S ⓔMR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 5, стр. 632–646 (2008) УДК 517.9, 519.6

MSC 44A30

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ЗАДАЧЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО НОСИТЕЛЯ СКАЛЯРНЫХ, ВЕКТОРНЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ ПО ТОМОГРАФИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Е. Ю. ДЕРЕВЦОВ

Abstract. The problem of singular support reconstruction of scalar, vector and tensor fields by their given tomographic data is formulated in the paper. Main definitions and properties of differential and integral operators which were used for the problem of the singular support visualization are described, as well as the results of numerical simulations.

Keywords: tensor field, ray transform, back projection operator, singular support.

1. Вводная часть

Существует много практически важных естественнонаучных и технических областей, в которых объекты исследований математически описываются величинами, терпящими разрыв. Такие объекты часто возникают в задачах, использующих дистанционные методы и, в частности, в задачах томографии. Приведем лишь два примера. В дефектоскопии обнаружение трещин в промышленных изделиях посредством неразрушающего контроля, по-видимому,

---

Derevtsov, E.Yu., Some approaches to a reconstruction of a singular support of scalar, vector and tensor fields by their known tomographic data.

Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке».

Работа поддержана СО РАН (грант 2006-48).

Поступила 11 августа 2008 г., опубликована 28 ноября 2008 г.

столь же важная задача, как и определение отклонений внутреннего строения изделия от эталона. Во многих задачах геофизики установление местоположения границ, разделяющих блоки с различными физическими свойствами, является первым этапом в дальнейших исследованиях, направленных на определение тех или иных физических величин, характеризующих внутреннее строение Земли.

В процессе становления томографии как самостоятельной научной дисциплины проблема реконструкции объектов с разрывными физическими свойствами выделилась в самостоятельную задачу. Теоретическое описание объектов с разрывными свойствами в рамках интегральной геометрии посредством обобщенных функций (распределений) было предложено в 1962 году в монографии [1]; дальнейшее развитие теории, уже в томографических постановках, можно найти, например, в работах [2, 3]. В настоящее время развитие теоретических методов исследования математических и, в частности, геометрических объектов осуществляется, в основном, средствами микролокального анализа. Таким образом, математический аппарат описания объектов такого рода достаточно хорошо разработан. В то же время алгоритмическая и программная реализация этого аппарата заключает в себе определенные сложности.

В настоящее время в томографии разработано много приближенных методов, алгоритмов и программных средств, направленных на восстановление внутренних свойств объекта. Чаще всего при этом используются подходы, основанные на формулах обращения, вариационных и алгебраических методах. Обычно они хорошо проявляют себя при восстановлении объектов с гладкими свойствами, и в то же время дают неудовлетворительные результаты в случае, если объект обладает разрывными характеристиками. Таким образом, один путь восстановления разрывной функции состоит в применении уже известных в томографии алгоритмических средств, но при этом резко возрастает потребность в необходимом объеме исходных данных и, следовательно, в значительном увеличении времени и точности расчетов. Второй путь заключается в разработке специальных алгоритмических средств, направленных на восстановление разрывных функций. Можно следующим образом детализировать поставленную задачу и выделить следующие этапы ее решения: а) визуализация множества точек разрыва исследуемой функции; б) локализация этого множества и его приближенное описание в рамках дискретной модели исследуемого объекта; в) определение, по найденному на предыдущих этапах множеству точек разрыва функции, величины скачка, характеризующего разрыв; г) устраняя разрывы, восстанавливаем более гладкую, уже не обладающую разрывами, функцию любым из общепринятых и хорошо известных в томографии методов; д) наконец, по известным величинам скачка восстанавливается исходная разрывная функция.

Под визуализацией разрывов подразумевается получение такого изображения, полученного на основе томографических данных и связанного с исследуемым объектом, на котором множество точек, в которых функция терпит разрыв, легко узнаваемо. Это может быть резкая граница в цветных или полутоновых плоских изображениях, либо резкое возрастание значений функции в окрестности точек разрыва, если изображение представляется в форме рельефа. Под локализацией множества разрывных точек понимается его строгое описание в математических терминах. Например, приближенное определение координат точек разрыва и, далее, задание аппроксимаций линий или поверхностей, состоящих из точек разрывов, уравнениями в той или иной форме. Задача определения величины скачка в точке разрыва ясна и не требует дополнительных пояснений. Пункты г) и д) тесно связаны. По-существу, здесь требуется построить функцию, устраняющую разрывы, и воспользоваться ею дважды.

Насколько известно автору, в сформулированной выше детальной постановке задача восстановления разрывной функции по томографическим данным в литературе ранее не встречалась. Более того, в подавляющем числе работ под задачей восстановления разрывов подразумевается пункт а), а именно визуализация разрывов. Часто этой качественной информации бывает достаточно для многих практических задач. В некоторые работах рассматривается задача восстановления величины скачка (ссылки см. ниже), но при этом убедительных тестовых расчетов не приводится, что связано, по-видимому, со значительной численной неустойчивостью решения этой задачи. Как формулировки, так и решения задач, поставленных в пунктах б), г) и д), в томографической литературе отсутствуют. Ниже приводятся краткие библиографические ссылки на основные работы и результаты, полученные в них с целью решения задачи восстановления разрывов.

По-видимому, первой работой, в которой предложен алгоритм визуализации множества разрывов функции, была статья Вайнберга с соавторами [4], опубликованная в 1985 г. Основная идея при этом состояла в предварительном двойном дифференцировании по переменной s ($|s|$ — расстояние от прямой, по которой производится интегрирование, до начала координат) томографических данных, представляющих собой двумерное преобразование Радона, с последующим применением оператора обратного проектирования. В дальнейшем такая последовательность действий, приводящая к визуализации множества разрывов, но при этом не позволяющая судить о поведении гладкой составляющей объекта, получила название *оператора Вайнберга*. Следует подчеркнуть, что результат применения оператора Вайнберга не дает искомую функцию, как это происходит в случае использования формул обращения. Именно, нелокальный псевдодифференциальный оператор, используемый в формулах обращения, заменяется локальным дифференциальным оператором двойного дифференцирования, что существенно упрощает его программную реализацию, но не позволяет восстановить гладкую часть объекта.

