S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 17–25 (2009) УДК 517.518.452
MSC 42A16

СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ КОСИНУСНОЙ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА-МАНДЕЛЬБРОТА

К. К. КАЗБЕКОВ

Abstract. The set of Mc - the points of divergence of the formal trigonometric Fourier series of the Weierstrass - Mandelbrot cosine function C(t), given on the segment [-1,1] is considered. In particular, it is shown that on the segment [0,1] the Fourier series of the function C(t) diverges in all the points of the subset Mc (1/2), having zero measurement and the cardinality (power) of continuum when the function parameters are: b=3 and D=1,5.

Keywords: Fourier series, Weierstrass - Mandelbrot cosine function.

1. Введение

Как известно [1], одна непрерывность 2π-периодической функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ без дополнительных условий не обеспечивает не только равномерной сходимости тригономет- рического ряда Фурье, но даже сходимости этого ряда в наперед заданной точке указанного сегмента. Например (Дю Буа Раймон, Фейер), существуют непрерывные на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции, удовлетворяющие условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся на бесконечном множестве точек сегмента $[-\pi,\pi]$, всюду плотном на этом сегменте.

Наиболее сильный результат по расходимости тригонометрических рядов Фурье получил в 1923 г. А. Н. Колмогоров [2], который построил пример функции, принадлежащей лебегову классу L, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси $\mathbb{R}$. Позже стало известно, что пример Колмогорова нельзя усилить. Согласно фундаментальной теореме

Kazbekov, K.K., Divergence of the Fourier series of the Weierstrass-Mandelbrot cosine function.

Работа поддержана российским «Фондом содействия отечественной науке».

Поступила 17 июня 2008 г., опубликована 6 февраля 2009 г.

Л. Карлесона [3], доказанной в 1966 г.: тригонометрический ряд Фурье любой функции $f(x)$ из пространства $L^2[-\pi,\pi]$, т. е. функции, для которой существует понимаемый в смысле Лебега интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$. Так как класс $C[-\pi,\pi]$ непрерывных на сегменте $[-\pi,\pi]$ функций принадлежит пространству $L^2[-\pi,\pi]$, т. е. $C[-\pi,\pi] \subset L^2[-\pi,\pi]$, то это утверждение Карлесона имеет место и для всякой непрерывной на действительной оси функции периода 2π.

Несмотря на достигнутые результаты, вопрос о сходимости ряда Фурье произвольной непрерывной на некотором сегменте $[-l,l]$ $2l$-периодической функции $f(x)$, далек от полного завершения. В частности отметим следующую проблему.

Из теоремы Л. Карлесона следует, что для всякой непрерывной функции $f(x)$ класса $C[-l,l]$, вообще говоря, существует множество M_f-меры нуль, в каждой точке которого ряд Фурье функции $f(x)$ расходится. Однако помимо меры нуль, множество M_f, очевидно, имеет и другие характеристики: кардинальное и ординальное числа, размерность и пр.

Неясно по каким признакам и как непрерывная функция $f(x) \in C[-l,l]$ связана с этими характеристиками множества M_f. Отсюда также следует вопрос о существовании (или выборе) такой характеристики множества M_f, по которой возможна однозначная классификация на некотором сегменте $[-l,l]$ множества непрерывных функций $f(x)$.

В связи с указанной проблемой для начала интересно найти функцию $f(x)$ класса $C[-l,l]$, ряд Фурье которой расходится на множестве M_f с нетривиальной характеристикой. Например, непрерывную на некотором сегменте $[-l,l]$ функцию $f(x)$ с рядом Фурье, расходя- щимся на множестве M_f-меры нуль и мощности континуума. Ниже показано, что частный вид косинусной функции Вейерштрасса — Мандельброта доставляет пример такой функции на сегменте $[-1,1]$.

