} a_{k_1(j)}^{\frac{\theta_2\cdot\beta s_1(s_1-1)}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2\cdot\beta}{2p_2}-1} dt_2\cdot\int_0^{2\pi} \hat{a}_{k_1(j)}^{\frac{\theta_2\cdot\beta s_1(s_1-1)}{2\theta_1}} t_2^{\frac{\theta_2\cdot\beta}{2p_2}-1} dt_2\Big\}^{\frac{2\theta_1}{\theta_2\beta s_1(s_1-1)}} =$$

$$= \prod_{l=1}^{s_1-1}\prod_{j=l+1}^{s_1}\gamma_l\hat{\gamma}_j. \tag{11}$$

Оценим γ_l Ё $\hat{\gamma}_j$. Так как $1 < \frac{q_2}{\theta_2}$, то $2 < 2\frac{q_2}{\theta_2}$. Тогда $\frac{\beta\theta_2}{2} < q_2$. Кроме этого из условия $\theta_1 < q_1$ следует, что $\frac{\alpha\theta_1}{2} < q_1$. Поэтому применяя неравенство разных метрик (лемма Б) получим

$$\gamma_l =$$

$$\Big[\int_0^{2\pi}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{t_1}\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f))^{*_1*_2}(\bar{y})dy_1dy_2\Big)^{\frac{\theta_1\cdot\alpha}{2}} t_1^{\frac{\theta_1\cdot\alpha}{2p_1}-1}dt_1\Big\}^{\frac{2}{\theta_1\cdot\alpha}\cdot\frac{\theta_2\beta}{2}}\times$$

$$\times t_2^{\frac{\theta_2\cdot\beta}{2p_2}-1}dt_2\Big]^{\frac{2\theta_1}{\theta_2\beta 2\cdot\tau_1}} \leq\leq C(p,q,\theta)\Big[2^{k_1(l)(\frac{2}{\theta_1\cdot\alpha}-\frac{1}{q_1})}\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})}$$

$$\Big\|\frac{1}{t_1}\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f))^{*_1*_2}(\bar{y})dy_1dy_2\Big\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big]^{\frac{\theta_1}{2\cdot\tau_1}}. \tag{12}$$

Так как $\frac{\theta_1\cdot\alpha}{2} < q_1$, то аналогичными рассуждениями получим

$$\hat{\gamma}_j \leq C(p,q,\theta)\Big[2^{k_1(j)(\frac{2}{\theta_1\cdot\alpha_1}-\frac{1}{q_1})}\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})}\times$$

$$\times\Big\|\frac{1}{t_1}\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}(\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f))^{*_1*_2}(\bar{y})dy_1dy_2\Big\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big]^{\frac{\theta_1}{2\cdot\tau_1}}. \tag{13}$$

Из неравенств (9)–(11) следует

$$A_{k_1(1),\dots,k_1(s_1)} \leq C(p,q,\theta)\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{s_1-1}\prod_{j=l+1}^{s_1}\Big\{2^{k_1(l)(\frac{2}{\theta_1\cdot\alpha}-\frac{1}{q_1})}\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})}\big\|\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f)\big\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\times$$

$$\times 2^{k_1(j)(\frac{2}{\theta_1\cdot\alpha_1}-\frac{1}{q_1})}\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})}\big\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\big\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big\}^{\frac{\theta_1}{2\cdot\tau_1}} =$$

$$= C(p,q,\theta)\prod_{l=1}^{s_1-1}\prod_{j=l+1}^{s_1}\Big\{2^{k_1(l)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\big\|\Phi_{k_1(l),\nu_2(i)}(f)\big\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\times$$

$$\times 2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\big\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\big\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}2^{(k_1(j)-k_1(l))(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{2}{\theta_1}}\Big\}^{\frac{\theta_1}{2\cdot\tau_1}}$$