Самими авторами применение оператора двойного дифференцирования интерпретировалось как некая фильтрация. В дальнейшем (см., например, [5]) было предложено иное обоснование применения оператора Вайнберга. Именно, этот оператор восстанавливает функцию $(-\Delta)^{1/2}f$ (Δ — оператор Лапласа). Поскольку $(-\Delta)^{1/2}$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор, функция $(-\Delta)^{1/2}f$ обладает теми же сингулярностями, что и f. Развитие этой идеи для обращения преобразования Радона $\mathbf{R}f$ негладкой функции f предложено в [5]. Прежде всего легко проверяется, что при преобразовании Радона оператор Лапласа Δ на функциях $f(x, y)$ переходит в оператор $\partial^2/\partial s^2$ на функциях $(\mathbf{R}f)(\alpha, s)$. Более подробно, если задана обобщенная функция $F(r^2)$ ($r^2 = x^2 + y^2$), то при преобразовании Радона $F(-\Delta)f$ (по определению есть $F(r^2)*f$) перейдет в свертку по s: $F(s^2)*(\mathbf{R}f)$. Пусть теперь задана обобщенная (возможно, негладкая) функция f, которая представима в виде $f = (1 - \Delta)^k p$, где p обладает необходимой степенью гладкости, k натуральное. Тогда можно определить преобразование Радона функции f как свертку $F((1+s^2)^k)*(\mathbf{R}p)$. Далее, вычисляя свертку $\mathbf{R}f$ с $(1+s^2)^{-k}$, получим достаточно гладкую функцию $\mathbf{R}p$. Используя формулу обращения для преобразования Радона, находим функцию p, а применяя к последней дифференциальный оператор $(1-\Delta)^k$, получаем искомую функцию f.

Дальнейшее развитие подходов и алгоритмических средств восстановления множества разрывов осуществляли, в рамках *локальной томографии*, такие исследователи как А. Фаридани с соавторами [6, 7], А. К. Луис и П. Маасс [8], и многие другие. В этих работах, наряду с оператором Вайнберга, использовался и оператор обращения $(-\Delta)^{1/2}$, в сочетании с регуляризацией либо той или иной фильтрацией. Основная цель таких исследований состояла в восстановлении множества разрывов, а также в возможности определения некоторых, в той или иной степени усредненных, характеристик гладкой составляющей объекта.

Некоторые подходы, позволяющие восстановить не только множество разрывов, но и соответствующие скачки функции по ее преобразованию Радона, предложены в работах [9–11]. В этих работах, наряду с уравнением Гамильтона-Якоби и методом стационарной фазы, используется и аппарат микролокального анализа; в частности, интегральный оператор Фурье. Как известно, преобразование Радона может быть представлено в форме такого оператора, что позволяет стандартными методами установить геометрическую связь между волновым фронтом исходной функции и волновым фронтом ее преобразования Радона. Таким образом, особенности функции f могут быть найдены непосредственно из особенностей ее преобразования Радона.

В конце 90-х годов Д. С. Аниконовым был предложен иной подход к решению задачи определения множества разрывов функции по лучевым преобразованиям, основанный на теории многомерных сингулярных интегралов [12]. Применяя к лучевому преобразованию оператор обратного проектирования, получаем сингулярный интеграл (с искомой разрывной функцией в подынтегральном выражении) со слабой особенностью. Дифференцирование по пространственным переменным приводит тогда к логарифмическому возрастанию при стремлении точки к линии разрыва. В частности, можно использовать оператор $|\nabla(\cdot)|$. Описанный подход теоретически обоснован [13, 14], реализован алгоритмически и программно, в том числе и с включением явление рассеяния в модель среды [13].

Следуя логике развития постановок и методов решения задачи восстановления разрывов, изложенной выше, мы предлагаем существенное обобщение задачи как в постановочной части, так и в части аппарата, привлекаемого для ее решения. Во-первых, ставится цель определения множества разрывов не только скалярных, но и векторных и симметричных тензорных полей. Во-вторых, хотелось бы определять не только разрывы самих геометрических объектов, но и их производных (в этом случае мы говорим о *сингулярностях* или о *сингулярном носителе*) [15, 16]. Наконец, представляется интересным и восстановление сингулярностей симметричных тензорных полей (в том числе скалярных и векторных), заданных в рефрагирующей среде, то есть в римановой области. Таким образом, сформулирована программа исследований, направленная на разработку и апробацию новых, прежде всего численных, методов восстановления сингулярностей скалярных, векторных и симметричных тензорных полей, заданных в том числе и в римановых областях. Прежде всего, такая общая задача восстановления сингулярного носителя ставится на плоскости.

Цель данной работы состоит в изложении некоторых подходов к восстановлению сингулярного носителя симметричного тензорного поля малого ранга по его заданным продольному или поперечному (для скалярного поля соответствует преобразованию Радона) лучевым преобразованиям. Метрика на плоскости предполагается евклидовой. В настоящей работе отражена та часть программы исследований, которые относятся к визуализации (пункт a) детальной постановки задачи) сингулярного носителя. Теоретические результаты, лежащие в основе алгоритмов визуализации, лишь формулируются, и внимание сосредоточено на технологических аспектах задачи. Наряду с модификациями известного оператора Вайнберга, для решения поставленной задачи мы предлагаем использовать классические операторы векторного анализа в различных комбинациях. Мы ограничиваемся задачей визуализацией разрывов функции и разрывов производных скалярного поля с носителями, лежащими в единичном круге. Приведены также результаты решения задачи визуализации разрывов производных векторного поля по его известному поперечному лучевому преобразованию. Схема проектирования во всех численных экспериментах выбирается параллельной.

