

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 5, стр. 595–608 (2008)*

УДК 519.63, 519.64

MSC 35L05, 35L30, 35R30, 45Q05, 65F22, 65M32, 65R32

ПРЯМЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

С. И. КАБАНИХИН, М. А. ШИШЛЕНИН

ABSTRACT. In this paper we describe direct and iteration methods for solving inverse and ill-posed problems such as backwards parabolic equation and Cauchy problem for Laplace equation. We as well study the inverse problem for the acoustic equation. The boundary control method and the Gel'fand-Levitan-Krein method are investigated for recovering some characteristics of the density. We describe numerical algorithm for the inverse acoustic problem. The nonlinear inverse problem is reduced to the system of linear algebraic equations. We demonstrate the results of computer simulation.

**Keywords:** inverse and ill-posed problems, conditional stability estimate, numerical methods.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Методы решения обратных и некорректных задач разделяются на две основные группы — прямых и итерационных методов. В данной работе мы приведем краткий обзор результатов, полученных при участии авторов, по численному решению обратных и некорректных задач как прямыми, так и итерационными методами.

---

КАБАНИХИН, S.I. AND SHISHLENIN, M.A., DIRECT AND ITERATION METHODS FOR SOLVING INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS.

© 2008 Кабанихин С.И., Шишленин М.А.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 48.

Поступила 1 сентября 2008 г., опубликована 27 ноября 2008 г.

В линейном случае обратные и некорректные задачи, как правило, могут быть записаны в виде операторного уравнения

$$(1) \quad Aq = f,$$

где  $A : Q \rightarrow F$  – компактный оператор,  $Q$  и  $F$  – сепарабельные гильбертовы пространства. В нелинейном случае, как правило, производная Фреше  $A'$  оператора  $A$  в некорректных задачах также является компактным оператором.

В работах [1-4,6] рассмотрены прямые и итерационные методы решения уравнения (1).

К прямым методам относятся:

- метод обращения разностных схем (МОРС);
- метод линеаризаций (МЛ);
- метод Гельфанда-Левитана-Крейна (МГЛК);
- метод граничного управления (МГУ);
- метод сингулярного разложения (МСР).

Основное достоинство прямых методов заключается в том, что при их реализации удается избежать многократного решения прямых задач. Однако прямые методы либо оказываются плохо устойчивыми (МОРС), либо требуют слишком больших вычислительных затрат (при больших размерах матрицы  $A$  в случае дискретизации задачи). Поэтому задачу (1) часто сводят к задаче минимизации функционала

$$(2) \quad J(q) = \|Aq - f\|^2 \rightarrow \min,$$

или функционала А.Н. Тихонова

$$(3) \quad M_\alpha(q) = J(q) + \alpha\|q\|^2 \rightarrow \min,$$

что порождает широкий набор итерационных методов

- метод Ландвебера

$$(4) \quad q_{n+1} = q_n - \alpha A^*(Aq_n - f);$$

- градиентные методы

$$(5) \quad q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'(q_n).$$

В нелинейном случае используются также метод Ньютона-Канторовича:

$$(6) \quad q_{n+1} = q_n - [A'(q_n)]^{-1}(Aq_n - f)$$

и нелинейный вариант метода Ландвебера

$$(7) \quad q_{n+1} = q_n - [A']^*(Aq_n - f).$$

В данной статье приведен обзор результатов исследований вышеназванных методов, полученных в рамках работ по интеграционному проекту 48 СО РАН.

В монографии [1] приведены численные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений, в том числе для волнового уравнения, уравнения акустики, системы уравнений Максвелла.

В главе, посвященной общей теории некорректных задач, приведены новые результаты С.И. Кабанихина и его учеников об использовании оценок условной устойчивости для получения оценок скорости сходимости градиентных методов и, что особенно важно для практических расчетов, приведены способы получения новых правил остановки регуляризирующего процесса, основанные на оценках условной устойчивости.

В книге [2] приведены новые методы и алгоритмы численного решения обратных задач по тематике гранта.

Получена оценка скорости сильной сходимости метода итераций Ландвебера для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.

## 2. СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Дадим определение корректной по Тихонову (условно-корректной) задачи.