$$\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})\cdot\theta_1}.$$

Меняя роль γ_l и $\hat{\gamma}_j$ можно провести аналогичные рассуждения. Поэтому

$$A_{k_1(1),\dots,k_1(s_1)} \leq C(p,q,\theta)$$

$$\prod_{l=1}^{s_1-1}\prod_{j=l+1}^{s_1}\Big[\Big\{2^{k_1(l)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\left\|\Phi_{k_1(l),\nu_2(j)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\left\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}\Big\}^{\frac{\theta_1}{2\cdot\tau_1}}$$

$$2^{|k_1(j)-k_1(l)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1}{\tau_1}}\Big]\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta_*}-\frac{1}{q_2})\cdot\theta_1}= \tag{14}$$

$$=C(p,q,\theta)\cdot 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})}\cdot\prod_{j=1}^{s_1}\left\{\Big[\left\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big]^{\frac{\theta_1}{s_1}}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l=1}^{s_1}2^{|k_1(j)-k_1(l)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1}{2\tau_1}}\right\}$$

Из неравенств (10) и (14) следует

$$\lambda_i^{\frac{\theta_1 2\cdot\tau_1}{\theta_2}}\le C(p,q,\theta)2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})\theta_1}\times$$

$$\times\sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1}\ldots\sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1}\prod_{j=1}^{s_1}\left\{\Big[\left\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big]^{\frac{\theta_1}{s_1}}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l=1}^{s_1}2^{|k_1(j)-k_1(l)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1}{2\tau_1}}\right\}.$$

К суммам в правой части этого соотношения применяя неравенство Гельдера с показателем s_1 имеем

$$\lambda_i^{\frac{\theta_1 2\cdot\tau_1}{\theta_2}}\le C(p,q,\theta)2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})\theta_1}$$

$$\prod_{j=1}^{s_1}\left\{\sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1}\ldots\sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1}\Big(\left\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l=1}^{s_1}2^{|k_1(j)-k_1(l)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{s_1}{2\tau_1}}\right\}^{\frac{1}{s_1}}=C(p,q,\theta)2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})\theta_1}\prod_{j=1}^{s_1}M_J^{\frac{1}{s_1}}. \tag{15}$$

Учитывая, что $\alpha>2$ и $\frac{s_1}{2\tau_1}=\frac{1}{s_1-1}$ нетрудно убедиться, что

$$M_j=\sum_{k_1(1)=m_1}^{n_1}\ldots\sum_{k_1(s_1)=m_1}^{n_1}\Big(\left\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{s_1}2^{|k_1(j)-k_1(l)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1}{s_1-1}}\le$$

$$\le C(q,\theta)\sum_{k_j(1)=m_1}^{n_1}\Big(\left\|\Phi_{k_1(j),\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(j)(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}.$$

Поэтому из (15) следует (16):

$$\lambda_i\le C(p,q,\theta)2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{2\tau_1}}\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\left\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\right\|_{\bar p,\bar q}^{*}2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{2\theta_1\tau_1}}.$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать (17):

$$\hat{\lambda}_i \leq C(p,q,\theta) 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta_1}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{2\tau_1}} \Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|^*_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{2\theta_1\tau_1}}.$$

В силу (16) и (17) из (5) получим

$$I_2 \leq C(p,q,\theta)\prod_{1\leq i<j\leq s_1} 2^{\nu_2(i)(\frac{2}{\theta_2\beta}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{2\tau_1}} 2^{\nu_2(j)(\frac{2}{\theta_2\beta_*}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{2\tau_1}} \times$$

$$\times\Big\{\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]$$

$$\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|^*_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]\Big\}^{\frac{\theta_2}{2\theta_1\tau_1}} =$$

$$= C(p,q,\theta)\prod_{i=1}^{s_1}\Big\{\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|^*_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1 s_1}} 2^{\nu_2(i)(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{s_1}}\Big\}\cdot$$

$$\cdot\prod_{1\leq i<j\leq s_1} 2^{(\nu_2(i)-\nu_2(j))(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\cdot\frac{1}{\tau_1}}.$$