2. Восстановление сингулярного носителя. Основные определения, формулировки и результаты

Хорошо известно, что преобразование Радона, действующее на функции, имеет тривиальное ядро. Следовательно, оператор Радона обратим для достаточно широкого класса функций. В то же время операторы продольного и поперечного лучевого преобразования, действующие на симметричные тензорные поля (в частности, на векторные), обладают ненулевыми ядрами. Ядро оператора продольного лучевого преобразования состоит из потенциальных полей с потенциалом, обращающимся в нуль на границе области. Ядром же поперечного лучевого преобразования является множество соленоидальных полей с нулевой нормальной, к границе области, составляющей. Таким образом, принимая во внимание разложение симметричного тензорного поля на потенциальную и соленоидальную части [17], приходим к выводу, что по известному продольному лучевому преобразованию симметричного тензорного поля можно однозначно восстановить лишь его соленоидальную часть. Если же известно поперечное лучевое преобразование симметричного тензорного поля, то однозначно восстановить можно лишь его потенциальную часть. По этой причине задача восстановления сингулярного носителя тензорного поля рассматривается в двух вариантах. Именно, требуется восстановить сингулярности либо соленоидальной части исходного поля по его известному продольному лучевому преобразованию, либо его потенциальной части — по известному поперечному преобразованию.

Пусть $B = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — круг единичного радиуса с центром в начале декартовой прямоугольной системы координат, $\partial B = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — единичная окружность. Область $D \subset R^2$ (возможно, многосвязная) такая, что $\overline{D} \subset B$, состоит из конечного числа непересекающихся подобластей

$\{D_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, таких что объединение $D_0 = \cup D_i$ этих подобластей плотно в $\overline{D}$, а их границы гладкие класса C^1. Нетрудно заметить, что $\partial D \subset \partial D_0$, а граница ∂D_0 совпадает с объединением границ $\cup D_i$ подобластей D_i, $i = 1, \ldots, N$. Важное требование к границам состоит в том, что *они не содержат прямолинейных участков*.

Пусть функция $\varphi(x)$ класса C^k определена в B, причем она обращается в 0 на множестве $B \setminus \overline{D}$, а ее носитель совпадет с замыканием D, $\mathrm{supp}\varphi = \overline{D}$. В точках $(x, y) \in D$ области D функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема. В точках $(x, y) \in \partial D_0$ она непрерывно дифференцируема до k-го порядка включительно и обращается в 0. В силу своей гладкости в области D функция φ обладает частными производными любого порядка. Что касается точек, принадлежащих ∂D_0, то в них все частные производные $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x^j \partial y^{l-j}}$, $l = 0, \ldots, k$, $j \le l$, до порядка k включительно непрерывны, а производные порядка $k+1$ терпят разрыв 1-го рода. Будем говорить, что функция φ является *потенциалом гладкости C^k*, или *C^k-потенциалом* в R^2.

Хорошо известно, что как потенциальные, так и соленоидальные векторные поля, заданные на плоскости, определяются своими потенциалами. Так, потенциальное поле u имеет вид $u = (u_1, u_2) = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y)$, а соленоидальное поле имеет вид $v = (v_1, v_2) = (-\partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial x)$. Напомним, что векторное поле u *потенциально*, если существует потенциал φ, такой что $u = \nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y)$. Векторное поле v *соленоидально*, если $\mathrm{div} v = 0$. Для построения разрывных векторных полей мы используем C-потенциалы, а для построения полей с разрывами производных используются C^1-потенциалы.

Понятия потенциального и соленоидального (векторного) поля естественным образом обобщаются на симметричные m-тензорные поля. При этом аналогом оператора ∇ выступает оператор внутреннего дифференцирования d, отображающий m-тензорное поле в симметричное $(m+1)$-тензорное поле. В качестве оператора div используется оператор δ, переводящий симметричное m-тензорное поле в $(m-1)$-тензорное поле. Подробнее об этом см. [17]. Как потенциальное, так и соленоидальное симметричное m-тензорное поле можно задать одним потенциалом. Именно, поле

$$u_{i_1 \ldots i_m} = u_{1\ldots12\ldots2} = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^l \partial y^{m-l}} \tag{1}$$

потенциально; поле

$$v_{i_1 \ldots i_m} = v_{1\ldots12\ldots2} = (-1)^l \frac{\partial^m \varphi}{\partial y^l \partial x^{m-l}} \tag{2}$$

соленоидально, что устанавливается непосредственной проверкой. В соответствующих формулах количество индексов, равных единице, равно l, а количество индексов, равных двум, равно $m-l$, m целое, $m > 0$.

Преобразование Радона потенциала φ определяется соотношением

$$\big(\mathbf{R}\varphi\big)(\xi, s) = \int\limits_{L(\xi,s)} \varphi(x, y)dL = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\eta)dt. \tag{3}$$

Здесь $\xi \in \partial B$, $\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ нормальный, а $\eta \in \partial B$, $\eta = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ — направляющий векторы пучка параллельных прямых, по которым производится интегрирование. Параметр s, $-1 < s < 1$ характеризует расстояние $|s|$ от прямой до начала координат. Прямая $L(\xi, s)$ задана своим нормальным уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - s = 0$. Оператор *обратного проецирования*, действующий на функции $g(\xi(\alpha), s)$ по правилу

$$\mu(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\bigl(\xi(\alpha), s(x,y,\alpha)\bigr)d\alpha \tag{4}$$

дает в результате функцию $\mu(x,y)$, определенную всюду в R^2. Содержательно формула (4) представляет собой усреднение преобразования Радона, вычисленного по всем прямым, проходящим через точку с координатами (x,y). Отметим, что если мы подействуем на $\mu(x,y)$ оператором $(-\Delta)^{1/2}$, то получим исходную функцию $\varphi(x,y)$. Последовательность действий, заключающихся в применении (к известному преобразованию Радона) оператора обратного проецирования, а затем оператора $(-\Delta)^{1/2}$, приводит к одному из вариантов *формул обращения*.

