S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 120–165 (2009) УДК 517.95, 517.51
MSC 76N10, 35F10, 44A35, 46E30

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ТРАНСПОРТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

А. Е. МАМОНТОВ

Abstract. The article illustrates the application of the theory of the Orlicz spaces in global solvability of boundary value problems for the equations of multidimensional flows of viscous compressible fluids and for the transport equation. While solving the main problem, a new method of extrapolation from the scale of the Lebesgue spaces into the Orlicz spaces is developed basing on integral representations and transforms of N-functions. The efficiency of the extrapolation method developed here is illustrated by the uniqueness problem for the Euler equations. A wide review of known results is given wherever necessary.

Keywords: viscous compressible non-Newtonian fluid, Bingham fluid, transport equation, Orlicz spaces, extrapolation, Euler equations.

1. Введение

Основным объектом изучения в данной статье будет система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \mathrm{div}\mathbb{P} + \rho\mathbf{f} \tag{1.2}$$

Mamontov, A.E., Global solvability of the multidimensional equations of compressible non-Newtonian fluids, transport equation and the Orlicz spaces.

Работа поддержана РФФИ (грант 07-01-00550) и грантом Президента РФ (проект МК–213.2008.1).

Поступила 19 мая 2009 г., опубликована 4 июня 2009 г.

— так наз. «сокращенная система уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости (ВСЖ)». «Сокращенная» потому, что в этой системе отброшено уравнение энергии; это допустимо, как известно в механике, при описании некоторых классов течений и сред. Мы будем рассматривать систему (1.1), (1.2) с позиций математики, хотя и привлекать изредка термины и понятия механики с целью обоснования физической осмысленности тех или иных допущений. В данном случае отметим, что проблема глобальной разрешимости полной системы (вместе с уравнением энергии) в многомерном случае не решена до сих пор, и мы также не будем этот случай затрагивать.

В системе (1.1), (1.2) ρ имеет смысл плотности жидкости, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, $\mathbb{P}$ — тензор напряжений; это неизвестные функции пространственных переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и времени t; вектор внешних массовых сил $\mathbf{f}$ считается заданной функцией от t, $\mathbf{x}$. Операторы ∇ и div действуют по $\mathbf{x}$. Система (1.1), (1.2) незамкнута (число неизвестных в ней превышает число уравнений), не хватает так наз. определяющего уравнения (ОУ) для напряжений: $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\rho, \mathbf{u})$. Его выбор означает выбор определенной среды или, точнее, среды с классом течений [50]. Физический смысл понятия «жидкость», как правило, отождествляемого с постулатами Стокса [54], [156], приводит к тому, что ОУ обязано иметь вид

$$\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\rho, \{J_s(\mathbb{D})\}_{s=1}^{n})\mathbb{D}^k, \tag{1.3}$$

где $\mathbb{D} = \mathrm{Sym}(\nabla \otimes \mathbf{u}) = ((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^*)/2$ — тензор скоростей деформаций, а $\{J_s(\mathbb{D})\}$ — его основные инварианты. Ввиду теоремы Гамильтона—Кэли сумму в (1.3) можно писать и до более высоких степеней $\mathbb{D}$, что не меняет класса. ОУ реальных сред достаточно сложны, и даже их описание (не говоря уже́ о решении соответствующей системы (1.1)–(1.3)) представляет значительную трудность — см. например [156], [2]. Как правило, при исследовании системы (1.1), (1.2) выбирают ОУ (1.3) с линейной зависимостью $\mathbb{P}$ от $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{P} = (-p + \lambda \mathrm{div}\mathbf{u})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} \tag{1.4}$$

(так наз. «закон Стокса»), в котором так наз. давление p и коэффициенты вязкости λ и μ являются, вообще говоря, функциями от ρ [50] (но обычно λ и особенно μ считаются постоянными). В случае (1.4) говорят, что уравнения (1.1), (1.2) описывают ньютоновскую жидкость; тогда $\mathrm{div}\mathbb{P} = -\nabla p(\rho) + \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}$, и (1.1), (1.2) превращаются в уравнения Навье—Стокса ВСЖ. Все прочие модели называются неньютоновскими, в их число входят и более общие ситуации, чем (1.3) (см., например, [50], [142], [156]). Мы ограничимся лишь (1.3), что в принятой терминологии означает рассмотрение неньютоновских жидкостей дифференциального типа первого порядка. Даже для таких сред и даже в несжимаемом случае теория разрешимости развита недостаточно полно [50].

Нас будет интересовать проблема разрешимости «в целом» начально-краевых задач для (1.1), (1.2). История этого вопроса показывает условность разделения на ньютоновский и неньютоновский случаи, и нам следует уделить в обзоре внимание обоим. Впрочем, по второму случаю результатов значительно меньше, и особенно в сжимаемом случае подавляющее большинство работ посвящено ньютоновскому ОУ (1.4). История этой проблемы весьма богата, и в статье нет места для сколь-нибудь полного ее изложения. Мы упомянем лишь те результаты, которые были получены достаточно недавно и/или имеют непосредственное отношение к теме статьи. За полным историческим обзором мы отсылаем читателя к монографиям [113], [90], [134] и статье [57], из которых, впрочем, явствует, что теория разрешимости уравнений ВСЖ далека от своего завершения. Дальнейшие пути ее развития намечены, например, в [116], [90].

В развитии теории разрешимости уравнений (1.1), (1.2), (1.4) можно условно выделить несколько этапов.

Первый этап — локальная теория — был начат в 1959 г. работой [146] и пережил свой расцвет в 1960–70-е гг.; условно его завершением можно считать 1980 г., когда вышла первая работа [122] по глобальной во времени (хотя пока локальной по начальным данным) разрешимости в многомерном случае.

Начало второго этапа — глобальной одномерной теории — можно связать с работой [18] 1968 г.; свой расцвет он пережил в 1970-е гг.; определенные итоги были подведены в [1]. Впрочем, интересные исследования по одномерным уравнениям не прекращаются до сих пор, т. к. рассмотрение одномерных движений — естественный шаг при исследовании всякого нового явления или метода в механике сплошных сред и математической физике.

Мы пропускаем упоминание массы интересных работ по «полумногомерным» движениям, приближенным моделям, а также по неоднородным несжимаемым жидкостям, и сразу переходим к третьему этапу — глобальной многомерной теории для полной системы (1.1), (1.2) без каких-либо упрощений. Прорыв в этой области, состоявшийся на рубеже 1980–90-х гг., был подготовлен многими работами, содержавшими ряд плодотворных идей. Так, была обнаружена ключевая роль так наз. эффективного вязкого потока (эффективного вязкого давления) $S = (\lambda + 2\mu)\mathrm{div}\mathbf{u} - p(\rho)$ (см. об этом, например, [97] и [131]). В [87] и [145] было (в одномерном случае) открыто ключевое коммуникативное соотношение для слабых пределов $\overline{S\rho^\alpha} = \overline{S} \cdot \overline{\rho^\alpha}$ (для достаточно малых $\alpha > 0$, черта означает слабый предел), доказанное и использованное затем в многомерном случае в [113]. Для транспортного уравнения (включая (1.1)) в [83] был развит аппарат ренормализации, играющий ныне ключевую роль в математической теории ВСЖ.

Первая попытка решения двумерной задачи (в ограниченной области при $p = \rho$) была предпринята в [137]. Несмотря на то, что эта работа оказалась ошибочной (см. [138], [139]), в ней содержатся некоторые плодотворные идеи, в частности, об эффективности оценок решений в пространствах Орлича.

Следующей вехой стали работы [112], [111] о глобальной разрешимости уравнений (1.1), (1.2), (1.4) при $p = \rho^\gamma$ с достаточно большими γ и произвольным n (для начально-краевой задачи). Развернутое доказательство этого результата изложено в [113]. Данный результат (см. также [115]) обобщил вышеупомянутые идеи и показал, как слабая регулярность эффективного вязкого потока влечет сильную сходимость плотности и глобальную разрешимость для (1.1), (1.2), (1.4) при достаточно больших γ. Дальнейшее развитие этого результата, включая снижение γ, предпринято в [91], [89], [92], [90].

Следует также упомянуть работы [45], [133], [132], идеи которых также способствовали описываемому прорыву в глобальной многомерной теории.

Теория стационарных задач в настоящее время также активно развивается; обзор современного состояния этой теории можно найти в [140], [47].

Все упомянутые результаты касаются слабых обобщенных решений; в связи с этим особую роль играют работы [9], [158], в которых построены более гладкие (в том числе классические) решения ньютоновской системы (1.1), (1.2), (1.4), но при $n = 2$, $\lambda = \lambda(\rho)$. Для классических уравнений Навье—Стокса ВСЖ, даже при $n = 2$, проблема глобального существования гладких решений, и вообще, проблема единственности глобальных решений, остаются открытыми. Более подробный обзор нерешенных проблем, связанных с уравнениями ВСЖ, можно найти в [116], [57], [90].

Среди работ, упомянутых в сделанном нами кратком обзоре, не уделено внимания неньютоновскому случаю, если не считать нескольких работ по одномерным движениям. Нужно подчеркнуть, что неньютоновские ОУ лучше описывают поведение реальных сред; к тому же недавно была обнаружена их роль в проблеме турбулентности [50]. С математической точки зрения теория разрешимости (особенно в классах достаточно регулярных решений) для неньютоновских уравнений сложнее, т. к. тогда в правой части (1.2) вместо линейного оператора Ламе возникает квазилинейный эллиптический оператор от $\mathbf{u}$. Для многомерных уравнений сжимаемой неньютоновской жидкости результаты весьма немногочисленны. В [123] на основе [126], [127] и [130] были построены мерозначные решения, т. е. такие, которые получаются после слабого предела без обоснования предельного перехода в нелинейных вязких членах (см. также [128]). Эта деятельность резюмирована в монографии [118], которая достаточно полно отражает состояние на 1996 г. всей теории неньютоновских жидкостей. Бóльшая часть этой монографии посвящена несжимаемым жидкостям, а сжимаемый случай затронут лишь в небольшом разделе, содержащем указанный результат. Проблема существования «полноценных» решений для случая сжимаемых неньютоновских жидкостей обозначена в [118] как нерешенная. Для степенных жидкостей (т. е. в случае, когда α_k в (1.3) зависят от $J_s(\mathbb{D})$ степенным образом) она остается таковой и до сих пор, и в настоящей статье мы предпримем первый шаг на пути ее решения, показав, как нужные теоремы существования могут быть получены в случае быстрого роста «коэффициентов вязкости» как функций от инвариантов тензора $\mathbb{D}$. Также мы наметим основные вехи, которые, на наш взгляд, нужно преодолеть на пути полного решения проблемы сжимаемых степенных жидкостей.

Следует отметить, что теория разрешимости уравнений неньютоновской жидкости развита несравненно лучше в несжимаемом случае, т. е. когда в (1.1), (1.2), (1.3) полагают $\rho \equiv \text{const}$, и развитые здесь методы накладывают существенный отпечаток на нашу работу. Начало этой деятельности положено в работах [23], [24], где были показаны существование и единственность решений для достаточно широкого класса неньютоновских несжимаемых жидкостей, по существу степенных — с достаточно большим показателем роста. Что характерно, эти работы были своего рода попыткой решения проблемы единственности для классических трехмерных уравнений Навье—Стокса несжимаемой жидкости, нерешенной до сих пор и попавшей теперь в число «проблем тысячелетия» (см. [88], [151], [25]). Это еще раз показывает тесную связь между ньютоновской и неньютоновской моделями.

Отметим также работу [101], где аналогичные результаты были получены для более общих диссипативных потенциалов V, т. е. потенциалов в представлении

$$\mathbb{P} = -p\,\mathbb{I} + \frac{\partial V(\mathbb{D})}{\partial \mathbb{D}}. \tag{1.5}$$

В настоящее время представление (1.5) тензора $\mathbb{P}$ через потенциал (имеющее физические основания) — стандартная техника в теории неньютоновских жидкостей; впрочем, в подавляющем большинстве работ ограничиваются частным случаем $V(\mathbb{D}) = \Gamma(|\mathbb{D}|)$ (здесь и далее для тензоров $|\mathbb{A}|^2 = \mathbb{A} : \mathbb{A}$, $\mathbb{A} : \mathbb{B} = \sum A_{ij}B_{ij}$) — это так наз. обобщенные ньютоновские жидкости.

В последнее время в развитии теории несжимаемых неньютоновских жидкостей можно наблюдать 2 направления. Первое состоит, грубо говоря, в снижении скорости роста потенциала (что важно для приложений, т. к. описывает и случай убывающих вязкостей) и обобщении вида V, а второе — в повышении гладкости решений (этот вопрос тесно связан с теорией регулярности для ньютоновских уравнений). Здесь можно назвать работы [109], [26], [52], [53], [95], [70], [119], [118]. Особое положение в этой теории занимают вязкопластические жидкости Шведова—Бингама, которые мы обсудим в разделе 5.

Из сделанного обзора ясно, что для многомерных движений неньютоновской сжимаемой жидкости, описываемых системой (1.1), (1.2), (1.3), не было известно глобальных теорем существования каких-либо (кроме мерозначных) решений, в то время как учет сжимаемости особенно важен при рассмотрении нерегулярных решений. В настоящей работе мы попытаемся показать, как этот пробел может быть в определенной степени заполнен с помощью техники пространств Орлича. Изложение будет нередко носить конспективный характер, в этом случае мы будем ссылаться на работы автора, содержащие полные доказательства.

Охарактеризуем кратко оставшуюся часть статьи.

В разделе 2 показана роль транспортного уравнения (1.1) в теории разрешимости уравнений ВСЖ, приведен обзор исследований транспортного уравнения и необходимый минимум сведений из теории пространств Орлича, демонстрируется техника оценки плотности в пространствах Орлича, позволяющая далее получать теоремы существования для системы (1.1), (1.2), (1.3). Показано, что исследование (1.1) в пространствах Орлича представляет собой отдельную проблему, имеющую собственный интерес, которая в определенной степени доведена в разделе 2 до «неулучшаемых» формулировок.

В разделе 3 приведены необходимые сведения из представлений пространств Орлича как экстраполяционных пространств по отношению к шкале L_p и получены оценки дифференциальных операторов в этих пространствах, позволяющие оценивать градиент скорости через тензор скоростей деформаций (обобщение неравенства Корна), что необходимо для применения в разделах 4,5.

В разделе 4 приводятся теоремы существования для систем вида (1.1), (1.2), (1.3) в случае «стоксовых» ОУ, т. е. для сред, являющихся жидкостями в смысле постулатов Стокса (в отличие, например, от вязкопластических сред).

В разделе 5 приведен обзор теории разрешимости системы (1.1), (1.2), (1.3) для вязкопластических сред типа Шведова—Бингама и получен первый результат о глобальном существовании решений этой модели в сжимаемом многомерном случае.

Наконец, раздел 6 посвящен нескольким дополнительным вопросам: приводятся соображения о дальнейшем повышении гладкости слабых решений, построенных в разделе 4, предлагаются важные, на наш взгляд, открытые проблемы и перспективы, а также демонстрируется, как экстраполяционная техника, предложенная в разделе 3, может работать в других областях, на примере классов единственности для уравнений Эйлера.

2. Транспортное уравнение и пространства Орлича

Оценка плотности — один из ключевых моментов при построении решений уравнений (1.1), (1.2) и та принципиальная черта, которая отличает исследование этих уравнений от уравнений несжимаемой жидкости. Проиллюстрируем эту мысль на примере задачи о течениях в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей, т. е. начально-краевой задачи в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ с условием прилипания на боковой поверхности:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \tag{2.1}$$

и начальными данными при $t = 0$:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \qquad \rho\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{w}_0. \tag{2.2}$$

Законы сохранения массы и энергии в задаче (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) примут вид:

$$\int\limits_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + s(\rho) \right) d\mathbf{x} \Bigg|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathbb{P}' : \mathbb{D} d\mathbf{x} ds = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} ds. \tag{2.4}$$

Для достаточно гладких решений задачи эти соотношения суть тривиальные следствия условий задачи, а для обобщенных слабых решений их следует, конечно, отдельно доказывать. Однако нас сейчас (2.3), (2.4) интересуют как источники оценок решений, а значит, речь идет о тождествах для приближенных решений, которые, естественно, выполнены при любом разумном их построении. Нужно пояснить некоторые обозначения. В (2.4) мы предполагаем, что (1.3) принимает частный вид

$$\mathbb{P} = -p(\rho)\mathbb{I} + \mathbb{P}'(\mathbf{u}), \tag{2.5}$$

где $\mathbb{P}'$ — пока произвольный член; это естественное обобщение закона Стокса (1.4). В этом случае в (2.4) возникает «энтропия»

$$s(\rho) = \rho \int\limits_1^{\rho} \frac{p(\xi)}{\xi^2} d\xi. \tag{2.6}$$

Естественно, мы ищем только такие решения задачи, у которых $\rho \geqslant 0$ (поэтому предполагается и $\rho_0 \geqslant 0$), в этом случае (2.3) дает оценку $\rho \in L_\infty(0, T, L_1(\Omega))$, которая, однако, слишком слаба. В перечисленных в разделе 1 работах по слабым решениям системы (1.1), (1.2) источником дополнительных оценок для ρ служило (2.4). Если $p = \rho$, как в [137], то (2.6) дает $s(\rho) = \rho \ln \rho$, т. е. (2.4) приводит к оценке $\rho \in L_\infty(0, T, L_\Phi(\Omega))$, где $\Phi(s) = s \ln s$, а L_Φ — соответствующее пространство Орлича (подробнее ниже). В ньютоновском случае из (2.4) следует оценка $\mathbf{u} \in L_2(0, T, W_2^1(\Omega))$, что ввиду теорем вложения означает (при $n = 2$, иначе ситуация еще хуже) $\mathbf{u} \in L_2(0, T, L_\Psi(\Omega))$, где $\Psi(s) = e^{s^2}$, и, таким образом, конвективный член $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ в (1.2) «попадает» точно в L_1 без всякого запаса, что и служит препятствием в этой «задаче о совершенном газе» ($n = 2$, $p = \rho$, ОУ (1.4)), до сих пор нерешенной — в члене $\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k$ не удается обосновать предельный переход. С другой стороны, $p = \rho$ удобно тем, что в этом случае давление есть линейная функция плотности, и слабый предел в нем не представляет сложностей. В «задаче о политропном газе» [113], [90], напротив, $p = \rho^\gamma$, где γ достаточно велико, чтобы оценка $\rho \in L_\infty(0, T, L_\gamma(\Omega))$, получающаяся теперь из (2.4) (ввиду $s(\rho) = C\rho^\gamma$), обеспечивала нужную компактность в члене $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ (например, при $n = 3$ это значит $\gamma > 3/2$), после чего предельный переход в нем не представляет труда, но трудность перемещается в обоснование предела в давлении, которое на этот раз нелинейно. Эта проблема была успешно решена в [113], [90] на основе идей, упомянутых в разделе 1. Однако, эти идеи существенно используют ньютоновский характер ОУ (1.4), и в неньютоновском случае теряют силу. Стоящая особняком работа [9] в двумерном случае содержит более продвинутую систему оценок, позволяющую сразу получать сильную сходимость всех величин, однако там также существенно используется ньютоновский характер ОУ (и к тому же двумерность), и первый этап оценки плотности — тот же. Таким образом, для общих ОУ (1.3) остается неясным, как иметь дело с $p = \rho^\gamma$, и мы ограничимся случаем $p = \rho$ или вовсе $p = \mathrm{const}$ (модель Бюргерса). В этом случае проблем при предельном переходе в давлении у нас не будет, но и (2.4) влечет, в лучшем случае, оценку ρ в пространстве Орлича, порожденном функцией $\Phi(s) = s \ln s$, чего, как мы увидим далее, заведомо недостаточно в неньютоновском случае, даже при быстрорастущих коэффициентах вязкости. Необходимы дополнительные источники для оценки плотности. Естественно привлечь для этого уравнение (1.1), используя оценку $\mathbf{u}$ из (2.4) как источник информации о коэффициенте $\mathbf{u}$ в (1.1).

