S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 211–218 (2009) УДК 514.13, 514.132

MSC 51M10, 51M20, 51M25

К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ЗЕЙДЕЛЯ ОБ ОБЪЕМАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ТЕТРАЭДРОВ

Н.В. АБРОСИМОВ

Abstract. We investigate Seidel conjecture on volumes of hyperbolic and spherical tetrahedra. In the present paper we solve negatively the Extended Seidel problem formed by I. Rivin and F. Luo.

Keywords: Seidel conjecture, hyperbolic volume, tetrahedron.

1. Введение

Вычисление объема многогранников — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. Один из первых результатов в данном направлении принадлежит Тартальи (Tartaglia, 1499–1557), который нашел объем евклидова тетраэдра. Многомерный аналог этого результата известен как формула Кэли—Менгера. Несколько лет тому назад И.Х. Сабитов [1] доказал, что объем любого евклидова многогранника — это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются целочисленными многочленами, зависящими от длин ребер многогранника и его комбинаторного типа.

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Гаусс, один из создателей гиперболической геометрии, использовал слово *«die Dschungel»* (джунгли) в отношении вычисления объемов в неевклидовой геометрии. Формула объема для бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) известна еще со времен Н.И. Лобачевского [2] и Л. Шлефли [3]. Объемы куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Р. Келлерхальц [4],

---

Abrosimov, N.V., Solving the Seidel problem on the volume of hyperbolic tetrahedron.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00255), Комплексным интеграционным проектом СО РАН – УрО РАН №1.1, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/3707) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5682.2008.1).

Поступила 1 июня 2009 г., опубликована 10 сентября 2009 г.

А.Ю. Весниным, А.Д. Медных и Дж. Паркером [5], и другими. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э.Б. Винбергом [6].

Общая формула объема гиперболического тетраэдра долгое время оставалась неизвестной. Несколько лет назад Ю. Чо и Х. Ким [7], Дж. Мураками и У. Яно [8], и А. Ушиджима [9] получили указанную формулу, выразив объем в виде линейной комбинации шестнадцати дилогарифмических функций. Недавно Д.А. Деревнин и А.Д. Медных [10] предложили элементарную интегральную формулу для объема гиперболического тетраэдра.

Удивительно, но еще более ста лет назад, в 1906 г., итальянский герцог Гаетано Сфорца нашел довольно простую формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. Этот факт приобрел известность после дискуссии А.Д. Медных с Х.М. Монтезиносом (J.M. Montesinos) на конференции в Эль Бурго д'Осма (Испания) в августе 2006 г. К сожалению, выдающаяся работа Сфорца [11] была до этого полностью забыта.

Отметим, что в случае симметрического тетраэдра, противоположные двугранные углы которого попарно равны, формула объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским [2] для идеального гиперболического тетраэдра, то есть тетраэдра, все вершины которого лежат на бесконечности. Дж. Милнор [12] представил соответствующий результат в весьма элегантной форме. В общем случае, объем симметричного тетраэдра найден Д.А. Деревниным, А.Д. Медных и М.Г. Пашкевич [13]. Интересно заметить, что идея использования симметрий оправдывает себя и для более сложных многогранников. Объемы октаэдров, обладающих различными симметриями, и двойственных к ним гексаэдров найдены Н.В. Абросимовым, М. Годоем—Молиной и А.Д. Медных [14].

В 1986 году Дж. Зейдель [15] высказал гипотезу о том, что объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить как функцию от определителя и перманента матрицы Грама и предположил, что эта функция будет монотонна по каждому из аргументов. Усиленный вариант этой гипотезы был предложен И. Ривиным и Ф. Лю. Они предположили, что объем тетраэдра (гиперболического или сферического) зависит лишь от определителя его матрицы Грама. В данной работе показано, что усиленная гипотеза не верна.

2. Предварительные сведения

В пространстве постоянной кривизны рассмотрим произвольный тетраэдр T с двугранными углами A, B, C, D, E, F (рис. 1).

Хорошо известно [6], что в гиперболическом и сферическом пространствах тетраэдр T однозначно, с точностью до изометрии, определяется своей матрицей Грама

$$G = (-\cos\theta_{ij})_{ij=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}.$$