2. Ряд Фурье функции $C(t)$

Отметим сразу и без доказательства определение и некоторые основные свойства рассматриваемой нами косинусной функции Вейерштрасса — Мандельброта $C(t)$ [4, 5]:

1°. функция $C(t)$ на произвольном сегменте $[a,c] \subset \mathbb{R}$ задается в виде бесконечного ряда

$$C(t) = C(t;b,D) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos b^q t}{b^{(2-D)q}},$$

абсолютно и равномерно сходящегося на $[a,c]$ для любых значений параметров b и D в диапазонах $1 < b < \infty$ и $1 < D < 2$ соответственно;

2°. функция $C(t)$ — четная функция, т. е.

$$C(-t) = C(t)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$;

3°. функция $C(t)$ — непрерывная всюду на $\mathbb{R}$ и нигде не дифференцируемая функция;

4°. функция $C(t)$ — однородная (самоподобная) функция, удовлетворяющая соотношению однородности:

$$C(bt) = b^{2-D}C(t),$$

и следовательно, заданная на некотором сегменте $t \in [a, c]$, функция $C(t)$ будет известна при любых значениях $t \in \mathbb{R}$.

Построим формальный ряд Фурье для функции $C(t)$, определенной на сегменте $[-1, 1]$, т. е. с полупериодом $l = 1$ и $2l = 2$-периодическим образом продолженную на всю действительную ось $\mathbb{R}$.

Лемма 2.1. *Функция $C(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ разлагается в следующий формальный тригонометрический ряд Фурье $\widetilde{C}(t)$:*

$$\begin{gathered} C(t) \sim \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{b^q - \sin b^q}{b^{(3-D)q}} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^{(2-D)q}} \left[\frac{\sin(b^q + k\pi)}{b^q + k\pi} + \frac{\sin(b^q - k\pi)}{b^q - k\pi} \right] \cos k\pi t. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Доказательство. Будучи четной функцией, $C(t)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi t; \tag{$*.1$}$$

где коэффициенты Фурье равны:

$$a_k = \int_{-1}^{1} C(t) \cos k\pi t \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{$*.2$}$$

Вычисление коэффициентов $(*.2)$ приводит к следующим выражениям:

$$a_0 = 2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{b^q - \sin b^q}{b^{(3-D)q}}, \tag{$*.3$}$$

$$a_k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)}{b^{(2-D)q}} \left[\frac{\sin(b^q + k\pi)}{b^q + k\pi} + \frac{\sin(b^q - k\pi)}{b^q - k\pi} \right]. \tag{$*.4$}$$

Подстановка $(*.3)$ и $(*.4)$ в ряд $(*.1)$ дает нам формальный ряд $\widetilde{C}(t)$. □

Лемма 2.2. *Формальный ряд Фурье $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t)$ на сегменте $t \in [-1, 1]$ удовлетворяет свойству однородности:*

$$\widetilde{C}(bt) = b^{(2-D)}\widetilde{C}(t), \tag{2.2}$$

при любых значениях параметров b и D.

Доказательство. Доказательство следует сразу из свойства 4° функции $C(t)$ и результата леммы 2.1. Действительно, по лемме 2.1, для функции $C(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ выполнено формальное равенство $C(t) \sim \widetilde{C}(t)$. Так как разложение Фурье леммы 2.1. 2-периодическим образом распространено на все $\mathbb{R}$, то при любом $t \in [-1, 1]$ и $b \in (1, \infty)$ верно аналогичное равенство $C(bt) \sim \widetilde{C}(bt)$ откуда по транзитивности получается свойство однородности (2.2) для формального ряда $\widetilde{C}(t)$.

В последнем можно убедиться и непосредственно. Для этого разложим чётную функцию $C(bt)$ на сегменте $[-1,1]$ в косинусный ряд Фурье: $\tilde{C}(bt) = (\tilde{a}_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos k\pi t$. Тогда коэффициенты $\{\tilde{a}_k\}_{k=0}^{\infty}$ ряда $\tilde{C}(bt)$ по свойству 4° равны:

$$\tilde{a}_k = \int_{-1}^{1} C(bt) \cos k\pi t dt = b^{2-D} \int_{-1}^{1} C(t) \cos k\pi t dt = b^{2-D} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Из этого равенства в точности следует:

$$\tilde{C}(bt) = b^{2-D} \left[(a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi t \right] = b^{2-D} \tilde{C}(t).$$

□

Так как функция $C(t)$ четная, то всюду ниже достаточно рассматривать функцию $C(t)$ только на сегменте $t \in [0,1]$.

Для множества точек расходимости формального ряда Фурье $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t)$ на сегменте $t \in [0,1]$ введем обозначение M_c. Верна следующая

Лемма 2.3. *Формальный ряд $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t)$ расходится в точках $t = 0$ и $t = 1/2$ и сходится в точке $t = 1$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 для всех t из сегмента $[-1,1]$ функция $C(t)$ раскладывается в ряд по косинусам вида (2.1).