Таким образом, возникает задача о поведении обобщенных решений уравнения (1.1). Удобно сразу рассмотреть неоднородное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = h \tag{2.7}$$

и сопряженное к нему уравнение переноса

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = g. \tag{2.8}$$

Чтобы абстрагироваться от несущественных деталей, рассмотрим для (2.7), (2.8) задачи Коши с условием периодичности по $\mathbf{x}$, т. е. задачи в $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ с условиями $(2.2)_1$ и

$$\zeta|_{t=T} = \zeta_T \tag{2.9}$$

соответственно, где все входные данные и решения предполагаются периодическими по x_k с периодами T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$; эти задачи можно рассматривать как начально-краевые в цилиндре Q_T, если принять $\Omega = \prod_{k=1}^{n} (0, T_k)$, а условия периодичности рассматривать как краевые. Как нетрудно проследить, существенные для дальнейших приложений свойства задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) сохраняются и для произвольных Ω с условием (2.1). Нас интересуют обобщенные решения поставленных задач, достаточно «плохие», и с достаточно «плохими» $\mathbf{u}$, так что однозначное построение характеристик как решений задач

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.10}$$

может оказаться невозможным, т. е. требуется переход от поточечного подхода к «почти всюду». Впервые систематически эта проблема рассматривалась в [83]. При сделанных там допущениях существование обобщенных решений являлось тривиальным фактом ввиду линейности задач, неочевидны лишь единственность и другие свойства, доказательство которых (как и для гладких решений) требует нелинейных операций. Ключевые идеи работы [83] состоят в следующем (сформулируем их на примере (2.8), хотя в [83] рассмотрено более общее уравнение с младшим членом вида $c(t, \mathbf{x})\zeta$, так что (2.7) и (2.8) оказываются частными случаями такого уравнения):

1. Если поле «скоростей» $\mathbf{u}$ обладает свойством $\mathbf{u} \in L_1(0, T, W_1^1(\Omega))$, то имеет место феномен ренормализации, т. е. обобщенные решения уравнений (2.7), (2.8) удовлетворяют также (в обобщенном смысле) и уравнениям, являющимся формальным следствием исходных. Так, для (2.8) это уравнения вида
$$\frac{\partial N(\zeta)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla N(\zeta) = gN'(\zeta)$$
со всеми гладкими функциями N. Центральной идеей при доказательстве ренормализации является оценка коммутатора $(\mathbf{u} \cdot \nabla\zeta)_\xi - \mathbf{u} \cdot \nabla\zeta_\xi \to 0$ в $L_1(Q_T)$ при $\xi \to 0$ (индекс ξ означает усреднение по $\mathbf{x}$ радиусом ξ).
2. При условии наличия свойства ренормализации имеет место также и единственность (и устойчивость), если дополнительно предполагать, что
$$\mathrm{div}\mathbf{u} \in L_1(0, T, L_\infty(\Omega)). \tag{2.11}$$
Этот факт достаточно простой.
3. С помощью подходящим образом построенных решений задачи (2.8), (2.9) можно придать смысл потоку, определяемому задачей (2.10) (в противоположность классическому методу характеристик, в котором решения (2.8), (2.9) строятся с помощью характеристик как решений (2.10)).

Исследования описанной проблемы были продолжены в работах [114], [73], [77]. Их целью было снижение требований на все производные $\mathbf{u}$, а именно с $\mathbf{u} \in W_1^1$ до $\mathbf{u} \in \mathrm{BV}$. Это направление было успешно завершено благодаря работам [65], [66], в которых были найдены пути повторения упомянутых идей из [83] для случая BV, несмотря на отсутствие оценки коммутатора (одна из ключевых находок — использование сильно анизотропных ядер усреднения в точках сингулярности $\nabla \otimes \mathbf{u}$), решение проблемы окончательно изложено в [63] (более подробно в [64]). Оказалось, что ренормализация (и следовательно единственность) сохраняется и для BV, причем, как показано в [79], [80], класс BV ослабить уже́ нельзя — при выходе из него теряется как ренормализация, так и единственность. Подробный обзор по современному состоянию и истории этого вопроса, а также открытых проблемах, можно найти в [78], а по (2.10) в автономном случае — в [64].

Таким образом, в пространствах Лебега L_p вопрос о корректности задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) изучен достаточно хорошо, однако следует подчеркнуть, что во всех перечисленных работах условие (2.11) предполагалось выполненным. Это условие слишком обременительно для приложений к уравнениям ВСЖ, т. к. свойство (2.11) не может быть получено как априорная оценка из (2.4) (в то время как оценка $\mathbf{u} \in L_1(0, T, W_1^1(\Omega))$ имеется даже с запасом). В то же время (2.11) является оптимальным, если оставаться в L_p, т. к. снижение требований до $\mathrm{div}\mathbf{u} \in L_p$, пусть даже с $p \gg 1$, приводит к некорректности задач (см. ниже). Возникает идея: выйти из шкалы L_p и рассмотреть пространства Орлича, в которых сформулировать требования на $\mathrm{div}\mathbf{u}$ и, возможно, на решения ρ и ζ. Другими словами, попробуем описать точные классы корректности уравнения переноса в пространствах Орлича.

Напомним кратко необходимые сведения из теории пространств Орлича. Подробно с этим предметом можно познакомиться по монографиям [21], [108] (в которых, впрочем, приняты несколько иные обозначения для пространств и классов Орлича). Мы не будем различать пространства скалярных и векторнозначных функций, т. к. это не приводит к недоразумениям.

Четная возрастающая на $\mathbb{R}^+$ положительная вне 0 выпуклая функция M называется N-функцией (функцией Юнга), если $M(s)/s \to 0$ при $s \to 0$, и $M(s)/s \to +\infty$ при $s \to +\infty$. На N-функциях вводятся отношения $\prec$, $\sim$ и $\prec\!\!\prec$, отвечающие за сравнение скорости роста на ∞, по следующим правилам:

$$M \prec N, \quad \text{если} \quad M(u) \leqslant N(Au) \text{ при } u \geqslant B \quad \text{с некоторыми } A, B \in \mathbb{R}^+;$$

$$M \prec\!\!\prec N, \quad \text{если} \quad \lim_{u\to\infty} \frac{M(\lambda u)}{N(u)} = 0 \quad \text{при всех } \lambda > 0;$$

$$M \sim N, \quad \text{если} \quad M \prec N \text{ и } N \prec M.$$

Для любой N-функции M можно определить дополнительную к ней N-функцию $\overline{M}$, которая является ее преобразованием Лежандра. В связи с тем, что любая N-функция почти всюду дифференцируема, определение $\overline{M}$ можно переписать в форме $\overline{M}' = (M')^{-1}$ (штрих означает производную, а индекс «-1» — обратную функцию). Для пары дополнительных N-функций справедливо неравенство Юнга

$$ab \leqslant M(a) + \overline{M}(b).$$

На измеримом множестве Ω (в связи с нашими целями считаем, что его мера конечна, что, вообще говоря, не обязательно в этой теории) любая N-функция M порождает класс Орлича

$$K_M(\Omega) = \left\{ u \;\middle|\; \rho(u, M) \equiv \int\limits_\Omega M(u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} < \infty \right\}.$$

Его линейная оболочка $L_M(\Omega)$ называется пространством Орлича, в нем вводятся две эквивалентные нормы:

$$\|u\|_{L_M(\Omega)} = \sup_{\rho(v,\overline{M})\leqslant 1} \int\limits_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$\|u\|_{L_M(\Omega)} = \inf\left\{ k > 0 \;\middle|\; \int\limits_\Omega M\left(\frac{u(\mathbf{x})}{k}\right)d\mathbf{x} \leqslant 1 \right\},$$

называемые соответственно нормой Орлича и нормой Люксембурга; для обеих имеет место неравенство Гельдера

$$\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leqslant C\|u\|_{L_M(\Omega)} \cdot \|v\|_{L_{\overline{M}}(\Omega)},$$

в котором $C = 1$ или $C = 2$ в зависимости от выбора нормы, а также неравенство $\|u\|_{L_M(\Omega)} \leqslant 1 + \int\limits_{\Omega} M(u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$.

Ввиду конечности меры Ω важно лишь поведение N-функций на $+\infty$, поэтому далее в формулах для них мы будем подразумевать (и уже подразумевали), что они выписаны для больших значений аргументов.

Пример 2.1. $M(s) = s^p/p$, $p > 1$, $\overline{M}(s) = s^q/q$, $q = p/(p-1)$, $L_M(\Omega) = L_p(\Omega)$, $L_{\overline{M}}(\Omega) = L_q(\Omega)$.

Пример 2.2. $M(s) = e^s - s - 1$, $\overline{M}(s) = (s+1)\ln(s+1) - s$. Пространство $L_M(\Omega)$ состоит из функций, принадлежащих всем $L_r(\Omega)$, $r < \infty$ (но все же неограниченных, вообще говоря), а $L_{\overline{M}}(\Omega)$ состоит из функций, хотя и интегрируемых (и даже обладающих немного лучшими свойствами), но не принадлежащих никакому $L_{1+\varepsilon}(\Omega)$. $\square$

Гладкие функции, вообще говоря, не плотны в $L_M(\Omega)$, так что их замыкание $E_M(\Omega)$ (в норме $L_M(\Omega)$) образует в общем случае подпространство в $L_M(\Omega)$, которое является сепарабельным, причем $L_{\overline{M}}(\Omega) = (E_M(\Omega))^*$, так что ограниченные множества в $L_M(\Omega)$ $*$-слабо секвенциально предкомпактны. Пространства $E_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ совпадают тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2-условию: $M(2u) \leqslant CM(u)$ при $u \gg 1$, что, грубо говоря, означает не более чем степенной рост M на ∞. Это условие также является критерием совпадения множеств $K_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$.

Таким образом, элементы $E_M(\Omega)$ можно приблизить в норме гладкими функциями, но, вообще говоря, этого нельзя добиться для всего пространства $L_M(\Omega)$ (однако сохраняется возможность приближения $*$-слабо).

Помимо Δ_2-условия, для N-функций формулируют также

$$\Delta_3\text{-условие:} \qquad M(s) \sim sM(s),$$

$$\Delta^2\text{-условие:} \qquad M \sim M^2,$$

$$\Delta'\text{-условие:} \qquad M(uv) \leqslant CM(u)M(v), \quad u, v \geqslant \text{const}.$$

Если не учитывать «патологических» случаев (с которыми мы не столкнемся в приложениях, встречающихся в статье), Δ^2-условию удовлетворяют все N-функции, растущие не медленнее функций вида $F(s) = \exp(s^\varepsilon)$, для Δ_3-условия «нижний порог» находится примерно на функции вида $F(s) = \exp(\ln^2 s)$, а Δ'-условие есть более сильное, чем Δ_2-условие, ограничение типа «не более чем степенного роста».

Из $M_1 \prec M_2$ следует непрерывное вложение $L_{M_2}(\Omega) \hookrightarrow L_{M_1}(\Omega)$ (верно и обратное), а при $M_1 \prec\!\!\prec M_2$ это вложение строгое (в теоретико-множественном смысле) и в определенном смысле компактное (например, тогда $L_{M_2}(\Omega) \subset K_{M_1}(\Omega)$). Таким образом, отношение $M_1 \sim M_2$ является критерием совпадения $L_{M_1}(\Omega) = L_{M_2}(\Omega)$.

Таким образом, пространства Лебега $L_r(\Omega)$ являются частным случаем пространств Орлича, теория которых частично походит на теорию пространств L_r (особенно в случае, когда M и $\overline{M}$ одновременно удовлетворяют Δ_2-условию), но во многом отличается от нее и позволяет описать тонкие свойства функций в Ω. Пространства Орлича являются частным случаем симметричных функциональных пространств [22], [110], т. е. таких, в которых норма не меняется при перестановках, или, другими словами, нормы равноизмеримых функций (с одинаковыми функциями распределения) совпадают. В отличие от L_p, пространства Орлича «плотны» в шкале всех симметричных пространств (простирающейся между L_1 и L_∞) в том смысле, что:

1. $L_1 = \bigcup\limits_{M\in\mathcal{N}} L_M$, $L_\infty = \bigcap\limits_{M\in\mathcal{N}} L_M$ ($\mathcal{N}$ есть множество всех N-функций);
2. теоремы вложения в пространствах Соболева—Орлича для своей исчерпывающей формулировки не требуют выхода из шкал Орлича и Гельдера (с нестепенными модулями непрерывности) — ср. проблему предельных показателей для пространств Соболева.

По поводу первого из двух фактов, выписанных под цифрой «1», заметим, что равностепенная интегрируемость семейства функций (а значит, его слабая замкнутость в L_1) эквивалентна ограниченности этого семейства в некотором классе Орлича. Если модуль интегрируемости «заложить в норму», то получится пространство Марцинкевича. Таким образом, имеет место «перемежение» шкал Орлича и Марцинкевича (вблизи L_∞ — просто совпадение), а L_1 выступает как «бесформенное объединение» всех пространств Орлича (а также всех пространств Марцинкевича, как впрочем, и всех симметричных пространств) — подробности можно найти в [22].

Аналогично пространствам Соболева, вводятся пространства Соболева—Орлича $W^kL_M(\Omega)$ и $W^kE_M(\Omega)$, состоящие из функций, которые вместе со своими производными до порядка k принадлежат $L_M(\Omega)$ или, соответственно, $E_M(\Omega)$ (и снабжаются естественными нормами); они совпадают в случае выполнения Δ_2-условия для функции M [108]. Естественным образом понимаются пространства $\overset{\circ}{W}{}^k\, E_M(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}^k\, L_M(\Omega)$. Гладкие функции плотны в $W^kE_M(\Omega)$ по норме (и это пространство сепарабельно), а в $W^kL_M(\Omega)$ — только $*$-слабо (оно может быть несепарабельным): следовательно, первое из этих пространств $*$-слабо плотно во втором.

На основе пространств Соболева—Орлича возможно построение дуальных к ним (негативных) в основном так же, как это делается для пространств Соболева (нам достаточно ограничиться порядком дифференцируемости «-1»), впрочем, эта процедура, несмотря ее стандартность, требует уточнения в случае пространств Орлича. В работе [32] показано, как это можно сделать, и приведены необходимые утверждения. Так же как существует два типа пространств Соболева—Орлича: W^1L_Ψ и W^1E_Ψ, мы вводим также два типа дуальных к ним негативных пространств, которые условно обозначаем, соответственно, $W^{-1}E_\Phi$ и $W^{-1}L_\Phi$. Первое из них состоит из градиентов функций из L_Φ, а второе есть сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}^1\, E_{\overline{\Phi}}$.

Вернемся к задачам (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) и обсудим оценки их (пока гладких) решений. Простейшими оценками являются следующие:

$$\|\rho\|_{L_\infty(0,T,L_1(\Omega))} \leqslant \|\rho_0\|_{L_1(\Omega)} + \|h\|_{L_1(Q_T)}, \tag{2.12}$$

$$\|\zeta\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant \|\zeta_T\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g\|_{L_1(0,T,L_\infty(\Omega))} \tag{2.13}$$

— первая из них получается интегрированием (2.7) по Ω, а вторая, например, из метода характеристик. В оценках (2.12), (2.13) не участвуют какие-либо нормы $\mathbf{u}$, что, впрочем, как будет видно далее, не означает ни распространимости этих оценок на сколь угодно «плохие» решения и коэффициенты $\mathbf{u}$, ни возможности корректного построения обобщенных решений в этих классах без дополнительных требований на $\mathbf{u}$ (вопреки обыкновенному порядку вещей).

Центральная идея оценки ρ при неограниченных $\mathrm{div}\mathbf{u}$ состоит в использовании тождества

$$\frac{\partial\Phi(\rho)}{\partial t} + \mathrm{div}(\Phi(\rho)\mathbf{u}) + (\rho\Phi'(\rho) - \Phi(\rho))\mathrm{div}\mathbf{u} = h\Phi'(\rho) \tag{2.14}$$

с произвольной N-функцией Φ (для гладких решений (2.7)), применении неравенства Юнга $|(\rho\Phi'(\rho)-\Phi(\rho))\mathrm{div}\mathbf{u}| \leqslant \overline{M}(\rho\Phi'(\rho)-\Phi(\rho)) + M(\mathrm{div}\mathbf{u})$ и том наблюдении, что при правильном подборе пар N-функций Φ, M можно добиться

$$\overline{M}(\rho\Phi'(\rho) - \Phi(\rho)) = \Phi(\rho) \tag{2.15}$$

(на самом деле в (2.15) достаточно неравенства, но удобно начать с равенства). Например, если $\Phi(s) = s\ln s$, то $M(\xi) = e^{\xi-1}$, $\overline{M}(\eta) = \eta\ln\eta$. В общем случае соответствие $M \leftrightarrow \Phi$ в (2.15) дается в следующем утверждении (ясно, что функции Φ и M можно сразу считать достаточно гладкими):

Утверждение 2.3. Соотношение (2.15) осуществляет взаимно однозначное соответствие между гладкими функциями классов $M \in \mathcal{K}$, $\xi^{-1}\overline{M}(\xi) \in \Delta$ и $\{\Phi(\xi), \Phi(\xi)/\xi, (\xi\Phi'(\xi) - \Phi(\xi))\} \in \Delta$, $(\xi\Phi'(\xi) - \Phi(\xi))/\Phi(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, где Φ определяется с точностью до растяжения аргумента $\Phi(s) \mapsto \Phi(cs)$, $c = \mathrm{const}$, и обозначено

$$\Delta = \{\, F \geqslant 0 \mid F(s) \to \infty \quad \text{монотонно при } \ s \to \infty \,\},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ M \;\middle|\; \int^{+\infty} \frac{\ln M(s)}{s^2} ds = +\infty \right\}. \tag{2.16}$$

Таким образом, среди N-функций соотношение (2.15) возможно если и только если $M \in \mathcal{K}$, т. е. растет с экспоненциальной скоростью или быстрее, а рост $\Phi(s)$, напротив, медленнее любой степени вида $s^{1+\varepsilon}$ (будем обозначать класс таких Φ через $\mathcal{D}_\Phi$). Подробное изложение этого и последующих в разделе 2 фактов можно найти в [17].

С помощью класса $\mathcal{K}$ можно сформулировать в «неулучшаемом» виде ответы сразу на несколько вопросов.

Первый вопрос — это точные условия на $\mathrm{div}\mathbf{u}$, при которых можно гарантировать корректность задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9).

Теорема 2.4. Пусть

$$\mathbf{u} \in L_1(0,T,W_1^1(\Omega)), \qquad \mathrm{div}\mathbf{u} \in K_M(Q_T), \quad M \in \mathcal{K}, \tag{2.17}$$

$$\rho_0 \in L_\Phi(\Omega), \qquad h \in L_1(0,T,L_\Phi(\Omega)),$$

где $\Phi \in \mathcal{D}_\Phi$ и M связаны соотношением (2.15);

$$\zeta_T \in L_\Psi(\Omega), \qquad g \in L_1(0,T,L_\Psi(\Omega)), \tag{2.18}$$

где $\Psi = \overline{\Phi}$, или, вместо (2.18),

$$\zeta_T \in E_\Psi(\Omega), \qquad g \in L_1(0,T,E_\Psi(\Omega)).$$

Тогда обобщенные решения задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) классов $\rho \in L_\infty(0,T,L_\Phi(\Omega))$ и $\zeta \in L_\infty(0,T,L_\Psi(\Omega))$ или $\zeta \in L_\infty(0,T,E_\Psi(\Omega))$ соответственно, существуют, единственны и удовлетворяют оценкам

$$\|\rho\|_{L_\infty(0,T,L_\Phi(\Omega))} \leqslant e^T\left(1+\int\limits_{Q_T} M(\mathrm{div}\mathbf{u})d\mathbf{x}ds\right)(\|\rho_0\|_{L_\Phi(\Omega)}+\|h\|_{L_1(0,T,L_\Phi(\Omega))}), \tag{2.19}$$

$$\|\zeta\|_{L_\infty(0,T,L_\Psi(\Omega))} \leqslant e^T\left(1+\int\limits_{Q_T} M(\mathrm{div}\mathbf{u})d\mathbf{x}ds\right)(\|\zeta_T\|_{L_\Psi(\Omega)}+\|g\|_{L_1(0,T,L_\Psi(\Omega))}). \tag{2.20}$$

Замечание 2.5. Утверждение Теоремы 2.4 сохраняет силу, если заменить Φ на любую $\Phi_1 \prec \Phi$, а Ψ — на соответствующую $\Psi_1 = \overline{\Phi}_1$; другими словами, если вместо (2.15) предполагать выполнение неравенства «$\leqslant$».

Теорема 2.6. Пусть верно (2.17), а также

$$\rho_0 \in L_1(\Omega), \qquad h \in L_1(Q_T),$$

$$\zeta_T \in L_\infty(\Omega), \qquad g \in L_1(0,T,L_\infty(\Omega)). \tag{2.21}$$

Тогда обобщенные решения задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) классов $\rho \in L_\infty(0,T,L_1(\Omega))$ и $\zeta \in L_\infty(Q_T)$ существуют, единственны и удовлетворяют (2.12) и (2.13). □

Второй вопрос, тесно связанный с первым, состоит в анализе неравенства типа Гроноулла (Осгуда)

$$\int\limits_\Omega \psi d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_0^t\int\limits_\Omega f\psi d\mathbf{x}ds, \qquad f \geqslant 0, \quad \psi \geqslant 0, \tag{2.22}$$

в котором требуется доказать $\psi \equiv 0$. Мы не будем, как в [17], рассматривать более общие формы этого неравенства, а ограничимся приведенной формой (2.22).

Теорема 2.7. Пусть $M \in \mathcal{K}$, $\int\limits_{Q_T} \psi M(f)d\mathbf{x}ds < \infty$ (например, достаточно чтобы $\psi \in L_{1+\varepsilon}(Q_T)$, $f \in K_{M_1}(Q_T)$ с некоторой $M_1 \in \mathcal{K}$). Тогда из (2.22) следует $\psi \equiv 0$.

Отметим, что достаточные условия на f в (2.22) были ранее получены в [60], [105], мы же даем неулучшаемый признак (см. контрпример ниже). В более громоздких терминах и другими методами, но (как можно проверить экстраполяционными методами, описанными в разделе 3) тот же результат получен в [160]. Доказательство Теорем 2.4, 2.6 и 2.7 приведено в [17], здесь мы приведем ключевые идеи доказательств для первых двух из них.