Пусть $v = (v_{i_1\dots i_m})$ — симметричное m-тензорное поле с носителем в B, а ζ — вектор единичной длины. Обозначим кратко $v_{i_1\dots i_m}\zeta^{i_1}\dots\zeta^{i_m}$ (по всем индексам подразумевается суммирование от 1 до 2) через $\langle v, \zeta\rangle$. Оператор *продольного лучевого преобразования*, действующий на заданное в единичном круге B симметричное m-тензорное поле $v(x,y) = (v_{i_1\dots i_m})$, определяется соотношением (напомним, что η — направляющий, а ξ — нормальный векторы)

$$\bigl(\mathbf{P}v\bigr)(\eta,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle v(s\xi+t\eta),\eta\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} v_{i_1\dots i_m}\eta^{i_1}\dots\eta^{i_m}\,dt. \tag{5}$$

Оператор *поперечного лучевого преобразования* определяется аналогично,

$$\bigl(\mathbf{P}^{\perp}v\bigr)(\xi,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle v(s\xi+t\eta),\xi\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} v_{i_1\dots i_m}\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m}\,dt. \tag{6}$$

В частности, оператор продольного лучевого преобразования, действующий на векторное поле $v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$, определяется соотношением

$$\bigl(\mathbf{P}v\bigr)(\eta,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle v(s\xi+t\eta),\eta\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty}\bigl(v_1\eta^1 + v_2\eta^2\bigr)\,dt. \tag{7}$$

Оператор поперечного лучевого преобразования по отношению к векторному полу задается формулой

$$\bigl(\mathbf{P}^{\perp}v\bigr)(\xi,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle v(s\xi+t\eta),\xi\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty}\bigl(v_1\xi^1 + v_2\xi^2\bigr)\,dt. \tag{8}$$

Имеется простая связь между преобразованием Радона C^{k+m}-потенциала, $m > 0$, $k \geq 0$ и лучевыми преобразованиями симметричных m-тензорных полей, порожденных этим потенциалом. Именно,

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}\bigl(\mathbf{R}\varphi\bigr)(\eta,s) = \bigl(\mathbf{P}v\bigr)(\xi,s) = \bigl(\mathbf{P}^{\perp}u\bigr)(\xi,s), \tag{9}$$

где v и u — определенные соотношениями (2) и (1) соленоидальное и потенциальное поля гладкости C^k, порожденные C^m-потенциалом φ. В частности, при $k = 0$ эти поля разрывны с конечной величиной разрыва. Соотношения (9) легко проверяются непосредственно.

Оператор *m-углового момента*, действующий на функции $g(\xi(\alpha), s)$ по правилу

$$\mu_{i_1,\dots,i_m}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m} g\bigl(\xi(\alpha), s(x,y,\alpha)\bigr)d\alpha \tag{10}$$

дает в результате симметричное m-тензорное поле $\mu(x,y)$, определенное всюду в R^2. Оператор обратного проецирования, являющийся частным случаем интегрального оператора (10), будучи примененным к лучевому преобразованию, например, векторного поля, в результате дает векторное поле с компонентами

$$\begin{aligned} \mu_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta^1(\mathbf{T}v)(s(x,y,\alpha),\zeta(\alpha))d\alpha\,, \\ \mu_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta^2(\mathbf{T}v)(s(x,y,\alpha),\zeta(\alpha))d\alpha\,, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\mathbf{T}$ есть либо оператор (7), и тогда $\zeta \equiv \eta$, либо (8), и в этом случае $\zeta \equiv \xi$. Применение оператора m-углового момента к лучевым преобразованиям симметричного m-тензорного поля приводит к многомерным сингулярным интегралам [12], теория которых послужила основой для результатов, полученных в [13, 14]. Утверждается, что если на лучевое преобразование (5) или (6) разрывного симметричного m-тензорного поля (т.е. образованного C^m-потенциалом φ по правилам (2) или (1)), подействовать оператором обратного проецирования (11), а затем на полученный результат операторами взятия частных производных $\partial/\partial x$ или $\partial/\partial y$, то при стремлении точки $P(x,y) \in D$ к граничной точке $P_0(x_0,y_0) \in \partial D_0$, частные производные ведут себя себя как $\ln|P-P_0|$, если они трансверсальны линии разрыва.

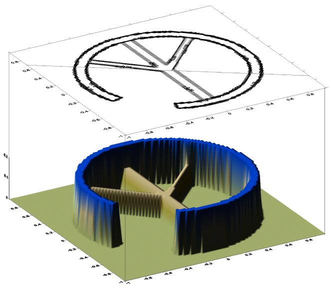
Сформулированный результат естественным образом обобщается на случай C^{m+k}-потенциалов. Тогда разрывы проявляются в производных лишь $(k+1)$-го порядка. Наряду с частными производными можно использовать и любые другие дифференциальные операторы и их различные комбинации.

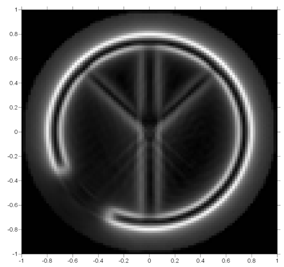
3. Визуализация сингулярного носителя. Численные эксперименты

Мы предлагаем набор инструментов для восстановления сингулярного носителя скалярных, векторных и симметричных тензорных полей, ранее, насколько известно авторам, в томографии не использовавшихся. Наряду с операторами дифференцирования по s (различных порядков) лучевых преобразований симметричных m-тензорных полей, могут быть использованы, после применения оператора обратного проецирования, и операторы ∇ и $|\nabla(\cdot)|$, производная по направлению $\langle\nabla(\cdot),\nu\rangle$, а также операторы div и rot. Перечисленные операторы применяются не только индивидуально, но и в различных сочетаниях и последовательностях, которые дают возможность несколькими путями восстановить разрывы m-тензорного поля или разрывы его производных.