Так как меняя λ_i и $\hat{\lambda}_i$ можно провести аналогичные рассуждения, то приходим к неравенству

$$I_2 \leq C(p,q,\theta)\prod_{i=1}^{s_1}\Big\{\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|^*_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1 s_1}} 2^{\nu_2(i)(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{s_1}}\Big\}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{s_1} 2^{-|\nu_2(i)-\nu_2(j)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\cdot\frac{1}{2\tau_1}}.$$

Поэтому из (3) следует

$$I_1^{\theta_2} \leq C(p,q,\theta)\sum_{\nu_2(1)=m_2}^{n_2}\ldots\sum_{\nu_2(s_1)=m_2}^{n_2}\prod_{i=1}^{s_1}\Big\{\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|^*_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1 s_1}}$$

$$2^{\nu_2(i)(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})\cdot\frac{\theta_2}{s_1}}\cdot\prod_{j}^{s_1} 2^{-|\nu_2(i)-\nu_2(j)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta})\cdot\frac{1}{2\tau_1}}\Big\}. \tag{18}$$

К суммам в правой части (16) применяя неравенство Гельдера и проводя оценки аналогичные к оценкам M_i получим

$$I_1^{\theta_2} \leq C(p,q,\theta)\sum_{k_2(1)=m_2}^{n_2}\Big[\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\Big(\big\|\Phi_{k_1,\nu_2(i)}(f)\big\|^*_{\bar{p},\bar{q}} 2^{k_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdot 2^{k_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})\theta_2}.$$

Этим лемма доказана в случае $\frac{\theta_2}{\theta_1}\leq 1$.

Если $\frac{\theta_2}{\theta_1}>1$, то обозначая $\mu=[\frac{\theta_2}{\theta_1}]+1$ и применяя неравенство Иенсена ($\frac{\theta_2}{\theta_1\mu}<1$) имеем

$$I_1 \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\nu_2(1)=m_2}^{n_2}...\sum_{\nu_2(s_1)=m_2}^{n_2}\prod_{j=1}^{s_1}\Big(\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}A^{*_1*_2}_{\nu_2(j)}(f,\bar y)dy_1dy_2\Big]^{\theta_1}t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1}\times\right.$$

$$\left.\times dt_1\Big)^{\frac{1}{s_1}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}t_2^{\frac{\theta_2}{p_2}-1}dt_2\leq\sum_{\nu_2(1)=m_2}^{n_2}...\sum_{\nu_2(s_1)=m_2}^{n_2}\sum_{l_2(1)=m_2}^{n_2}...\sum_{l_2(\mu)=m_2}^{n_2}\int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{\mu}\prod_{j_k=1}^{s_1}\times$$

$$\times\Big(\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}A^{*_1*_2}_{\nu_2(j_k)}(f,\bar y)dy_1dy_2\Big]^{\theta_1}t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1}dt_1\Big)^{\frac{\theta_2}{\mu\theta_1s_1}}t_2^{\frac{\theta_2}{p_2}-1}dt_2.$$

Переобозначая $\mu\cdot s_1=\kappa$ получаем, что

$$I_1\leq\sum_{\nu_2(1)=m_2}^{n_2}...\sum_{\nu_2(\kappa)=m_2}^{n_2}\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{\kappa}\Big(\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}A^{*_1*_2}_{\nu_2(j)}(f,\bar y)dy_1dy_2\Big]^{\theta_1}t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1}\times$$

$$\times dt_1\Big)^{\frac{\theta_2}{\mu\theta_1s_1}}\cdot t_2^{\frac{\theta_2}{p_2}-1}dt_2.$$

Далее повторяя рассуждения проведенные в случае $\frac{\theta_2}{\theta_1}\leq1$ можно убедиться в справедливости леммы и при $\frac{\theta_2}{\theta_1}>1$. Лемма доказана.