Первый шаг состоит в доказательстве априорных оценок (2.19), (2.20) для гладких решений (с гладкими $\mathbf{u}$): сначала (2.19) для $h = 0$ с помощью вышеизложенных идей о тождестве (2.14), затем (2.20) с помощью соображений двойственности, и наконец, (2.19) для любых h опять же с помощью двойственности из (2.20). Оценки (2.12) и (2.13), как уже говорилось, для гладких решений тривиальны.

На втором шаге показывается существование слабых решений (определенных стандартным образом через интегральные тождества и пробные функции) задач в классах, определяемых априорными оценками. Это делается с помощью регуляризации $\mathbf{u}$ и начальных данных. Здесь не вполне очевидно лишь то, что при построении решения $\rho \in L_\infty(0,T,L_1(\Omega))$ мы не выйдем (в результате слабого предела) из L_1 в пространство мер Радона. Однако это проверяется несложно ввиду того, что $\rho_0 \in L_1(\Omega)$ означает $\rho_0 \in L_{\Phi_1}(\Omega)$ с некоторой Φ_1.

Третий шаг заключается в проверке единственности решения $\zeta \in L_\infty(Q_T)$ задачи (2.8), (2.9) в условиях Теоремы 2.6. Полностью следуя работе [83], мы приходим к неравенству (2.22) с $\psi = |\zeta_1 - \zeta_2|$ (где ζ_1 и ζ_2 — два решения задачи) и $f = |\mathrm{div}\mathbf{u}|$, но теперь, в отличие от [83], f неограничена. Ввиду Теоремы 2.7 получаем требуемое.

На четвертом шаге подходящим образом определяются обобщенные решения задач во всех остальных случаях и доказывается их существование и единственность. А именно, решение задачи (2.7), $(2.2)_1$ в условиях как Теоремы 2.4, так и Теоремы 2.6, определяется из тождества

$$\int_0^t \int_\Omega (\rho g + \zeta h) d\mathbf{x} ds = \int_\Omega \rho(t)\zeta_T d\mathbf{x} - \int_\Omega \rho_0 \zeta(0) d\mathbf{x}, \tag{2.23}$$

в котором ζ есть обобщенное (единственное!) решение задачи

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = g, \quad \zeta|_{s=t} = \zeta_T,$$

а $t \in (0,T)$, g и ζ_T, удовлетворяющие (2.21) — произвольны. В этом случае единственность ρ очевидна, но и существование проверяется без особого труда с помощью регуляризации. И наконец, решение (2.8), (2.9) в условиях Теоремы 2.4 определяется с помощью соотношения двойственности по отношению к решению $\rho \in L_\infty(0,T,L_\Phi(\Omega))$ задачи (2.7), $(2.2)_1$ (аналогично (2.23)), и его существование и единственность проверяются аналогично. Тем самым, Теоремы 2.4 и 2.6 полностью обоснованы.

Требование $M \in \mathcal{K}$ в Теоремах 2.4, 2.6 и 2.7 существенно, а не есть лишь результат наших методов работы с соотношением (2.15). Каковы бы ни были $M \notin \mathcal{K}$ и $T > 0$, можно построить следующие контрпримеры:

1. $\psi \in L_\infty(Q_T)$, $f \in L_\infty(0,T,L_M(\Omega))$ такие, что $\psi \not\equiv 0$, но (2.22) выполнено.
2. $\zeta \in L_\infty(Q_T)$, $\mathbf{u} \in L_1(0,T,W^1L_M(\Omega))$, $\zeta \not\equiv 0$, но ζ есть решение (2.8), (2.9) с $g = 0$, $\zeta_T = 0$ (все функции сферически симметричны по $\mathbf{x}$).
3. Та же $\mathbf{u}$, что и в п. 2, $\rho \in L_\infty(Q_{T-\varepsilon})$ $(\forall \varepsilon > 0)$; $\rho \in L_1(Q_T)$ — решение (2.7) с $h = 0$ (здесь даже $\rho_0 \in L_\infty(\Omega)$), но $\mathrm{supp}\,\rho(t)$ стягивается в точку (т. е. $\rho(t) \to \delta$) при $t \to T$, так что задача (2.7), $(2.2)_1$ не имеет решения даже в классе $L_\infty(0,T,L_1(\Omega))$.

Отметим, что в этих контрпримерах $\mathbf{u}$ и f даже несколько лучше, чем требуется для логического дополнения Теорем 2.4, 2.6 и 2.7: лучше суммируемость по t, и регулярны все производные $\mathbf{u}$ по $\mathbf{x}$; а то, что класс Орлича K_M заменен на пространство L_M, не имеет значения ввиду возможности заменять элементы $\mathcal{K}$ или $\mathcal{N} \setminus \mathcal{K}$ на существенно более или менее быстро растущие (в смысле $\prec\!\!\prec$) без выхода из этих классов.

Также при любой $M \notin \mathcal{K}$ можно предъявить пример стационарного поля $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ (при $n = 2$) такого, что $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$, диагональная часть тензора $\nabla \otimes \mathbf{u}$ лежит в $L_M(\Omega)$, но весь тензор $\nabla \otimes \mathbf{u} \notin L_1(\Omega)$, и в результате две разные характеристические поверхности выходят из одной прямой на плоскости

$\{t=T\}$, порождая нетривиальное решение однородной задачи (2.8), (2.9). Если же $M \in \mathcal{K}$, $\nabla \otimes \mathbf{u} \in L_M(\Omega)$, то ввиду теорем вложения [75] получим в точности $\mathbf{u} \in C^{\sigma}(\Omega)$ с модулем непрерывности, удовлетворяющем условию Осгуда $\int\limits_0 \frac{ds}{\sigma(s)} = \infty$, что гарантирует единственность решения (2.10). Таким образом, условия $\nabla \otimes \mathbf{u} \in L_1$ и $M \in \mathcal{K}$ существенны и для построения характеристик (это третий вопрос, решаемый с помощью класса $\mathcal{K}$). Упомянем здесь работу [81], в которой найдено достаточное условие для единственности в (2.10) в виде $M(s) = e^s$, но с пространством Орлича, записанным в виде пространства Марцинкевича (т. е. через модуль интегрируемости); см. также [82].

В итоге мы получили корректность задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) при условиях (2.17) в классах Орлича, близких к $L_\infty(0,T,L_1(\Omega))$ для ρ и к $L_\infty(Q_T)$ для ζ, и в самих этих пространствах, причем чем «хуже» M (т. е. чем медленнее она растет) тем у́же полоса в шкале, отведенная для $L_\Phi(\Omega)$ и $L_\Psi(\Omega)$. При «переходе функции M через границу класса $\mathcal{K}$» корректность нарушается, хотя оценки в граничных классах (2.12), (2.13) сохраняют силу. Таким образом, хотя очевидными (и налагающими формально минимальные требования на вектор $\mathbf{u}$) являются оценки решений задач (2.7), $(2.2)_1$ и (2.8), (2.9) в L_1 и L_∞, но классами корректности оказываются пространства Орлича.

Описанные результаты удается в определенной степени распространить и на случай более общего, чем (2.7), уравнения, а именно, при наличии слабой нелинейности [20].

3. Пространства Орлича и экстраполяция

Как мы видели в разделе 2, необходимые для теорем существования оценки плотности в задаче (1.1), (1.2), (2.5), (2.1), (2.2) могут быть получены в «очень слабых» пространствах Орлича (вблизи L_1), и при этом необходима достаточно высокая регулярность скорости, а именно (2.17). В связи с тем, что оценка скорости может быть получена только из (2.4), это означает необходимость быстрого (более чем степенного) роста диссипативного потенциала по отношению к $\mathrm{div}\mathbf{u}$. Более того, в неньютоновском случае доказательство теоремы существования не обходится без обоснования энергетического равенства (2.4) для слабых решений (ср. несжимаемый случай [24]), для чего потребуется (см. доказательство Леммы 4.4) достаточно хорошая суммируемость всего $\nabla \otimes \mathbf{u}$, а именно, чтобы $\rho|\nabla \otimes \mathbf{u}| \in L_1(Q_T)$, что ввиду заведомо «плохой» ρ означает, как минимум, принадлежность $\nabla \otimes \mathbf{u}$ всем L_r с $r < \infty$. Это приводит к необходимости оценивать $\nabla \otimes \mathbf{u}$ в пространствах Орлича вблизи L_∞, а поскольку в (2.4) входит лишь симметрическая часть $\nabla \otimes \mathbf{u}$, т. е. $\mathbb{D}$, то:

1. нужен нестепенной рост V по всему $\mathbb{D}$;
2. нужно уметь оценивать $\nabla \otimes \mathbf{u}$ через $\mathbb{D}$ вблизи L_∞.

Первый аргумент приведет нас к соответствующим условиям в теоремах существования для задачи (1.1), (1.2), (2.5), (2.1), (2.2), а второй вопрос нам следует сейчас решить.

В пространствах Лебега оценка $\nabla \otimes \mathbf{u}$ через $\mathbb{D}$ проводится с помощью неравенства Корна:

$$\|\mathbf{v}\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant C_2(\Omega)\frac{p^2}{p-1}\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L_p(\Omega)}, \tag{3.1}$$

верного для всех $p \in (1, \infty)$ и гладких полей $\mathbf{v}$, удовлетворяющих (2.1) (см., например, [61]). Однако при $p = 1$ или $p = +\infty$ (3.1) теряет силу, и вблизи концов шкалы симметричных пространств аналогичные утверждения требуют уточнения. Ввиду точной информации (3.1) об операторе $\mathbb{D}(\mathbf{v}) \mapsto \nabla \otimes \mathbf{v}$ в L_p при $p \in (1, \infty)$ эту задачу естественно решать экстраполяционными методами, т. е. абстрагироваться от природы оператора и поставить задачу следующим образом:

Проблема 3.1. Пусть линейный оператор $A \in \mathcal{L}(L_p)$ при $p \in (\alpha, \beta)$, где $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, причем $\|A\|_{\mathcal{L}(L_p)} \leqslant C\varphi(p)$ с известной функцией φ (важно лишь ее поведение вблизи α или β). Что можно сказать о поведении A вблизи L_α и L_β, т. е.:

1. каковы должны быть симметричные пространства X и Y, чтобы $A \in \mathcal{L}(X, L_\alpha)$, $A \in \mathcal{L}(L_\beta, Y)$;
2. как A отображает («сдвигает») пространства, находящиеся на шкале:
   a) между L_α и всеми $L_{\alpha+\varepsilon}$;
   b) между L_β и всеми $L_{\beta-\varepsilon}$ (в случае $\beta = +\infty$ — между L_∞ и всеми L_r, $r < \infty$)?

Решение Проблемы 3.1 (теория экстраполяции) неразрывно связано с теорией пространств Орлича, и история развития этих двух теорий тесно связаны. Напомним, что сам Орлич занимался пространствами типа $L_{p(\cdot)}$. Собственно «пространства Орлича» вошли в математику в 1950-х гг. [21]. Введенные изначально с целью исследования интегральных уравнений с нестепенными нелинейностями, пространства Орлича вскоре были использованы как удобный инструмент для формулировок тонких теорем вложения и экстраполяционных результатов. Впрочем, также началось применение пространств Орлича для формулировки классов разрешимости дифференциальных уравнений с нестепенными нелинейностями — одной из первых работ об этом была статья [10] (см. обзор по этой теме в книге [56]). В настоящей статье подобное будет делаться для стационарных и эволюционных уравнений, связанных с (1.1), (1.2), с нестепенными коэффициентами. В [58] приведена экстраполяционная процедура, приводящая к оценке решений эллиптических уравнений в пространствах Орлича (а фактически к теореме вложения в случае предельного показателя), хотя в явном виде эти термины там не произносятся. В [13] уже́ явно сформулирована указанная теорема вложения (а также вложения в гельдеровы классы), а в [48] показана неулучшаемость такой теоремы по порядку роста целой порождающей функции. По-видимому, независимо в [155], [84] были получены аналогичные результаты, затем была показана неулучшаемость этих простейших теорем вложения [96], и начато, вслед за [136], систематическое изучение пространств Соболева—Орлича и теорем вложения в них [84]. Аналогичные теоремы вложения получены в [62]; все эти результаты приведены в [108], но они не являются точными. Основы для точных теорем вложения были заложены в работах [153], [154], где найдено точное условие вложения в L_∞; и наконец, для всех пространств Соболева—Орлича точные теоремы вложения были получены в [75], [76].

Уже по работам [58] и [48] была ясна тесная связь между теоремами вложения и утверждениями экстраполяционного типа. Такого рода утверждения естественно доказывать, работая сразу в шкале симметричных пространств, а не только пространств Орлича (хотя для приложений к дифференциальным уравнениям более удобны окончательные формулировки для пространств Орлича), как это и делается в [75], [76].

Теория симметричных (перестановочно-инвариантных) пространств возникла в 1960-х годах (см., например, монографии [22], [110]), и за прошедшие 40 лет превратилась в один из крупных разделов функционального анализа. Одним из ее разделов является теория экстраполяции. Необходимость в экстраполяционных утверждениях возникает, например, в связи с тем, что ряд важных операторов анализа действует ограниченно в шкале L_p при $1 < p < +\infty$, но неограниченно в концах этой шкалы. Первым результатом в этой области является теорема Яно [159]. В ней идет речь о линейных операторах, действующих в L_p при $p \in (1, 1+\varepsilon)$ или $p \in (p_0, +\infty)$ с нормой, оценивающейся величиной вида $C(p-1)^{-\alpha}$ или Cp^α соответственно, и делается вывод о поведении в L_1 или L_∞ соответственно. Теорема Яно распространена в [106] на более общие оценки нормы оператора. Следует также упомянуть работу [55], в которой рассматриваются в основном внутренние (интерполяционные) свойства шкалы.

Систематическая разработка теории экстраполяции началась около 20 лет назад. Здесь следует назвать прежде всего работы [99], [100], [124], [125]. В настоящее время в этой области идет интенсивное развитие — см. например [6], [3], [4], [5], [28], [29], [30], [8], [103], [27], [117], [74], [129], [85].

Указанные результаты в своем большинстве касаются экстраполяции вблизи L_1, а не L_∞, как это требуется в связи с целями статьи. Также неудобство перечисленных результатов для нужных нам приложений состоит в том, что они формулируются в терминах крайних пространств шкалы (т. е. в Проблеме 3.1 решается только п. 1). При этом предполагается, что промежуточные пространства можно заполнить с помощью интерполяции, однако это приводит к неконструктивным формулировкам. Именно такая ситуация возникает при описанном выше распространении неравенства Корна на пространства Орлича, лежащие вблизи L_∞.

Покажем, как Проблему 3.1 можно решать с помощью интегральных представлений и преобразований N-функций. Направим основные усилия на п. 2 в этой Проблеме. Будем рассматривать только экстраполяцию вправо (т. е. п. 2b), т. к. экстраполяция влево (п. 2a) тогда следует из соображений двойственности. Отметим также, что от требования линейности A можно освободиться (как это легко проследить), но соответствующих обобщений здесь делать не будем. Проведем наши рассуждения только в случае $\beta = +\infty$. Все остальные случаи, полные формулировки и доказательства можно найти в [31], [36], [37], [38].

Итак, пусть для всех $p \in (\alpha, +\infty)$ (где $\alpha \gg 1$ задано) и всех $u \in L_p$ верна оценка

$$\int\limits_\Omega |Au|^p d\Omega \leqslant C^p \varphi^p(p) \int\limits_\Omega |u|^p d\Omega. \tag{3.2}$$

Выбрав любое число $C_1 > 0$ и неотрицательную функцию $\chi \in L_1(\alpha, +\infty)$, мы можем получить из (3.2), после умножения на $\chi(p) C_1^{-p}$ и интегрирования $\int\limits_\alpha^{+\infty} dp$, оценку

$$\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{Au}{C_1}\right) d\Omega \leqslant \int\limits_\Omega M\left(\frac{Cu}{C_1}\right) d\Omega, \tag{3.3}$$

где

$$\Phi(v)=\int\limits_{\alpha}^{+\infty}\chi(p)v^p dp,\qquad M(v)=\int\limits_{\alpha}^{+\infty}\chi(p)\varphi^p(p)v^p dp. \tag{3.4}$$

Если теперь брать $u\in L_M(\Omega)$, $C_1=C\|u\|_{L_M(\Omega)}$, то правая часть (3.3) не превосходит 1, что означает $Au\in L_\Phi(\Omega)$, причем $\|Au\|_{L_\Phi(\Omega)}\leqslant C_1$. Итак, на п. 2b Проблемы 3.1 (с $\beta=+\infty$) получен следующий ответ:

$$A\in\mathcal{L}(L_M,L_\Phi),\qquad \|A\|_{\mathcal{L}(L_M,L_\Phi)}\leqslant C, \tag{3.5}$$

где M и Φ — любые N-функции, представимые в виде (3.4) с $\chi\geqslant 0$. Такой ответ мало полезен на практике, т. к. остаются следующие вопросы:

A. Что есть множество функций Φ, представимых в виде $(3.4)_1$ с $\chi\geqslant 0$?

B. Как описать соответствие $\Phi\leftrightarrow M$ в (3.4), не прибегая к восстановлению веса χ в $(3.4)_1$?

При этом следует заметить, что функции Φ и M задаются с точностью до $\sim$, так что вопрос А правильнее поставить как «представимость Φ в виде $(3.4)_1$ с точностью до $\sim$» (множество таких Φ обозначим $\mathcal{C}(+\infty)$), а в вопросе В нужно учесть возможность изменения Φ и M в пределах своих классов эквивалентности. С одной стороны, это удобно, т. к. не связывает нас только с аналитическими функциями (каковы все функции из (3.4)), но с другой стороны, следует отойти от явного представления (3.4) для формулировки соответствия $\Phi\leftrightarrow M$.

Ответ на вопрос А. В виде $(3.4)_1$ с точностью до $\sim$ представимы все N-функции, растущие достаточно быстро (заведомо достаточно Δ_3-условия, «нижний порог роста» примерно соответствует функции $\Phi_1(s)=\exp(\ln s\cdot\ln\ln s)$) и равномерно, т. е. без «сильных осцилляций» функции $\mathbf{e}_\Phi(s)=s\Phi'(s)/\Phi(s)$ (заведомо достаточно монотонности $\mathbf{e}_\Phi$; эта функция всегда неограничена для L_Φ вблизи L_∞).

Ответ на вопрос В. Соответствие $\Phi\leftrightarrow M$ нужно искать в виде интегрального преобразования типа свертки: $M=\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$, где

$$\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v)=\int\limits_{\sigma}^{+\infty}\psi(s)\Phi(vs)ds, \tag{3.6}$$

а $\sigma\geqslant 0$ и ядро $\psi\geqslant 0$ пока неизвестны. Подстановка (3.6) в (3.4) дает критерий для поиска ψ: $\varphi=\mathcal{M}_\sigma[\psi]$, где

$$\mathcal{M}_\sigma[\psi](p)=\left(\int\limits_{\sigma}^{+\infty}\psi(s)s^p ds\right)^{1/p}. \tag{3.7}$$

Если мы научимся восстанавливать ψ по φ, то соответствие (3.6) нам подходит в качестве ответа на вопрос В, т. к. оно уже «не ссылается» на (3.4). Но нужно теперь ответить на 2 новых вопроса:

C. Как восстановить ψ по φ из $\varphi=\mathcal{M}_\sigma[\psi]$?

D. Будет ли преобразование $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ корректно отображать классы N-функций, т. е. сохранять $\sim$?

Ответ на вопрос D оказывается положительным, так что $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ переводит эквивалентные функции в эквивалентные, и тем самым действует на классах (т. е. на пространствах Орлича). Поэтому если $\Phi\in\mathcal{C}(+\infty)$, $M=\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$, то $\Phi \sim \Phi_1$, где Φ_1 имеет вид $(3.4)_1$, и тогда $M \sim M_1 \equiv \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi_1]$, где M_1 взято из $(3.4)_2$; так что соответствие $\Phi \leftrightarrow M$ можно вычислять с помощью $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, не восстанавливая χ, лишь бы находиться в классе $\mathcal{C}(+\infty)$, достаточность которого мы показали выше.

Прежде чем отвечать на вопрос C, его следует уточнить. Преобразование $\mathcal{M}_\sigma$ с точностью до степени $1/p$ есть преобразование Меллина, образы которого всегда аналитичны, что нам неудобно — наша функция φ таковой быть не обязана. Кроме того, восстановление прообраза Меллина сопряжено (в классическом подходе) с выходом в комплексную плоскость, что является неустойчивой процедурой, и нам хотелось бы работать с асимптотикой φ, а не с аналитическими представлениями. Однако, нам помогает то обстоятельство, что функцию φ можно менять в определенных пределах, а именно так, чтобы соответствующее изменение ψ приводило к изменению образов $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$ (при фиксированном Φ) в пределах $\sim$. Оказывается, описанным допустимым изменением φ является изменение с точностью до $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$, где $\varphi_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \varphi_2$ означает $C_1 \leqslant \varphi_1/\varphi_2 \leqslant C_2$. Таким образом, вопрос C следует переформулировать так:

C′. Как восстановить ψ по φ из $\varphi \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{M}_\sigma[\psi]$?

