S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 531–542 (2008) УДК 517.958

MSC 35L20, 35R30, 35Q99

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И УПРУГОСТИ

В. Г. РОМАНОВ

Abstract. Cauchy problem for of electrodynamics and elasticity equations with data on time-like surfaces are considered. Stability estimates for these problems are stated. Moreover, formulae for coefficients of an asymptotic series for a solution to elasticity equations with a point impulse force are given. These coefficients determine a singular part and jumps of the solution across the characteristic surfaces corresponding to compressive and share waves.

Keywords: stability estimates, Cauchy problem, electrodynamics, isotropic elasticity, asymptotic series.

1. Оценка устойчивости решения задачи Коши для уравнений электродинамики с данными на времениподобной поверхности

Рассмотрим в компактной области $D = \Omega \times (-T, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$, с гладкой боковой границей $S = \partial\Omega \times (-T, T)$ класса $\mathbf{C}^2$, систему уравнений электродинамики:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot} H = \varepsilon E_t + \sigma E + j, \quad &&\mathrm{rot} E = -\mu H_t, \\ &\mathrm{div}(\mu H) = 0, &&\mathrm{div}(\varepsilon E) = \rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Romanov, V.G., Stability estimates of solutions to ill-posed Cauchy problem for electrodynamics and elasticity equations.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 27 ноября 2008 г.

В этих уравнениях $j = j(x,t)$ — заданная в D функция, характеризующая плотность внешнего тока, ε, μ, σ — заданные гладкие функции точки $x \in \Omega$, причем ε и μ строго положительны в $\bar{\Omega}$, функция $\rho(x,t)$ предполагается заданной при $t = 0$:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{2}$$

Пусть, кроме того, на S заданы функции H и E:

$$H|_S = f(x,t), \quad E|_S = g(x,t). \tag{3}$$

Изучим задачу об оценке H и E в области D.

Подобная задача для гиперболических уравнений второго порядка с данными Коши на S рассматривалась в работах [1]-[10]. Для системы уравнений (1) одних данных только на S недостаточно для получения оценки H и E в области D. В самом деле, при $j = 0$, $\sigma = 0$, $f = 0$, $g = 0$ существует ненулевое решение задачи (1), (3) вида $H = 0$, $E = \nabla\psi(x)$, $\rho = \operatorname{div}(\varepsilon(x)\nabla\psi(x))$ с произвольной дважды гладкой в Ω функцией $\psi(x)$, удовлетворяющей на $\partial\Omega$ условиям $\psi = 0$, $\nabla\psi \cdot n = 0$, где n — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Поэтому появление условия (2) является естественным. В статье [11] получена гельдеровская оценка условной устойчивости решения задачи (1), (3) для случая непроводящей среды $\sigma = 0$, при заданной функции $\rho(x,t)$ и дополнительном предположении о существовании в области D некоторой псевдовыпуклой функции. В данной заметке, на основе работ [9], [10], подобная оценка получена в общем случае при менее ограничительном условии (2) и некотором дополнительном условии на секционные кривизны некоторого риманова пространства (см. ниже). Кроме того, при условии, что число T, характеризующее размер области D, достаточно велико, установлена липшицева оценка решения задачи (1) - (3). Найденная оценка величины T является неулучшаемой, по крайней мере, для случая риманова пространства неположительной кривизны.

Обозначим через $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — скорость распространения электромагнитных волн и свяжем с ней риманову метрику, в которой элемент длины ds определен равенством

$$ds = c^{-1}(x)|dx|, \quad |dx| = \Big(\sum_{i=1}^{3} dx_i^2\Big)^{1/2}.$$

Риманово расстояние в этой метрике между точками x и y обозначим через $s(x,y)$. Предположим, что неравенство $c(x) > 0$ выполнено в несколько более широкой области, чем Ω. А именно, пусть $\bar{\Omega}'$ некоторая фиксированная компактная замкнутая выпуклая область, содержащая Ω внутри себя, $\Omega \subset \bar{\Omega}'$, и

$$r = \inf_{y\in\bar{\Omega}'} \sup_{x\in\Omega} s(x,y). \tag{4}$$

Пусть, далее, точка $x^0 \in \bar{\Omega}'$ такова, то выполнено равенство $\sup_{x\in\Omega} s(x,x^0) = r$. Пусть $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n |\, s(x,x^0) \le r\}$ — замкнутый риманов шар радиуса r с центром в точке x^0. Тогда $\Omega \subset \Sigma_0$. Примем, что $c(x)$ является функцией класса $\mathbf{C}^2(\Sigma_0)$, и для нее выполнены неравенства

$$c_0 \le c(x) \le c_{00} < \infty, \quad x \in \Sigma_0, \tag{5}$$

с некоторыми положительными постоянными c_0, c_{00}. Пусть также $(\varepsilon,\mu,\sigma)\in \mathbf{C}^2(\bar\Omega)$.