**Определение 1.** Задача  $Aq = f$  называется условно-корректной на множестве  $M$ , если  $f \in A(M)$  и выполнены следующие условия:

- (1) решение  $q_T$  уравнения  $Aq = f$ ,  $f \in A(M)$ , единственно на множестве  $M$ ,
- (2) для любой окрестности  $\mathbb{O}(q_T)$  решения уравнения  $Aq = f$  существует такая окрестность  $\mathbb{O}(f)$ , что при любом  $f_\delta \in \mathbb{O}(f) \cap A(M)$  решение уравнения  $Aq = f_\delta$  содержится в  $\mathbb{O}(q_T)$  (условная устойчивость).

**Определение 2.** Будем говорить, что для условно-корректной задачи  $Aq = f$  получена оценка условной устойчивости на множестве корректности  $M$ , если найдена возрастающая вещественная функция  $\beta(\delta)$ , такая что

- 1)  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \beta(\delta) = 0$ ;
- 2) для любых  $f \in A(M)$ ,  $f_\delta \in A(M)$ , удовлетворяющих оценке  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ , справедливо неравенство

$$\|q_T - q_\delta\| \leq \beta(\delta),$$

где  $q_T \in M$  — решение уравнения  $Aq = f$ , а  $q_\delta \in M$  — решение уравнения  $Aq = f_\delta$ .

Если оценка условной устойчивости  $\beta(\delta)$  получена на множестве корректности

$$M = \{q \in Q : \|q\| \leq C\},$$

то из оценки скорости сходимости по функционалу можно вывести оценку скорости сильной сходимости градиентных методов. Рассмотрим, например, метод наискорейшего спуска

$$(8) \quad q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad q_0 \in Q,$$

$$(9) \quad \alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(q_n - \alpha J' q_n).$$

**Теорема 1** (оценка скорости сильной сходимости метода наискорейшего спуска). Пусть  $A : Q \rightarrow F$  — линейный непрерывный оператор,  $Q$  и  $F$  — гильбертовы пространства. Предположим, что для  $f \in F$  существует решение  $q_T \in Q$  задачи  $Aq = f$  и что на множестве

$$M = \{q \in Q : \|q\| \leq 2\|q_T\|\}$$

получена оценка условной устойчивости  $\beta(\delta)$ . Тогда, если  $\|q_T - q_0\| \leq \|q_T\|$ , то имеет место оценка

$$(10) \quad \|q_T - q_n\| \leq \beta\left(\frac{\|A\|\|q_T - q_0\|}{\sqrt{n}}\right)$$

**Теорема 2.** При выполнении условий теоремы 1 метод простой итерации (5) сходится со скоростью

$$\|q_T - q_n\| \leq \beta \left( \frac{\|q_T - q_0\|}{\sqrt{\alpha n} \sqrt{1 - \alpha \|A\|^2}} \right).$$

**Регуляризирующие свойства градиентных методов.** Предположим теперь, что все условия теоремы 2 выполнены, но функция  $f$  задана приближенно, причем приближение  $f_\delta \in F \cap O(f, \delta)$  может не лежать в  $A(M)$ . Покажем, что при согласованном стремлении  $\delta$  к нулю, а  $n \rightarrow \infty$ , можно получить приближение точного решения  $q_T$  с любой заданной точностью. Задачу минимизации функционала

$$(11) \quad J_\delta(q) = \|Aq - f_\delta\|^2$$

будем решать методом простой итерации:

$$(12) \quad q_{\delta n+1} = q_{\delta n} - \alpha J' q_{\delta n}, \quad q_{\delta 0} = q_0,$$

$$(13) \quad \alpha \in \left( 0, \frac{1}{2\|AA^*\|} \right).$$

Исследуем, насколько может возрасти с ростом числа итераций  $n$  разность между  $q_{\delta n+1}$  и  $q_{n+1}$ , где  $q_{n+1}$  вычислено по алгоритму метода простой итерации с точными данными ( $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ ), но с тем же начальным приближением  $q_0$ . Рассмотрим разность

$$(14) \quad \begin{aligned} q_{n+1} - q_{\delta n+1} &= q_n - q_{\delta n} - \alpha J' q_n + \alpha J' q_{\delta n} = q_n - q_{\delta n} - \alpha (J' q_n - J' q_{\delta n}) \\ &= (I - \alpha 2A^*A)(q_n - q_{\delta n}) + 2\alpha A^*(f - f_\delta). \end{aligned}$$

В силу (13) получаем из (14)

$$\|q_{n+1} - q_{\delta n+1}\| \leq \|q_n - q_{\delta n}\| + 2\alpha \|A^*\| \delta.$$