Введем несколько вспомогательных терминов. Пороговой функцией преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ назовем такую $M_* \in \mathcal{N}$, что $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[M_*] \to \infty$ на конечном интервале (такие функции как $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[M_*]$ порождают L_∞ в качестве своего пространства Орлича). Характеристикой преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ назовем функцию $\varphi = \mathcal{M}_\sigma[\psi]$. Отметим, что $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ не повышает скорость роста степенных функций: $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[s^p](v) = \varphi^p(p)v^p$ (и всех N-функций, удовлетворяющих Δ'-условию), но вблизи L_∞ «сдвигает» пространства Орлича к концу шкалы, так что, например, L_{M_*} переходит в L_∞. Пороговая функция может быть найдена из формулы $M_*(v) = \int\limits_1^{+\infty} \varphi^{-p}(p)v^p dp$. Символом $\Omega_\sigma(+\infty)$ обозначим множество измеримых на $[\alpha, +\infty)$ функций φ, для которых найдется $\psi \geqslant 0$, решающая уравнение $\varphi \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{M}_\sigma[\psi]$.

В итоге вопрос C′ формулируется как описание класса $\Omega_\sigma(+\infty)$ и формулировка алгоритма обращения $\mathcal{M}_\sigma$ в терминах асимптотики φ на $+\infty$.

Ответ на вопрос C′ дадим частичный и не вполне строгий. Полный и четкий ответ дан в [37]. Итак, в класс $\Omega_\sigma(+\infty)$ попадают все функции φ, скорость роста которых достаточно мала (например, заведомо достаточно не быстрее p^N, $N > 0$), а характер роста достаточно регулярный (например, при $N = 1$ это значит гладкость и вогнутость φ). Существуют богатые классы и более быстро растущих $\varphi \in \Omega_\sigma(+\infty)$. Эти классы можно размножать произведениями представителей, что соответствует сверткам ядер. Во всех случаях имеется алгоритм асимптотического вычисления ψ через φ из функциональных уравнений. Ответ не зависит от выбора α и σ, так что эти числа можно выбирать для удобства аналитических представлений, если таковые найдутся (например, из таблиц преобразований), так что индекс σ в $\Omega_\sigma(+\infty)$ не означает зависимости от σ.

Подведем итоги в виде следующего утверждения:

Теорема 3.2. Пусть A — оператор из постановки Проблемы 3.1, причем $\varphi \in \Omega_\sigma(+\infty)$. Пусть $\psi \geqslant 0$ — решение уравнения $\varphi \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{M}_\sigma[\psi]$ (см. (3.7)), т. е. ядро преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ (см. (3.6)) с характеристикой φ. Тогда верно (3.5), где $M = \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$, а $\Phi \in \mathcal{C}(+\infty)$, $\Phi \prec M_*$ произвольна (M_* — пороговая функция преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$). В частности, $A \in \mathcal{L}(L_\infty, L_{M_*})$.

Пример 3.3. $A : \mathbb{D}(\mathbf{v}) \mapsto \nabla \otimes \mathbf{v}$ в (3.1). Здесь $\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} p \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma^{1/p}(p+1)$, $\psi(s) = e^{-s}$, $M_*(s) = e^s$, и можно взять для определенности $\sigma = 0$. В итоге Теорема 3.2 дает $\|\nabla \otimes \mathbf{v}\|_{L_\Phi} \leqslant C_2(\Omega)\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L_M}$, где $\Phi \in \mathcal{C}(+\infty)$, $\Phi \prec M_*$ произвольна, а $M(v) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\Phi(vs)ds$, и в частности $\|\nabla \otimes \mathbf{v}\|_{L_{M_*}} \leqslant C(\Omega)\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L_\infty}$. Если же, например, $\Phi(s) = \exp(s^{1/\alpha})$, $\alpha > 1$, то $M(s) = \exp(s^{1/(\alpha-1)})$. $\square$

Отметим, что мы выводили п. 1 решения Проблемы 3.1 из п. 2, а не наоборот, как это делается обычно, что и дало нам возможность получить конструктивный результат в промежуточных случаях (в крайнем, пороговом, случае, такого рода экстраполяционный результат хорошо известен).

Техника интегральных представлений N-функций, которую мы применяли при ответе на вопрос A, удобна и для описания экстраполяционных свойств самих пространств Орлича по отношению к шкале L_p. Поясним сказанное подробнее.

В теоремах вложения, а также в прикладных задачах (см., например, [9], [105], [60], [160], [58], [48], [55]), может возникать ситуация, когда норма некоторой измеримой функции u оценивается в целой шкале пространств L_p:

$$\|u\|_{L_p} \leqslant C_1\omega(p), \quad p \in (\alpha, \beta), \tag{3.8}$$

где, как и в Проблеме 3.1, C_1 не зависит от p, а $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$. Ясно, что если мы не хотим терять информацию о функции u, нередко добытую с большим трудом, мы вынуждены далее «носить с собой» целое семейство оценок (3.8), не «загрубляя» функцию ω, т. к. заранее, вообще говоря, неясно, в каких пределах мы можем ее менять (т. е. заменять на более простую по форме). В некоторых из упомянутых работ (см. [58], [48], [55]) было отмечено (для конкретных, достаточно простых функций ω, с $\beta = +\infty$), что из (3.8) следует оценка функции u в пространстве Орлича L_Φ:

$$\|u\|_{L_\Phi} \leqslant C_2, \tag{3.9}$$

порождаемом N-функцией Φ, которая может быть подсчитана по ω, в остальных же статьях так и было оставлено громоздкое представление в виде (3.8). Тем самым, для некоторых конкретных ω и $\beta = +\infty$ было показано (3.8)$\Longrightarrow$(3.9), и, кроме того, при простейших ω «вблизи L_∞» (т. е. для ω, растущих достаточно медленно, и $\beta = +\infty$) нетрудно показать обратную связь (3.9)$\Longrightarrow$(3.8), что являлось достоянием «математического фольклора». В последние годы в теории экстраполяции систематически изучаются [5], [6], [28] экстраполяционные проблемы для функций вида (3.8), при этом подразумевается, что соответствующее описание для операторов может быть получено как следствие. Как мы видели выше, Проблему 3.1 для операторов все же удобно решать сразу, с помощью интегральных преобразований и представлений. Покажем, как такие представления позволяют дать конструктивное и простое описание классов (3.8). А именно, хотелось бы найти ответы на следующие вопросы:

E. Когда можно утверждать (3.9)$\Longrightarrow$(3.8) (может быть, с другой ω); другими словами, совпадает ли класс функций u, описываемых оценкой (3.8), с некоторым пространством Орлича, а если да, то с каким?

F. Как описать связь между (3.8) и (3.9) для произвольных ω, Φ, α и β, четко определив классы для ω и Φ и явно указав операторы, сопоставляющие их друг другу?

Ответы мы приведем здесь только для $\beta = +\infty$ и без доказательств. Полное решение можно найти в [38]. Сначала определим несколько вспомогательных понятий.

Символом $\mathcal{M}_*(+\infty)$ обозначим множество функций ω, измеримых на $[\alpha, +\infty)$ (где $\alpha(\omega) > 1$) и таких, что $\omega \geqslant \mathrm{const}(\omega) > 0$. Для $\omega \in \mathcal{M}_*(+\infty)$ определим пространство $L_{\omega,\infty}(\Omega) = \{\, u \in L_p(\Omega) \mid \forall p \in [\alpha, +\infty)\ \|u\|_{L_p} \leqslant C\omega(p) \,\}$ с нормой

$$\|u\|_{L_{\omega,\infty}} = \sup_{p\in[\alpha,+\infty)} \frac{\|u\|_{L_p}}{\omega(p)} \tag{3.10}$$

(это и есть класс (3.8)), а также $E_{\omega,\infty}(\Omega)$ как замыкание $L_\infty(\Omega)$ в норме (3.10). Пространства $L_{\omega,\infty}$ и $E_{\omega,\infty}$ не зависят от α. Обозначим

$$\mathbf{In}_\infty[\omega](v) = \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{v^p\,dp}{\omega^p(p)}.$$

Для N-функций Φ, растущих быстрее степенных, обозначим (при $p \gg 1$)

$$\mathbf{m}_\Phi(p) = \min_{u\geqslant 1} \frac{\Phi(u)}{u^p}, \qquad \mathbf{Sc}_\infty[\Phi](p) = \mathbf{m}_\Phi^{-1/p}(p) = \max_{u\geqslant 1} \frac{u}{\Phi^{1/p}(u)}.$$

Операторы $\mathbf{In}_\infty$ и $\mathbf{Sc}_\infty$ «близки к тому, чтобы быть взаимно обратными». А именно, если ввести оператор $\mathbf{P}_\infty = \mathbf{In}_\infty \circ \mathbf{Sc}_\infty$, то он «мало отличается от тождественного» [38], и в точности равен тождественному на классе $\mathcal{E} = \{\, \Phi \in \mathcal{N} \mid \Phi \sim \mathbf{P}_\infty[\Phi] \,\}$, который, собственно, и был описан в ответе на вопрос A, т. е. представление $\Phi(s) \sim \int\limits_\alpha^{+\infty} \mathbf{m}_\Phi(p) s^p\,dp$, заложенное в определение $\mathcal{E}$, верно «почти для всех» быстрорастущих Φ.

Обозначим через $\Omega(+\infty)$ класс функций $\omega \in \mathcal{M}_*(+\infty)$, на которых обратим оператор $\mathbf{Sc}_\infty$, т. е. найдется $\Phi \in \mathcal{N}$ такая, что $\mathbf{m}_\Phi(p) = \omega^{-p}(p)$. Этот класс поддается конструктивному описанию, как и процедура обращения $\mathbf{Sc}_\infty$ [38]. Будем писать $\varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_1$, если $\varphi_1 \leqslant C\varphi_2$. Если $\omega_1 \overset{\varphi}{\prec} \omega_2$, то $L_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow L_{\omega_2,\infty}$ и $E_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow E_{\omega_2,\infty}$. Оператор $\mathbf{In}_\infty$ «переводит» $\overset{\varphi}{\prec}$ в $\prec$, а $\mathbf{Sc}_\infty$ — обратно.

Теперь мы готовы дать ответ на вопросы E и F при $\beta = +\infty$:

Теорема 3.4.

1. Если $\Phi \in \mathcal{C}(+\infty)$, т. е. $\Phi(s) \sim \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{s^p}{\omega_1^p(p)}\,dp$ с некоторой $\omega_1 \in \mathcal{M}_*(+\infty)$ (другими словами, $\omega_1 = \mathbf{In}_\infty^{-1}[\Phi]$), и $\omega_2 = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi]$, то:
   a) $L_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow L_\Phi \hookrightarrow L_{\omega_2,\infty}$, $E_{\omega_1,\infty} \hookrightarrow E_\Phi \hookrightarrow E_{\omega_2,\infty}$;
   b) для $\Phi \in \mathcal{E}$ просто $L_{\omega_2,\infty} = L_\Phi$ и $E_{\omega_2,\infty} = E_\Phi$.
2. Если $\omega \in \Omega(+\infty)$, $\Phi_1 = \mathbf{Sc}_\infty^{-1}[\omega]$, $\Phi_2 = \mathbf{In}_\infty[\omega]$, то:
   a) $L_{\Phi_1} \hookrightarrow L_{\omega,\infty} \hookrightarrow L_{\Phi_2}$, $E_{\Phi_1} \hookrightarrow E_{\omega,\infty} \hookrightarrow E_{\Phi_2}$;
   b) для $\omega \in \mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$ (т. е. $\Phi_1 \in \mathcal{E}$): $\Phi_1 \sim \Phi_2 = \mathbf{In}_\infty[\omega]$, $L_{\omega,\infty} = L_{\Phi_2}$, $E_{\omega,\infty} = E_{\Phi_2}$.

Таким образом, вблизи L_∞ пространства Орлича и экстраполяционные пространства $L_{\omega,\infty}$ совпадают, и соответствие между порождающими их функциями Φ и ω производится операторами $\mathbf{In}_\infty$ и $\mathbf{Sc}_\infty$. При достаточном удалении от L_∞ эти две шкалы перестают в точности совпадать, но образующийся «зазор» (в пп. «а» Теоремы 3.4) мал и его можно оценить (см. [37], [38]) — он меньше, чем гарантируемый общими соображениями, основанными на вычислении фундаментальных функций симметричных пространств [22].

Отметим, что класс $\mathbf{Sc}_\infty[\mathcal{E}]$, фигурирующий в п. 2 Теоремы 3.4, можно явно описать [38]. При $\omega \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathrm{const}$ Теорема 3.4 не дает оптимального результата по причинам, описанным в [38] (это не означает неточности результата в прочих случаях), но в этом случае тривиально непосредственное описание класса (3.8) (это L_∞).

4. Теоремы существования для стоксовых сред

Вернемся к проблеме существования глобальных решений уравнений (1.1), (1.2) с неньютоновскими ОУ (1.3). Как уже говорилось в разделе 2, мы ограничимся ОУ вида (2.5) с $p = \rho$ или $p = \mathrm{const}$ и начально-краевой задачей (2.1), (2.2) (напомним, что $\rho_0 \geqslant 0$). Проиллюстрируем основные идеи сначала на примере модели Бюргерса (т. е. с $p = \mathrm{const}$, можно считать $p = 0$), причем в слагаемом $\mathbb{P}'$ в (2.5) также не будем пока стремиться к максимальной общности, а ограничимся обобщенными ньютоновскими жидкостями (сжимаемая версия):

$$\mathbb{P} = \lambda(|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2)\mathrm{div}\mathbf{u}\cdot\mathbb{I} + 2\mu(|\mathbb{D}|^2)\mathbb{D}. \tag{4.1}$$

Более общие ОУ, чем (4.1), мы рассмотрим позже. Как указывалось в разделе 3, нам необходим более чем степенной рост $\mathbb{P}$ по $\mathbb{D}$, т. е. коэффициенты λ и μ (по крайней мере, второй из них) следует брать растущими быстрее степенных функций. Для определенности пока положим

$$\lambda(s) = \exp(s^{1/2}), \qquad \mu(s) = \exp(s^{\varepsilon_0}), \quad \varepsilon_0 > 0. \tag{4.2}$$

Нам сейчас будет иногда полезна эквивалентная форма записи уравнения (1.2):

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = \mathrm{div}\mathbb{P} + \rho\mathbf{f}. \tag{4.3}$$

Отметим, что в (2.2) данные заданы именно для импульса, а не для скорости, что связано с возможностью вырождения плотности, служащей весом при $\mathbf{u}_t$ в (4.3) (см. об этом Замечание 4.5), так что начальным данным для $\mathbf{u}$ было бы затруднительно придать смысл. Впрочем, удобно ввести обозначение $\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0/\rho_0$ там, где $\rho_0 \neq 0$, и продолжить $\mathbf{u}_0$ произвольным образом на всю Ω. Тогда предположение о каких-либо свойствах $\mathbf{u}_0$ будем понимать как выполнение этих свойств для хотя бы одного такого продолжения. Естественно, при этом следует требовать $\mathrm{mes}(\{\, \rho_0 = 0 \,\} \cap \{\, \mathbf{w}_0 \neq 0 \,\}) = 0$, что обеспечит равенство $\mathbf{w}_0 = \rho_0\mathbf{u}_0$.

Введем обозначения

$$\Lambda(s) = \int\limits_0^s \lambda(\xi)d\xi, \qquad M(s) = \int\limits_0^s \mu(\xi)d\xi$$

и банаховы пространства

$$X = \left\{ \mathbf{v} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \mid |\mathrm{div}\mathbf{v}|^2 \in E_\Lambda(\Omega),\ |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 \in E_M(\Omega),\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \qquad (4.4)$$

$$\overline{X} = \left\{ \mathbf{v} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \mid |\mathrm{div}\mathbf{v}|^2 \in L_\Lambda(\Omega),\ |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 \in L_M(\Omega),\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \qquad (4.5)$$

$$\|\mathbf{v}\|_X = \|\mathbf{v}\|_{\overline{X}} = \left(\| \, |\mathrm{div}\mathbf{v}|^2 \, \|_{L_\Lambda(\Omega)} + \| \, |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 \, \|_{L_M(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Как следует из свойств пространств Соболева—Орлича, описанных в разделе 2, X сепарабельно, в нем плотно $C^\infty(\Omega)$, поэтому можно составить счетный набор бесконечно дифференцируемых в Ω функций $\{\boldsymbol{\omega}_j\}$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$ и такой, что его линейная оболочка плотна в X. Пространство X $*$-слабо плотно в $\overline{X}$, а ограниченные множества в $\overline{X}$ $*$-слабо секвенциально предкомпактны.

Как отмечено в разделе 2, оценку плотности можно получить в пространствах Орлича, порожденных функциями $\Phi \in \mathcal{D}_\Phi$. Для определенности будем брать Φ из семейства N-функций $\Phi_\alpha(u) = u\ln^\alpha u$, $\alpha > 0$. Обозначим $\Psi_\alpha = \overline{\Phi}_\alpha$. Тогда асимптотически $\Psi_\alpha(v) \sim \exp(v^{1/\alpha})$.

Сформулируем априорные оценки гладких решений нашей задачи.

Лемма 4.1. Пусть $\alpha \geqslant 2 + 1/\varepsilon_0$. Тогда всякое классическое решение задачи (1.1), (1.2), (4.1), (2.1), (2.2) в цилиндре Q_T такое, что $\rho \geqslant 0$, удовлетворяет следующим оценкам (здесь C_2 взято из (3.1)):

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega \rho|\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x} + \int_{Q_T} \Big(\lambda(|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2\mu(|\mathbb{D}|^2)|\mathbb{D}|^2 \Big)\,d\mathbf{x}dt \leqslant \\ &\qquad \leqslant C_3 \equiv 2e^T \Big(T\|\rho_0\|_{L_1(\Omega)}\|\mathbf{f}\|^2_{L_\infty(Q_T)} + \int_\Omega \rho_0|\mathbf{u}_0|^2\,d\mathbf{x} \Big), \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

$$\|\rho\|_{L_\infty(0,T,L_{\Phi_\alpha}(\Omega))} \leqslant C_4 \equiv C_1(C_3, T, \alpha, \mathrm{mes}\Omega)\|\rho_0\|_{L_{\Phi_\alpha}(\Omega)}, \qquad (4.7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega (\Lambda(|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2) + 2M(|\mathbb{D}|^2))\,d\mathbf{x} \leqslant C_5 \equiv e^{2C_2C_4C_9(C_3+T)} \times \\ &\times \Big(\int_\Omega \Big(\Lambda(|\mathrm{div}\mathbf{u}_0|^2) + 2M(|\mathbb{D}(\mathbf{u}_0)|^2) \Big)\,d\mathbf{x} + 2 + 2T\|\rho_0\|_{L_1(\Omega)}\|\mathbf{f}\|^2_{L_\infty(Q_T)} \Big), \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

$$\int_{Q_T} \rho \left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right|^2 d\mathbf{x}dt \leqslant C_6 \equiv 2TC_2C_4C_9(2+C_5)(T+C_3) + 2T\|\rho_0\|_{L_1(\Omega)}\|\mathbf{f}\|^2_{L_\infty(Q_T)}. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Первая энергетическая оценка (4.6) является простым следствием законов сохранения массы и энергии (2.3), (2.4). Оценка плотности (4.7) получается аналогично (2.19) (роль M играет Ψ_1). Наконец, вторая энергетическая оценка (4.8), (4.9) получается после умножения (4.3) на $\mathbf{u}_t$ и интегрирования по Ω; при этом приходится оценивать $\nabla \otimes \mathbf{u}$ через $\mathbb{D}$ в пространствах Орлича с помощью Теоремы 3.2 (см. Пример 3.3). □

Предположим, что

$$\mathbf{f} \in L_\infty(Q_T), \qquad \rho_0 \in L_{\Phi_\alpha}(\Omega), \qquad \mathbf{u}_0 \in X, \qquad \alpha \geqslant 4. \qquad (4.10)$$

Определение 4.2. Пара функций $\rho \in L_\infty(0,T,L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$, $\mathbf{u} \in L_\infty(0,T,\overline{X})$ называется слабым решением задачи (1.1), (1.2), (4.1), (2.1), (2.2), если $\rho \geqslant 0$,

$$\Big(\lambda(|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + 2\mu(|\mathbb{D}|^2)|\mathbb{D}|^2\Big) \in L_1(Q_T), \tag{4.11}$$

и следующие интегральные тождества

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi\right) d\mathbf{x}ds = \int\limits_\Omega \rho\varphi|_{s=t}\, d\mathbf{x} - \int\limits_\Omega \rho_0\varphi(0,\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[\rho\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial s} + \Big(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - \mathbb{P}(\mathbf{u})\Big) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\right] d\mathbf{x}ds = \\ = \int\limits_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|_{s=t}\, d\mathbf{x} - \int\limits_\Omega \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}(0,\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\end{gathered} \tag{4.13}$$

выполнены для почти всех $t \in (0,T)$ и всех финитных вблизи $\partial\Omega\times(0,T)$ функций $\varphi, \mathbf{v} \in C^\infty(Q_T)$. При этом краевое условие (2.1) понимается в смысле обращения $\mathbf{u}$ в 0 на $\partial\Omega\times(0,T)$ как непрерывной по $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ функции (что следует из (4.11)) при почти всех $t \in (0,T)$. $\square$

Сформулируем основной результат для модели Бюргерса:

Теорема 4.3. Пусть коэффициенты вязкости в задаче (1.1), (1.2), (4.1), (2.1), (2.2) даются формулами (4.2), причем $\varepsilon_0 \geqslant 1/2$, а входные данные задачи удовлетворяют условиям (4.10); число $T > 0$ произвольно. Тогда в Q_T существует решение указанной задачи в смысле Определения 4.2. При этом уравнения (1.1), (1.2) выполнены как равенства в пространстве $L_2(0,T,W^{-1}L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$, а начальные данные (2.2) принимаются по непрерывности в $*$-слабой топологии $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$. Всякое слабое решение задачи указанного класса удовлетворяет при почти всех $t \in (0,T)$ энергетическому тождеству (2.4), т. е.