Используя метод доказательства предыдущей леммы можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\bar p=(p_1,p_2),\bar\theta=(\theta_1,\theta_2),\bar q=(q_1,q_2),1\leq p_j<+\infty,1\leq\theta_j<q_j<+\infty,j=1,2.$ *Тогда имеют место неравенства*

$$\left\|\sum_{k_1=0}^{n_1}\Phi_{k_1,0}(f)\right\|^*_{\bar p,\bar\theta}\leq C(p,q,\theta)\left[\sum_{l_1=0}^{n_1}2^{l_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(\|\Phi_{l_1,0}(f)\|^*_{\bar p,\bar q})^{\theta_1}\right]^{\frac{1}{\theta_1}}. \tag{19}$$

$$\left\|\sum_{k_2=0}^{n_2}\Phi_{0,k_2}(f)\right\|^*_{\bar p,\bar\theta}\leq C(p,q,\theta)\left[\sum_{l_2=0}^{n_2}2^{l_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}(\|\Phi_{0,l_2}(f)\|^*_{\bar p,\bar q})^{\theta_2}\right]^{\frac{1}{\theta_2}}. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar x), \tag{21}$$

где $\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar x)=-\Delta_{\nu_1,\nu_2}(f,\bar x)$. Учитывая $W_{0,0}(f,\bar x)=0$ и лемму 1 имеем

$$\left\|f-\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar x)\right\|^*_{\bar p,\bar q}\leq$$

$$\leq C(p,q,)Y_{2^{n_1},2^{n_2-1}}(f)_{\bar p,\bar q}+Y_{2^{n_1},2^{n_2}}(f)_{\bar p,\bar q}+Y_{2^{n_1-1},2^{n_2}}(f)_{\bar p,\bar q}\to0$$

при $n_1,n_2\to+\infty$. Таким образом ряд (21) сходится в $L^*_{\bar p,\bar q}(I^2)$ к функции $f\in L^*_{\bar p,\bar q}(I^2)$. В силу леммы 1

$$\left\|\sum_{k_1=m_1}^{n_1}\sum_{k_2=m_2}^{n_2}\Phi_{\bar k}(f)\right\|^*_{\bar p,\bar\theta}\leq$$

$$\leq C(p,q,\theta)\left\{\sum_{l_2=m_2}^{n_2}2^{l_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{l_1=m_1}^{n_1}2^{l_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(\|\Phi_{\bar l}(f)\|^*_{\bar p,\bar q})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}}. \tag{22}$$

По определению функции $\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar{x})$, свойству нормы и монотонности наилучшего приближения получим (23):

$$\|\Phi_{\bar{k}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \leq \left\|f - W_{2^{2^{k_1+1}}-1,2^{2^{k_2+1}}-1}\right\|^*_{\bar{p},\bar{q}} + \left\|f - W_{2^{2^{k_1+1}}-1,2^{2^{k_2}}-1}\right\|^*_{\bar{p},\bar{q}} +$$

$$+ \left\|f - W_{2^{2^{k_1}}-1,2^{2^{k_2+1}}-1}\right\|^*_{\bar{p},\bar{q}} + \left\|f - W_{2^{2^{k_1}}-1,2^{2^{k_2}}-1}\right\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \leq C(p,q)Y_{2^{2^{k_1}},2^{2^{k_2}}}(f)_{\bar{p},\bar{q}}.$$

Следовательно в силу условия теоремы 1 из (22) получим что, ряд (21) сходится в метрике пространства $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^2)$. Значит $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^2)$. В (22) полагая $m_1 = m_2 = 0$ и учитывая (23) имеем, что верно (24):

$$\left\|\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\Phi_{\bar{k}}(f)\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leq$$

$$\leq C(p,q,\theta)\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{k_1=0}^{n_1} 2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{k_1}},2^{2^{k_2}}}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

