S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 13–16 (2009) УДК 519.172.2
MSC 05C15

РАЗБИЕНИЕ РАЗРЕЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ НА ДВА ПОДГРАФА МАЛОЙ СТЕПЕНИ

О. В. БОРОДИН, А. О. ИВАНОВА

Abstract. A graph G is said to be (a, b)-partitionable for positive integers a, b if its vertices can be partitioned into subsets V_1 and V_2 such that in $G[V_1]$ any path contains at most a vertices and in $G[V_2]$ any path contains at most b vertices. We prove that every planar graph of girth 8 is $(2, 2)$-partitionable.
Keywords: planar graph, coloring, vertex partition.

1. Введение.

Граф G называется (a, b)-*разбиваемым*, где $a \geq 1$, $b \geq 1$, если существует такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$, что в подграфе, порожденном множеством V_1, число вершин в наибольшей простой цепи не превосходит a, а в подграфе, порожденном множеством V_2, — b. Очевидно, что любой двудольный граф (1,1)-разбиваем, т. е. его можно разбить на два множества изолированных вершин; другими словами (1,1)-разбиваемость равносильна правильной раскраске вершин графа в два цвета. Понятно, что (2,2)-разбиваемость равносильна такой раскраске вершин графа в цвета 0 и 1, что вершины каждого цвета образуют подграфы степени не больше 1.

Каково наименьшее значение $g \geq 4$, для которого можно подобрать такие константы a, b, что каждый плоский граф с обхватом (длиной наименьшего цикла) не менее g является (a, b)-разбиваемым?

Borodin, O.V., Ivanova, A.O., Partitioning sparse plane graphs into two induced subgraphs of small degree.

Работа авторов поддержана грантами 06-01-00694 и 08-01-00673 Российского фонда фундаментальных исследований, а второго автора также грантом президента России для молодых ученых МК-2302.2008.1.

Поступила 11 января 2009 г., опубликована 26 января 2009 г.

В [6] доказано, что планарные графы с обхватом не менее 16 являются $(1,2)$-разбиваемыми, с обхватом не менее 9 — $(2,2)$-разбиваемыми, а с обхватом не менее 8 — $(2,3)$-разбиваемыми (теоремы 2, 3, 4).

В [5] теорема 2 из [6] была усилена так: планарные графы с обхватом не менее 14 являются $(1,2)$-разбиваемыми, а целью настоящей заметки является следующее совместное усиление теорем 3 и 4.

Теорема 1. *Любой планарный граф с обхватом не менее 8 является* $(2,2)$-*разбиваемым.*

При доказательстве этой теоремы используется новая техника глобального перераспределения зарядов вершин (эйлеровых вкладов), введенная в рассмотрение Бородиным, Ивановой и Косточкой в [3] и затем применявшаяся в работах [4, 6, 5]. Ее особенность в том, что заряды могут передаваться по т.н. цепям питания на неограниченно большие расстояния, тогда как во всех предшествующих работах по строению и раскраскам плоских графов перераспределение зарядов носило локальный характер.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 решающую роль играет понятие мягкой компоненты, развивающее идею введенного в [3] т.н. мягкого цикла. Ликвидация же мягких циклов позволила в [3, 4] усилить результаты из [1, 2] о гомоморфизмах разреженных графов на циркулянт $C(5:1,2)$ и цикл C_5.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть граф G — минимальный контрпример к теореме 1, а $g(G)=g$ — его обхват. Не нарушая общности, можно считать, что граф G связен. Обозначим через $\delta(G)$ его минимальную степень. Очевидно, что $\delta(G)\geq 2$.

Формулу Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ запишем в виде

$$\sum_{v\in V}\Big(3d(v)-8\Big)<0, \qquad (1)$$

где $\mu(v)=3d(v)-8$ — заряд вершины $v\in V$. Из условий $\delta(G)\geq 2$ и $g(G)\geq 8$ следует, что в графе G только 2-вершины имеют отрицательный заряд.

Мы опишем несколько структурных свойств графа G, опираясь на которые перераспределим заряды вершин так, чтобы их новые заряды μ^* стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин при перераспределении сохраняется, мы получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 1.

Под k-*цепью* далее будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2, а под $(k_1,\dots,k_d)$-*вершиной* понимается d-вершина, инцидентная d различным цепям, где i-я цепь $(1\leq i\leq d)$ содержит не менее k_i вершин степени 2.

Лемма 1. *В G нет* 2-*цепей.*

Доказательство. Удалим 2-вершины такой цепи. В силу минимальности полученный граф раскрасился так, что вершины каждого цвета индуцируют подграф степени не больше 1. Продолжим раскраску на удаленные вершины, покрасив удаленные 2-вершины в цвета, отличные от цветов их окрашенных соседей. □

Лемма 2. *В G нет* $(1,1,1)$-*вершин.*

Доказательство. Удалим такую вершину v и все 2-вершины инцидентных ей 1-цепей. Продолжим раскраску на удаленные вершины, покрасив удаленные 2-вершины в цвета, отличные от цветов их окрашенных соседей. Далее покрасим вершину v в цвет, которым окрашена не более чем одна из смежных с ней 2-вершин. □

Зоной питания, FA, назовем максимальный по включению подграф, состояший из 3-вершин, (взаимно) достижимых друг из друга по 0-цепям, также таких 2-вершин, которые смежны только с вершинами из FA. Из определения следует, что множество 3-вершин графа G распадается на попарно непересекающиеся зоны питания.