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho|\mathbf{u}|^2|_{s=t}\, d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho_0|\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) d\mathbf{x}ds = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\, d\mathbf{x}ds, \tag{4.14}$$

и закону сохранения массы (2.3). $\square$

Подробно данный результат изложен в [32], мы здесь ограничимся указаниями на принципиальные моменты доказательства. Сначала следует построить приближенные решения $\rho_m(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_m(t,\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^m \gamma_{mj}(t)\boldsymbol{\omega}_j(\mathbf{x})$ как решение задачи

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_m(\mathbf{u}_m)_{1/m}) = 0, \tag{4.15}$$

$$\int\limits_\Omega \left[\rho_m\left(\frac{\partial\mathbf{u}_m}{\partial t} + ((\mathbf{u}_m)_{1/m}\cdot\nabla)\mathbf{u}_m\right) - \mathrm{div}\mathbb{P}(\mathbf{u}_m) - \rho_m\mathbf{f}\right]\cdot\boldsymbol{\omega}_s\, d\mathbf{x} = 0, \quad s = 1,\dots,m,$$

$$\rho_m|_{t=0} = \rho_{0m}, \qquad \gamma_{mj}(0) = \alpha_{mj},$$

где $\{\boldsymbol{\omega}_j\}$ — описанный в начале раздела 4 «базисный» набор в X; $\rho_{0m} \in C^\infty(\Omega)$ и $\mathbf{u}_{0m} = \sum\limits_{i=1}^m \alpha_{mi}\boldsymbol{\omega}_i$ — приближенные начальные данные, сходящиеся к ρ_0 и $\mathbf{u}_0$ сильно в $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$ и X соответственно; $\rho_{0m} \geqslant 1/m$; а индекс $1/m$ в символе

$(\mathbf{u}_m)_{1/m}$ обозначает усреднение по $\mathbf{x}$ с радиусом $1/m$. Идея поиска приближенных решений таким путем взята из [1], [137]; добавлено лишь усреднение конвективных членов. Без особого труда доказывается существование приближенных решений в Q_T и равномерное выполнение для них оценок (4.6)–(4.9). Поэтому, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно обеспечить существование таких функций

$$\rho \in L_\infty(0,T,L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \quad \rho \geqslant 0, \quad \text{и} \quad \mathbf{u} \in L_\infty(0,T,\overline{X}), \tag{4.16}$$

что

$$\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u}_m)_{1/m} \to \mathbf{u} \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T,\overline{X}), \tag{4.17}$$

$$\rho_m \to \rho \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T,L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \tag{4.18}$$

$$\rho_m\mathbf{u}_m \to \rho\mathbf{u}, \quad \rho_m(\mathbf{u}_m)_{1/m} \to \rho\mathbf{u} \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T,L_{\Phi_\alpha}(\Omega)),$$

$$\rho_m\mathbf{u}_m\otimes\mathbf{u}_m \to \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}, \quad \rho_m\mathbf{u}_m\otimes(\mathbf{u}_m)_{1/m} \to \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T,L_{\Phi_\alpha}(\Omega)),$$

причем при почти всех $t \in (0,T)$

$$\rho_m(t) \to \rho(t) \quad *\text{-слабо в } L_{\Phi_\alpha}(\Omega),$$

$$\rho_m\mathbf{u}_m(t) \to \rho\mathbf{u}(t) \quad *\text{-слабо в } L_{\Phi_\alpha}(\Omega),$$

$$\rho_m\mathbf{u}_m\otimes\mathbf{u}_m(t) \to \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}(t) \quad *\text{-слабо в } L_{\Phi_\alpha}(\Omega).$$

В самом деле, (4.17) и (4.18) следуют из соответствующих равномерных оценок и упомянутых свойств пространств Орлича и $\overline{X}$, а тогда для обоснования остальных сходимостей нужно воспользоваться соображениями компактности типа [150], [67], [14]. При этом нам нужна ограниченность производных по времени как от плотности, так и для импульса; первый факт следует из (4.15), а для доказательства второго надо привлечь аналог (4.9) для приближенных решений. Тем самым, предельный переход в конвективных членах здесь не представляет сложностей ввиду достаточного запаса компактности: хотя плотность и «плоха», но регулярность скорости достаточна. Сложность перемещается в вязкие члены. Оценка (4.6) для приближенных решений обеспечивает ограниченность $\mathbb{P}(\mathbf{u}_m)$ в пространстве $L_{\Phi_\beta}(Q_T)$, где $\beta = 1/(2\varepsilon_0)$, так что мы можем считать

$$\mathbb{P}(\mathbf{u}_m) \to \overline{\mathbb{P}} \quad *\text{-слабо в } L_{\Phi_\beta}(Q_T),$$

где $\overline{\mathbb{P}}$ — некоторый элемент пространства $L_{\Phi_\beta}(Q_T)$. В итоге после предельного перехода мы получим (4.12), (4.13), где вместо $\mathbb{P}(\mathbf{u})$ стоит $\overline{\mathbb{P}}$ (обозначим соответствующее соотношение $\overline{(4.13)}$). При этом

$$\operatorname{div}\overline{\mathbb{P}} \in L_2(0,T,W^{-1}L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \tag{4.19}$$

и остается доказать $\operatorname{div}\overline{\mathbb{P}} = \operatorname{div}\mathbb{P}(\mathbf{u})$. Для этого воспользуемся стандартным методом монотонности, как это делалось еще в несжимаемом случае в [24], что влечет необходимость доказательства энергетического равенства:

Лемма 4.4. Всякая тройка функций ρ, $\mathbf{u}$, $\overline{\mathbb{P}}$ класса (4.16), (4.19), удовлетворяющая тождествам (4.12) и $\overline{(4.13)}$, удовлетворяет также энергетическому равенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho|\mathbf{u}|^2|_{s=t}\,d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho_0|\mathbf{u}_0|^2\,d\mathbf{x} + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \overline{\mathbb{P}} : \mathbb{D}(\mathbf{u})\,d\mathbf{x}ds - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\,d\mathbf{x}ds = 0. \tag{4.20}$$

Доказательство. Легко проверить, что в (4.12) и $\overline{(4.13)}$ в качестве пробных функций можно подставить $\varphi = |\mathbf{u}_\xi|^2/2$ и $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\xi$ (где индекс ξ означает стекловское усреднение вперед по t радиусом ξ), поскольку указанные функции приближаются гладкими $*$-слабо в соответствующих пространствах. Если сделать указанную подстановку и вычесть получившиеся равенства одно из другого, по получим

$$[\text{левая часть (4.20)}] = \left\langle \left(\rho\mathbf{f} - \rho\frac{\partial \mathbf{u}_\xi}{\partial t} + \mathrm{div}\overline{\mathbb{P}}\right), \mathbf{u}_\xi - \mathbf{u} \right\rangle_{Q_t} +$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left(\rho\mathbf{u}\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{u}_\xi)\right) : (\nabla\otimes\mathbf{u})_\xi \, d\mathbf{x}ds + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\xi|^2|_{s=t}\, d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\xi|^2|_{s=0}\, d\mathbf{x}.$$

При $\xi \to 0$ получим требуемое. При этом мы используем ограниченность величин $\rho(\mathbf{u}_\xi)_t$ в пространстве $L_2(0,T,W^{-1}L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$ (которую нетрудно проверить) и имеющийся запас суммируемости $\nabla\otimes\mathbf{u}$: грубо говоря, $\rho|\nabla\otimes\mathbf{u}| \in L_1(Q_T)$. $\square$

Благодаря Лемме 4.4 рассуждения метода монотонности удается довести до конца, «снять черту с $\overline{\mathbb{P}}$» (в отличие от упомянутых в разделе 1 результатов по мерозначным решениям) и доказать, что пара ρ, $\mathbf{u}$ является искомым слабым решением; по пути (4.20) превращается в (4.14). Для доказательства (2.3) выберем в качестве φ в (4.12) срезающую функцию $\varphi = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$, равную 1 вне ε-окрестности $\partial\Omega$, и исчезающую вблизи границы, так что доказательство сводится к оценке малости интеграла $J(\varepsilon) \equiv \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_\varepsilon d\mathbf{x}ds$. Но поскольку можно считать $|\nabla\varphi_\varepsilon| \leqslant 2/\varepsilon$, а ввиду теорем вложения [108] верно

$$\mathbf{u} \in L_1(0,T,C^\sigma(\Omega)), \qquad \sigma(r) = r\ln^2\frac{1}{r}, \tag{4.21}$$

мы легко получаем $|J(\varepsilon)| \leqslant C\ln^{2-\alpha}(1/\varepsilon)$. Теорема 4.3 доказана.

Мы намеренно не стремились к максимальной общности при формулировке Теоремы 4.3, желая сделать ее изложение прозрачнее. Поясним возможные обобщения. Вместо (4.1) можно рассматривать более общие тензоры $\mathbb{P}$, являющиеся градиентами диссипативных потенциалов вида

$$V = \Lambda((\mathrm{tr}\mathbb{D})^2) + \sum_{s=1}^N \Gamma_s(|\mathbb{D}^s|^2), \tag{4.22}$$

с произвольным $N \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\mathbb{P}(\mathbf{u}) = 2\Lambda'((\mathrm{tr}\mathbb{D})^2)(\mathrm{tr}\mathbb{D})\cdot\mathbb{I} + \sum_{s=1}^N 2s\Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2)\mathbb{D}^{2s-1}. \tag{4.23}$$

Важно лишь, чтобы функции Λ и Γ_s были достаточно гладкими и выпуклыми, хотя бы одна из них была класса $\mathcal{K}$ (см. (2.16)), а $\Gamma_1(s)$ росла не медленнее чем $\exp(s^{\varepsilon_0})$, $\varepsilon_0 > 0$. Например, в случае (4.1) все же не обязательно $\varepsilon_0 \geqslant 1/2$, а достаточно взять любое $\varepsilon_0 > 0$; и наоборот, если $\varepsilon_0 \geqslant 1/2$, то λ может быть любым (в том числе постоянным). Вместо $(4.10)_1$ достаточно потребовать $\mathbf{f} \in K_{\Psi_{\alpha/2}}(Q_T)$.

Замечание 4.5. В построенном нами слабом решении (так же как и в других моделях, рассматриваемых далее в разделах 4,5) плотность неотрицательна, но мы не можем гарантировать ее строгую положительность, даже если таковой является начальная плотность. Это связано с трудностями при получении оценок на плотность снизу, эти трудности характерны вообще для слабых решений для уравнений (1.1), (1.2), и описанный «пробел» имеется во всех результатах по слабым решениям, перечисленных в разделе 1. Проблема оценки плотности снизу тесно связана с проблемой регулярности решений системы (1.1), (1.2) [113]. В [9] этот вопрос был решен (при $n = 2$) благодаря построению сильных и классических решений. В общем случае трехмерных движений проблема открыта. В разделе 6 мы также обсудим этот вопрос. □

Рассуждения, проведенные нами для модели Бюргерса, могут быть в основном повторены для более «физичной» модели с наличием давления $p = \rho$ в (2.5). На этот раз абстрагируемся от конкретных представлений вида (4.1) или (4.23) и потребуем от $\mathbb{P}$ того минимума свойств, которые нам нужны математически, сформулировав их в виде набора аксиом (A1–A4 — см. ниже). Впрочем, с позиций механики (выполнение постулатов Стокса) это фактически означает ОУ вида (4.23). Будем, как и выше, требовать экспоненциальный рост $\mathbb{P}$ по $\mathbb{D}$ (причем для простоты не будем теперь выделять $\mathrm{tr}\mathbb{D} = \mathrm{div}\mathbf{u}$ по скорости роста); за скорость этого роста будет отвечать некоторая функция $M \in \mathcal{K}$. Для определенности будем считать

$$M(s) \geqslant e^s \qquad \text{при} \quad s \gg 1. \tag{4.24}$$

Соответственно, для построения решения нам потребуются банаховы пространства

$$X = \{\mathbf{u} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)\,|\,\mathbb{D}(\mathbf{u}) \in L_M(\Omega);\, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0\}, \qquad \|\mathbf{u}\|_X = \|\mathbb{D}(\mathbf{u})\|_{L_M(\Omega)}; \tag{4.25}$$

$$Y = \{\,\mathbf{v} \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q_T)\,|\,\mathbb{D}(\mathbf{v}) \in L_M(Q_T),\, \mathbf{v}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0\,\}, \quad \|\mathbf{v}\|_Y = \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L_M(Q_T)}. \tag{4.26}$$

Для краткости поменяем ролями обозначения $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}'$ в (1.2) и (2.5), т. е. вместо (1.2) будем писать уравнение

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \mathrm{div}\mathbb{P}' + \rho\mathbf{f}, \tag{4.27}$$

а вместо (2.5) напишем

$$\mathbb{P}' = -\rho\mathbb{I} + \mathbb{P}(\mathbf{u}). \tag{4.28}$$

От тензора $\mathbb{P}(\mathbf{u})$ будем требовать выполнения 4 аксиом:

A1) $\mathbb{P}$ коэрцитивен, т. е. $L(\mathbf{u}) \equiv \int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{u})\,d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega M(|\mathbb{D}(\mathbf{u})|)\,d\mathbf{x}$ при всех $\mathbf{u} \in X$;

A2) $\mathbb{P}$ монотонен, т. е. $\int_\Omega (\mathbb{P}(\mathbf{u}) - \mathbb{P}(\mathbf{v})) : \mathbb{D}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,d\mathbf{x} \geqslant 0$ при всех $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X$;

A3) $\mathbb{P}(\cdot)$ действует, в определенном смысле, ограниченным образом: $\int_\Omega \overline{M}(|\mathbb{P}(\mathbf{u})|)\,d\mathbf{x} \leqslant C_1 + C_2\int_\Omega M(|\mathbb{D}(\mathbf{u})|)\,d\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{u} \in X$;

A4) а также $\mathbb{P}$ непрерывен в следующем смысле: $\mathbb{P}(\mathbf{u} - \varepsilon\mathbf{v}) \to \mathbb{P}(\mathbf{u})$ $*$-слабо в $L_{\overline{M}}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X$.

Выписанным аксиомам удовлетворяют, например, тензоры (4.23), в которых все Γ_s и Λ — неубывающие выпуклые функции класса C^1, причем $M(\xi) = 2\xi^2\Gamma_1'(\xi^2)$ есть N-функция, удовлетворяющая Δ_3-условию, и Γ_1 растет существенно быстрее всех прочих коэффициентов.

Для системы (1.1), (4.27), (4.28) будем рассматривать ту же начально-краевую задачу (2.1), (2.2). Для гладких решений этой задачи, как и в Лемме 4.1, верна первая энергетическая оценка, вытекающая из (2.3), (2.4). На этот раз, помимо оценки скорости (а именно, в пространстве Y — см. (4.27) и аксиому A1), первая энергетическая оценка ввиду наличия «энтропии» $s(\rho) = \rho \ln \rho$ в (2.4) дает еще и оценку ρ в $L_\infty(0, T, L_{\Phi_1}(\Omega))$. Однако, как отмечено в начале раздела 3 и в доказательстве Леммы 4.4, нам необходимо $\rho|\nabla \otimes \mathbf{u}| \in L_1(Q_T)$, что при таких свойствах ρ требует $\nabla \otimes \mathbf{u} \in L_{\Psi_1}$, а это, в свою очередь, требует ограниченности $\mathbb{D}$ (см. Пример 3.3), которой добиться не удается ни при каких вязкостях. Это и приводит к необходимости дополнительных оценок на плотность, развитых в разделе 2, а следовательно, к выбранным требованиям на вязкость. Как и в Лемме 4.1, такие оценки примут вид (4.7). Вторая энергетическая оценка (аналог (4.8), (4.9)) в модели (4.28) уже не имеет места. Это, в частности, означает, что в процессе предельного перехода в конвективных членах мы уже не можем опираться на (4.9), и нужен другой источник информации об ограниченности $\mathbf{u}_t$. Уравнение (1.2) таким источником может служить только если приближенные решения строятся методом, «сохраняющим уравнения». Выбранный нами в модели Бюргерса метод Галеркина—Фаэдо для уравнения импульса таким свойством «сохранения уравнения» не обладает. Поэтому на этот раз естественно остановить свой выбор на методе дискретизации по времени:

$$\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\tau} + \operatorname{div}(\rho_k(\mathbf{u}_k)_h) = \varepsilon \Delta \rho_k, \tag{4.29}$$

$$\frac{\rho_k \mathbf{u}_k - \rho_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}}{\tau} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k \otimes (\mathbf{u}_k)_h) = \operatorname{div}\mathbb{P}(\mathbf{u}_k) - \nabla \rho_k + \rho_k \mathbf{f}_k, \tag{4.30}$$

$$\left.\frac{\partial \rho_k}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \mathbf{u}_k|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.31}$$

где для удобства применена параболическая регуляризация и сглаживание конвективных членов (индекс h означает усреднение по $\mathbf{x}$ радиусом h). В (4.29)–(4.31) $k \geqslant 1$. При $k = 0$ положим $\mathbf{u}_k$, ρ_k равными соответственно начальной скорости $\mathbf{u}_0$ и усреднению ρ_{0m} от начальной плотности ρ_0 с радиусом усреднения $1/m$. При этом предполагаем, что $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in L_{\Psi_{\beta/2}}(\Omega)$; в (4.30) обозначено $\mathbf{f}_k(x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} \mathbf{f}(s, x) ds$. Остается доказать разрешимость (4.29)–(4.31) и перейти к пределу при $(\tau, \varepsilon, h) \to 0$. Подробные формулировки и доказательства соответствующих результатов можно найти в [33], [34]; здесь мы приведем лишь ключевые моменты.

Первый шаг состоит в доказательстве разрешимости релаксированной стационарной задачи:

$$\operatorname{div}\mathbb{P}(\mathbf{u}) = \alpha\rho\mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla\rho - \rho\mathbf{f}_1 - \alpha\mathbf{f}_2, \tag{4.32}$$

$$\alpha\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}_h) = \alpha g + \varepsilon\Delta\rho, \qquad \rho \geqslant 0 \tag{4.33}$$

с краевыми условиями (4.31).

Лемма 4.6. Пусть заданы $\mathbf{f}_1 \in K_{\Psi_{\beta/2}}(\Omega)$, $\beta > 3$, $g \in C^1(\Omega)$, $g \geqslant g_0 > 0$, $\mathbf{f}_2 \in L_1(\Omega)$ и положительные числа ε, h. Тогда существует такое число $\alpha_0(h, \varepsilon, \|g\|_{L_{\Phi_\beta}(\Omega)}, \|\mathbf{f}_1\|_{L_{\Psi_{\beta/2}}(\Omega)}, \|\mathbf{f}_2\|_{L_1(\Omega)})$, что при любом $\alpha > \alpha_0$ существует решение задачи (4.32), (4.33), (4.31), удовлетворяющее оценкам

$$\rho \geqslant \varepsilon_0(\alpha, g_0, h) > 0, \quad \|\rho\|_{L_{\Phi_\beta}(\Omega)} \leqslant \alpha, \quad \int\limits_\Omega M(|\mathbb{D}(\mathbf{u})|) d\mathbf{x} \leqslant C(\alpha).$$

Из Леммы 4.6 вытекает разрешимость серии задач (4.29)–(4.31) при $0 < \tau < \tau_*(\varepsilon, h)$.

Сформулируем теперь основной результат для модели с давлением (4.28):

Теорема 4.7. Пусть заданы $\mathbf{f} \in K_{\Psi_{\beta/2}}(Q_T)$ ($\beta > 7/2$, $T > 0$ — произвольные); $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$, $\rho_0 \geqslant 0$, и такое $\mathbf{w}_0$, что $\mathbf{w}_0/\rho_0 \in L_{\Psi_\beta}(\mathrm{supp}\rho_0)$. Тогда в Q_T существует решение задачи (1.1), (4.27), (4.28), (2.1), (2.2) в классе $\rho \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, $\rho \geqslant 0$, $\mathbf{u} \in Y$ (см. (4.26)). При этом уравнение (1.1) выполнено в пространстве $L_M(0, T, W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, а (4.27) — в Y^*; начальные данные (2.2) принимаются по непрерывности в пространствах $W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega)$ и X^* соответственно, краевое условие (2.1) понимается в смысле значений непрерывной по Гельдеру (по $\mathbf{x}$ при всех t) функции. Всякое решение указанного класса удовлетворяет энергетическому тождеству

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho\ln\rho\right) d\mathbf{x}\,\Big|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\mathbb{P}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f})\, d\mathbf{x}ds = 0$$

и закону сохранения массы (2.3).