Оценим вначале нулевой член:

$$\frac{a_0}{2} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{b^q - \sin b^q}{b^{(3-D)q}} = \frac{b^{2-D}}{b^{2-D} - 1} - \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(3-D)q}} + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} b^{(2-D)q} - \sum_{q=1}^{\infty} b^{(2-D)q} \frac{\sin(1/b^q)}{(1/b^q)}.$$

Так как при $q \to \infty$ верно асимптотическое равенство $\sin(1/b^q)/(1/b^q) = O(1)$, то

$$\frac{a_0}{2} \gtrsim \frac{b^{2-D}}{b^{2-D} - 1} - \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(3-D)q}}, \tag{$*$.1}$$

откуда следует оценка

$$\frac{a_0}{2} \gtrsim \frac{b^{3-D} - b^{2-D}}{(b^{2-D} - 1)(b^{3-D} - 1)} > 0. \tag{$*$.2}$$

Таким образом нулевое слагаемое $(a_0/2)$ конечно и расходимость ряда $\widetilde{C}(t)$ связана с суммой $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi t$. Для вычисления последней в конкретных точках заметим, что при $k = 1, 2, \ldots$, коэффициенты a_k удобно представить в виде:

$$a_k = 2(-1)^{k+1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{b^{(D-1)q}}{b^{2q} - (k\pi)^2} \sin b^q. \tag{$*$.3}$$

Тогда при $t = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi = 2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(3-D)q}} - \\ -\frac{1}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(2-D)q}} \Big[\psi\Big(-\frac{b^q}{\pi}\Big) - \psi\Big(\frac{b^q}{\pi}\Big)\Big] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q - b^q \cos b^q}{b^{(3-D)q}}, \tag{$*.4$}$$

где $\psi(x)$ — пси-функция [6]. Из ($*.4$) найдём, что общий ряд $\widetilde{C}(1)$ имеет вид:

$$\widetilde{C}(1) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos b^q}{b^{(2-D)q}} = C(1),$$

т. е. ряд Фурье $\widetilde{C}(t)$ в точке $t = 1$ сходится к $C(1)$ и значит $1 \neq M_c$.

При $t = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(3-D)q}} + \frac{1}{\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(2-D)q}} \Big[\psi\Big(-\frac{b^q}{\pi}\Big) - \psi\Big(\frac{b^q}{\pi}\Big)\Big] = \\ = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{3 \sin b^q + b^q \cos b^q}{b^{(3-D)q}} \to \infty, \tag{$*.5$}$$

т. е. мы получаем расходящееся выражение, откуда следует, что $0 \in M_c$.

В расходимости последнего легко убедиться если заметить, что

$$\left| \sum_{q=1}^{\infty} b^{(3-D)q} \left[3 \sin \frac{1}{b^q} + \frac{1}{b^q} \cos \frac{1}{b^q} \right] \right| \geq |3M_1 - M_2| \sum_{q=1}^{\infty} b^{(2-D)q} \to \infty,$$

где $M_1 = \inf_{q \in \mathbb{N}} |\sin(1/b^q)|$, $M_2 = \sup_{q \in \mathbb{N}} |\cos(1/b^q)|$.

Наконец при $t = 1/2$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{[k/2]} \frac{1 + (-1)^k}{2} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{2k} = \\ = 3 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(3-D)q}} + \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin b^q}{b^{(2-D)q}} \operatorname{ctg} \frac{b^q}{2} \tag{$*.6$}$$

и мы снова получаем расходящееся выражение, так что точка $t = 1/2 \in M_c$. Здесь расходимость следует из расходимости ряда

$$3 \sum_{q=1}^{\infty} b^{(3-D)q} \sin \frac{1}{b^q} \sim O(1) \sum_{q=1}^{\infty} b^{(2-D)q} \to \infty,$$

и того, что

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} b^{(2-D)q} \sin \frac{1}{b^q} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2b^q} \right| \geq \frac{1}{2} M_3 \sum_{q=1}^{\infty} b^{(2-D)q} \to \infty,$$

где $M_3 = \inf_{q \in \mathbb{N}} \left|\cos^2(1/2b^q)\right|$. $\square$

3. Мощность множества расходимости M_c

Для нахождения мощности множества M_c проведем обобщение свойства однородности леммы 2.2. формального ряда $\widetilde{C}(t)$ при учете свойства периодичности функции $C(t)$ для частных значений параметров b и D.