Обозначим через $K(x,\nu,\eta)$ секционную кривизну риманова пространства соответствующую точке $x\in\Omega$ и двумерной плоскости натянутой на единичные взаимно ортогональные вектора ν и η. Предположим, что существует неотрицательное число k ограничивающее секционные кривизны сверху для всех $x\in\Sigma_0$ и всевозможных двумерных плоскостей, т. е., $K(x,\nu,\eta)\le k$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$m\equiv 1-\frac{1}{3}\,k(rc_{00})^2>0. \tag{6}$$

Это предположение заведомо выполнено в случае, когда риманово пространство имеет неположительную кривизну. Достаточным условием этого является выполнение неравенства

$$\sum_{i,l=1}^{3}\frac{\partial^2\ln c(x)}{\partial x_i\partial x_l}\,\xi_i\xi_l\le 0$$

для любых ξ_1,ξ_2,ξ_3. В последнем случае можно положить $k=0$. Предположение, очевидно, выполняется также, если $k>0$, но достаточно мало. Заметим, что при выполнении условия (6) поле геодезических линий является регулярным в Σ_0.

Обозначим $U=(H,E)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1)-(6) и функции $H(x,t)$ и $E(x,t)$ принадлежат $\mathbf{H}^2(D)$. Тогда найдется положительная постоянная C такая, что*

1) если $T<r/\sqrt{m}$, то при любых $\varrho\in(\sqrt{r^2-mT^2},r)$ и $p\in(0,m)$ и некотором $\gamma=\gamma(\varrho)\in(0,1)$ справедлива оценка

$$\|U\|_{\mathbf{H}^1(D_{p,\varrho})}\le C\|U\|^{(1-\gamma)}_{\mathbf{H}^1(D)}\delta^{\gamma}, \tag{7}$$

в которой $D_{p,\varrho}=\{(x,t)\in D|\, s^2(x,x^0)-pt^2\ge\varrho^2\}$,

$$\delta=\Big(\|j\|^2_{\mathbf{H}^2(D)}+\|\rho_0\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega\times 0)}+\|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S)}+\|g\|^2_{\mathbf{H}^1(S)}\Big)^{1/2},$$

2) если $T>r/\sqrt{m}$, то справедлива оценка

$$\|U\|_{\mathbf{H}^1(D)}\le C\delta. \tag{8}$$

Постоянная C в этих оценках зависит только от m, r, T, c_0, и $\mathbf{C}^2(\bar\Omega)$-нормы коэффициентов ε, μ, σ.

Заметим, что в случае, когда $k=0$, имеет место равенство $m=1$. При этом оценка $T>r$ временнóго интервала является оптимальной, так как для $T<r$ неравенство (8) заведомо неверно.

Теорема 1 доказана в статье [12]. Прямым следствием теоремы 1 и метода энергетических неравенств является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $T>r/\sqrt{m}$. Тогда найдется положительная постоянная C такая, что справедлива оценка*

$$\|U\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega\times\{t\})}+\|U_t\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega\times\{t\})}\le C\delta^2 \tag{9}$$

для любого $t\in(-T,T)$.

2. Оценка устойчивости решения уравнений упругости с данными на времениподобной поверхности

Рассмотрим в компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ класса $\mathbf{C}^2$ систему линейных уравнений изотропной упругости:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad i = 1,2,3. \tag{10}$$

Здесь ρ — плотность среды, u_i, F_i — компоненты векторов смещений $\mathbf{u}(x,t)$ и массовой силы $\mathbf{F}(x,t)$, соответственно, а σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, связанные с u_i соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2,3, \tag{11}$$

в которых λ, μ — модули упругости среды.

Пусть $T > 0$ и D — цилиндрическая область $D = \{(x,t) | \, x \in \Omega, -T \le t \le T\}$ с боковой границей $S = \{(x,t) | \, x \in \partial\Omega, -T \le t \le T\}$. Определим равенства

$$u_i|_S = f_i(x,t), \quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\cos(\mathbf{n}, x_j)|_S = g_i(x,t), \quad i = 1,2,3, \tag{12}$$

в которых $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ — его проекция на ось x_j. Обозначим через $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ вектора с компонентами f_i, g_i, $i = 1,2,3$.

Предположим, что соотношения (10) - (12) выполнены в области D и на S, соответственно. Рассмотрим задачу об оценке вектора смещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ в области D.