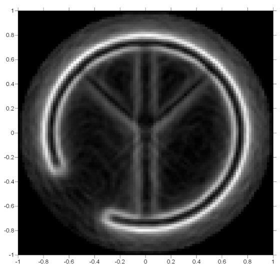
Примем следующее соглашение. Значения всех используемых ниже потенциалов и соответствующих им векторных полей обращаются в 0 вне области D, представляющей собой круг радиуса $R<1$, поэтому формулы приводятся только для значений переменных, лежащих внутри этого круга. Аналогично, для преобразований Радона и лучевых формулы приведены лишь для значений s, при которых $-R \le s \le R$. Для значений s вне этого интервала эти преобразования равны 0, и этот факт более отмечаться не будет. Ниже приводятся результаты численных экспериментов.

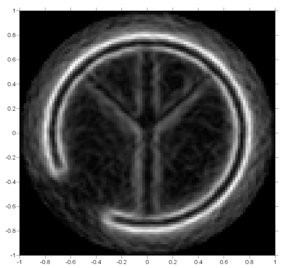
В первом тесте восстанавливается (визуально) множество точек разрыва кусочно-постоянной функции, изображенной на Рис. 1 (а) по ее известному преобразованию Радона. Используется оператор $|\nabla(\,\cdot\,)|$.

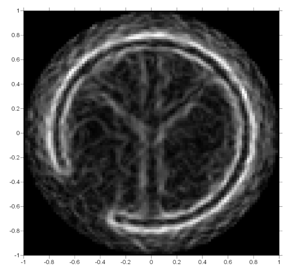




а б







в г д

Рис. 1. Кусочно-постоянная функция (а) и визуализация ее разрывов: точные данные (б); погрешность в 5% (в); 10% (г) и 20% (д).

В данные вносится равномерно распределенная погрешность различного уровня. Можно сделать вывод о том, что несмотря даже на весьма значительный уровень погрешности в 20%, контуры разрывов визуально прослеживаются.

Во втором тесте ставится цель визуализации сингулярного носителя скалярного поля

$$\varphi(x,y) = h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2<R^2, \tag{12}$$

($h>0,\ R>0$ — параметры) с разрывными 1-ми производными в начале координат и на границе. Иными словами, в этом тесте $\partial D_0 = \partial D \cup \{(0,0)\}$. В качестве исходных данных выступает преобразование Радона, которое легко вычисляется,

$$\big(\mathbf{R}\varphi\big)(\xi,s) = h\sqrt{R^2-s^2} - \frac{hs^2}{2R}\ln\frac{R+\sqrt{R^2-s^2}}{R-\sqrt{R^2-s^2}}. \tag{13}$$

Процедура визуализации сингулярного носителя осуществлялась тремя способами. Прежде всего это оператор Вайнберга (Рис. 2в), действие которого описано во вводной части. Далее операторы $|\nabla^2(\cdot)|$ (Рис. 2г) и $\operatorname{div}\nabla(\cdot)$ (Рис. 2д), примененные к обратной проекции, взятой от преобразования Радона потенциала (13). Отметим, что все тремя способами хорошо прослеживается разрыв производных на границе ∂D, в то время как сингулярность в начале координат оператор Вайнберга "не замечает".

Восстановление множества точек разрывов векторного поля (результаты численных результатов не приводятся из экономии; они вполне удовлетворительны) можно осуществлять, в частности, следующими четырьмя способами. В первых двух на первом этапе вычисляются компоненты μ_1, μ_2 по формулам

(11). Далее (вариант 1) находятся $Q_1(x,y) = \nabla\mu_1(x,y)$, $Q_2(x,y) = \nabla\mu_2(x,y)$ и функция $Q(x,y) = \sqrt{|Q_1|^2 + |Q_2|^2}$. Во втором варианте вычисляется $|\mathrm{div}\mu|$.

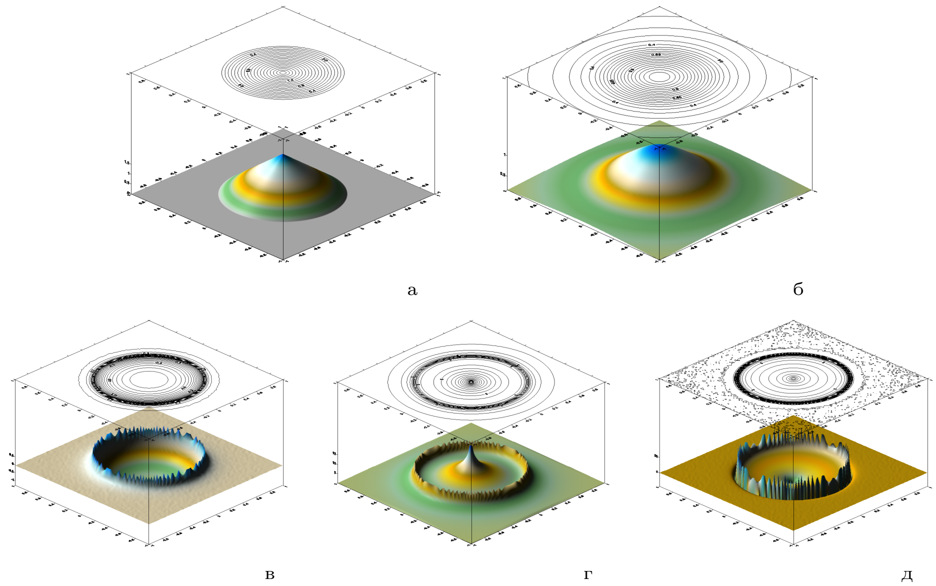


Рис. 2. Потенциал (12) (а) и обратная проекция его преобразования Радона (13) (б). Визуализация разрывов 1-й производной путем применения: оператора Вайнберга (в); оператора $|\nabla^2(\cdot)|$ (г); оператора $\mathrm{div}\,\nabla(\cdot)$ (д).

В 3-м и 4-м вариантах на первом этапе находится первая производная $\partial/\partial s$ от лучевого преобразования (продольного или поперечного) исследуемого векторного поля. Далее используется оператор обратного проектирования по отношению к преобразованию Радона по отношению к функции (4). В последнем варианте применяется оператор 2-углового момента (формула (10) при $m = 2$). Полученное в результате симметричное 2-тензорное поле с компонентами μ_{11}, $\mu_{12} = \mu_{21}$, μ_{22} “усредняется” по формуле $\left(\mu_{11}^2 + 2\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2\right)^{1/2}$.