Доказательство — в основном как для Теоремы 4.3. Отличия лишь в следующем:

1. Несколько иные пространства для решения (ср. обозначения (4.4), (4.5) и (4.25); новое пространство Y и худшая суммируемость $\mathbf{u}$ по t).
2. Громоздкость работы с дискретизованными уравнениями.
3. Необходимость устранения члена $\varepsilon\Delta\rho$ в пределе.
4. Указанный выше момент с ограниченностью $(\rho\mathbf{u})_t$.
5. Несколько более тяжелое доказательство энергетического тождества: класс для $\mathbf{u}$ стал хуже, и добавился новый «энтропийный» член $\rho\ln\rho$, с которым нужно разобраться с помощью ренормализации уравнения (1.1).

При доказательстве (2.3) мы снова опираемся на (4.21). □

5. Теорема существования для сред Бингама

Характерным свойством вязкопластических сред Шведова—Бингама является отсутствие жидкого течения в случае, если напряжения в рассматриваемом объеме не превышают заданного порога текучести, в противном случае течение происходит по закону вязких жидкостей [49]. Таким образом, в этих средах возможно образование твердотельных зон (ядер), которые со временем могут исчезать, появляться и менять форму. Эти среды не являются жидкостями в смысле постулатов Стокса, но их традиционно все же именуют жидкостями. Модели жидкостей Бингама находят свое применение при изучении движений таких сред, как пасты, цементы, суспензии, некоторые виды нефтей, буровые растворы. Первоначально модель таких сред была сформулирована Ф.Н.Шведовым [149] и Ф.Бингамом [71] в простейшем случае сдвиговых течений (эти авторы экспериментально изучали такие среды в указанных течениях). Для течений произвольного характера (несжимаемый случай) эта модель была выписана в [98], [141] (см. также [135], [11], [16]). В работах [11] и [16] был решен ряд плоских задач, причем в [16] впервые предложена вариационная формулировка, позднее занявшая преобладающее место в теории. Следует, однако, отметить, что эквивалентность исходной (дифференциальной) и вариационной формулировок не является математически очевидным фактом (см.

об этом [41]) и не всегда имеет место. В статье [42] было предпринято одно из первых систематических исследований модели Бингама на предмет математических теорем существования и единственности в вариационной формулировке; это было сделано в рамках некоторых упрощений (стационарность, линеаризация). В работах [43], [44] эта деятельность резюмируется, но, опять же, нестационарный случай рассматривается без конвективных членов. В книге [15] были доказаны теоремы существования и единственности для вариационной формулировки без упрощений и теоремы о предельном переходе по вязкости, но вопрос о связи вариационной постановки с исходной решен формально. Более подробно исторический обзор по этой теме можно найти в [44] и [19].

В настоящее время для вариационного подхода в теории несжимаемой жидкости Бингама имеется масса результатов. Отметим работы [104], [107], [95], [94], [51], [109], в которых показывается дальнейшая регулярность решений и рассматриваются более общие ОУ. В связи с тем, что в вариационном подходе затруднительно непосредственное изучение поведения ядер, в ряде недавних работ был предложен возврат к исходной дифференциальной постановке в модели Бингама (когда решение есть тройка функций: ρ, $\mathbf{u}$ и $\mathbb{P}$, т. к. в твердотельных зонах $\mathbb{P}$ «не зависит» от ρ, $\mathbf{u}$). В [68], [120], [147] этот подход был применен для одномерных движений сжимаемой жидкости и многомерных — несжимаемой; в последнем случае была строго показана эквивалентность двух подходов, показано предельное соотношение между средами Бингама и аппроксимирующими их стоксовыми жидкостями, исследовано поведение ядер.

Для сжимаемого случая, кроме упомянутой «одномерной» работы [68], не было известно результатов о разрешимости в целом. Этот пробел мы попытаемся восполнить в настоящей статье. Промежуточное положение занимает модель неоднородной несжимаемой жидкости Бингама, которая исследуется в работах [72], [93] (вариационный подход) и [69] (дифференциальный подход). Мы также будем придерживаться последнего подхода по причине, во-первых, упомянутой перспективности для дальнейшего изучения ядер, а во-вторых, ввиду того, что для неоднородной (а тем более сжимаемой) среды вариационный подход теряет свое удобство.

Итак, рассмотрим снова систему (1.1), (1.2), в которой тензор напряжений $\mathbb{P}$ теперь переобозначим через $\mathbb{P}_r$:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \operatorname{div}\mathbb{P}_r + \rho\mathbf{f}. \tag{5.1}$$

Аналогично несжимаемому случаю, ОУ сред Бингама запишем в виде

$$\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_f + \mathbb{P}_b, \tag{5.2}$$

где $\mathbb{P}_f$ — тензор напряжений стоксовой жидкости (будет уточнен позже), а $\mathbb{P}_b$ есть многозначная функция от $\mathbb{D}$, задаваемая формулой

$$\mathbb{P}_b = p_* \begin{cases} \mathbb{T}\left(\dfrac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right), & \mathbb{D} \neq 0, \\ \text{любой из } \overline{\mathcal{P}}, & \mathbb{D} = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

т. е. в тех точках, где $\mathbb{D} = 0$, тензор $\mathbb{P}_b$ принимает вполне определенные значения, но априори неизвестные (не выражающиеся через ρ и $\mathbf{u}$), и потому решение системы (1.1), (5.1)–(5.3) есть уже не пара $(\rho, \mathbf{u})$, как в стоксовом случае, а тройка $(\rho, \mathbf{u}, \mathbb{P})$. Здесь $\mathcal{P}$ — некоторая ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{S}_n$ симметричных тензоров ранга 2, действующих в $\mathbb{R}^n$, причем $0 \in \mathcal{P}$, $\rho(0, \partial\mathcal{P}) = 1$, т. е. $\mathcal{P}$ вписана в единичный шар пространства $\mathbb{S}_n$; $p_* \geqslant 0$ — заданное (постоянное) пороговое напряжение, а $\mathbb{T}$ — тензорное поле, действующее из единичной сферы $S_1 \subset \mathbb{S}_n$ в $\partial\mathcal{P}$. Другими словами, $p_*\mathcal{P}$ есть область напряжений, соответствующих твердотельному движению (т. к. $\mathbb{P}_b \in p_*\overline{\mathcal{P}}$, а $\mathbb{P}_f$ — стоксов), а $\mathbb{T}$ определяет связь напряжений и скоростей деформаций при выходе напряжений в критическую зону $p_*\partial\mathcal{P}$. Таким образом, твердотельные зоны (ядра) предполагаются несжимаемыми, что является естественным приближением реальной ситуации: в этих зонах напряжения малы, и в них сжимаемостью можно пренебречь. В жидких зонах напряжения могут быть велики, и учет сжимаемости естествен. Отметим, что значение $p_* = 0$ соответствует $\mathbb{P}_b \equiv 0$, т. е. стоксовой жидкости.

Мы будем рассматривать асимметричный случай (5.3) в связи с тем, что это не требует серьезных дополнительных усилий по сравнению с симметричным случаем (когда $\mathcal{P}$ есть единичный шар в $\mathbb{S}_n$, а $\mathbb{T}$ — тождественное отображение), обычно рассматриваемым в литературе.

Поставим для системы (1.1), (5.1)–(5.3) ту же начально-краевую задачу (2.1), (2.2), что и для стоксовых ОУ, рассмотренных в разделе 4. Чтобы доказать глобальную разрешимость этой задачи, будем опираться на такой же результат случае $p_* = 0$, полученный в разделе 4. Указанный результат неприменим непосредственно к случаю $p_* > 0$, т. к. тогда (5.2) определяет многозначную функцию от $\mathbb{D}$. Таким образом, имеется два пути распространения результата раздела 4 на интересующий нас случай $p_* > 0$:

1. Обосновать возможность повторения результатов раздела 4 в этом случае, проведя заново все доказательства в изменившейся ситуации.
2. Регуляризовав бингамовский тензор $\mathbb{P}_b$ и сведя его к стоксовому, перейти к пределу в построенных на основе раздела 4 решениях регуляризованной задачи (аналогично тому, как это делалось в [68] для случая $n = 1$).

Второй путь предпочтительнее, поскольку на нем удобно отследить появление «твердотельных зон» (где $\mathbb{D} = 0$) и поведение в них напряжений. Этот путь мы и изберем в разделе 5.

Чтобы сформулировать задачу точно, нам не хватает еще описания рассматриваемых нами классов тензоров $\mathbb{P}_f$ и $\mathbb{P}_b$. От стоксовой составляющей $\mathbb{P}_f$ будем требовать почти то же что и в разделе 4, т. е.

$$\mathbb{P}_f = -\rho\mathbb{I} + \mathbb{P}(\mathbf{u}), \tag{5.4}$$

где $\mathbb{P}$ удовлетворяет аксиомам A1–A4 (см. раздел 4) и нескольким дополнительным, а именно, уточненной непрерывности:

A5) Если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) \to \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п. в. в Q_T, и $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ ограничены в $K_M(Q_T)$, то $\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon) \to \mathbb{P}(\mathbf{u})$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$;

и требованиям типа выпуклости:

А6) Интеграл $\int\limits_0^t L(\mathbf{u})ds$ задает функционал от $\mathbf{u}$, $*$-слабо полунепрерывный снизу, т. е. если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) \to \mathbb{D}(\mathbf{u})$ $*$-слабо в $L_M(Q_t)$, то $\int\limits_0^t L(\mathbf{u})ds \leqslant \liminf \int\limits_0^t L(\mathbf{u}_\varepsilon)ds$;

А7) Если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) \to \mathbb{D}(\mathbf{u})$ $*$-слабо в $L_M(Q_t)$, и $\int\limits_0^t L(\mathbf{u})ds \geqslant \limsup \int\limits_0^t L(\mathbf{u}_\varepsilon)ds$, то для некоторой последовательности $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \to \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п. в. в Q_t.

Смысл обозначений M, X и L прежний (см. А1, (4.24) и (4.25)).

В качестве примера тензоров $\mathbb{P}$, удовлетворяющих аксиомам А1–А7, можно указать класс (4.23) с теми же ограничениями на Λ и Γ_s, которые были оговорены после аксиом А1–А4, плюс (для выполнения А5–А7) $\Lambda, \Gamma_s \in C^3$ и строгая выпуклость функций $\Lambda'(\xi^2)\xi^2$ и $\Gamma_s'(\xi^2)\xi^2$.

От бингамовской составляющей, т. е. от поля $\mathbb{T}$ в представлении (5.3), будем требовать выполнения следующих аксиом:

В1) $\mathbb{T}$ — непрерывное отображение;

В2) $\mu(\mathbb{B}) \equiv \mathbb{T}(\mathbb{B}) : \mathbb{B} > 0$ при всех $\mathbb{B} \in S_1$;

В3) $\mathbb{T}(\mathbb{B}_2) : \mathbb{B}_1 \leqslant \mathbb{T}(\mathbb{B}_1) : \mathbb{B}_1 = \mu(\mathbb{B}_1)$ при всех $\mathbb{B}_{1,2} \in S_1$.

Из выписанных аксиом следует, что μ — непрерывная функция со значениями из интервала вида $[\mu_0, 1]$, где $\mu_0 = \mathrm{const} > 0$, а функционал $\varkappa(\mathbb{D}) \equiv \mu\left(\frac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right)|\mathbb{D}|$ (доопределенный нулем при $\mathbb{D} = 0$) — выпуклый и непрерывный.

Тривиальный пример описанного класса тензоров $\mathbb{P}_b$ дается вышеупомянутым симметричным случаем, когда $\mu \equiv 1$, $\varkappa(\mathbb{D}) = |\mathbb{D}|$, и выполнение аксиом В1–В3 очевидно. При этом тензор $\mathbb{P}_b$ будет потенциальным, причем его потенциал $V_b(\mathbb{D}) = p_*|\mathbb{D}|$ с той оговоркой, что при таком представлении при $\mathbb{D} \to 0$ $\mathbb{P}_b$ будет принимать значения только на сфере $p_*\partial\mathcal{P} = p_*S_1$ (однако при переходе к слабому пределу, как в Теореме 5.3, значения могут приниматься во всем шаре $p_*\overline{\mathcal{P}}$). Кроме того, описанные тензор и потенциал имеют вид (4.22), (4.23) с $\tilde{\Gamma}_1(\xi) = p_*\sqrt{\xi}$ (остальные члены нулевые), так что если $\mathbb{P}$ также задается формулами (4.22), (4.23), то это представление имеет место и для результирующих потенциала $V_r = V_b + V$ и тензора $\mathbb{P}_b + \mathbb{P}$, но тогда $(\tilde{\Gamma}_1 + \Gamma_1)$ не может быть выпуклой в окрестности 0, поскольку $\Gamma_1' \geqslant 0$, откуда $(\tilde{\Gamma}_1 + \Gamma_1)'(+0) = +\infty$. Поэтому $\mathbb{P}_b$ все же удобнее рассматривать как отдельное слагаемое.

Можно предъявить и нетривиальные примеры пар $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$ (т. е. асимметричных $\mathbb{P}_b$), удовлетворяющих аксиомам В1–В3 [39].

Теперь мы готовы окончательно сформулировать основную задачу.

Определение 5.1. Задачей А назовем задачу (1.1), (5.1)–(5.4), (2.1), (2.2), в которой тензор $\mathbb{P}$ обладает свойствами А1–А7 с ограничением (4.24), а поле $\mathbb{T}$ — свойствами В1–В3. $\square$

Как уже говорилось, задачу А удобно решать регуляризацией ОУ (5.2) и сведением его к стоксовому ОУ. Этот путь традиционен как в теоретических исследованиях [144], [68], так и при численных расчетах (см., например, [152]).

Нам потребуется обозначение

$$\mathbb{P}_{b0} = p_* \begin{cases} \mathbb{T}\left(\dfrac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right), & \mathbb{D} \neq 0, \\ 0, & \mathbb{D} = 0 \end{cases}$$

и семейство регуляризованных тензоров $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, обладающее свойствами:

C1) $\mathbb{P}_{b\varepsilon} \in p_*\overline{\mathcal{P}}$ всюду;
C2) При $\mathbb{D} = 0$ верно $\mathbb{P}_{b\varepsilon} = 0$ (т. е. это стоксов тензор);
C3) $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}) \to \mathbb{P}_b(\mathbf{v})$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $|\mathbb{D}(\mathbf{v})| \in [\delta, d_0]$ при всех $\delta > 0$ с фиксированным $d_0 > 0$;
C4) $\mathbb{P}_{b\varepsilon} = \mathbb{P}_b$ при $|\mathbb{D}| \geqslant d_0$;
C5) Сумма $(\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon})$ удовлетворяет аксиомам A1–A3, а $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ — аксиомам A2–A4.

Например, можно взять

$$\mathbb{P}_{b\varepsilon} = \varphi_\varepsilon(\varkappa(\mathbb{D}))\mathbb{P}_b, \tag{5.5}$$

где $\varphi_\varepsilon(z) = z/\varepsilon$ при $z \leqslant \varepsilon$ и $\varphi_\varepsilon(z) = 1$ при $z > \varepsilon$. В симметричном случае тензоры $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ из (5.5) соответствуют аппроксимации Иосиды [46] для $\mathbb{P}_b$; но в асимметричном случае последняя принимает нелокальный характер и не столь удобна (особенно с позиций механики), так что наша «явная конструкция» выглядит предпочтительнее.

Определение 5.2. Задачей A_ε назовем задачу (1.1), (5.1), (5.4), (2.1), (2.2), замыкаемую соотношением $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_f + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$, где $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ — аппроксимирующее семейство стоксовых тензоров со свойствами C1–C5. □

К задаче A_ε применима Теорема 4.7, так что при входных данных, удовлетворяющих условиям этой Теоремы, можно гарантировать существование решения $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ задачи A_ε в Q_T при любом $T > 0$ в классе $\rho_\varepsilon \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, $\rho_\varepsilon \geqslant 0$, $\mathbf{u}_\varepsilon \in Y$, а также энергетическое равенство

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\rho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2}{2} + \rho_\varepsilon \ln \rho_\varepsilon \right) d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[(\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon) + \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) - \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{f} \right] d\mathbf{x} ds = 0. \tag{5.6}$$

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 5.3. Пусть заданы: тензорная функция $\mathbb{P}(\cdot)$ со свойствами A1–A7 с ограничением (4.24) (например, в виде (4.23) с вышеописанными ограничениями на коэффициенты) и поле $\mathbb{T}$ со свойствами B1–B3 (например, в стандартном симметричном виде с тождественным полем $\mathbb{T}$). Пусть произвольно заданы число $T > 0$ и входные данные того же класса, что и в Теореме 4.7. Тогда:

1. Задача A имеет в Q_T решение класса $\rho \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, $\rho \geqslant 0$, $\mathbf{u} \in Y$ (см. (4.26)), удовлетворяющее энергетическому равенству

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \ln \rho \right) d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[(\mathbb{P}(\mathbf{u}) + \mathbb{P}_b(\mathbf{u})) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right] d\mathbf{x} ds = 0. \tag{5.7}$$

2. Уравнение (5.1) (замыкаемое соотношениями (5.2)–(5.4)) удовлетворяется этим решением в том смысле, что $\mathbb{P}_b(\mathbf{u}) = p_*\mathbb{T}\left(\dfrac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right)$ при $\mathbb{D} \neq 0$, а на множестве $\{\mathbb{D} = 0\}$ величина $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ есть вполне определенный тензор $\overline{\mathbb{P}}_b$ со значениями из множества $p_*\overline{\mathcal{P}}$.

3. Решение $(\rho, \mathbf{u})$ есть предел решений $(\rho_{\varepsilon_k}, \mathbf{u}_{\varepsilon_k})$ некоторой последовательности задач $\mathrm{A}_{\varepsilon_k}$, сходящихся к нему в смысле
$$
\begin{gathered}
(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon), \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)) \to (\rho, \mathbf{u}, \mathbb{P}(\mathbf{u}), \mathbb{P}_b(\mathbf{u})) \\
*\text{-слабо в } L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega)) \times Y \times L_{\overline{M}}(Q_T) \times L_\infty(Q_T),
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$
причем $(\rho_{\varepsilon_k}, \mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k})) \to (\rho, \mathbb{D}(\mathbf{u}))$ сильно в $L_p(0,T,L_{\Phi_*}(\Omega)) \times L_p(Q_T)$ с любыми $p < +\infty$, $\Phi_* \lll \Phi_\beta$, и п. в. в Q_T.
4. Уравнение (1.1) выполнено для рассматриваемого решения в пространстве $L_M(0,T,W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, а (5.1) — в Y^*, начальные данные (2.2) принимаются по сильной непрерывности в пространстве $W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega) \times X^*$, а краевое условие (2.1) понимается в смысле значений непрерывной по Гельдеру (по $\mathbf{x}$ при всех t) функции.

Доказательство подробно приведено в [39], здесь мы лишь обратим внимание на ключевые моменты. Без особых препятствий, аналогично разделу 4, получаются равномерные оценки приближенных решений в пространствах (5.8), и следовательно, их сходимость вида (5.8) к некоторому пределу
$$
\rho \in L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in Y, \quad \overline{\mathbb{P}} \in L_{\overline{M}}(Q_T), \quad \overline{\mathbb{P}}_b \in L_\infty(Q_T).
$$
Обоснование предела в конвективных членах проводится аналогично Теоремам 4.3 и 4.7, так что остается лишь «снять черту» с $\overline{\mathbb{P}}$ и $\overline{\mathbb{P}}_b$, т. е. показать, что выполнено именно уравнение (5.1), а не его аналог с $\mathbb{P}_r = \overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}_b$, который пока получен нами. Используя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(5.6)$ и энергетическое равенство для предельного «решения» $(\rho, \mathbf{u}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{\mathbb{P}}_b)$ (которое имеет место аналогично Лемме 4.4), мы заключаем
$$
\lim_{\varepsilon\to 0}(N(\mathbf{u}_\varepsilon) + K(\rho_\varepsilon)) = \int_0^t \int_\Omega (\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{u})\, d\mathbf{x}ds + K(\rho), \tag{5.9}
$$
где $K(\rho) = \int\limits_\Omega \rho \ln \rho \, d\mathbf{x}$, а
$$
N(\mathbf{u}) = \int_0^t \int_\Omega (\mathbb{P}(\mathbf{u}) + \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u})) : \mathbb{D}(\mathbf{u})\, d\mathbf{x}ds = \int_0^t L(\mathbf{u}) ds + p_* \int_0^t \int_\Omega \varkappa(\mathbb{D}(\mathbf{u}))\, d\mathbf{x}ds.
$$
Используя $*$-слабую полунепрерывность снизу функционала K и монотонность тензора $(\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon})$, из (5.9) можно вывести
$$
\int_0^t \int_\Omega [(\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}_b) - (\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b0})(\mathbf{v})] : (\mathbb{D}(\mathbf{u}) - \mathbb{D}(\mathbf{v}))\, d\mathbf{x}ds \geqslant 0, \qquad \forall \mathbf{v} \in Y. \tag{5.10}
$$
Полагая в (5.10) $\mathbf{v} = (1 \pm \varepsilon_1)\mathbf{u}$, $\varepsilon_1 > 0$, при $\varepsilon_1 \to 0$ получим:
$$
\int_0^t \int_\Omega (\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{u})\, d\mathbf{x}ds = N(\mathbf{u}) \tag{5.11}
$$
(теперь энергетическое равенство принимает требуемую форму (5.7)), так что (5.9), ввиду $*$-слабой полунепрерывности снизу функционала $\int\limits_\Omega \varkappa(\mathbb{D})\, d\mathbf{x}$, дает

$\int\limits_0^t L(\mathbf{u})ds \geqslant \limsup \int\limits_0^t L(\mathbf{u}_\varepsilon)ds$, и благодаря аксиоме A7 можно заключить сходимость $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \to \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п. в. в Q_T, а потому и сильно в любом $L_p(Q_T)$ с $p < +\infty$. Теперь (5.9) и (5.11) ввиду $*$-слабой полунепрерывности снизу функционала N дают $K(\rho) \geqslant \limsup K(\rho_{\varepsilon_k})$, что влечет сильную сходимость и $\rho_{\varepsilon_k} \to \rho$.