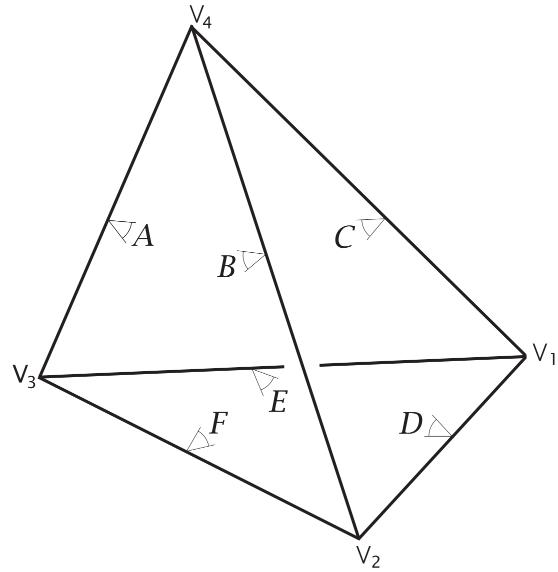

Рис. 1. Тетраэдр $T(A, B, C, D, E, F)$

Напомним, что перманент матрицы $M = (m_{ij})_{ij=1\ldots n}$ задается рекурентной формулой $\operatorname{per} M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij} \operatorname{per} M_{ij}$, где M_{ij} — матрица, полученная из M вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Условия существования сферических и гиперболических тетраэдров в терминах сигнатуры матрицы Грама описаны, соответственно, Ф. Лю [16] и А. Ушиджимой [9].

Одним из ключевых инструментов при вычислении объема выпуклого многогранника в пространствах постоянной кривизны является дифференциальная формула Шлефли. В данной работе нам потребуется ее частный случай для размерности три.

Теорема 1 (Формула Шлефли)**.** *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если P деформируется так, что его комбинаторная структура сохраняется, а двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то объем $V = V(P)$ также меняется дифференцируемым образом, причем выполняется соотношение*

$$K\,dV = \frac{1}{2} \sum_{i} \ell_i \, d\alpha_i \,,$$

где K — кривизна пространства, суммирование ведется по всем ребрам P, ℓ_i обозначает длину i-того ребра, а α_i — двугранный угол вдоль него.

В классической работе Шлефли [17] эта формула была доказана для случая сферического n-симплекса. В гиперболическом случае она была получена Х. Кнезером [18]. Подробнее см. также [6] и [19].

3. Усиленная гипотеза

Усиленная формулировка гипотезы Зейделя, принадлежащая И. Ривину и Ф. Лю, звучит следующим образом:

Гипотеза 1. *Объем тетраэдра (сферического и гиперболического) является функцией определителя его матрицы Грама.*

Покажем, что эта гипотеза не верна. Рассмотрим отдельно сферический и гиперболический случаи.

3.1. **Сферическая геометрия.** Ответ дает следующая

Теорема 2. *Существует однопараметрическое семейство сферических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама и переменным значением объема.*

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Объем сферического тетраэдра $T(A,B)$, у которого два противоположных двугранных угла равны соответственно A и B, а все оставшиеся двугранные углы прямые, равен $\dfrac{A\,B}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство сферических тетраэдров $T(A,B)$, у которых два противоположных двугранных угла равны соответственно A и B, а все оставшиеся двугранные углы прямые (рис. 2).

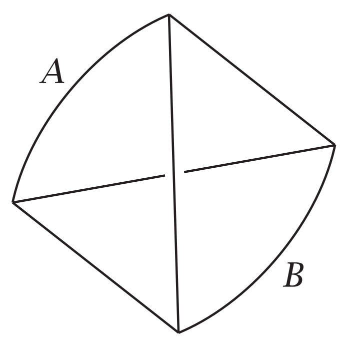

Рис. 2. Тетраэдр $T(A,B)$

Длины ребер тетраэдра $T(A,B)$, лежащих против его двугранных углов A и B, равны соответственно $\ell_B = A$ и $\ell_A = B$.

С другой стороны, согласно формуле Шлефли (теорема 1), частные производные объема тетраэдра $V = V\big(T(A,B)\big) = V(A,B)$ по его двугранным углам A и B равны соответственно

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{\ell_A}{2} \text{ и } \frac{\partial V}{\partial B} = \frac{\ell_B}{2}.$$

Подставив в последние два равенства значения ℓ_A и ℓ_B, решим полученную систему уравнений. Получим

$$V = \frac{A\,B}{2} + c, \text{ где } c \text{ — некоторая константа.}$$

Устремим двугранные углы A и B к нулю. Тогда длины противоположных к ним ребер ℓ_A и ℓ_B тоже будут стремиться к нулю. Поскольку длины всех оставшихся ребер конечны и равны $\frac{\pi}{2}$, то и объем тетраэдра $V\bigl(T(A,B)\bigr)$ устремится к нулю. Таким образом, константа c равна нулю. □

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы приступить к доказательству теоремы 2. Для этого построим указанное в теореме семейство тетраэдров. Рассмотрим тетраэдр $T(A,D)$, у которого два противоположных двугранных угла равны, соответственно, A и D, а все оставшиеся — прямые.

Согласно лемме 1, объем такого тетраэдра равен $\frac{A\,D}{2}$. Также нетрудно убедиться, что определитель его матрицы Грама $\det G = \sin^2 A \sin^2 D$.