По свойству нормы и в силу леммы 2, неравенства (24) получим

$$\left\|\sum_{\nu_2=0}^{2^{n_2+1}-1}\sum_{\nu_1=0}^{2^{n_1+1}}\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar{x})\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leq \left\|\sum_{\nu_2=1}^{2^{n_2+1}}\sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1+1}}\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar{x})\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} + \left\|\sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1+1}}\phi_{\nu_1,0}(\bar{x})\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} +$$

$$+ \left\|\sum_{\nu_2=1}^{2^{n_2+1}}\phi_{0,\nu_2}(\bar{x})\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} + \|\phi_{0,0}\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leq$$

$$\leq C(p,q,\theta)\Bigg[\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{k_1=0}^{n_1} 2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{k_1}},2^{2^{k_2}}}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}} +$$

$$+\left\{\sum_{l_1=0}^{n_1} 2^{l_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(\|\Phi_{l_1,0}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right\}^{\frac{1}{\theta_1}} + \left\{\sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{l_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}(\|\Phi_{0,l_2}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_2}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}} +$$

$$+ \|\phi_{0,0}\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Bigg]. \tag{25}$$

По свойству наилучшего приближения "углом"справедливы следующие неравенства

$$\|\phi_{0,0}\|^*_{\bar{p},\bar{q}} = \|V_{1,1}(f) - V_{1,0} - V_{0,1}(f) + V_{0,0}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leq C(p,q)Y_{0,0}(f)_{\bar{p},\bar{q}}, \tag{26}$$

$$\|\Phi_{k_1,0}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} = \left\|\sum_{\nu_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\phi_{\nu_1,0}\right\|^*_{\bar{p},\bar{q}} =$$

$$= \left\|W_{2^{2^{k_1+1}}-1,1} - W_{2^{2^{k_1+1}}-1,0} - W_{2^{2^{k_1+1}}-1,1} + W_{2^{2^{k_1}}-1,0}\right\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \leq$$

$$\leq C(p,q)Y_{2^{2^{k_1}}-1,0}(f)_{\bar{p},\bar{q}}, \tag{27}$$

$$\|\Phi_{0,k_2}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \leq C(p,q)Y_{0,2^{2^{k_2}}-1}(f)_{\bar{p},\bar{q}}. \tag{28}$$

В силу (26)–(28) из (25) получим

$$\left\|\sum_{\nu_2=0}^{2^{n_2+1}-1}\sum_{\nu_1=0}^{2^{n_1+1}}\phi_{\nu_1,\nu_2}(\bar{x})\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \le C(p,q,\theta)\,\{Y_{0,0}(f)_{\bar{p},\bar{q}}+$$

$$+\Big[\sum_{l_1=0}^{n_1}2^{l_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{l_1}}-1,0}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\Big]^{\frac{1}{\theta_1}}+\Big[\sum_{l_2=0}^{n_2}2^{l_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}(Y_{0,2^{2^{l_2}}-1}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_2}\Big]^{\frac{1}{\theta_2}}+$$

$$+\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{k_1=0}^{n_1}2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{k_1}},2^{2^{k_2}}}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}}\Bigg\}. \qquad (29)$$

Выше доказано, что ряд (21) сходится к функции $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^2)$. Поэтому в неравенстве (29) переходя к пределу получим

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \le C(p,q,\theta)\,\{Y_{0,0}(f)_{\bar{p},\bar{q}}+$$

$$+\Big[\sum_{l_1=0}^{\infty}2^{l_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{l_1}}-1,0}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\Big]^{\frac{1}{\theta_1}}+\Big[\sum_{l_2=0}^{\infty}2^{l_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}(Y_{0,2^{2^{l_2}}-1}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_2}\Big]^{\frac{1}{\theta_2}}+$$

$$+\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{k_1}},2^{2^{k_2}}}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}}\Bigg\}.$$