Но тогда

$$(15) \quad \|q_{n+1} - q_{\delta n+1}\| \leq \|q_1 - q_{\delta 1}\| + 2\alpha n \|A^*\| \delta.$$

Поскольку оба процесса начинаются с одного и того же начального приближения, имеем

$$(16) \quad \|q_1 - q_{\delta 1}\| \leq 2\alpha \|A^*\| \delta.$$

Но тогда из (15) и (16) следует, что

$$(17) \quad \|q_n - q_{\delta n}\| \leq \beta_2(n) \delta, \quad \forall n \in N,$$

где

$$(18) \quad \beta_2(n) = 2\alpha n \|A^*\| \delta.$$

Полученные оценки позволяют доказать следующее утверждение

**Теорема 3** (регуляризирующие свойства метода простой итерации). Пусть  $A : Q \rightarrow F$  — линейный непрерывный оператор,  $Q$  и  $F$  — гильбертовы пространства. Предположим, что для  $f \in F$  существует решение  $q_T \in Q$  задачи  $Aq = f$ , а на множестве

$$M = \{q \in Q : \|q\| \leq 2\|q_T\|\}$$

найдена оценка условной корректности  $\beta(\delta)$ . Тогда при выполнении условий

$$(19) \quad \|q_T - q_0\| \leq \|q_T\|,$$

$$(20) \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta$$

последовательность  $q_{\delta,n}$  метода простой итерации (12), (13) удовлетворяет оценке

$$(21) \quad \|q_T - q_{\delta n}\| \leq \beta \left( \frac{\|q_T - q_0\|}{\sqrt{\alpha n} \sqrt{1 - \alpha \|A\|^2}} \right) + 2\alpha n \|A^*\| \delta.$$

Оценка (21) показывает, что последовательность  $\{q_{\delta,n}\}$  метода простой итерации является регуляризирующей с параметром регуляризации  $n$ . Действительно, перепишем (21) в виде

$$(22) \quad \|q_T - q_{\delta n}\| \leq \beta_1(n) + \delta \beta_2(n),$$

где

$$\beta_1(x) = \beta \left( \frac{\|q_T - q_0\|}{\sqrt{\alpha x} \sqrt{1 - \alpha \|A\|^2}} \right), \quad \beta_2(x) = 2\alpha \|A^*\| x.$$

Поскольку  $\beta_1(n)$  монотонно стремится к нулю, а  $\beta_2(n)$  монотонно стремится к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ , то номер остановки  $n_*$  итерационного процесса можно выбрать в окрестности точки  $x_*$ , которая является решением уравнения

$$\beta_1'(x) + \delta \beta_2'(x) = 0.$$

Оценка (22) иллюстрирует и объясняет хорошо известный на практике эффект применения градиентных методов к решению некорректных задач с приближенными данными. Замечено, что на первых шагах итерационного процесса  $q_{\delta n}$  приближается к точному решению, т. е. величина  $\|q_{\delta n} - q_T\|$  уменьшается, но потом, с ростом  $n$  величина  $\|q_{\delta n} - q_T\|$  может начать расти. В самом деле, если для  $f_\delta$  решение задачи  $Aq = f_\delta$  существует, то работает оценка (10). Но если для  $f_\delta$  нет решения, то теорема 1 теряет силу и начинается накопление погрешности с ростом  $n$ , функция  $\beta_2(n)$  растет и после перехода  $n$  через  $x_* = x_*(\delta)$  правая часть оценки (22) может неограниченно расти.

Отметим, что если известна какая-либо оценка снизу оператора  $A$ , например, постоянная  $m > 0$  такая, что при всех  $q \in Q$  выполнено неравенство

$$m \langle q, q \rangle \leq \langle Aq, q \rangle,$$

то оценки и слабой, и сильной сходимости градиентных методов можно существенно улучшить. Нас же, напротив, интересует вопрос, что можно сказать о сильной сходимости в случае сильной некорректности. Рассмотрим известный пример

$$(23) \quad \Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(24) \quad u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1),$$

$$(25) \quad u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, 1),$$

$$(26) \quad u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

Для решения этой задачи достаточно найти функцию  $q(y)$  такую, что

$$(27) \quad u(1, y) = q(y),$$

а затем решить корректную задачу (23), (24), (26) и (27) (доказательство корректности данной задачи проведено в разделе 7.3). Другими словами, достаточно решить операторное уравнение

$$(28) \quad Aq = f.$$

Показано, что  $A : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ ,  $\|A\| \leq 1$ . Получена оценка условной устойчивости задачи, которую в силу линейности оператора  $A$  можно записать в виде

$$(29) \quad \int_0^1 u^2(x, y) dy \leq \left( \int_0^1 f^2(y) dy \right)^{1-x} \left( \int_0^1 q^2(y) dy \right)^x, \quad x \in (0, 1).$$

Главное отличие от определения условной устойчивости заключается в том, что оценка (29) зависит от параметра  $x$ .