Мягкой компонентой, назовем такую зону питания FA, что все ребра из FA в $G \setminus FA$ ведут в 2-вершины.

Лемма 3. *В G нет мягких компонент.*

Доказательство. Пусть FA — мягкая компонента. Раскрасим $G \setminus FA$. Каждую 2-вершину из $G \setminus FA$, смежную с FA, перекрасим в цвет, отличный от цвета смежной с ней вершины из $G \setminus FA$.

Возьмем для FA такую раскраску, при которой общее число одноцветных ребер, инцидентных вершинам из FA , минимально. Легко видеть, что полученная раскраска графа G — искомая. □

Следствие 1. *В любой зоне питания графа G найдется хотя бы одно ребро, ведущее из нее в ≥ 4-вершину.* □

Лемма 4. *Пусть n_{110} — число $(1,1,0)$-вершин в зоне питания FA, а n_{000} — число ее $(0,0,0)$-вершин, причем b ребер ведут из FA в ≥ 4-вершины. Тогда $n_{110} \leq n_{000} + b$.*

Доказательство. Если в FA имеется цикл из (0,0,0)-вершин, то преобразуем одну из его 0-цепей в 1-цепь. В результате получим зону питания на том же множестве вершин, но с меньшим числом (0,0,0)-вершин.

Если в FA имеется 2-вершина, смежная двум вершинам u, w из FA, то заменим ее на две 2-вершины, одна из которых смежна в FA лишь с u, а другая — лишь с w. В результате построим другую зону питания на том же множестве вершин, что и FA.

Далее заменим каждую (1,0,0)-вершину из FA, смежную с ≥ 3-вершинами u, w на ребро uw. Эта операция оставляет числа n_{110}, n_{000} и b неизменными.

Повторяем перечисленные выше операции до тех пор, пока не исчезнут все (1,0,0)-вершины и циклы из (0,0,0)-вершин. (Заметим, что в результате наших преобразований число 3-вершин в FA не увеличивается, а значит процесс преобразования конечен.)

Итак, мы преобразовали нашу FA к кубическому дереву, причем на каждом шаге могли только усугубить соотношение $n_{110} \leq n_{000} + b$. Таким образом, доказываемое утверждение свелось к тому очевидному факту, что в кубическом дереве висячих вершин на 2 больше, чем 3-вершин. □

Перераспределим заряды по следующим правилам:

R1. Любая вершина степени не менее 3 отдает заряд 1 каждой смежной 2-вершине.

R2. Каждая (1,1,0)-вершина получает заряд 1 от своей зоны питания, а каждая зона питания получает по 1 от своих (0,0,0)-вершин и по каждому ребру, ведущему в ≥ 4-вершину.

Проверим, что после применения R1—R2, заряды всех вершин становятся неотрицательными. Действительно, все 2-вершины имеют заряд 0 согласно лемме 1.

Из леммы 4 следует, что суммарный заряд каждой зоны питания, а равно как и всех 3-вершин, графа G после применения правил R1–R2 неотрицателен.

Пусть $d(v) \geq 4$. Поскольку v передает вдоль каждого инцидентного ребра заряд не более 1, имеем $\mu^*(v) \geq 3d(v) - 8 - d(v) = 2d(v) - 8 \geq 0$.

Теорема 1 доказана.

Литература

[1] O.V.Borodin, A.V.Kostochka, J.Nesetril, A.Raspaud, E.Sopena, *On the maximal average degree and the oriented chromatic number of a graph*, Discrete Math. 206 (1999), 77–89.

[2] O.V.Borodin, S.J.Kim, A.V.Kostochka, and D.West, *Homomorphisms of sparse graphs with large girth*, J. of Combin. Theory B 90 (2004), 147–159.

[3] О.В.Бородин, А.О.Иванова, А.В.Косточка, *Ориентированная 5-раскраска вершин в разреженных графах*, Дискретный анализ и исследование операций **13**:1 (2006), 16–32.

[4] O.V.Borodin, S.G.Hartke, A.O.Ivanova, A.V.Kostochka, D.B.West, $(5,2)$-*Coloring of Sparse Graphs*, Siberian Electronic Math. Reports, http://semr.math.nsc.ru, **5** (2008), 417–426.

[5] O.V.Borodin, A.O.Ivanova, *Near-proper list vertex 2-colorings of sparse graphs.* (submitted)

[6] А.Н.Глебов, Д.Ж.Замбалаева, *Путевые разбиения планарных графов*, Сиб. электронные мат. известия, http//semr.math.nsc.ru, **4** (2007), 450–459.

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: brdnoleg@math.nsc.ru

Анна Олеговна Иванова
НИИ математики при Якутском госуниверситете,
ул. Кулаковского 48,
677007, Якутск, Россия
E-mail address: shmgnanna@mail.ru