Отсюда в силу монотонности наилучшего приближения «углом» будем иметь (30):

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \le C(p,q,\theta)\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,2^{2^{k_2}}-1}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Далее по определению наилучшего приближения «углом» и свойству нормы имеем

$$Y_{2^{2^{k_1}}-1,2^{2^{k_2}}-1}(f)_{\bar{p},\bar{q}} \le \sum_{\nu_2=k_2}^{\infty}\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\sum_{s_2=2^{\nu_2}+1}^{2^{\nu_2+1}}\sum_{s_1=2^{\nu_1}+1}^{2^{\nu_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\,. \qquad (31)$$

Учитывая (31) и применяя лемму А, неравенство Гельдера с показателями θ_j , $\frac{1}{\theta_j}+\frac{1}{\theta'_j}=1, j=1,2$ получим

$$\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,2^{2^{k_2}}-1}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \le$$

$$C(p,q,\theta)\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\Big(\sum_{s_2=2^{k_2}+1}^{2^{k_2+1}}\Big[\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Big)^{\theta_2}\Big]^{\frac{1}{\theta_1}}\Big)^{\theta_2} \le$$

$$\le C(p,q,\theta)\sum_{s_2=2}^{\infty}s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}}\Big[\sum_{s_1=2}^{\infty}s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}}\Big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}. \qquad (32)$$

Из неравенств (31) и (32) следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\theta_j < \tau_j, j = 1, 2$. Применяя неравенство Гельдера нетрудно убедиться, что функция $f \in B^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{q}\overline{\tau}}$ принадлежит пространству $L^{*}_{\overline{p},\bar{\theta}}(I^2)$. Поэтому теорему 1 применяя к функции $f - S^{\gamma}_{n}(f) \in L^{*}_{\overline{p},\bar{\theta}}(I^2)$ получим

$$\left\|f - S_n^{\overline{\gamma}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} \leq C(p,q,\theta) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}}. \qquad (33)$$

Далее применяя неравенство Гельдера $\beta_j = \frac{\tau_j}{\theta_j}$, $\frac{1}{\beta_j} + \frac{1}{\beta'_j} = 1$ и лемму 1 при $\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}$ имеем

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Z^2} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{-s_j r_j} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}} \right\}_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}}} \leq C(p,q,\theta,\tau) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Z^2} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \cdot$$

$$2^{-nr_1} \cdot n^{\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}\right) + \frac{1}{\epsilon_2}}, \qquad (34)$$

где $\epsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{\theta_j \beta'_j} = \frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}, j = 1, 2$. Теперь из (33) и (34) следует

$$\left\|f - S_n^{\overline{\gamma}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} \leq C(p,q,\theta,\tau) 2^{-nr_1} \cdot n^{\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}\right) + \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\tau_2}}$$

в случае $\theta_j < \tau_j,\ j = 1, 2$ для функции $f \in B^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{q},\overline{\tau}}$.

Отсюда следует

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{q}\overline{\tau}}\right)_{\overline{p},\bar{\theta}} \leq C(p,q,\theta,\tau) 2^{-nr_1} \cdot n^{\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}\right) + \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\tau_2}}$$

в случае $\theta_j < \tau_j, j = 1, 2$.

Если $\tau_j < \theta_j, j = 1, 2$, то пользуясь неравенством Иенсена будем иметь

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \leq$$

$$\leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{*}_{\overline{p},\overline{q}} \right\}_{\overline{s}\in Z^2} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \cdot \sup_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \prod_{j=1}^{2} 2^{-s_j r_j} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}}.$$

Поэтому из неравенства (33) следует

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{q}\overline{\tau}}\right)_{\overline{p},\bar{\theta}} \leq C(p,q,\theta,\tau) \sup_{\overline{s}\in Y^2(\overline{\gamma},n)} \prod_{j=1}^{2} 2^{-s_j r_j} s_j^{\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{q_j}}$$

в случае $\tau_j \leq \theta_j,\ j = 1, 2$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] A.P. Blozinski, *Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms*, Transactions American Mathematical Society, **263** (1981), 146–167.