Тем не менее, она может быть использована для оценивания скорости сильной сходимости, правда, не самого градиентного метода (например, простой итерации)

$$(30) \quad q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad \alpha \in (0, \|A\|^{-2}),$$

а порожденного этим методом итерационного процесса приближенного вычисления  $u_n(x, y)$ . Поясним сказанное более подробно. Предположим, что решая операторное уравнение (28) методом (30), мы построим  $n$ -ое приближение  $q_n(y) \in L_2(0, 1)$ . Известно [6]

$$(31) \quad \|q - q_T\| \leq \|q_{n-1} - q_T\| \leq \dots \leq \|q_0 - q_T\|.$$

В [6] доказано, что

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2 \leq \frac{\|q_0 - q_T\|}{n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

Но  $Aq_n = u_n(0, y)$ , где  $u_n(x, y)$  есть решение задачи

$$(32) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u_x(0, y) &= 0, & y \in (0, 1), \\ u(1, y) &= q_n(y), & y \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0. \end{aligned}$$

Доказано [2], что решение  $u_n(x, y)$  задачи (32) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2} \|q_n\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Более того, существует след  $u_n(0, y) = f_n(y)$  этого решения, который удовлетворяет оценке

$$\|f_n\|_{L_2(0,1)} \leq \|q_n\|_{L_2(0,1)}.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи из оценки условной устойчивости (29) вытекает ( $u_T$  — точное решение задачи (23)–(26))

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [u_n(x, y) - u_T(x, y)]^2 dy \\ & \leq \left( \int_0^1 [Aq_n - Aq_T]^2 dy \right)^{1-x} \left( \int_0^1 [q_n(y) - q_T(y)]^2 dy \right)^x, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

В силу (31) заключаем, что

$$\int_0^1 [u_n(x, y) - u_T(x, y)]^2 dy \leq \left( \int_0^1 [Aq_n - f(y)]^2 dy \right)^{1-x} \|q_n - q_T\|^{2x}, \quad x \in (0, 1).$$

Следовательно

$$(33) \quad \int_0^1 [u_n(x, y) - u_T(x, y)]^2 dy \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^{2-2x}}{[n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)^{1-x}]} \|q_0 - q_T\|^{2x} \\ = \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{[n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)]^{1-x}}, \quad x \in (0, 1).$$

Итак, мы убедились, что оценка условной устойчивости (29) позволяет оценить скорость сильной сходимости, правда не самого градиентного метода  $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n$ , а итерационного процесса, им порожденного. Отметим, что при  $x \rightarrow 1$  слева оценка (33) принимает вид

$$\|q_n - q_T\|^2 \leq \|q_0 - q_T\|^2.$$

### 3. МНОГОМЕРНАЯ ПОСТАНОВКА

В связной ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\partial\Omega$  рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем

$$(34) \quad u_t = -L(x)u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$(35) \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(36) \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T],$$

в которой требуется определить функцию  $u(x, t) \in L_2(\Omega \times (0, T))$  по заданной функции  $f(x) \in L_2(\Omega)$ , и заданному эллиптическому оператору:

$$(37)$$

$$L(x)u = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_j u) - c(x)u, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$(38) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\nu_i\nu_j \geq \sum_1^n \nu_i^2 \quad \text{для любого } \nu_i \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad x \in \Omega,$$

$$(39) \quad 0 \leq c(x) \leq C_1.$$

**3.1. Некорректность задачи.** Задача (34)–(36) является некорректной, поскольку сколь угодно малым изменениям правой части  $f$  могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения  $u$ .