В итоге $\mathbb{P}(\mathbf{u}) = \overline{\mathbb{P}}$, а на множестве $F = \{\, \mathbb{D}(\mathbf{u}) \neq 0 \,\}$ верно и $\mathbb{P}_b(\mathbf{u}) = \overline{\mathbb{P}}_b$. В «твердотельной зоне» $Q_T \setminus F$ тензор $\mathbb{P}_b$ разрывен, сходимость $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ к $\overline{\mathbb{P}}_b$ остается слабой, но можем использовать тот факт, что $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon) \in p_*\overline{\mathcal{P}}$, а потому, ввиду выпуклости $\mathcal{P}$,

$$\overline{\mathbb{P}}_b = \underset{L_\infty(Q_T\setminus F)}{* - w} \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon) \in p_*\overline{\mathcal{P}}.$$

Таким образом, на всем Q_T имеем $\overline{\mathbb{P}}_b = \mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ в смысле многозначной функции (5.3), и следовательно, (5.1) в требуемом смысле обосновано. $\square$

6. Дополнительные замечания

В разделе 4 нами были построены слабые решения уравнений (1.1)–(1.3). Возникает вопрос о повышении их гладкости. В сжимаемом случае для ньютоновских ОУ (1.4) гладкость решений системы (1.1), (1.2) при $n > 1$ изучалась только в [9] для $n = 2$, остальные упомянутые в разделе 1 работы по многомерным движениям ВСЖ касались лишь слабых решений. В несжимаемом случае теория регулярности обобщенных решений уравнений (1.1), (1.2) развита достаточно хорошо как для ньютоновских ОУ, так и для неньютоновских (вида (1.5), особенно для обобщенных ньютоновских жидкостей) — см. обзор в разделе 1.

Попытаемся показать, к чему приводит попытка обобщения техники априорных оценок решений системы (1.1), (1.2), развитая в [9] для ньютоновского двумерного случая, на случай многомерных неньютоновских уравнений, с использованием уже́ развитого подхода для несжимаемой неньютоновской системы.

Ограничимся сжимаемым аналогом ОУ (1.5), т. е. (2.5) с потенциальным $\mathbb{P}'$:

$$\mathbb{P} = -p(\rho)\mathbb{I} + \frac{\partial V(\mathbb{D})}{\partial \mathbb{D}} \tag{6.1}$$

(но не обязательно $V = V(|\mathbb{D}|)$). Систему (1.1), (1.2) нам теперь будет удобно записывать в форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{6.2}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{w} + \mathbf{f}, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbb{P} = \rho\mathbf{w}, \tag{6.4}$$

где $\mathbf{w}$ — вспомогательный вектор (играющий в дальнейшем важную роль), а

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla \tag{6.5}$$

— так наз. оператор материальной производной. Форма записи (6.1)–(6.5) системы уравнений ВСЖ удобна тем, что является готовым «базисом» для удачной серии дифференциальных продолжений и «подсказывает» выбор переменных в этих продолжениях.

При выводе априорных оценок решений системы (6.1)–(6.5) фундаментальную роль играют так наз. энергетические тождества — дифференциальные уравнения (по t) для специальных функционалов от решения. Мы выводим их достаточно стандартным способом из системы (6.2)–(6.5), рассматриваемой как уравнения для величин $(\rho, \mathbf{u})$, и подходящим образом (а именно, так, чтобы не возникали новые производные от плотности) построенных ее дифференциальных продолжений, рассматриваемых как уравнения для величин (ρ, V), $(\rho, \mathbf{w})$, $(\rho, \nabla\otimes\mathbf{w})$ и т. д. При этом основные операции (в том числе построение дифференциальных продолжений) производятся над уравнением импульса (6.3), а уравнение неразрывности (6.2) и вспомогательное уравнение (6.4) играют роль своеобразных связей, позволяющих исключать возникающие производные от ρ, что необходимо ввиду трудностей оценки ρ на начальном этапе. Подробно описанная процедура изложена в [35], здесь мы укажем на ключевые моменты.

Первое и второе энергетические тождества для $(\rho, \mathbf{u})$ и (ρ, V) соответственно имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \left(\frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + s(\rho)\right) d\mathbf{x} + \int\limits_\Omega \frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D}\, d\mathbf{x} = \ldots, \tag{6.6}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega V\, d\mathbf{x} + \int\limits_\Omega \rho|\mathbf{w}|^2\, d\mathbf{x} = \ldots \tag{6.7}$$

(где «энтропия» $s(\rho)$ введена в (2.6), а многоточиями обозначены незнакоопределенные слагаемые, которые затем следует оценивать через знакоопределенные интегралы в левых частях), они получаются после умножения (6.3) на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_t$ соответственно аналогично тому, как это делалось в Лемме 4.1.

Далее необходимо работать уже́ с дифференциальным продолжением уравнения (6.3), получаемым из него применением операции $\mathbb{D}(\cdot) = \mathrm{Sym}(\nabla\otimes(\cdot))$:

$$\frac{d\mathbb{D}}{dt} + \mathbb{C} = \mathbb{D}(\mathbf{w}) + \mathbb{D}(\mathbf{f}), \tag{6.8}$$

где $\mathbb{C} = \mathrm{Sym}((\nabla\otimes\mathbf{u})^2)$. Все знакоопределенные формы, возникающие на предстоящих этапах, порождаются тензором четвертого ранга $\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}$, который есть билинейная форма над тензорами второго ранга:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}\left\langle \mathbb{A}, \mathbb{B}\right\rangle = \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}} A_{ij} B_{kl}.$$

Применив к (6.8) операцию $\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}\langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \cdot\rangle$, после интегрирования по Ω с учетом (6.2) получим третье энергетическое тождество для $(\rho, \mathbf{w})$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \frac{\rho|\mathbf{w}|^2}{2}\, d\mathbf{x} + \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}\left\langle \mathbb{D}(\mathbf{w}), \mathbb{D}(\mathbf{w})\right\rangle d\mathbf{x} = \ldots \tag{6.9}$$

После еще одного дифференциального продолжения (6.8) и соответствующих (уже достаточно громоздких) манипуляций с системой (6.1)–(6.5) получится четвертое энергетическое тождество для $(\rho, \nabla\otimes\mathbf{w})$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \frac{\rho|\nabla\otimes\mathbf{w}|^2}{2}\, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}\left\langle \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}(\mathbf{w})}{\partial x_k}\right\rangle d\mathbf{x} = \ldots \tag{6.10}$$

Эту цепь тождеств можно продолжать и далее, но для необходимого минимума оценок этого достаточно; главное — добиться достаточной регулярности величин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$, это обеспечит оценку производных от плотности, что является принципиальным шагом. Конечно, правые части тождеств (6.6), (6.7), (6.9) и (6.10) «далеко не безобидны», но (при определенных ограничениях на V) их можно оценить через левые части. В [9], как уже сказано, такая процедура была проделана в двумерном ньютоновском случае, когда эллиптическая система (6.4) порождается оператором Коши—Римана. В нашем же случае для того, чтобы воспользоваться знакоопределенными интегралами в левых частях полученных тождеств для оценки их правых частей, необходимо исследовать регулярность решений квазилинейной эллиптической системы

$$\operatorname{div}\frac{\partial V(\mathbb{D}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbb{D}} = \mathbf{F}. \tag{6.11}$$

Для нее справедливы энергетические тождества, аналогичные нестационарному случаю. Мы не будем их выписывать для экономии места, отметим лишь, что первое энергетическое тождество получается умножением (6.11) на $\mathbf{u}$, второе — дифференцированием (6.11) по x_k и умножением на $\mathbf{u}_{x_k}$, третье — дифференцированием (6.11) по x_k, x_j и умножением на $\mathbf{u}_{x_k x_j}$, и т. д., а возникающие знакоопределенные выражения соответственно имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbb{D}} : \mathbb{D}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}\left\langle \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}\right\rangle, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbb{D}^2}\left\langle \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial x_j \partial x_k}\right\rangle,$$

и т. д. В несжимаемом случае такой прием вывода энергетических тождеств систематически применяется для изучения регулярности решений (6.11) и соответствующей нестационарной системы уравнений движения неньютоновской (несжимаемой) жидкости (см. [118], [102], [26], [53] и ссылки там), однако при этом, помимо несжимаемости, предполагается специальный вид $V = V(|\mathbb{D}|)$ со степенным ростом V, а в случае «продвинутых» оценок — еще и двумерность.

Мы будем рассматривать сжимаемый случай и более общие потенциалы: (4.22) (по-прежнему Λ и Γ_s неотрицательны, монотонны и выпуклы), хотя принципиально новых (не энергетических) оценок получить не удается. Для простоты ограничимся краевыми условиями периодичности по $\mathbf{x}$ (вместо (2.1)). Вторая энергетическая оценка для (6.11) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \Psi(\mathbb{D})\, d\mathbf{x} \leqslant C\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где

$$\Psi(\mathbb{D}) = 2\Lambda'((\mathrm{tr}\mathbb{D})^2)|\nabla \mathrm{tr}\mathbb{D}|^2 + |\nabla \varkappa((\mathrm{tr}\mathbb{D})^2)|^2 +$$
$$+\sum_{s=1}^{N}\left[2s(2s-1)\Gamma_s'(|\mathbb{D}^s|^2)\sum_{k=1}^{n}\left|\,\mathbb{D}^{s-1}\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial x_k}\,\right|^2 + |\nabla \nu_s(|\mathbb{D}^s|^2)|^2\right],$$

$$\varkappa(\xi) = \int\limits_0^{\xi}\sqrt{\Lambda''(\eta)}\,d\eta + 1, \qquad \nu_s(\xi) = \int\limits_0^{\xi}\sqrt{\Gamma_s''(\eta)}\,d\eta + 1.$$

Этой информации уже достаточно, чтобы продолжить цепь энергетических оценок, начатую в разделе 4 (где из (6.6) и (6.7) были получены оценки, давшие существование слабых решений), а именно, получить оценку из (6.9), по крайней мере, в следующем модельном случае: $p = 0$ (модель Бюргерса), а $\Lambda(\xi)$

и $\Gamma_s(\xi)$ стремятся к $+\infty$ при $\xi \to \xi_* < +\infty$ (начальные данные по прежнему берутся в виде (2.2)). Третья энергетическая оценка для нестационарной задачи дает оценку норм $\|\mathbf{w}\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}$ и $\|\mathbb{D}(\mathbf{w})\|_{L_2(Q_T)}$, а тогда уже без особого труда можно оценить величины $\|\rho\|_{L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega))}$, $\|\rho_t\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}$, $\|\nabla\otimes\mathbf{u}_t\|_{L_2(Q_T)}$, $\|\mathrm{div}\mathbb{P}\|_{L_2(0,T,W_r^1(\Omega))}$ и $\|\mathbb{P}\|_{L_\infty(0,T,W_s^1(\Omega))}$ с некоторыми r и s.

Существенную роль в этом построении сыграл тот факт, что в рассмотренном модельном случае $\mathrm{div}\mathbf{u}$ автоматически ограничена, так что оценка ρ сверху и снизу вытекает немедленно, в отличие от общего случая, когда эту оценку, напротив, получить не удается, что и служит одним из основных препятствий на пути повышения гладкости даже в ньютоновском случае (см. Замечание 4.5).

Описанных оценок достаточно для доказательства существования сильного решения задачи (6.1)–(6.5), (2.2) (с краевыми условиями периодичности по $\mathbf{x}$).

При подробном анализе [35] энергетических тождеств с целью получения оценок становится ясной возможная последовательность рассмотрения открытых вопросов на пути решения проблемы глобальной разрешимости уравнений сжимаемой степенной жидкости. Укажем эту последовательность вместе со всеми открытыми проблемами, связанными с тематикой статьи, которые представляются нам интересными:

1. Доказательство существования глобального сильного решения для моделей, рассмотренных в разделе 4, хотя бы так же при экспоненциальном росте V (а не модельной ситуации, рассмотренной выше в разделе 6). Для этого достаточно решить следующую проблему:
2. Оценка вторых производных решений квазилинейной эллиптической системы (6.11) в L_r с большими r (в отличие от обычного «энергетического» случая $r = 2$) через $\|\mathbf{F}\|_{L_s}$, $s \gg 1$, в том числе при степенном росте V. Это также позволит решить следующую основную проблему:
3. Теоремы существования в целом слабых и сильных решений для степенных сжимаемых жидкостей без давления или с $p = \rho$.
4. То же с $p = \rho^\gamma$, для чего следует повторить технику [113], [90] для неньютоновских ОУ, а тогда можно снять ограничения на коэффициенты вязкости (которые при $p = \rho$ в любом случае приходится брать растущими функциями от $\mathbb{D}$). Например, интересен математически и физически случай (1.4) с $\mu = \mathrm{const}$, $\lambda = \lambda(\mathrm{div}\mathbf{u})$.
5. Высокая регулярность решений перечисленных задач (стационарных и нестационарных).
6. Оценка на плотность снизу в слабых решениях.

Решение большей части этих вопросов, вероятно, уже не потребует использования пространств Орлича. Но в проблемах, рассмотренных в настоящей статье, эти пространства использовались существенно. Как видно из разделов 2,3, рассмотренные в них вопросы существенно шире, чем применение к проблемам разделов 4,5. В связи с этим естественно указать еще одно интересное применение экстраполяционной техники, развитой в разделе 3. Это проблема единственности решений уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}; \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0. \tag{6.12}$$

Здесь по-прежнему $\mathbf{u}$ — скорость, $\mathbf{f}$ — заданные внешние силы, а p — давление.

Проблема существования и единственности решений краевых задач для (6.12) является классической и имеет богатую историю. Ее полный обзор занял бы очень много места, мы лишь дадим ссылку на статьи [160], [86], [7], [12] и монографию [121], где такой обзор дан с достаточной полнотой. Упомянем важную для наших целей классическую работу [59], где для задачи с условиями

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0; \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \tag{6.13}$$

были доказаны глобальное существование и единственность обобщенных решений (Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей класса C^2). При этом решения строились в классе

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \in L_\infty(Q_T); \qquad \|\nabla p\|_{L_\infty(0,T,L_r(\Omega))} \leqslant Cr, \quad \forall r \gg 1,$$

а единственность имеет место при любом n.

В [160] этот результат был усилен, и единственность решения (6.12), (6.13) была доказана в классе

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L_\infty(0,T,L_r(\Omega))} \leqslant C\theta(r), \qquad r \gg 1 \tag{6.14}$$

при достаточно медленно (логарифмически) растущих θ. Следует также отметить близкий результат [157], в котором вихрь рассматривался в пространствах Бесова; при этом наличие условий на вихрь является необходимым для единственности — при их отсутствии существуют нетривиальные решения системы (6.12) с компактным носителем во времени и пространстве (см. [143], [148]).

Недостатком условий (6.14) является их недостаточная конструктивность — это целое семейство условий, в которых требования на θ [160] весьма громоздкие и с трудом поддаются проверке. Покажем, как можно получить аналогичный результат в более прозрачных терминах с помощью пространств Орлича и экстраполяционных приемов, изложенных в разделе 3. Мы это сделаем конспективно, точные формулировки и доказательства можно найти в [40].

Теорема 6.1. Решение задачи (6.12), (6.13) в классе

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \in L_\infty(0,T,L_M(\Omega)), \qquad M \in \mathcal{K}_1 = \left\{ M \;\middle|\; \int^{+\infty} \frac{\ln\ln M(s)}{s^2} ds = +\infty \right\} \tag{6.15}$$

существует (при $n = 2$) и единственно (при любых n), где давление p определяется с точностью до аддитивной функции от времени.

Доказательство. Существование при $n = 2$ доказывается почти буквально как в [59]. Для разности $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ двух решений задачи имеем

$$\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = -2 \int_0^t \int_\Omega (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_2) d\mathbf{x} ds \tag{6.16}$$

— это соотношение, достаточно очевидное для гладких решений, может быть обосновано и для обобщенных решений рассматриваемого класса [160], [59]. Таким образом, (6.16) дает неравенство вида (2.22) с $\psi = |\mathbf{u}|^2$ и $f = C|\mathbb{D}(\mathbf{u}_2)|$. По Теореме 2.7 для обеспечения $\mathbf{u} = 0$ мы должны требовать $\mathbb{D}(\mathbf{u}_2) \in K_\Phi(Q_T)$ с некоторой $\Phi \in \mathcal{K}$. Оператор задачи для нахождения $\mathbf{u}$ через вихрь $\boldsymbol{\omega}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0; \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

точнее, оператор $\boldsymbol{\omega} \mapsto \nabla \otimes \mathbf{u}$, обладает теми же свойствами в L_p, что и оператор A в Примере 3.3: его норма в $\mathcal{L}(L_p)$ не превосходит Cp [61]. Следовательно (см. Пример 3.3), пространство для вихря должно порождаться функцией $M = \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$ с $\psi(s) = e^{-s}$ (см. (3.6)). Остается показать, что $\Phi \in \mathcal{K}$ эквивалентно $M \in \mathcal{K}_1$, и это в самом деле так, если только M удовлетворяет Δ^2-условию. $\square$

Впрочем, если привлечь доказанную нами Теорему 3.4 (пп. 1b, 2b), то можно показать, что требование (6.14), переписанное в наших обозначениях (3.10) как $\operatorname{rot}\mathbf{u} \in L_\infty(0,T,L_{\theta,\infty}(\Omega))$ (с соответствующими ограничениями на θ, наложенными в [160]), в точности эквивалентно (6.15). Тем самым, результат Теоремы 6.1 совпадает с результатом работы [160]. Однако, на наш взгляд, преимущество нашего результата заключается в его большей прозрачности и удобстве проверки условий теоремы. Равносильность результатов естественным образом согласуется с неулучшаемостью условий на функцию f в неравенстве (2.22), доказанной в разных терминах в [160] (в терминах, сводящихся к пространствам $L_{\theta,\infty}$) и в Теореме 2.7 (в терминах пространств Орлича).

Список литературы

[1] С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Новосибирск, Наука, Сиб. отд., 1983, 320 С.

[2] Дж. Астарита, Дж. Марруччи, *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*, М., Мир, 1978, 312 С.

[3] С.В. Асташкин, *Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p-пространств*, Функ. анализ и его прил. **37**: 3 (2003), 73–77.

[4] С.В. Асташкин, *Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств*, Матем. сборник. **194**: 6 (2003), 23–42.

[5] С.В. Асташкин, *Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции*, Сиб. мат. журн. **46**: 2 (2005), 264–289.

[6] С.В. Асташкин., К.В. Лыков, *Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, «близких» к L_∞*, Сиб. мат. журн. **47**: 5 (2006), 974–992.

[7] К. Бардос, Э.С. Тити, *Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости*, Успехи мат. наук, **62**: 3(375) (2007), 5–46.

[8] Е.И. Бережной, А.А. Перфильев, *Точная теорема экстраполяции для операторов*, Функц. анализ его его прил., **34**: 3 (2000), 66–68.

[9] В.А. Вайгант, А.В. Кажихов, *О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье—Стокса сжимаемой вязкой жидкости*, Сиб. мат. журнал, **36**: 6 (1995), 1283–1316.

[10] М.И. Вишик, *О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с быстро растущими коэффициентами в классах Орлича*, Доклады АН СССР, **151**: 4 (1963), 758–761.

[11] Г. Генки, *Пространственная задача упругого и пластического равновесия*, Изв. АН СССР, ОТН, N 2 (1937).

[12] Р. Даншен, *Аксиально-симметричные несжимаемые потоки с ограниченным вихрем*, Успехи мат. наук, **62**: 3(375) (2007), 73–94.

[13] Ю.А. Дубинский, *Некоторые теоремы вложения в классах Орлича*, Доклады АН СССР, **152**: 3 (1963), 529–532.

[14] Ю.А. Дубинский, *Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях*, Мат. Сб., **67(109)**: 4 (1965), 609–642.