Лемма 3.1. *Для любого натурального $j = 1, 2, \ldots$ и произвольного значения аргумента t из сегмента $[0, 1]$ формальный ряд Фурье $\widetilde{C}(t)$ частной функции $C(t) = C(t; b = 3, D = 1{,}5)$ удовлетворяет обобщенному свойству однородности:*

$$\widetilde{C}(t) = 3^{\sigma_j/2}\widetilde{C}[\tau_j(t)], \tag{3.1}$$

где

$$\tau_j(t) = \frac{1}{3^{\sigma_j}}\big[t + 2(1 + 3^{\sigma_1} + 3^{\sigma_2} + \ldots + 3^{\sigma_{j-1}})\big], \tag{3.2}$$

$$\sigma_j \equiv \sum_{i=1}^{j} n_i, \quad n_i \in \mathbb{N},\ \sigma_0 = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим свойства периодичности и однородности функции $C(t)$ совместно для значений аргумента $t \in [0, 1]$. При этом свойство однородности представим для обратных степеней параметра (b) в виде:

$$C\left(\frac{t}{b}\right) = b^{D-2}C(t), \tag{$*$.1}$$

откуда при произвольном натуральном $n \in \mathbb{N}$ верно

$$C\left(\frac{t}{b^n}\right) = b^{-n(2-D)}C(t), \tag{$*$.2}$$

что достигается n-кратным применением свойства $(*.1)$ к функции C в точке t.

Выберем значения параметров функции $C(t)$: $b = 3, D = 1{,}5$. Тогда определяющая система функциональных соотношений для функции $C(t)$, $t \in [0, 1]$ примет вид:

$$\begin{aligned} &C(t) = C(t+2), \\ &C\left[\frac{t}{3^n}\right] = 3^{-n/2}C(t), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{$*$.3}$$

Из леммы 2.2. и 2-периодичности функции $\cos k\pi t$ следует, что аналогичная система верна и для формального ряда Фурье $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t; 3, 3/2)$.

Проводя последовательные преобразования для $\widetilde{C}$ найдем:

$$\widetilde{C}(t)=\widetilde{C}(t+2)=3^{n_1/2}\widetilde{C}\left[\frac{t+2}{3^{n_1}}\right]=3^{n_1/2}\widetilde{C}\left[\frac{t+2}{3^{n_1}}+2\right]=$$
$$=3^{(n_1+n_2)/2}\widetilde{C}\left[\frac{t+2(1+3^{n_1})}{3^{n_1+n_2}}\right]=\ldots=$$
$$=3^{\sigma_{j-1}/2}\widetilde{C}\left[\frac{t+2(1+3^{\sigma_1}+\ldots+3^{\sigma_{j-2}})}{3^{\sigma_{j-1}}}\right]= \qquad (*.4)$$
$$=3^{\sigma_{j-1}/2}\widetilde{C}\left[\frac{t+2(1+3^{\sigma_1}+\ldots+3^{\sigma_{j-2}})}{3^{\sigma_{j-1}}}+2\right]=$$
$$=3^{\sigma_j/2}\widetilde{C}\left[\frac{t+2(1+3^{\sigma_1}+\ldots+3^{\sigma_{j-1}})}{3^{\sigma_j}}\right],$$

т. е. равенство $(*.4)$ верно для любого натурального $j\in\mathbb{N}$. □

В следующей лемме рассмотрим подмножества $M_c(1/2)$ и $M_c(0)$ множества M_c, порожденные соответственно точками расходимости $t=1/2$ и $t=0$ на сегменте $[0,1]$, формального ряда Фурье $\widetilde{C}(t)$ частной функции $C(t;3,3/2)$.

Комментарий к лемме 3.1.

Из леммы 3.1 следует, что если формальный ряд Фурье $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t)$ расходится в некоторой точке $t=t_0$ сегмента $[0,1]$, то он расходится сразу во всех точках множества $\{\tau_j(t_0)\}$ для каждого натурального $j=1,2,\ldots;n_1,\ldots,n_j\in\mathbb{N}$. Таким образом, если ряд $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t)$ расходится хотя бы в одной точке $t_0\in[0,1]$, то он расходится на бесконечном множестве точек $\{\tau_j(t_0)\}_{j=1}^{\infty}\subset[0,1]$, порожденной исходной точкой $t=t_0$.