Подобная задача для гиперболических уравнений второго порядка с данными Коши на S рассматривалась в работах [1]-[10]. Для уравнений (10) - (11) гельдеровские оценки устойчивости получены в работах [6], [11], [13]. Однако, эти оценки основаны на предположении о существовании в области некоторой псевдовыпуклой функции, пригодной одновременно для двух гиперболических операторов, связанных с скоростями продольных и поперечных волн. Это предположение очень существенно при построении весовых карлемановских оценок, являющихся основным инструментом для решения поставленной задачи. Фактически вопрос о том, для каких коэффициентов ρ, λ и μ подобная функция существует, в работах [6], [11], [13] не обсуждался. Ниже, на основе работ [9], [10], дается липшицева оценка решения задачи (10) – (12). Она получается в результате применения карлемановских оценок, в которых участвуют две псевдовыпуклые функции, отвечающие двум гиперболическим операторам. При этом выясняются достаточные условия на коэффициенты ρ, λ и μ, при выполнении которых оценка верна и, кроме того, дается оценка величины T, которая является неулучшаемой, по крайней мере, для случая римановых пространств неположительной кривизны. Эти пространства естественным образом связаны с двумя скоростями упругих волн для системы уравнений (10) - (11).

Обозначим через $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости распространения продольной и поперечной волн и свяжем с ними две римановы метрики, в которых элементы длины ds_j определены равенствами

$$ds_j = c_j^{-1}(x)|dx|, \quad j = 1,2, \quad |dx| = \Big(\sum_{i=1}^{3} dx_i^2\Big)^{1/2}.$$

Римановы расстояния в этих пространствах между точками x и y обозначим $s_1(x,y)$ и $s_2(x,y)$, соответственно. Предположим, что неравенства $c_1(x) \geq c_2(x) > 0$ выполнены в Ω и сохраняются в несколько более широкой области. А именно, пусть $\bar{\Omega}'$ некоторая фиксированная компактная замкнутая выпуклая область, содержащая Ω внутри себя, $\Omega \subset \bar{\Omega}'$, и

$$r = \inf_{y\in\bar{\Omega}'} \sup_{x\in\Omega} s_2(x,y). \tag{13}$$

Пусть, далее, точка $x^0 \in \bar{\Omega}'$ такова, то выполнено равенство $\sup_{x\in\Omega} s_2(x,x^0) = r$. Пусть $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n |\, s_2(x,x^0) \leq r\}$ — замкнутый риманов шар радиуса r с центром в точке x^0. Тогда $\Omega \subset \Sigma_0$. Примем, что плотность и упругие модули среды являются функциями класса $\mathbf{C}^2(\Sigma_0)$, и выполнены следующие неравенства:

$$c_2(x) \leq c_1(x),\ \rho_0 \leq \rho(x),\ c_j^0 \leq c_j(x) \leq c_j^{00} < \infty,\ j = 1,2,\ x \in \Sigma_0, \tag{14}$$

с некоторыми положительными постоянными ρ_0, c_j^0, c_j^{00}.

Несложные вычисления показывают, что для изотропной римановой метрики, определяемой положительной функцией $c(x)$ и элементом длины $ds = |dx|/c(x)$, секционная кривизна $K(x,\nu,\eta)$, отвечающая точке $x \in \Omega$ и двумерной плоскости натянутой на единичные взаимно ортогональные вектора ν и η, может быть найдена по формуле

$$K(x,\nu,\eta) = \frac{1}{2c(x)} \sum_{i,l=1}^{3} \frac{\partial^2 \ln c(x)}{\partial x_i \partial x_l}(\nu_i\nu_l + \eta_i\eta_l), \tag{15}$$

в которой ν_i, η_i — компоненты векторов ν, η, соответственно.

Пусть $K_j(x,\nu,\eta)$ — секционные кривизны римановых пространств соответствующих функциям $c_j(x)$, $j = 1,2$.

Предположим, что существуют неотрицательные числа k_j такие, что для секционных кривизн выполнены неравенства $K_j(x,\nu,\eta) \leq k_j$, $j = 1,2$, и, кроме того,

$$m \equiv 1 - \frac{1}{3} \max_{j=1,2} [k_j (c_j^{00} \sup_{x\in\Omega} s_j(x,x^0))^2] > 0. \tag{16}$$

Это предположение заведомо выполнено в случае, когда римановы пространства имеют неположительную кривизну. Достаточным условием этого является, согласно (15), выполнение двух неравенств

$$\sum_{i,l=1}^{3} \frac{\partial^2 \ln c_j(x)}{\partial x_i \partial x_l}\, \xi_i\xi_l \leq 0, \quad j = 1,2,$$