В третьем численном эксперименте целью является визуализация множества точек разрыва первой производной векторного поля. Для этого выбирался C^1-потенциал с разрывными 2-ми производными на границе, Рис. 3а,

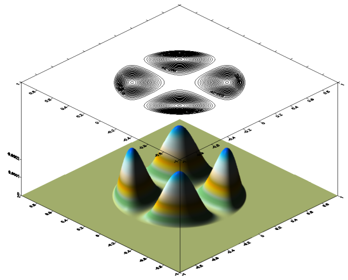
$$\varphi(x,y) = x^2y^2\left(R^2 - x^2 - y^2\right)^2, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad R < 1, \tag{14}$$

который порождает потенциальное векторное поле (Рис. 3б)

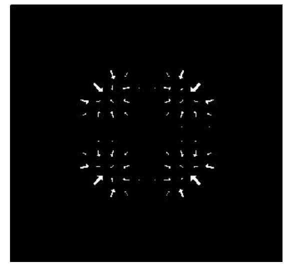
$$u = (u_1, u_2) = 2xy(R^2 - x^2 - y^2)\big(y(R^2 - 3x^2 - y^2)\,, x(R^2 - x^2 - 3y^2)\big), \tag{15}$$

первая и вторая компоненты которого изображены на Рис. 3в и Рис. 3г, соответственно. Поперечное лучевое преобразование потенциального поля (15) есть

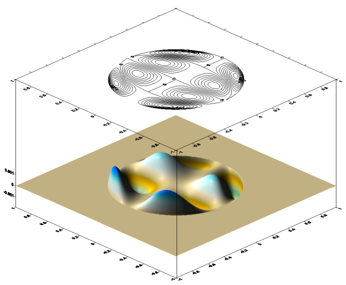
$$\begin{aligned}(\mathbf{P}^{\perp}u)(\xi,s) &= \frac{16}{15}(R^2 - s^2)^{3/2}\,s\Big(\frac{1}{7}(R^2 - s^2)^2(2 - 15(\xi^1)^2(\xi^2)^2) \\ &\quad + s^2(R^2 - s^2)(10(\xi^1)^2(\xi^2)^2 - 1) - 5s^4(\xi^1)^2(\xi^2)^2\Big).\end{aligned} \tag{16}$$



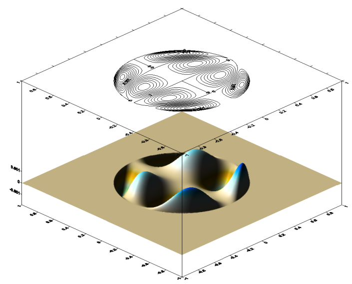
а



б



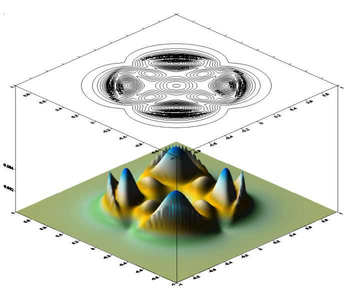
в



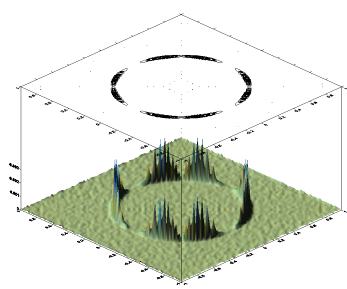
г

Рис. 3. Потенциальное векторное поле (б), образованное посредством потенциала (14) (а); 1-я компонента $\partial\varphi/\partial x$ поля (в); 2-я компонента $\partial\varphi/\partial y$ поля (г).

На Рис. 4 помещены изображения, демонстрирующие визуализацию (шестью различными способами) множества разрывов 1-х производных потенциального векторного поля (15). На Рис. 4(а,б) к известному продольному лучевому преобразованию применяется оператор обратного проецирования (углового момента 1-го порядка). В результате получаем векторное поле (μ_1, μ_2). Далее на последнее дважды действуем оператором градиента и вычисляем модуль полученного 3-тензорного поля (Рис. 4а); действуем оператором градиента, затем дивергенции и вычисляем модуль полученного векторного поля (Рис. 4б). На Рис. 4(в,г) помещены результаты, полученные с помощью другого порядка действий. Именно, прежде всего к лучевому преобразованию применяется оператор дифференцирования по s. В результате получаем поперечное лучевое преобразование от потенциального симметричного 2-тензорного поля, полученного посредством потенциала (14).



а



б

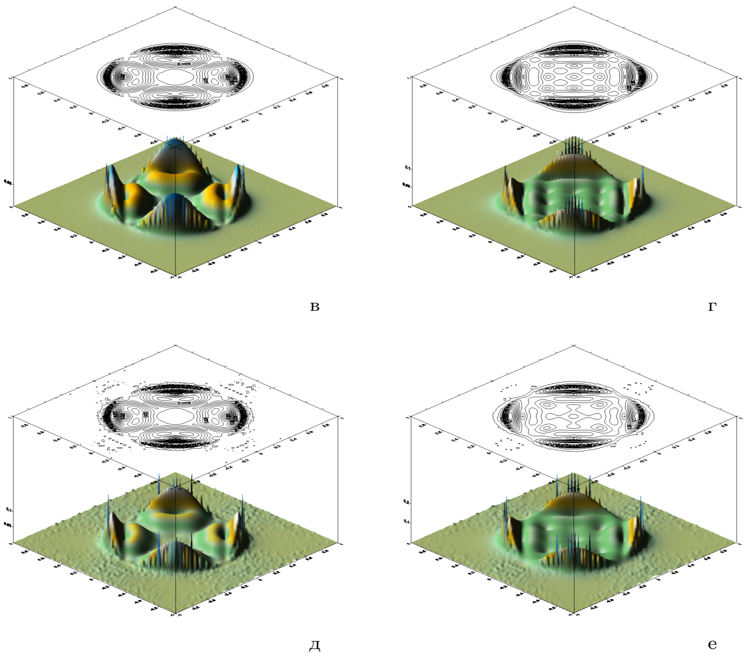


Рис. 4. Визуализация разрывов первых производных потенциального векторного поля (15) по его поперечному лучевому преобразованию.