[2] К.И. Бабенко, *О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрические многочленами*, Доклады Академии Наук СССР, **132** 1960, 982–985.

[3] С.А. Теляковский, *Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами*, Математический сборник, **63** (1964), 426–444.

[4] Б.С. Митягин, *Приближение функций в пространствах L^p и C на торе*, Математический сборник, **58** (1962), 397–414 .

[5] Я.С. Бугров, *Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной*, Математический сборник, **64** (1964), 410–418.

[6] Н.С. Никольская, *Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p*, Сибирский Математический Журнал, **63** (1974), 395–412.

[7] Э.М. Галеев, *Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p*, Успехи математических наук, **32** (1977), 251–252.

[8] В.Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Труды Математического института им. В.А. Стеклова, **178** (1986), 3–112 .

[9] Динь Зунг, *Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами*, Математический сборник, **131** (1986), 251–271.

[10] Н.Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности*, Analysis Mathematica, **20** (1994) , 35–48.

[11] Э.С. Белинский, *Приближение периодических функций "плавающей"системой экспонент и тригонометрические поперечники*, Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль, 1984, 10–24.

[12] Б.С. Кашин, В.Н. Темляков, *Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных*, Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа, М. (1999), 69–99.

[13] А.С. Романюк, *Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q* , Украинский Математический Журнал, **43** (1991), 1398–1408.

[14] А.С. Романюк, *Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных*, Украинский Математический Журнал, **49** (1997), 1250–1268.

[15] Б. Базарханов, *Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной тригонометрическими полиномами*, Современные проблемы теории функции . Материалы Всесоюзной школы по теории функции, Баку, 1977, 70–75.

[16] В.М. Тихомиров, *Теория приближений*, Современные проблемы математики, М., (1987), 103–270.

[17] Н. Темиргалиев, *Теоретико-числовые методы и теоретико- вероятностный подход к задачам анализа . Теория вложений и приближений , абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье*, Вестник Евразийского университета, **3-4** (2002) , 222–272.

[18] Н. Темиргалиев, *О вложении в некоторые пространства Лоренца*, Известия Высших Учебных Заведений, Математика, **6** (1980), 83–85.

[19] Г. Акишев, *Оценка порядка приближения классов Бесова тригонометрическими полиномами*, Вестник Карагандинского Университета, Серия Математика, **3** (2004), 9–16.

[20] Г. Акишев, *Приближение функциональных классов в пространствах смешанной нормой*, Математический сборник, **197** (2006), 17–40.

[21] М.К. Потапов, *Об одной теореме вложения*, Mathematica, **14** (1972), 123–146.

[22] Я.С. Бугров, *Приближение тригонометрическими полиномами функций многих переменных*, Труды Научного Объединения Преподавателей Физико - математических Факультетов Педагогических Институтов Дальнего Востока, Хабаровск, 1962, 28–49.

[23] Johonsson H., *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases*, Reslerch Report Universite Umea, **6** (1975), 36 P.

[24] Е.Д. Нурсултанов, *Неравенства разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца*, Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, **255** (2006), 1–18.

[25] Г. Акишев, *Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов*, Материалы Научно-практической Конференции "Уалихановские чтения - 9", Кокшетау, 2004, 3–6 .

[26] С.Ф. Тиман, *О вложении L_p^k классов функций*, Известия Высших Учебных Заведений, Математика, **10** (1974), 61–74.

[27] М.К. Потапов, *Теоремы вложения смешанной метрике*, Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, **156** (1980), 143–156.

[28] О.В. Бесов, В.П. Ильин , С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

[29] С.М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

Габдолла Акишевич Акишев
Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова,
проспект Республики 24, кв.116,
100024, Караганда, Казахстан
E-mail address: akishev@ksu.kz