Среди множества всех $T(A,D)$, у которых $0 < A, D < \pi$, выберем семейство тетраэдров $T_c(A,D) = T\left(A, \arcsin\frac{c}{\sin A}\right)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама $\det G = c^2$, где c — некоторая константа, $0 < c < \min\{\sin A, \sin D\}$.

Объем таких тетраэдров выражается формулой $V(T_c) = \frac{A}{2}\arcsin\frac{c}{\sin A}$, то есть зависит не только от выбора константы c, но и от значения свободного параметра A. Таким образом, искомое семейство тетраэдров построено. □

3.2. **Гиперболическая геометрия.** Построить элементарный контрпример к усиленной гипотезе Зейделя, как это было проделано в сферическом случае, не удается. Тем не менее, имеет место аналогичная

Теорема 3. *Существует однопараметрическое семейство гиперболических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама и переменным значением объема.*

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Функция* $\frac{\operatorname{th} x}{x}$ *строго монотонно убывает на интервале* $(0; +\infty)$.

Доказательство. Покажем, что производная от данной функции строго меньше нуля на указанном промежутке.

$$\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)' = \frac{x - \operatorname{sh} x\, \operatorname{ch} x}{x^2 \operatorname{ch}^2 x} = \frac{2x - \operatorname{sh} 2x}{2x^2 \operatorname{ch}^2 x}$$

Запишем первые несколько членов в разложении Тейлора следующей функции:

$$\operatorname{sh} 2x = 2x + \frac{8\,x^3}{3} + \frac{12 x^5}{5} + \ldots$$

Теперь очевидно, что

$$\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)' = \frac{2x - \operatorname{sh} 2x}{2x^2 \operatorname{ch}^2 x} < 0, \text{ при } x \in (0, +\infty). \ \square$$

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 3. Рассмотрим произвольный гиперболический тетраэдр T с двугранными углами A, B, C, D, E, F (рис. 3).

Зафиксируем все двугранные углы, кроме двух противолежащих, например, A и D. Поскольку множество гиперболических тетраэдров открыто [16, 9], то

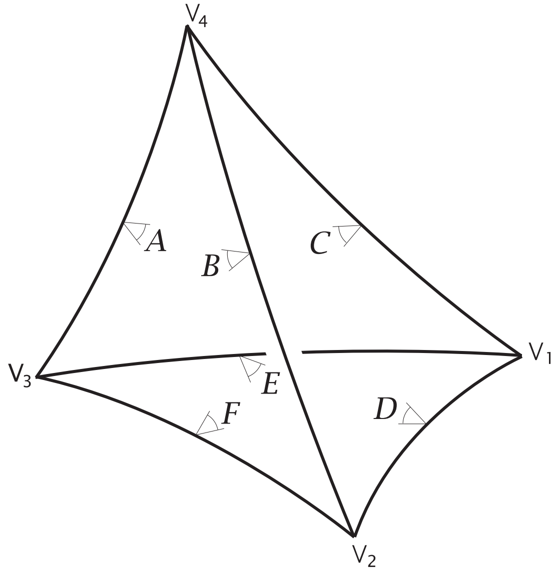

Рис. 3. Тетраэдр T

найдется окрестность значений A и D, отвечающих гиперболическим тетраэдрам. Среди множества таких тетраэдров $T(A,D)$ выделим семейство тетраэдров $T_c(A,D)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама, $\det G = -c^2 < 0$. Последнее условие означает, что дифференциал функции $\det G$ равен нулю. Учитывая, что углы A и D — переменны, а остальные фиксированы, имеем

$$-\,d\det G = 2\,c_{12}\sin A\,dA + 2\,c_{34}\sin D\,dD = 0,$$

где c_{ij} — алгебраическое дополнение ij-го элемента матрицы G. Указанное соотношение позволяет рассматривать угол D как функцию от угла A. При этом

$$\frac{dD}{dA} = -\frac{c_{12}\sin A}{c_{34}\sin D}. \tag{1}$$

Производная объема, как сложной функции от угла A, равна

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial D}\,\frac{dD}{dA}. \tag{2}$$

Отметим, что согласно формуле Шлефли (теорема 1)

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -\frac{\ell_A}{2} \;\text{ и }\; \frac{\partial V}{\partial D} = -\frac{\ell_D}{2}, \tag{3}$$

где ℓ_A и ℓ_D — длины соответствующих ребер тетраэдра.