Задачу (34)–(36) можно сформулировать в форме обратной задачи по отношению к следующей прямой (корректной) задаче:

$$(40) \quad u_t = -L(x)u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$(41) \quad u(x, T) = q(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(42) \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T].$$

Предполагается, что функция  $q(x)$  удовлетворяет условию согласования

$$(43) \quad q|_{\partial\Omega} = 0.$$

В *прямой задаче* (40)–(43) требуется определить  $u(x, t)$  в  $\Omega \times (0, T)$  по известной функции  $q(x)$ , заданной в момент времени  $T$ .

*Обратная задача* заключается в определении функции  $q(x)$  из соотношений (40) – (42) по дополнительной информации

$$(44) \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Функцию  $u \in L_2(\Omega \times (0, T))$  будем называть *обобщенным решением прямой задачи* (40)–(42), если для любых  $w \in H^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ , таких, что

$$(45) \quad w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$(46) \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T],$$

имеет место равенство

$$(47) \quad \int_0^T \int_{\Omega} u(w_t - L(x)w) dx dt - \int_{\Omega} q(x)w(x, T) dx = 0.$$

Если  $q \in L_2(\Omega)$ , то *прямая задача* (40)–(42) имеет единственное обобщенное решение  $u \in L_2(\Omega \times (0, T))$ , непрерывно зависящее от начальных данных:

$$(48) \quad \|u\|_{L_2(\Omega \times (0, T))} \leq \sqrt{T} \|q\|_{L_2(\Omega)},$$

а для следа  $u(0, x) \in L_2(\Omega)$  верна оценка

$$(49) \quad \|u(x, 0)\|_{L_2(\Omega)} < \|q\|_{L_2(\Omega)}.$$

**Теорема 4** (условной устойчивости). *Для любых функций  $q, f \in L_2(\Omega)$  решение  $u(x, t) \in L_2(\Omega \times (0, T))$  прямой задачи (40)–(42) удовлетворяет неравенству*

$$(50) \quad \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \|q\|_{L_2(\Omega)}^{2t/T} \|f\|_{L_2(\Omega)}^{2(T-t)/T}.$$

Введем оператор

$$A : q(x) \mapsto u(x, 0),$$

где  $u(x, t)$  – решение прямой задачи (40)–(43).

Обратная задача (40)–(44) имеет следующий операторный вид

$$Aq = f.$$

Задачу будем решать, минимизируя функционал  $J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(\Omega)}^2$  методом наискорейшего спуска. Оценка скорости сходимости метода дана в следующей теореме [2].

**Теорема 5.** *Пусть для  $f \in L_2(\Omega)$  существует решение  $q_T \in L_2(\Omega)$  задачи  $Aq = f$ , начальное приближение удовлетворяет условию  $\|q_0 - q_T\| \leq C$ . Тогда последовательность решений  $\{u_n\}$  прямых задач для соответствующих итераций  $q_n$  сходится к точному решению  $u \in L_2(\Omega)$  задачи (34)–(36) и верна оценка*

$$(51) \quad \|u_n - u\|_{L_2(\Omega \times [0, T_0])}^2 \leq \frac{C^2 T}{n^{1-T_0/T}}, \quad T_0 \in (0, T).$$



*Доказательство.* Из теоремы 4 и теоремы о сходимости по функционалу следует неравенство

$$\int_{\Omega} (u_n - u)^2(x, t) dx \leq C^{2t/T} \left(\frac{C^2}{n}\right)^{(T-t)/T} = \frac{C^2}{n^{1-t/T}}, \quad t \in [0, T].$$

Проинтегрировав его по  $t$  от 0 до  $T_0$ , получим

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Omega \times [0, T_0])}^2 \leq \frac{C^2 T}{n} \frac{n^{T_0/T} - 1}{\ln n} \leq \frac{C^2 T}{n^{1-T_0/T}},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

#### 4. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Метод Гельфанда-Левитана-Крейна состоит в сведении нелинейной обратной задачи к системе линейных интегральных уравнений первого или второго рода, а также возможность вычисления неизвестного коэффициента без многократного решения прямой задачи. Полученные в данном разделе формулы допускают обоснование только в классе аналитических по  $y$  функций, однако численные расчеты показывают, что формулы (64), (72) достаточно хорошо приближает искомый коэффициент.

И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан в 1951 году представили метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции и дали достаточные условия, чтобы данная монотонная функция была спектральной функцией оператора. Важно отметить результаты работ М. Г. Крейна (1951, 1954).