для любых ξ_1, ξ_2, ξ_3. Тогда можно положить $k_j = 0$. Предположение выполняется также, если секционные кривизны ограничены небольшими положительными числами.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (16), функция* $\mathbf{u}(x,t) \in \mathbf{H}^2(D)$ *удовлетворяет соотношениям (10) – (12) и, кроме того,*

$$T > r/\sqrt{m}. \tag{17}$$

Тогда найдется положительная постоянная C*, зависящая только от* m, r, T, ρ_0, c_1^0, c_2^0 *и* $\mathbf{C}^2(\Sigma_0)$*-нормы коэффициентов* ρ, λ, μ *такая, что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^2(D)} \le C\Big(\|\mathbf{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^2(S)} + \|\mathbf{g}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)}\Big). \tag{18}$$

Заметим, что в случае, когда $k_j = 0$, $j = 1,2$, то-есть для римановых пространств неположительной кривизны, имеет место равенство $m = 1$. При этом оценка $T > r$ временно́го интервала является оптимальной, так как для $T < r$ неравенство (18) заведомо неверно.

Теорема 3 доказана в работе [14]. Следствием теоремы 3 и метода энергетических неравенств является

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда найдется положительная постоянная* C*, зависящая только от* m, r, T, ρ_0, c_1^0, c_2^0 *и* $\mathbf{C}^2(\Sigma_0)$*-нормы коэффициентов* ρ, λ, μ *такая, что для любого* $t \in (-T,T)$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega\times\{t\})} + \|\mathbf{u}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega\times\{t\})} \le C\Big(\|\mathbf{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(D)} + \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^2(S)} + \|\mathbf{g}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)}\Big). \tag{19}$$

3. Формулы для коэффициентов асимптотического ряда, соответствующего решению системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой

В начале 20-го века Ж. Адамар предложил метод решения задачи Коши для общих гиперболических уравнений второго порядка (см., например, [15]). В его основе разложение решения по некоторой бесконечной системе функций одной переменной, аргумент которой представляет собой квадрат расстояния в псевдоримановой метрике, естественным образом связанной с дифференциальным уравнением. Суть метода в его современном изложении можно найти в прекрасно написанной статье В. М. Бабича [16]. Построенная при этом сингулярная часть фундаментального решения играет в методе С. Л. Соболева определяющую роль. Попытка перенести метод на системы гиперболических уравнений, обладающие различными скоростями распространения волн, привела В. М. Бабича к созданию "лучевого"метода. В основе метода также лежит разложение решения по некоторой бесконечной системе функций, но в отличии от адамаровского разложения, здесь в качестве аргумента участвует некоторая более общая функция $\gamma = \gamma(x,t)$, которая удовлетворяет характеристическому уравнению. Так как это уравнение имеет, как правило, несколько корней, то каждому корню соответствует свое разложение, по форме аналогичное разложению Ж. Адамара. Основываясь на разложениях типа плоских волн и последующему суммированию их, В.М. Бабич построил фундаментальные решения для систем уравнений гиперболических по Петровскому [17] и для уравнений упругости [18]. Для уравнений упругости при этом были выписана в явном виде сингулярная часть фундаментального решения — главная составляющая фундаментального решения, представляющая собой сумму дельта-функций (с некоторыми амплитудными множителями), локализованных на характеристических конусах.

В настоящей работе для системы уравнений упругости выписывается лучевое разложение, основанное, по существу, на методе В.М. Бабича. При этом функция $\gamma(x,t)$ имеет вид конической волны. В этом случае производные функции $\gamma(x,t)$ не являются непрерывными и с ростом порядка производных имеют все более высокий порядок особенностей в окрестности вершины конуса. Последнее вызывает большие трудности при получении явных формул асимптотического разложения. Ситуация сильно упрощается предположением, что среда является однородной в некоторой окрестности точки приложения силы. Тогда решение выписывается явно в достаточно малой пространственно-временной окрестности точки приложения сосредоточенной импульсной силы и фактически сводит задачу к вопросу о продолжении решения из этой окрестности. Именно этот вопрос и решается ниже. При этом удается детально охарактеризовать структуру не только сингулярной части решения, но и ее регулярной части. В частности, основываясь на полученном разложении, можно вычислить скачки решения и всех его производных при переходе через характеристические поверхности, отвечающие продольным и поперечным волнам. Последнее весьма актуально при исследовании обратных задач (см. [19]).

Рассмотрим задачу о построении решения, отвечающего произвольно направленной сосредоточенной силе, а именно, задачу Коши для линейной системы уравнений упругости

$$\rho\, u_{tt} - Lu = f^0\delta(x-y,t), \quad u|_{t<0} \equiv 0, \tag{20}$$

в которой $u = (u_1,u_2,u_3)$, $f^0 = (f_1^0,f_2^0,f_3^0)$ — числовой вектор, характеризующий направление силы, а оператор $L = (L_1,L_2,L_3,)$ определен равенствами

$$L_i u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j},\ \sigma_{ij}(u) = \lambda\delta_{ij}\mathrm{div} u + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ i,j = 1,2,3. \tag{21}$$

В этих соотношениях δ_{ij} — символ Кронекера, λ, μ — модули упругости, ρ — плотность среды.