Полученная функция $g(\xi(\alpha), s)$, как и преобразование Радона от самого потенциала, четна. Поэтому к ней можно применить операторы угловых моментов четных порядков (операторы угловых моментов нечетных порядков дадут тождественный 0). На Рис. 4в к результату дифференцирования по s применяется оператор углового момента 0-го порядка (как к преобразованию Радона скалярного поля), затем берется градиент и вычисляется его модуль. Рис. 4(г) соответствуют применению оператора углового момента 2-го порядка, который совпадает с оператором обратного проецирования, примененному к лучевому преобразованию 2-тензорного поля. Далее к результату применяем оператор дивергенции и затем вычисляем модуль полученного векторного поля. На Рис. 4(д,е) изображены результаты, полученные применением к поперечному лучевому преобразованию (16) оператора двойного дифференцирования по s, на первом этапе. В результате получаем поперечное лучевое преобразование от потенциального симметричного 3-тензорного поля, полученного посредством потенциала (14). Полученная функция, как и поперечное лучевое преобразование от векторного поля (15), нечетна. Поэтому к ней можно применить операторы угловых моментов нечетных порядков (в этом случае операторы угловых моментов четных порядков дадут тождественный 0). После двойного дифференцирования по s применяется оператор углового момента 1-го порядка (как к лучевому преобразованию векторного поля), затем вычисляется модуль полученного векторного поля, Рис. 4д. Рис. 4е соответствует применению оператора углового момента 3-го порядка, который совпадает с оператором обратного проецирования, примененному к лучевому преобразованию потенциального симметричного 3-тензорного поля. Далее вычисляется модуль полученного 3-тензорного поля.

Из Рис. 4 видно, что наиболее отчетливое разрешение разрывов получается применением (к обратной проекции — векторному полю) операторов градиента, затем дивергенции с последующим применением к нему действия взятия абсолютной величины. Этот вывод может быть сделан на основе проведенных численных экспериментов, и касается он как задачи восстановления разрывов векторного поля (в этом случае речь идет о применении лишь оператора $|\mathrm{div}(\cdot)|$) , так и задачи восстановления разрывов первых его производных. Вообще говоря, этому может быть определенное объяснение, и аналогичный образ действий будет приводить к хорошим результатам и при восстановлении разрывов производных векторного поля и более высоких порядков.

Последний численный эксперимент посвящен задаче визуализации разрывов соленоидального симметричного 2-тензорного поля, полученного посредством потенциала

$$\varphi(x,y) = xy\left(R^2 - x^2 - y^2\right)^2, \quad x^2+y^2<R^2, \quad R<1, \tag{17}$$

с разрывными производными второго порядка. Соленоидальное 2-тензорное поля образуется по формулам $v_{11} = \partial^2\varphi/\partial y^2$, $v_{12} = -\partial^2\varphi/\partial x\partial y$, $v_{22} = \partial^2\varphi/\partial x^2$.

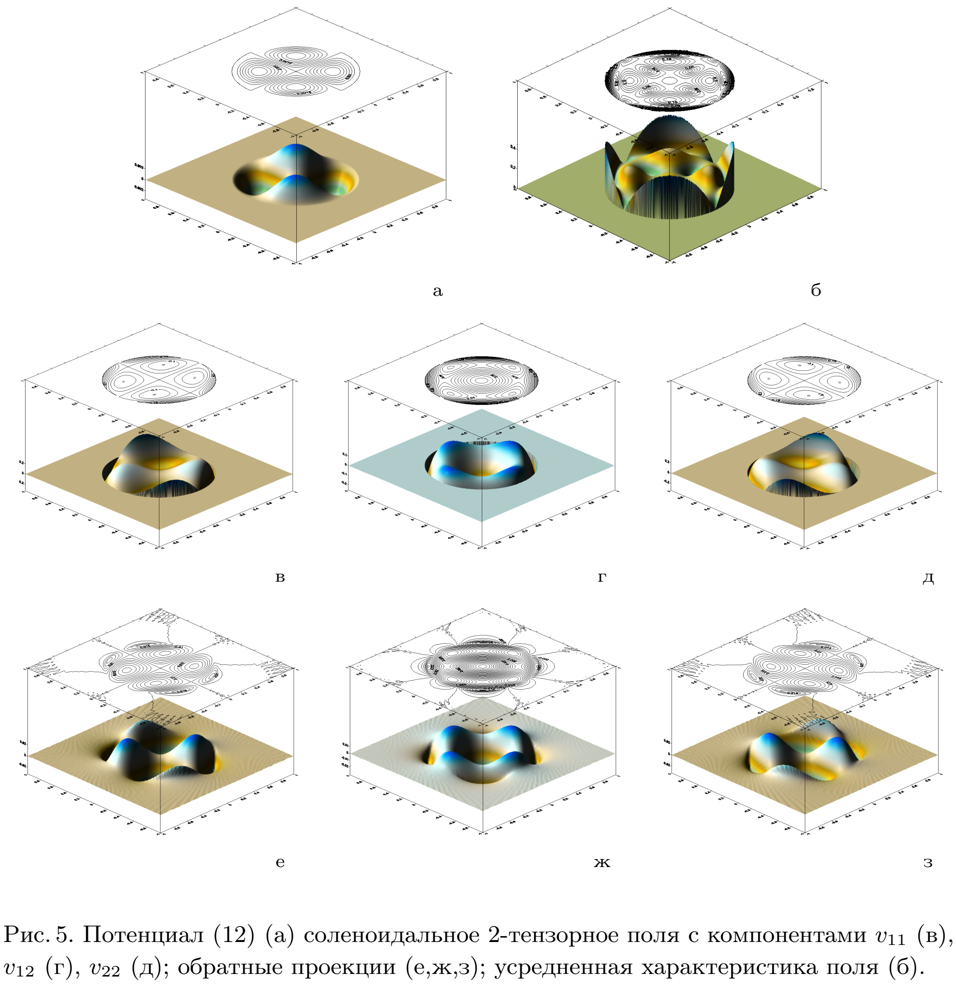
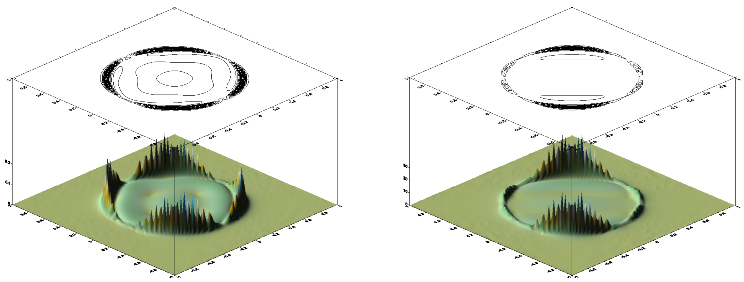