Идеи ГЛК метода были широко применены в теории динамических задач сейсмологии, начиная с работ G. Kunetz (1961), А. С. Алексеева (1967), Б. С. Парийского (1968).

А. С. Благовещенский (1969, 1971), В. Gopinath и М. Sondhi (1971) разработали динамический вариант ГЛК метода для обратной задачи акустики.

Многомерные аналоги уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна были получены С. И. Кабанихиным [7]. Аналитичность по переменной  $y$  позволяет обосновать сходимость проекционного метода, т. е. свести многомерную обратную задачу к конечной системе одномерных обратных задач.

Рассмотрим прямую задачу

$$(52) \quad c^{-2}(x, y) u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$(53) \quad u|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$(54) \quad u_x(+0, y, t) = h(y)\delta(t).$$

Здесь  $c(x, y) \geq c_0 > 0$  ( $c_0 = \text{const}$ ) скорость распространения волн;  $\rho(x, y) \geq \rho_0 > 0$  ( $\rho_0 = \text{const}$ ) плотность среды;  $u(x, y, t)$  акустическое (превышающее) давление;  $\delta(t)$  дельта функция Дирака.

*Обратная задача:* найти коэффициенты уравнения (52) используя дополнительную информацию о решении прямой задачи (52)–(54):

$$(55) \quad u(+0, y, t) = f(y, t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Полагаем, что все рассматриваемые функции  $2\pi$ -периодические и достаточно гладкие по  $y$ . Полагаем, что  $\rho(0, y)$  известно и  $h(y) = \exp\{iky\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 5. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим одномерную обратную задачу акустики

$$(56) \quad c^{-2}(z)u_{tt} = u_{zz} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)}u_z, \quad z > 0, \quad t > 0;$$

$$(57) \quad u|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$(58) \quad u_z(+0, t) = \hat{\gamma} \delta(t);$$

$$(59) \quad u(0, t) = f(t).$$

Введем новую переменную

$$x = \psi(z), \quad \psi(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}.$$

и новые функции  $v(x, t) = u(z, t)$ ,  $\sigma(x) = c(z)\rho(z)$ . Так как  $c(z) > 0$ , тогда существует обратная функция  $\psi^{-1}(x)$ . Таким образом, от задачи (56)–(59) можно перейти к задаче нахождения акустической жесткости  $\sigma(x)$  из уравнений

$$(60) \quad v_{tt} = v_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}v_x, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$(61) \quad v|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$(62) \quad v_x(+0, t) = \gamma \delta(t), \quad \gamma = c(+0)\hat{\gamma};$$

$$(63) \quad v(+0, t) = f(t).$$

Необходимое условие существования решения обратной задачи:  $\gamma = -f(0)$ .

**5.1. Уравнение Гельфанда-Левитана-Крейна.** Уравнение Гельфанда-Левитана-Крейна

$$(64) \quad -2\bar{f}(+0)V(x, t) - \int_{-x}^x \bar{f}'(t-s)V(x, s)ds = \frac{\gamma}{\sigma(+0)}, \quad |t| < x.$$

Решение уравнения связано с решением обратной задачи следующим соотношением

$$V(x, x-0) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma(+0)\sigma(x)}}.$$

Тогда решение обратной задачи (60)–(63) дается формулой:

$$\sigma(x) = \frac{V(0, 0)}{2V^2(x, x-0)}.$$

**5.2. Метод граничного управления.** Решение обратной задачи (60)–(63) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\Gamma\alpha = b,$$

где коэффициенты матрицы  $\Gamma$  вычисляются по формуле

$$(65) \quad \Gamma_{jk} = \int_0^L \int_0^{L-\tau} g^{(j)}(\xi) d\xi \int_0^{L-\tau} g^{(k)}(\eta) d\eta d\tau + \frac{1}{2r(+0)} \int_0^L \int_0^{L-\eta} g^{(k)}(\xi) d\xi \int_0^L [f'(\tau + \eta) + f'(|\tau - \eta|)] \times \int_0^{L-\tau} g^{(j)}(\xi) d\xi d\tau d\eta,$$

а компоненты вектора  $b$ :

$$(66) \quad b_j = -\frac{1}{\sigma(+0)} \int_0^L (L-t) g^{(j)}(t) dt.$$

Здесь  $\{g^{(k)}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$  – базисная система функций в  $L_2(0, L)$ .