[15] Г. Дюво, Ж.Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, М., Наука, 1980, 384 С.

[16] А.А. Ильюшин, *Деформация вязко-пластического тела*, Уч. зап. МГУ, Механика, вып. 39, 1940.

[17] А.В. Кажихов, А.Е. Мамонтов, *Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлича*, Сиб. мат. журн., **39**: 4 (1998), 831–850.

[18] Я.И. Канель, *Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа*, Дифф. уравнения, **4**: 4 (1968), 721–734.

[19] Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский, *Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание*, М., Наука, 2005, 400 С.

[20] О.И. Королев, А.Е. Мамонтов, *О классах корректности задачи Коши для слабонелинейного уравнения переноса*, Вестник НГУ, серия «математика, механика, информатика», **III**: 2 (2003), 46–61.

[21] М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, М., Физматгиз, 1958, 272 С.

[22] С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, М., Наука, 1978, 400 С.

[23] О.А. Ладыженская, *Новые уравнения для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и глобальная разрешимость краевых задач для них*, Труды МИАН СССР, **102** (1967), 85–104.

[24] О.А. Ладыженская, *О модификациях уравнений Навье—Стокса для больших градиентов скоростей*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1968, вып. 7, 126–154.

[25] О.А. Ладыженская, *Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье—Стокса, существование и гладкость*, Успехи мат. наук, **58**: 2(350) (2003), 45–78.

[26] О.А. Ладыженская, Г.А. Серегин, *О регулярности решений двумерных уравнений динамики жидкостей с нелинейной вязкостью*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **259** (1999), 145–166.

[27] С.Ф. Лукомский, *О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L_1*, Матем. заметки. **70**: 6 (2001), 882–889.

[28] К.В. Лыков, *Экстраполяция в шкале L_p-пространств и сходимость ортогональных рядов в пространствах Марцинкевича*, Вестник СамГУ, 2 (42) (2006), 28–43.

[29] К.В. Лыков, *Критерий сепарабельности экстраполяционного пространства*, Вестник СамГУ, 4 (44) (2006), 5–12.

[30] К.В. Лыков, *О дополняемости подпространств симметричного пространства, порожденных сжатиями и трансляциями*, Вестник СамГУ, 6/1 (46) (2006).

[31] А.Е. Мамонтов, *Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями*, Актуальные проблемы современной математики, , Новосибирск, НГУ. **2** (1996), 95–103.

[32] А.Е. Мамонтов, *Существование глобальных решений многомерных уравнений Бюргерса сжимаемой вязкой жидкости*, Мат. Сб., **190**: 8 (1999), 61–80.

[33] А.Е. Мамонтов, *О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье—Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. I*, Сиб. мат. журнал, **40**: 2 (1999), 408–420.

[34] А.Е. Мамонтов, *О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье—Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. II*, Сиб. мат. журнал, **40**: 3 (1999), 635–649.

[35] А.Е. Мамонтов, *Оценки глобальной регулярности для многомерных уравнений сжимаемой неньютоновской жидкости*, Мат. Заметки, **68**: 3 (2000), 360–376.

[36] А.Е. Мамонтов, *Интегральные представления и преобразования N-функций. I*, Сиб. мат. журнал, **47**: 1 (2006), 123–145.

[37] А.Е. Мамонтов, *Интегральные представления и преобразования N-функций. II*, Сиб. мат. журнал, **47**: 4 (2006), 811–830.

[38] А.Е. Мамонтов, *Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича*, Вестник НГУ, серия «математика, механика, информатика», **VI**: 2 (2006), 34–57.

[39] А.Е. Мамонтов, *Существование глобальных решений многомерных уравнений сжимаемой жидкости Бингама*, Мат. заметки, **82**: 4 (2007), 560–577.

[40] А.Е. Мамонтов, М.И. Уваровская, *Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости: условия существования и единственности решений*, Прикл. мех. техн. физ., **49**: 4 (2008), 130–145.

[41] П.П. Мосолов, *О некоторых математических вопросах теории несжимаемых вязкопластических сред*, Прикл. мат. мех., **42**: 4 (1978), 737–746.

[42] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, *Вариационные методы в теории течений вязкопластической среды*, Прикл. мат. мех., **29**: 3 (1965), 468–492.

[43] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, *Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред*, М., изд. МГУ, 1971.
[44] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, *Механика жесткопластических сред*, М., Наука, 1981, 208 С.
[45] А. Новотны, М. Падула, *Существование и единственность стационарных решений уравнений сжимаемой вязкой теплопроводной жидкости при больших потенциальных и малых непотенциальных внешних силах*, Сиб. мат. журн., **34**: 5 (1993), 120–146.
[46] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, М., Мир, 1988, 512 С.
[47] П.И. Плотников, Ж. Соколовски, *Стационарные решения уравнений Навье—Стокса для двухатомных газов*, Успехи мат. наук, **62**: 3(375) (2007), 117–148.
[48] С.И. Похожаев, *О теореме вложения С.Л.Соболева в случае* $pl = n$, Докл. науч.-техн. конф., секция матем. М., МЭИ, 1965, 158–170.
[49] В. Прагер, *Введение в механику сплошных сред*, М., Изд. иностр. лит., 1963, 312 С.
[50] К.Р. Раджагопал, *О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей*, Успехи мат. наук, **58**: 2(350) (2003), 111–122.
[51] Г.А. Серегин, *О дифференцируемости локальных экстремалей вариационных задач механики жестко-вязкопластических сред*, Изв. ВУЗ, математика, 10(305) (1987), 23–30.
[52] Г.А. Серегин, *Об аттракторах для уравнений, описывающих течение обобщенных ньютоновских жидкостей*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **249** (1997), 256–293.
[53] Г.А. Серегин, *Течение двумерной обобщенной ньютоновской жидкости*, Алгебра и анализ, **9**: 1 (1997), 167–200.
[54] Дж. Серрин, *Математические основы классической механики жидкости*, М., Изд. иностр. лит., 1963, 256 С.
[55] И.Б. Симоненко, *Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича*, Мат. Сб., **63 (105)**: 4 (1964), 536–553.
[56] И.В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М., Наука, 1990, 448 С.
[57] Э. Файрайзл, *Асимптотический анализ полной системы Навье—Стокса—Фурье: от течений сжимаемой к течениям несжимаемой жидкости*, Успехи мат. наук, **62**: 3(375) (2007), 169–192.
[58] В.И. Юдович, *О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений*, Доклады АН СССР, **138**: 4 (1961), 805–808.
[59] В.И. Юдович, *Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости*, Журн. выч. мат. и мат. физ., **3**: 6 (1963), 1032–1066.
[60] В.И. Юдович, *Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область*, Мат. Сб., **64 (106)**: 4 (1964), 562–588.
[61] В.И. Юдович, *Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости*, Изд. Рост. ун-та, 1984, 192 С.
[62] R.A. Adams, *On the Orlicz—Sobolev imbedding theorem*, J. Func. Anal., **24** (1977), 241–257.
[63] L. Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math., **158** (2004), 227–260.
[64] L. Ambrosio, G. Crippa, *Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields*, Proceedings of the school "Multi-D hyperbolic conservation laws" in Bologna, January 17–20 2005.
[65] L. Ambrosio, C. DeLellis, *Existence of solutions for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions*, Int. Math. Res. Not., **41** (2003), 2205–2220.
[66] L. Ambrosio, M. Lecumberry, S. Maniglia, *Lipschitz regularity and approximate differentiability of the DiPerna-Lions flow*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **114** (2005), 29–50.
[67] J.P. Aubin, *Une théorème de compacité*, C. R. Acad. Sc., **256** (1963), 5042–5044.
[68] I.V. Basov, V.V. Shelukhin, *Generalized solutions to the equations of compressible Bingham flows*, Z. Angew. Math. Mech., **79**: 3 (1999), 185–192.
[69] I.V. Basov, V.V. Shelukhin, *Nonhomogeneous incompressible Bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **142**: 1–3 (2007), 95–103.
[70] H. Bellout, F. Bloom, J. Nečas, *Young measure-valued solutions for non-Newtonian incompressible fluids*, Comm. in PDE, **19**: 11–12 (1994), 1763–1803.
[71] E.C. Bingham, *Fluidity and Plasticity*, New York, McGrew—Hill Book Co., 1922.

[72] M. Böhm, *On a nonhomogeneous Bingham fluid*, J. Diff. Eq., **60**: 2 (1985), 259–284.

[73] F. Bouchut, *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **157** (2001), 75–90.

[74] C. Capone, A. Fiorenza, M. Krbec, *On extrapolation blowups in the L_p-scale*, J. of Ineq. And Applicat. 2006.

[75] A. Cianchi, *Embedding theorems for Sobolev—Orlicz spaces*, Universita degli Studi di Firenze, preprint 15, 1994.

[76] A. Cianchi, *Interpolation of operators and the Sobolev embedding theorem in Orlicz spaces*, Universita degli Studi di Firenze, Preprint 9, 1995.

[77] F. Colombini, N. Lerner, *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*, Duke Math. J., **111** (2002), 357–384.

[78] C. DeLellis, *Ordinary differential equations with rough coefficients and the renormalization theorem of Ambrosio (d'après Ambrosio, DiPerna, Lions)*, Séminaire Bourbaki, Mars 2007, 59ème année, 2006–2007, N 972.

[79] N. DePauw, *Non-unicité du transport pour un champ de vecteurs presque BV*, Sémin. EDP, Exp. No. XIX, École Polytech, Palaiseau, 2003.

[80] N. DePauw, *Non unicité des solutions bornыs pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan*, C.R. Acad. Sci. Paris, **337** (2003), 249–252.

[81] B. Desjardins, *A few remarks on ordinary differential equations*, Comm. PDE, **21**: 11–12 (1996), 1667–1703.

[82] B. Desjardins, *Linear transport equations with initial values in Sobolev spaces and application to the Navier—Stokes equations*, Diff. and int. eq-s, **10**: 3 (1997), 577–586.

[83] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. math., **98** (1989), 511–547.

[84] T.K. Donaldson, N.S. Trudinger, *Orlicz—Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Func. Anal., **8** (1971), 52–75.

[85] D.E. Edmunds, M. Krbec, *On decomposition in exponential Orlicz spaces*, Math. Nachr., **213** (2000), 77–88.

[86] P. Gérard, *Résultats rъents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionelles (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort)*, Seminaire Bourbaki, 44ème annю (1991–92). N 757, 411-444.

[87] W. E, *Propagation of oscilations in the solutions of 1–d compressible fluid equations*, Preprint.

[88] C.L. Fefferman, *Existence and smoothness of the Navier—Stokes equations*, Electronic publication: http://www.claymath.org/millenium.

[89] E. Feireisl, *On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier—Stokes equations when the density is not square integrable*, Comment. Math. Univ. Carolin., **42**: 1 (2001), 83–98.

[90] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Univ. Press, Oxford. 2004 (Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 26).

[91] E. Feireisl, S. Matusu-Necasova, H. Petzeltová, I. Straskraba, *On the motion of a viscous compressible fluid driven by a time-periodic external force*, Arch. Rat. Mech. Anal., **149**: 1 (1999), 69–96.

[92] E. Feireisl, A.H. Novotný, H. Petzeltová, *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier—Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech., **3**: 4 (2001), 358–392.

[93] E. Fernández-Cara, F. Guillén, R.R. Ortega, *Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density*, Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., **28**: 6 (1997), 1079–1100.

[94] Fuchs M., Seregin G.A., *Regularity results for the quasi-static Bingham variational inequality in dimensions two and three*, Math. Z., **227** (1998), 525–541.

[95] M. Fuchs, G. Seregin, *Variational methods for problems from plasticity theory and for generalized Newtonian fluids*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **1749** (2000), 272 P.

[96] J.G.R. Hempel, J.G.R. Morris, N.S. Trudinger, *On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem*, Bull. Australian Math. Soc., **3** (1970), 369–373.

[97] D. Hoff, *Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data*, Arch. Ration. Mech. Anal., **132** (1995), 1–14.

[98] K. Hohenemser, W. Prager, Zeitschrift f. angew. Math. Mech, **12**: 216 (1932).

[99] B. Jawerth, M. Milman, *Extrapolation Spaces with applications*, Mem. of the Amer. Math. Soc., **89**: 440 (1991), 82 P.

[100] B. Jawerth, M. Milman, *New Results and Applications of Extrapolation Theory*, Interpolation spaces and related topics, Haifa, 1990. Israel Math. Conference Proc., **5** (1992), 81–105.

[101] S. Kaniel, *On the initial value problem for an incompressible fluid with nonlinear viscosity*, J. Math. Mech., **19**: 8 (1970), 681–707.

[102] P. Kaplický, J. Málek, J. Stará, $C^{1,\alpha}$*-solutions to a class of nonlinear fluids in two dimensions — stationary Dirichlet problem*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **259** (1999), 89–121.

[103] G. Karadzhov, M. Milman, *Extrapolation theory: New results and applications*, J. Approx. Theory, **133**: 1 (2005), 38–99.

[104] Y. Kato, *Variational inequalities of Bingham type in three dimensions*, Nagoya Math. J., **129** (1993), 53–95.

[105] A.V. Kazhikhov, V.V. Shelukhin, *The verification compactness method*, Актуальные проблемы современной математики, Изд-во Новосиб. гос ун-та, **2** (1996), 51–60.

[106] R.A. Kerman, Studia Math., **76** (1983), 183–195.

[107] J.U. Kim, *On the initial-boundary value problem for a Bingham fluid in a three dimensional domain*, Trans. AMS, **304** (1987), 751–770.

[108] A. Kufner, S. Fučik, O. John, *Function Spaces*, Prague, Academia, 1977, 454 P.

[109] O.A. Ladyzhenskaya, G.A. Seregin, *On semigroups generated by initial boundary value problems describing two-dimensional visco-plastic flows*, Nonlinear evolution equations, AMS Transl., Ser. 2, **164** (1995), 99–123.

[110] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces 2, Function spaces*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979, 244 P.

[111] P.-L. Lions, *Existence globale de solutions pour les équations de Navier—Stokes compressible isentropiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), 1335–1340.

[112] P.-L. Lions, *Compacité des solutions des equations de Navier—Stokes compressible isentropiques*, Comp. Ren. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math, **317**: 1 (1993), 115–120.

[113] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 2 — Compressible models*, Oxford, Clarendon Press, 1998, 348 P.

[114] P.-L. Lions, *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I Math., **326** (1998), 833–838.

[115] P.-L. Lions, *Bornes sur la densité pour les équations de Navier—Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math., **328**: 8 (1999), 659–662.

[116] P.-L. Lions, *On some challenging problems in nonlinear partial differential equations*, Mathematics: frontiers and perspectives, ed. V. Arnold et al., Ainer. Malli Soc, Providence, RI, 2000, 121–135.

[117] S.F. Lukomskii, *Convergence of Fourier series in Lorentz spaces*, East J. on Approx, **9**: 2 (2003), 229–238.

[118] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Růžička, *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs*, London, Weinheim etc., Chapman & Hall, 1996, 318 P.

[119] J. Málek, J. Nečas, M. Růžička, *On the non-Newtonian incompressible fluids*, Math. Models and Methods in Appl. Sci., **3**: 1 (1993), 35–63.

[120] J. Málek, M. Růžička, V.V. Shelukhin, *Hershel—Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows*, Math. models and methods in appl. sciences, **15**: 12 (2005), 1845–1861.

[121] C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Appl. Math. Sci., V. 96, Springer–Verlag, New York, 1994.

[122] A. Matsumura, T. Nishida, *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases*, J. Math. Kyoto Univ., **20**: 1 (1980), 67–104.

[123] S. Matušů–Nečasová, A. Novotný, *Measure-valued solution for non-Newtonian compressible isothermal monopolar fluid*, Acta Appl. Math., **37**: 1–2 (19940, 109–128.

[124] M. Milman, *Extrapolation and optimal decompositions with applications to analysis*, Berlin. Springer-Verlag, 1994. 162 P. (Lecture Notes in Math. V. 1580).

[125] M. Milman, *Extrapolation spaces and a. e. convergence of Fourier series*, J. of Approx. Theory, **80**: 1 (1995), 10–24.

[126] J. Nečas, A. Novotný, M. Šhilhavý, *Global solution to the ideal compressible heat-conductive fluid*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **30**: 3 (1989), 551–564.

[127] J. Nečas, A. Novotný, M. Šhilhavý, *Global solution to the compressible isothermal multipolar fluid*, J. Math. Anal. Appl., **162** (1990), 223–241.
[128] J. Neustupa, *Measure-valued solutions of the Euler and Navier—Stokes equations for compressible barotropic fluids*, Math. Nachr., **163** (1993), 217–227.
[129] J. Neves, *On decompositions in generalized Lorentz—Zygmund spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. Artic. Ric. Mat. (8), **4**: 1 (2001), 239–267.
[130] A. Novotný, *Viscous multipolar fluids — physical background and mathematical theory*, Fortschritte der Physik, **40**: 5 (1992), 445–517.
[131] A. Novotný, *Compactness of steady compressible isentropic Navier—Stokes equations via the decomposition method (the whole $\mathbb{R}^n$)*, Preprint of the Univ. of Toulon, 1995.
[132] A. Novotný, *Some remarks to the compactness of steady compressible isentropic Navier—Stokes equations via the decomposition method*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **37**: 2 (1996), 305–342.
[133] A. Novotný, M. Padula, *L^p-Approach to Steady flows of Viscous Compressible Fluids in Exterior Domains*, Arch. Rat. Mech. Anal, **126** (1994), 243–297.
[134] A. Novotný, I. Straskraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, **27**, 2004.
[135] J.G. Oldroyd, Proc. Cambridge Plilos. Soc., **43**: 100 (1947).
[136] R. O'Neil, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B, **263** (1966), A463–A466.
[137] M. Padula, *Existence of global solutions for 2-dimensional viscous compressible flows*, J. of Func. Anal., **69** (1986), 1–20.
[138] M. Padula, *Erratum to J. Func. Anal. 69(1986), 1–20*, J. Func. Anal. **76** (1988): 1, P. 231.
[139] M. Padula, *Erratum to J. Func. Anal. 69(1986), 1–20*, J. Func. Anal. **77** (1988), P. 232.
[140] P.I. Plotnikov, J. Sokolowski, *Stationary boundary value problems for compressible Navier—Stokes equations*, Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations, Volume 6 (Edited by Michel Chipot), 2008, 313–410.
[141] W. Prager, *Mъhanique des solides isotropes au delà du domaine plastique*, Paris, 1937.
[142] K.R. Rajagopal, *Mechanics of non-Newtonian fluids*, Recent developments in theoretical fluid mechanics / ed. G.P.Galdi, J.Necas. Harlow: Longman, 1993, 129–162 (Pitman Res. Notes Math. Ser. **291**).
[143] V. Scheffer, *An inviscid flow with compact support in space-time*, J. Geom. Anal, **3**: 4 (1993), 343–401.
[144] G.A. Seregin, *Continuity for the strain velocity tensor in two-dimensional variational problems from the theory of the Bingham fluid*, Italian J. Pure Appl. Math., **2** (1997), 141–150.
[145] D. Serre, *Variations de grande amplitude pour la densité d'un fluide visqueux compressible*, Physica D, **48** (1991), 113–128.
[146] J. Serrin, *On the uniqueness of compressible fluid motion*, Arch. Rational Mech. Anal., **3**: 3 (1959), 271–288.
[147] V.V. Shelukhin, *Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids*, J. of math. fluid mechanics, **4** (2002), 109–127.
[148] A. Shnirelman, *On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation*, Comm. Pure Appl. Math., **50**: 12 (1997), 1261–1286.
[149] F.N. Shwedov, *La rigidité de liquides*, Rapport Congr. Intern. Phys., Paris, **1** (1900), 478–486.
[150] J. Simon, *Compact sets in the space $L_p(0,T;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl., **146** (1987), 65–96.
[151] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer, **20**: 2 (1998), 476–512.
[152] D.N. Smyrnaios, J.A. Tsamopoulos, *Squeeze flow of Bingham plastics*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **100**: 13 (2001), 165–189.
[153] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl., **110** (1976), 353–372.
[154] G. Talenti, *An embedding theorem*, Essays of Math. Anal. in honour of E.DeGiorgi, Birkhauser Verlag, Boston, 1989.
[155] N.S. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech., **17** (1967), 473–483.
[156] C. Truesdell, W. Noll, *The nonlinear field theories of mechanics*, Berlin, Springer. 1965 (Handbuch der Physik. V. III/3).

[157] M. Vishik, *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type*, Ann. Sci. ьole Norm. Sup. (4), **32**: 6 (1999), 769–812.

[158] V.A. Weigant (V.A. Vaigant), *Unique solvability "in the large" of the initial boundary value problem for the two-dimensional Navier—Stokes equations of the viscous compressible fluid with Van-der-Vaals type state function and the bulk viscosity depending on density*, Siberian Advances in Math. **6**: 2 (1996), 106–150.

[159] S. Yano, *An extrapolation theorem*, J. Math. Soc. Japan. **3**: 2 (1951), 296–305.

[160] V.I. Yudovich, *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid*, Mathematical Research Letters, **2** (1995), 27–38.

Александр Евгеньевич Мамонтов
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 15,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `mamont@hydro.nsc.ru`