Для однородной среды задача (20) была решена А. Лявом [20]. Мы приведем это решение в более удобной форме (см. [21]). Решение задачи (20) определяется формулой

$$\begin{aligned} u(x,t,y) \;=\; & \frac{f^0}{4\pi\rho\, c_s^2|x-y|}\,\delta\big(t-\tau_s(x,y)\big) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho}\nabla\mathrm{div}\Big\{\frac{f^0}{|x-y|}\,\big[\theta_1\big(t-\tau_p(x,y)\big) - \theta_1\big(t-\tau_s(x,y)\big)\big]\Big\}, \end{aligned} \tag{22}$$

в которой

$$\tau_p(x,y) = \frac{|x-y|}{c_p}, \quad c_p = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}, \quad \tau_s(x,y) = \frac{|x-y|}{c_s}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho},$$

постоянные c_p, c_s определяют скорости распространения продольной и поперечной волн, $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$ и $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ при

$t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ при $t < 0$. Вычисляя операции div и ∇, находим, что формула (22) может быть представлена в виде

$$(23)\ u(x,t,y) = \frac{1}{4\pi\rho}\Big\{\frac{(f^0\cdot\nu)\nu}{c_p^2|x-y|}\delta\big(t-\tau_p(x,y)\big) + \frac{\nu\times(f^0\times\nu)}{c_s^2|x-y|}\,\delta\big(t-\tau_s(x,y)\big)$$
$$+\frac{2(f^0\cdot\nu)\nu-\nu\times(f^0\times\nu)}{|x-y|^2}\Big[\frac{1}{c_p}\,\theta_0\Big(t-\tau_p(x,y)\big) - \frac{1}{c_s}\,\theta_0\big(t-\tau_s(x,y)\Big)\Big]$$
$$+\frac{2(f^0\cdot\nu)\nu-\nu\times(f^0\times\nu)}{|x-y|^3}\,\Big[\theta_1\big(t-\tau_p(x,y)\big)-\theta_1\big(t-\tau_s(x,y)\big)\Big]\Big\},$$

в котором $\nu = (x-y)/|x-y|$.

Введем в рассмотрение бесконечную систему функций, получающуюся из функции Хевисайда путем последовательного интегрирования или дифференцирования:

$$\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!}\theta_0(t), \quad k = 1,2,\dots,$$
$$\theta_{-k}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\theta_0(t) = \delta^{(k-1)}(t), \quad k = 1,2,\dots.$$

Заметим, что для функций этой системы при любом $k = 0,\pm1,\pm2,\dots,$ справедливо равенство $\theta_k'(t) = \theta_{k-1}(t)$. Пусть

$$c_p(x) = \sqrt{\frac{\lambda(x)+2\mu(x)}{\rho(x)}}, \quad c_s(x) = \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}},$$

скорости в неоднородной среде продольной и поперечной волн, соответственно. В дальнейшем полагаем, что $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$ являются функциями класса $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $c_p(x) > c_s(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Дополнительно предположим, что параметры $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$ являются постоянными внутри некоторой ε окрестности точки y.

Определим две римановы метрики

$$d\tau_p = \frac{|dx|}{c_p(x)}, \quad d\tau_s = \frac{|dx|}{c_s(x)},$$

в которых $|dx|$ элемент длины евклидовой метрики. Через $\tau_p(x,y)$ и $\tau_s(x,y)$ обозначим соответствующие римановы расстояния между парой точек x и y. Предположим, что обе метрики просты, т.-е., функции $\tau_p(x,y)$ и $\tau_s(x,y)$ являются однозначными.

Формулу (23) для однородной среды можно представить в виде конечного лучевого разложения