Рис. 5. Потенциал (12) (а) соленоидальное 2-тензорное поля с компонентами v_{11} (в), v_{12} (г), v_{22} (д); обратные проекции (е,ж,з); усредненная характеристика поля (б).

На Рис. 5 помещены изображения потенциала (17) (а), компоненты соответствующего 2-тензорного поля (в,г,д) и компоненты обратных проекций, полученных с помощью оператора (10) при $m = 2$, (е,ж,з). Рис. 5б содержит изображение некоторой "усредненной" характеристики поля, вычисленное по формуле $(v_{11}^2 + 2v_{12}^2 + v_{22}^2)^{1/2}$.



а б

Рис. 6. Визуализация разрывов соленоидального 2-тензорного поля, образованного посредством потенциала (17). Применение оператора $|\nabla(\cdot)|$ (а), оператора $|\mathrm{div}\,(\cdot)|$ (б) к обратной проекции μ_{ij}.

Визуализация множества разрывов данного симметричного соленоидального 2-тензорного поля производилась двумя путями. Прежде всего вычислялась обратная проекция μ_{ij}, которая представляет собой симметричное 2-тензорное поле. Далее вычисляется симметричное 3-тензорное поле $\lambda_{ijk} = \nabla\mu$. В первом способе далее вычисляется $|\lambda|$ (Рис. 6а), а во втором поле λ используется для вычисления $\mathrm{div}\,\lambda$, что дает векторное поле ν_i, и, далее, $|\nu|$, Рис. 6б. Оба варианта дают приемлемые результаты.

4. Заключение

В работе предложен набор инструментов для визуализации сингулярного носителя симметричных тензорных полей по данным томографического типа (заданным преобразованию Радона, продольным или (и) поперечным лучевым преобразованиям). Продемонстрированные результаты численных экспериментов полностью подтвердили теоретические выводы, которые были кратко сформулированы в конце 2-го параграфа. Разработанный аппарат допускает обобщение с целью применения к задаче визуализации сингулярного носителя тензорных полей, определенных в ограниченной области с заданной римановой метрикой. Этот аппарат также позволяет приступить к созданию алгоритмических средств для локализации сингулярного носителя и его приближенного описания в рамках дискретной модели (см. пункт б) Вводной части).

Список литературы

[1] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, выпуск 5.* М.: ГИФМЛ, 1962, 656 с.

[2] И. М. Гельфанд, А. Б. Гончаров, *Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве*, ДАН СССР, **290**: 5 (1986), 1037–1040.

[3] В. П. Паламодов, *Некоторые сингулярные задачи томографии*, Математические проблемы томографии / Под ред. И. М. Гельфанда и С. Г. Гиндикина. Вопросы кибернетики. М., 1990, 132–140.
[4] E. I. Vainberg, I. A. Kazak, M. L. Faingoiz, *X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features*, Soviet J. Nondest. Test., 21 (1985), 106–113.
[5] И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев, *Избранные задачи интегральной геометрии*, М.: Добросвет, 2000, 208 с.
[6] A. Faridani, E. L. Ritman, and K. T. Smith, *Local tomography*, SIAM J. Appl. Math., **52**: 2 (1992), 459–484.
[7] A. Faridani, D. V. Finch, E. L. Ritman, and K. T. Smith, *Local tomography II*, SIAM J. Appl. Math., **57**: 4 (1997), 1095–1127.
[8] A. K. Louis, P. Maass, *Contour Reconstruction in 3-D X-Ray CT*, IEEE Trans. Med. Imag., **12**: 4 (1993), 764–769.
[9] E. T. Quinto, *Singularities of the X-ray transform and limited data tomography in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1215–1225.
[10] A. G. Ramm, *New methods for finding discontinuities of functions from local tomographic data*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **5**: 2 (1997), 165–175.
[11] A. G. Ramm and A. I. Katsevich, *The Radon transform and local tomography*, CRC Press, Boca Raton, 1996.
[12] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, М.: ГИФМЛ, 1962, 256 с.
[13] Д. С. Аниконов, А. Е. Ковтанюк, И. В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, М.: Логос, 2000, 224 с.
[14] Д. С. Аниконов, *Специальная задача интегральной геометрии*, Доклады РАН, **415**: 1 (2007), 7–9.
[15] E. Yu. Derevtsov, V. V. Pickalov., T. Schuster, A. K. Louis *Reconstruction of singularities in local vector and tensor tomography*, International Conference “Inverse Problems: Modelling and Simulation“, May 29–June 02, 2006. Abstracts, Fethiye, Turkey, 2006, 38–40.
[16] Derevtsov E. Yu., Pickalov V. V., Schuster T. *Application of local operators for numerical reconstruction of a singular support of a vector field by its known ray transforms*, Journal of Physics: Conference Series. VI International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, June 15–19, 2008, Dourdan (Paris), France. 8 p., to appear.
[17] В. А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Новосибирск, Наука, 1993, 233 с.

Евгений Юрьевич Деревцов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dert@math.nsc.ru