Лемма 3.2. *Подмножество $M_c(1/2)$ есть прямая сумма двух подмножеств:*

$$M_c(1/2)=\mathbb{T}_0^1\oplus\mathbb{T}_0^2, \qquad (3.3)$$

где множество $\mathbb{T}_0^1=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{t_0^1\}_j$ — объединение множеств $\{t_0^1\}_j$, состоящих из точек $(1/2\cdot3^{\sigma_j})$, $n_1,\ldots,n_j\in\mathbb{N}$, а множество $\mathbb{T}_0^2=M_c(0)=\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ есть бинарное множество Кантора.

Доказательство. По определению $M_c(1/2)$ есть множество точек расходимости формального ряда Фурье $\widetilde{C}(t)$ функции $C(t;3,3/2)$, порожденное точкой расходимости $t=1/2$. Рассмотрим как преобразуется точка $t=\frac{1}{2}$ при отображении $\tau_j(t):[0,1]\to[0,1]$, определенном в лемме 3.1. для каждого натурального $j=1,2,\ldots$. Очевидно имеем, что

$$\left\{\frac{1}{2}\right\}_j=\{t_0^1\}_j+\{t_0^2\}_j, \qquad (*.1)$$

где $\{t_0^1\}_j$ есть множество точек $\left\{\frac{1}{2\cdot3^{\sigma_j}}\right\}$, $n_1,\ldots,n_j\in\mathbb{N}$ и по существу состоящая из счетного множества точек $\left\{\frac{1}{2\cdot3^{n}}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Множество $\{t_0^2\}_j$ есть множество точек вида

$$2\left\{\frac{1}{3^{n_j}}+\frac{1}{3^{n_{j-1}+n_j}}+\ldots+\frac{1}{3^{n_2+\ldots+n_j}}+\frac{1}{3^{n_1+\ldots+n_j}}\right\}, \qquad (*.2)$$

где $n_1,\ldots,n_j\in\mathbb{N}$.

Следовательно объединение $\mathbb{T}_0^1 = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{t_0^1\}_j$ будет по-прежнему давать счетное множество точек неотличимое от множества $\left\{\frac{1}{2\cdot 3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. В тоже время, объединение $\mathbb{T}_0^2 = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{t_0^2\}_j$, как видно из $(*.2)$ образует всевозможные троичные дроби вида $0, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ у которых все a_i равны либо 0, либо 2. Последнее свойство есть основное арифметическое свойство дисконтинуума Кантора [7], откуда и следует, что $\mathbb{T}_0^2 = \mathbb{K}$. Для получения же выражения $\mathbb{T}_0^2 = \mathbb{M}_c(0)$ следует лишь заметить, что множество $\mathbb{M}_c(0)$ порождается смещенным отображением $\tau_j(t_0 - 1/2)$ при выборе точки расходимости $t_0 = \frac{1}{2}$. □

Лемма 3.2. позволяет сформулировать следующий основной результат данного сообщения.

Теорема 3.1. *Формальный тригонометрический ряд Фурье $\widetilde{C}(t)$ косинусной функции Вейерштрасса — Мандельброта вида*

$$C(t; 3, 3/2) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(3^q t)}{3^{q/2}},$$

определенной на сегменте $[-1, 1]$ и 2-периодическим образом продолженной на все $\mathbb{R}$, при значениях аргумента $t \in [0, 1]$ расходится на множестве $M_c \subset [0, 1]$ — меры нуль, имеющего в качестве правильной части подмножество $M_c(1/2) \subseteq M_c$ — мощности континуума, причем само подмножество $M_c(1/2)$ есть прямая сумма счетного множества $\mathbb{T}_0^1$ и бинарного множества Кантора $\mathbb{K}$.

Доказательство. Из леммы 3.2 следует, что подмножество $M_c(1/2)$, множества расходимости M_c частной функции Вейерштрасса — Мандельброта $C(t) = C(t; 3, 3/2)$, является прямой суммой точек счетного множества $\mathbb{T}_0^1$ и несчетного множества Кантора $\mathbb{K}$. Поэтому остается только показать несчетность прямой суммы $\mathbb{T}_0^1 \oplus \mathbb{K}$. Для этого, в силу свойства множества $\mathbb{K}$, являющегося множеством мощности континуума [7], достаточно установить взаимно-однозначное соответствие между точками множества $\mathbb{K}$ и подмножества $M_c(1/2) \subseteq M_c$.