$$(24)\qquad u(x,t,y) = \sum_{k=-1}^{1}\Big[\alpha^{(k,p)}(x,y)\,\theta_k(t-\tau_p(x,y)) + \alpha^{(k,s)}(x,y)\,\theta_k(t-\tau_s(x,y))\Big],$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(-1,p)}(x,y) &= \frac{(f^0\cdot\nabla\tau_p(x,y))\nabla\tau_p(x,y)}{4\pi\rho\, c_p\tau_p(x,y)},\\
\alpha^{(-1,s)}(x,y) &= \frac{\nabla\tau_s(x,y)\times(f^0\times\nabla\tau_s(x,y))}{4\pi\rho\, c_s\tau_s(x,y)},\\
\alpha^{(0,p)}(x,y) &= \frac{3c_p^2(f^0\cdot\nabla\tau_p(x,y))\nabla\tau_p(x,y)-f^0}{4\pi\rho\, c_p^3\tau_p^2(x,y)},\\
\alpha^{(0,s)}(x,y) &= \frac{f^0-3c_s^2(f^0\cdot\nabla\tau_s(x,y))\nabla\tau_s(x,y)}{4\pi\rho\, c_s^3\tau_s^2(x,y)},\\
\alpha^{(1,p)}(x,y) &= \frac{3c_p^2(f^0\cdot\nabla\tau_p(x,y))\nabla\tau_p(x,y)-f^0}{4\pi\rho\, c_p^3\tau_p^3(x,y)},\\
\alpha^{(1,s)}(x,y) &= \frac{f^0-3c_s^2(f^0\cdot\nabla\tau_s(x,y))\nabla\tau_s(x,y)}{4\pi\rho\, c_s^3\tau_s^3(x,y)}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

В силу сделанного выше предположения, что среда однородна в некоторой окрестности источника, решение задачи (20) совпадает с решением для однородной среды в достаточно малой окрестности точки $(y,0)$. Ниже, используя лучевое разложение, мы выписываем формулы разложения, отвечающие неоднородной среде.

Теорема 5. *Пусть $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$ являются постоянными внутри некоторой ε окрестности точки y, принадлежат $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $c_p(x)>c_s(x)>0$ для всех $x\in\mathbb{R}^3$. Пусть, кроме того, римановы метрики, отвечающие скоростям продольных и поперечных волн, просты. Тогда решение задачи (20) представимо в виде асимптотического ряда*

$$
u(x,t,y)=\sum_{k=-1}^{\infty}\Big[\alpha^{(k,p)}(x,y)\,\theta_k(t-\tau_p(x,y))+\alpha^{(k,s)}(x,y)\,\theta_k(t-\tau_s(x,y))\Big],
\tag{26}
$$

причем $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$ являются функциями класса $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^6\setminus\{(y,y)\})$ и при $|x-y|<\varepsilon$ определены формулами (25), в которых следует положить $c_p=c_p(y)$, $c_s=c_s(y)$, $\rho=\rho(y)$, а при $|x-y|>\varepsilon$ вычисляются по формулам

$$
\alpha^{(k,p)}=A^{(k,p)}\nabla\tau_p+\nabla\tau_p\times B^{(k,p)},\quad \alpha^{(k,s)}=A^{(k,s)}\nabla\tau_s+\nabla\tau_s\times B^{(k,s)},
\tag{27}
$$

в которых

$$
A^{(-1,p)}(x,y)=-\frac{c_p(x)\sqrt{J_p(x,y)}(f^0\cdot\nabla_y\tau_p(x,y))}{4\pi\tau_p(x,y)c_p^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}},\quad B^{(-1,p)}(x,y)=0,
\tag{28}
$$

$$
B^{(-1,s)}(x,y)=-\frac{c_s(x)(f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y))\mathcal{S}(x,y)\sqrt{J_s(x,y)}}{4\pi\tau_s(x,y)c_s^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}},
\tag{29}
$$

$$
A^{(-1,s)}(x,y)=0,
\tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{(k,s)}=\frac{c_s^2}{c_p^2-c_s^2}\Big[&q_1(A^{(k-1,s)},\tau_s)+q_2(B^{(k-1,s)},\tau_s)\\
&-\rho^{-1}c_s^2L(\alpha^{(k-2,s)})\cdot\nabla\tau_s\Big],
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$B^{(k,p)} = \frac{c_p^2}{c_s^2 - c_p^2}\Big[q_3(A^{(k-1,p)}, \tau_p) + q_4(B^{(k-1,p)}, \tau_p) - \rho^{-1} c_p^2 L(\alpha^{(k-2,p)}) \times \nabla\tau_p\Big], \tag{32}$$

$$A^{(k,p)}(x,y) = \frac{c_p(x)\sqrt{J_p(x,y)}}{\tau_p(x,y)\sqrt{\rho(x)}}\left\{ \frac{A^{(k,p)}(\xi,y)\tau_p(\xi,y)\sqrt{\rho(y)}}{c_p(y)}\bigg|_{\xi=\xi_p(x,y)} + \int\limits_{\Gamma_p(\xi_p(x,y),y)} \frac{\tau_p\sqrt{\rho}}{2c_p\sqrt{J_p}}\Big[\rho^{-1}c_p^2 L(\alpha^{(k-1,p)}) \cdot \nabla\tau_p - q_2(B^{(k,p)}, \tau_p)\Big](\xi,y)\, d\tau_p \right\}, \tag{33}$$