Подставив выражения (3) в соотношение (2), получим

$$\frac{dV}{dA} = -\,\frac{1}{2}\left(\ell_A + \ell_D\,\frac{dD}{dA}\right).$$

Откуда, согласно (1), следует

$$\frac{dV}{dA} = -\,\frac{1}{2}\left(\ell_A - \ell_D\,\frac{c_{12}\sin A}{c_{34}\sin D}\right). \tag{4}$$

Длины ребер, в свою очередь, могут быть выражены через двугранные углы [9, 20]

$$\ell_A = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-\det G}\,\sin A}{c_{34}},$$
$$\ell_D = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-\det G}\,\sin D}{c_{12}}.$$

Возьмем гиперболический тангенс от правой и левой части в каждом из последних двух равенств. Затем поделим почленно первое равенство на второе, что можно сделать, поскольку $\operatorname{th}\ell_D > 0$. Получим

$$\frac{\operatorname{th}\ell_A}{\operatorname{th}\ell_D} = \frac{c_{12}\sin A}{c_{34}\sin D}.$$

Подставляя последнее выражение в соотношение (4), имеем

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{\operatorname{th}\ell_A}{2}\left(\frac{\ell_A}{\operatorname{th}\ell_A} - \frac{\ell_D}{\operatorname{th}\ell_D}\right).$$

Для выполнения условий теоремы необходимо, чтобы объем имел переменное значение, то есть $\dfrac{dV}{dA} \neq 0$. Последнее, как следует из леммы 2, эквивалентно неравенству $\ell_A \neq \ell_D$.

Таким образом, семейство тетраэдров $T_c(A, D)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама имеет переменный объем при $\ell_A \neq \ell_D$. Нетрудно построить бесконечное семейство тетраэдров, удовлетворяющих последнему условию при $A \neq D$. Например, такому условию удовлетворяют «почти симметричные» тетраэдры с углами $A \neq D, B = E$ и $C = F$. Напомним, что при фиксированном c семейство $T(A, D)$ зависит от одного свободного параметра. □

Список литературы

[1] Сабитов И.Х., *Объем многогранника как функция длин его ребер*, Фундамент. и прикл. мат., **2**:4 (1996), 1235–1246.

[2] Lobachevsky N.I., *Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale*, Deutsche Übersetzung von H.Liebmann, Teubner, Leipzig, 1904.

[3] Schläfli L., *Theorie der vielfachen Kontinuität*, In: Gesammelte mathematishe Abhandlungen, Birkhäuser, Basel, 1950.

[4] Kellerhals R., *On the volume of hyperbolic polyhedra*, Math. Ann., **285** (1989), 541–569.

[5] Mednykh A.D., Parker J., Vesnin A.Yu., *On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **10** (2004), 357–381.

[6] Винберг Э.Б., *Геометрия-2, Современные проблемы математики*, **29**, ВИНИТИ (Итоги науки и техники), Москва, 1988.

[7] Cho Yu., Kim H., *On the volume formula for hyperbolic tetrahedra*, Disc. and Comp. Geometry, **22** (1999), 347–366.

[8] Murakami J., Yano M., *On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron*, Comm. Anal. Geom., **13** (2005), 379–200.

[9] Ushijima A., *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra*, In: Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications, **581** (2006), 249–265.

[10] Деревнин Д.А., Медных А.Д., *О формуле объема гиперболического тетраэдра*, Усп. мат. наук, **60**:2 (2005), 159–160.

[11] Sforza G., *Spazi metrico-proiettivi*, Ricerche di Estensionimetria differenziale III, **8** (1906), 3–66.

[12] Milnor J., *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc., **6**:1 (1982), 9–24.

[13] Деревнин Д.А., Медных А.Д., Пашкевич М.Г., *Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах*, Сиб. мат. журн., **45**:5 (2004), 1022–1031.
[14] Н.В. Абросимов, М. Годой-Молина, А.Д. Медных, *Об объеме сферического октаэдра с симметриями*, Соврем. мат. и ее прил., **60** (2008), 3–12.
[15] J. J. Seidel, *On the volume of a hyperbolic simplex*, Stud. Sci. Math. Hung., **21** (1986), 243–249.
[16] Luo F., *On a problem of Fenchel*, Geometriae Dedicata, **64** (1997), 227–282.
[17] L. Schläfli, *On the multiple integral* $\int\int\ldots\int dxdy\ldots dz$ *whose limits are* $p_1 = a_1x + b_1y + \ldots + h_1z > 0, p_2 > 0, \ldots p_n > 0$ *and* $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$, Quart. J. Math., **2** (1858), 269–300; **3** (1860), 54–68; 97–108.
[18] H. Kneser, *Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie*, Deutsche Math., **1** (1936), 337–340.
[19] J. W. Milnor, *How to Compute Volume in Hyperbolic Space*, Collected Papers, **1**, Geometry, Publish or Perish, 1994. 189–212.
[20] А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич, *Элементарные формулы для гиперболического тетраэдра*, Сиб. матем. журн., **47**:4 (2006), 831–841.

Николай Владимирович Абросимов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: abrosimov@math.nsc.ru