Откуда решение обратной задачи получаем по формуле

$$\sigma(L) = \left\{ \frac{d}{dL} \left[ \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k b_k \right] \right\}^{-1}.$$

Разумеется, при численном решении обратной задачи мы ограничиваемся конечным числом источников.

### 6. ДВУМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА-КРЕЙНА

Рассмотрим двумерную обратную задачу определения плотности  $\rho(x, y)$  при известной функции  $c(x, y) \equiv 1$ . Рассмотрим последовательность обратных задач

$$(67) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x, y) \nabla u^{(k)},$$

$$x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(68) \quad u^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$(69) \quad u_x^{(k)}(+0, y, t) = e^{iky} \delta(t);$$

$$(70) \quad u^{(k)}(x, \pi, t) = u^{(k)}(x, -\pi, t).$$

Предположим, что след решения задачи (67)–(70) существует и измерен:

$$(71) \quad u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Необходимое условие существования решения обратной задачи следующее

$$f^{(k)}(y, +0) = -e^{iky}, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Можно получить многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна относительно функции  $\Phi^m(x, t)$ :

$$(72) \quad \Phi^k(x, t) = \frac{1}{2} \sum_m \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^m(x, s) ds - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy,$$

где  $|t| < x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Откуда решение обратной задачи (67)–(71) находится по формуле

$$(73) \quad \rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_m \Phi^m(x, x-0) e^{-imy} \right]^{-2}.$$

## 7. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Пусть  $h = T/N$ ,  $x = ih$ ,  $t = nh$ ,  $V_i^n = V(ih, nh)$ . Приближенные данные брались в виде

$$f^\varepsilon(t) = f(t) + \varepsilon \alpha(t)(f_{\max} - f_{\min}),$$

где  $\varepsilon$  уровень шума в данных,  $\alpha(t)$  – случайное число равномерно распределенное на отрезке  $[-1, 1]$  для каждого  $t$ ,  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  максимальное и минимальное значение точных данных.

### 7.1. Численное решение одномерной обратной задачи акустики.

Очевидно, что  $V(x, s) = V(x, -s)$  для  $s > 0$ . Тогда

$$(74) \quad 2\bar{f}(+0)V(x, t) + \int_0^x [\bar{f}'(t-s) + \bar{f}'(t+s)]V(x, s)ds = -\frac{\gamma}{\sigma(+0)}, \quad |t| < x.$$

Рассмотрим дискретный аналог (74):

$$(75) \quad 2\bar{f}^0 \Psi_N^j + h \sum_{k=1}^N [\bar{f}'^{j-k+1} + \bar{f}'^{j+k-1}] \Psi_N^k = -\frac{\gamma}{\sigma_0}, \quad |j| \leq N.$$

Так как  $\Psi_0^0 = 1/2\sigma_0$ , тогда уравнение (75) разрешимо для  $j = \overline{1, N}$  относительно неизвестных  $\Psi_N^1, \Psi_N^2, \dots, \Psi_N^N$ . Функция  $\bar{f}(t)$  четная, тогда уравнение (75) можно переписать в виде

$$(76) \quad 2f^0 \Psi_N^j + h \sum_{k=1}^N [f'^{|j-k|} + f'^{j+k-2}] \Psi_N^k = -\frac{\gamma}{\sigma_0}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (76), решение обратной задачи находится по формуле

$$\sigma_N = \frac{1}{4\sigma_0 [\Psi_N^N]^2}$$

### 7.2. Численное решение двумерной задачи акустики. Имеем

$\Phi^k(x, -t) = \Phi^k(x, t)$  при  $t > 0$ . Тогда

$$(77) \quad \Phi^k(x, t) - \frac{1}{2} \sum_m \int_0^x [f_m^{(k)'}(t-s) + f_m^{(k)'}(t+s)] \Phi^m(x, s) ds = \\ = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad |t| < x.$$

В расчетах рассмотрим конечное число коэффициентов Фурье  $M$ .