$$B^{(k,s)}(x,y) = \frac{c_s(x)\sqrt{J_s(x,y)}}{\tau_s(x,y)\sqrt{\rho(x)}}\left\{ \frac{B^{(k,s)}(\xi,y)\tau_s(\xi,y)\sqrt{\rho(y)}}{c_s(y)}\bigg|_{\xi=\xi_s(x,y)} + \int\limits_{\Gamma_s(\xi_p(x,y),y)} \frac{\tau_s\sqrt{\rho}}{2c_s\sqrt{J_s}}\Big[\rho^{-1}c_s^2 L(\alpha^{(k-1,s)}) \times \nabla\tau_s - q_3(A^{(k,s)}, \tau_s)\Big]\, \mathcal{S}^{-1}(\xi,y)\, d\tau_s \right\} \mathcal{S}(x,y), \quad k \ge 0. \tag{34}$$

В выписанных выше формулах, по определению, $\alpha^{(k,p)} = 0$, $\alpha^{(k,s)} = 0$ *для значений* $k < -1$, $J_p = J_p(x,y)$, $J_s = J_s(x,y)$ *— якобианы перехода от римановых координат точки* x*, соответствующих метрикам* $d\tau_p = |dx|/c_p(x)$, $d\tau_s = |dx|/c_s(x)$*, к декартовым,* $\Gamma_p(x,y)$, $\Gamma_s(x,y)$ *— геодезические римановых метрик, соединяющие точки* x *и* y, $\mathcal{S}(x,y)$ *— матричная экспонента, определяемая равенством*

$$\mathcal{S}(x,y) = \exp\Big\{ \int\limits_{\Gamma_s(x,y)} (\nabla \ln c_s(\xi))^t\, d\xi \Big\}, \tag{35}$$

в котором $(\nabla \ln c_s)^t$ *означает транспонированный вектор* $\nabla \ln c_s$*, т.-е., вектор-столбец,* $d\xi = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$*, и умножение вектор-столбца на вектор-строку производится по правилу умножения матриц. При этом положительным направлением на* $\Gamma_s(x,y)$ *является направление от* y *к* x*. Матрица* $\mathcal{S}^{-1}(x,y)$ *является обратной к* $\mathcal{S}(x,y)$*. Дифференциальные операторы первого порядка* q_j, $j = 1,2,3,4$*, входящие в формулы (31)-(34), определены равенствами*

$$q_1(A,\tau) = 2c_p^2 \nabla\tau \cdot \nabla A + c_p^2\big[\Delta\tau + \nabla\tau \cdot \nabla \ln(\rho\, c_p^2 c^{-2})\big]A, \tag{36}$$

$$q_2(B,\tau)] = [c_s^2 B \times \nabla \ln(\rho\, c^2 c_s^2) - (c_p^2 - c_s^2)\mathrm{rot} B] \cdot \nabla\tau, \tag{37}$$

$$q_3(A,\tau) = \Big[(c_p^2 - c_s^2)\nabla A + \Big(\frac{1}{\rho}\nabla\lambda - c_p^2 \nabla \ln c^2\Big)A\Big] \times \nabla\tau, \tag{38}$$

$$q_4(B,\tau)] = 2c_s^2(\nabla\tau \cdot \nabla)B + c_s^2\big[\Delta\tau + \nabla\tau \cdot \nabla \ln(\rho\, c_s^2 c^{-2})\big]B - c_s^2(B \cdot \nabla \ln c^2)\nabla\tau, \tag{39}$$

в которых $|\nabla\tau(x,y)|^2 = c^{-2}(x)$*, следовательно, при замене* $\tau(x,y)$ *на* $\tau_p(x,y)$ *или* $\tau_s(x,y)$ *нужно заменить* $c(x)$ *на* $c_p(x)$ *или* $c_s(x)$*, соответственно. В* *формулах (33), (34) через* $\xi_p(x,y)$, $\xi_s(x,y)$ *обозначены точки пересечения геодезических* $\Gamma_p(x,y)$ *и* $\Gamma_s(x,y)$, *соответственно, со сферой* $|x-y|=\varepsilon$. *Значения функций* $A^{(k,p)}(x,y)$, $B^{(k,s)}(x,y)$ *определены в соответствующих точках при всех* $k\geq 0$ *равенствами (24), (25) и находятся по формулам*

$$(40)\quad A^{(k,p)}(\xi_p(x,y),y) = \begin{cases} \left.\dfrac{(f^0\cdot\nabla_\xi\tau_p(\xi,y))}{2\pi c_p(y)\rho(y)\tau_p^{2+k}(\xi,y)}\right|_{\xi=\xi_p(x,y)}, & k=0,1,\\ 0, & k>1,\end{cases}$$

$$(41)\quad B^{(k,s)}(\xi_s(x,y),y) = \begin{cases} \left.\dfrac{(f^0\times\nabla_\xi\tau_s(\xi,y))}{4\pi c_s(y)\rho(y)\tau_s^{2+k}(\xi,y)}\right|_{\xi=\xi_s(x,y)}, & k=0,1,\\ 0, & k>1.\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы и вывод всех формул даны в работе [22].