Из выражения $(*.2)$ леммы 3.2. непосредственно видно, что любая точка $k \in \mathbb{K}$ однозначно определяется набором значений натуральных показателей $n_1, \ldots, n_j \in \mathbb{N}$ при каждом натуральном $j = 1, 2, \ldots$.

Так как $\mathbb{K} = \mathbb{T}_0^2 = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{t_0^2\}_j$, то всякую точку подмножества $\{t_0^2\}_j$ можно представить как $k(j; n_1, \ldots, n_j)$. Аналогично, для множества $\mathbb{T}_0^1 = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{t_0^1\}_j$, всякую точку подмножества $\{t_0^1\}_j$ можно представить как $t_0^1(j; n_1, \ldots, n_j)$.

Определим на множестве $\mathbb{K}$ линейную дискретную функцию $F = F[k]$ следующим образом:

$$F[k(j; n_1, \ldots, n_j)] = k(j; n_1, \ldots, n_j) + t_0^1(j; n_1, \ldots, n_j), \qquad (*.1)$$

для любых $j; n_1, \ldots, n_j \in \mathbb{N}$. Тогда очевидно, что

$$F[\{t_0^2\}_j] = \{t_0^1\}_j + \{t_0^2\}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \qquad (*.2)$$

и вообще

$$F[\mathbb{K}] = \mathbb{T}_0^1 \oplus \mathbb{T}_0^2 = M_c(1/2), \qquad (*.3)$$

т. е. функция F осуществляет прямое сложение множеств $\mathbb{T}_0^1$ и $\mathbb{T}_0^2 = \mathbb{K}$. Обратно, всякая точка μ множества $M_c(1/2)$, по лемме 3.2. представима в виде суммы

$$\mu = k(j; n_1, \dots, n_j) + t_0^1(j; n_1, \dots, n_j) \equiv \mu(j; n_1, \dots, n_j), \qquad (*.4)$$

где $k \in \mathbb{K}$ и $t_0^1 \in \mathbb{T}_0^1$ при соответствующих натуральных j и $n_1, \dots, n_j$. Следовательно, на множестве $M_c(1/2)$ можно определить линейную дискретную функцию $F^{-1} = F^{-1}[\mu]$, осуществляющую однозначное отображение $F^{-1} : M_c(1/2) \to \mathbb{K}$, согласно выражению:

$$F^{-1}[\mu(j; n_1, \dots, n_j)] = F[k(j; n_1, \dots, n_j)] - t_0^1(j; n_1, \dots, n_j). \qquad (*.5)$$

Покажем из $(*.1)$, $(*.4)$ и $(*.5)$, что функции F и F^{-1} являются взаимно обратными для всех соответствующих $j; n_1, \dots, n_j \in \mathbb{N}$:

$$FF^{-1}[\mu] = FF[k] - F[t_0^1] = F[k + t_0^1] - F[t_0^1] = F[k] = \mu, \qquad (*.6)$$

$$F^{-1}F[k] = F^{-1}[k + t_0^1] = F^{-1}[\mu] = k. \qquad (*.7)$$

В $(*.6)$ под $F[t_0^1]$ следует формально полагать $2t_0^1$. Таким образом, данные построения показывают, что функция F осуществляет биективное отображение множеств $\mathbb{K}$ и $M_c(1/2)$, из чего следует утверждение теоремы. □

Список литературы

[1] Н.Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1951, 550 с.
[2] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, Москва, 1961, 936 с.
[3] Л. Карлесон, *Сборник переводных статей «Математика»*, ИЛ, Москва, **II**: 4 (1967), 113–132.
[4] Е. Федер, *Фракталы / Пер. с англ.*, Мир, Москва, 1991, 254 с., ил.
[5] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New-York, 1983.
[6] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва, 1981, 800 с.
[7] П.С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, Москва, 1977, 368 с.

Каирбек Казбекович Казбеков
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса 22,
362027, Владикавказ, Россия
E-mail address: kairbek75@mail.ru