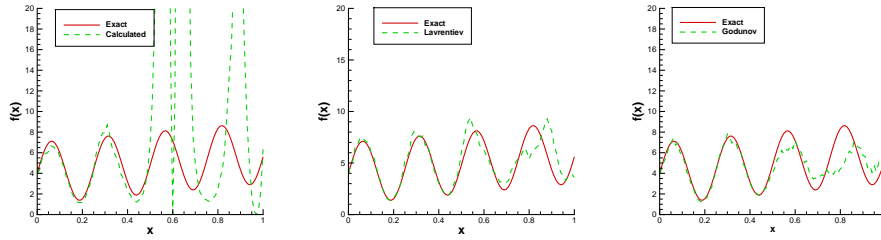


Рис. 1. Численное решение одномерной обратной задачи акустики

Получим дискретный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна:

$$(78) \quad \begin{aligned} & [\Phi^k]_i^n - \frac{1}{2} \sum_{|m| \leq M} \left\{ h [f_m^{(k)'}]^{n-1} [\Phi^m]_i^0 + \frac{h}{2} ([f_m^{(k)'}]^{n+i} + [f_m^{(k)'}]^{n-i}) [\Phi^m]_i^i + \right. \\ & \left. + h \sum_{p=1}^{i-1} ([f_m^{(k)'}]^{n+p} + [f_m^{(k)'}]^{n-p}) [\Phi^m]_i^p \right\} = F^k, \quad 0 \leq n \leq i, \quad |k| \leq M. \end{aligned}$$

Здесь

$$F^k = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad |k| \leq M.$$

Для фиксированного времени  $t = nh$  уравнение (78) есть система линейных алгебраических уравнений  $Aq = f$ , где матрица  $A$  размерности  $(i+1) \times (2M+1)$ .

Приближенное решение находится по формуле

$$\rho(ih, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_{m=-M}^M \Phi^m(ih, ih - 0) e^{-imy} \right]^{-2}.$$

### 8. МЕТОД СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Система линейных уравнений, полученная в методе граничного управления, и дискретный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна можно записать в следующем виде:  $Aq = f$ , где  $q$  – неизвестный вектор.

Для решения данной системы применены два метода регуляризации:

- Метод регуляризации М.М. Лаврентьева:

$$\alpha q + Aq = f;$$

- Метод регуляризации С.К. Годунова:

$$(1 - \alpha)Aq = (1 - \alpha)f,$$

$$\alpha Bq = 0.$$

Здесь  $B$  – матрица, построенная в соответствии с априорной информацией о решении обратной задачи,  $\alpha$  – параметр регуляризации. Полученные системы линейных алгебраических уравнений решаются методом сингулярного разложения [5].

Показано, что применение регуляризирующих алгоритмов позволяет находить решение обратной задачи в случае сложных сред и больших ошибках в данных [3]. На рисунке 1 приведены расчеты одномерной обратной задачи

акустики при следующих параметрах  $\varepsilon = 6$ ,  $T = 1$ ,  $N = 100$ ; точное решение  $\sigma(x) = 4 + 3 \sin(25x) + 2x$ . На рисунке приведены три графика решения дискретного аналога уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна: первый – решение полученное методом сингулярного разложения, второй – решение полученное методом М.М. Лаврентьева, третий – решение полученное методом С.К. Годунова.

Проведен сравнительный анализ методов регуляризации. Описаны классы акустических сред, для которых методы М.М. Лаврентьева и С.К. Годунова дают наилучшее приближение к точному решению обратной задачи, а также случаи, в которых целесообразно применять градиентные методы:

$$q_{n+1} = q_n - 2A^*(Aq_n - f)$$

и метод А. Н. Тихонова:

$$\alpha Bq + A^*Aq = A^*f.$$

Методы решения переносятся на многомерную обратную задачу (67)–(71) и многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна (72).

Полное изложение результатов и список цитируемой литературы содержится в работах [1, 2, 3, 4].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков. *Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений*. Алматы, КазНПУ, 2007.
- [2] С.И. Кабанихин. *Обратные и некорректные задачи*. Москва, Издательский центр Академия, 2008.
- [3] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin. The Gel'fand-Levitan-Krein method in an inverse acoustic problem. *Applicable Analysis*, 2008 (сдана в печать).
- [4] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin. Determination of some properties of the density in multidimensional inverse acoustic problem. *Journal of Physics: Conference Series*, 2008 (сдана в печать).
- [5] С.К. Годунов и др. *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*. Новосибирск, Наука, 1992.
- [6] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсейтова. *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*. Алматы-Новосибирск, 2006.
- [7] Кабанихин С.И. *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*. Новосибирск: Наука. Сибирское отд-ние, 1988.
- [8] Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*. VSP, The Netherlands, 2005.

КАБАНИХИН СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ, ШИШЛЕНИН МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ  
 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
 ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* kabanikh@math.nsc.ru, mshishlenin@ngs.ru