Замечание 1. *Асимптотический ряд (26) представляет собой разложение "по гладкости" (термин принадлежит В.М. Бабичу, см. его работу* [16]*) в окрестности характеристических конусов. Этот ряд позволяет вычислить сингулярную часть решения и скачки производных любого порядка на характеристических конусах* $t=\tau_p(x,y)$ *и* $t=\tau_s(x,y)$. *При этом скачки производных порядка* $m\geq 0$ *выражаются через коэффициенты разложения* $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$ *для значений* $k\leq m$. *В частности,*

$$(42)\quad \left[\frac{\partial^m u(x,t,y)}{\partial t^m}\right]_{t=\tau_p(x,y)} = \alpha^{(m,p)}(x,y),\ \left[\frac{\partial^m u(x,t,y)}{\partial t^m}\right]_{t=\tau_s(x,y)} = \alpha^{(m,s)}(x,y).$$

Замечание 2. *В том случае, когда коэффициенты системы уравнений упругости имеют конечную, но достаточно высокую, гладкость, можно выписать только конечный отрезок асимптотического ряда (26), а остаток оценить с помощью стандартного метода энергетических оценок.*

Список литературы

[1] Шишатский С. П., *Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с цилиндрической временилодобной поверхности*, Докл. АН СССР, **213**: 1 (1973), 49–50.

[2] Лаврентьев М. М, Романов В. Г., Шишатский С. П., *Некорректные задачи математической физики и анализа*, М.: Наука, 1980.

[3] Klibanov M. V. and Malinsky J., *Newton-Kantorovich method for three-dimensional potential inverse scattering problem and stability of the hyperbolic Cauchy problem with time-dependent data*, *Inverse problems*, **7** (1991), 577–596.

[4] Klibanov M. V. and Timonov A., *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications*, Utrecht: VSP, 2004.

[5] Imanuvilov O.Yu. and Yamamoto M., *Global Lipschitz stability in an inverse problem by interior observations*, Inverse problems, **17** (2001), 717–728.

[6] Isakov V., *Carleman estimates and applications to inverse problems*, Milan J. Math., **72** (2004), 249–271.

[7] Lasiecka I., Triggiani R. and Yao P. F., *Inverse/observability estimates for second order hyperbolic equations with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl., **235** (1999), 13–57.

[8] Triggiani R. and Yao P. F., *Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot*, Appl. Math. Optim., **46**: 2/3 (2002), 334–375.

[9] Романов В. Г., *Карлемановские оценки для гиперболического уравнения второго порядка*, Сибирский матем. журн., **47**: 1 (2006), 169–187.

[10] Романов В. Г., *Оценки решения одного дифференциального неравенства*, Сибирский матем. журн., **47**: 3 (2006), 626–635.

[11] Eller M.M., Isakov V., Nakamura G. and Tataru D., *Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell's and elasticity system*, Studies in Mathematics and its Applications, **31** (2002), 329–349.

[12] Романов В. Г., *Оценка устойчивости решения задачи для уравнений электродинамики с данными на времениподобной поверхности*, Доклады АН, **411** : 1 (2006), 16–19.

[13] Imanuvilov O.Yu., Isakov V. and Yamamoto M., *An inverse problem for the dynamical Lamé system*, Comm. Pure Appl. Math., **56** (2003), 1–17.

[14] Romanov V. G., *A stability estimate for the solution to the ill-posed Cauchy problem for elasticity equations*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **16**: 6 (2008).

[15] Адамар Ж., *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, М.: Наука, 1978.

[16] Бабич В.М., *Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения*, Алгебра и анализ, **3**: 5 (1991), 1–37.

[17] Бабич В.М., *Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами*, Матем. сборник, **52**: 2 (1960), 709–738.

[18] Бабич В.М., *Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды*, ПММ, **XXV**: 1 (1961), 38–45.

[19] Романов В. Г., *Устойчивость в обратных задачах*, М.: Научный мир, 2005.

[20] Ляв А., *Математическая теория упругости*, ОНТИ, М.-Л., 1935.

[21] Романов В. Г., *Структура решения задачи Коши для системы уравнений электродинамики и упругости в случае точечных источников*, Сибирский матем. журн., **36**: 3 (1995), 628–649.

[22] Романов В. Г., *Асимптотическое разложение решения системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой*, Сибирский журн. индустр. матем., **XI**: 3 (2008).

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru