S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 243–250 (2009) УДК 512.5

MSC 17B70, 20D45; 17B30, 17B40, 20F40

КОЛЬЦА ЛИ С КОНЕЧНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРАДУИРОВКОЙ, В КОТОРОЙ МНОГО КОММУТИРУЮЩИХ КОМПОНЕНТ

Е. И. ХУХРО

Abstract. Let L be a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graded Lie algebra (ring) with finite-dimensional (finite) zero-component of dimension $\dim L_0 = r$ (of order $|L_0| = r$). If for some m, each grading component L_k for $k \neq 0$ commutes with all but at most m components, then L has a soluble ideal of derived length bounded above in terms of m and of codimension (index in the additive group) bounded above in terms of n and r. If in addition n is a prime, then L has a nilpotent ideal of nilpotency class bounded above in terms of m and of codimension (index in the additive group) bounded above in terms of n and r. As an application, a corollary on metacyclic Frobenius groups of automorphisms is given.

Keywords: graded Lie ring, soluble, nilpotent, Frobenius group, automorphism.

1. Введение

Теоремы Хигмэна, Крекнина и Кострикина [10, 2, 1] о кольцах Ли с автоморфизмом конечного порядка n без нетривиальных неподвижных точек по-существу являются результатами о $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных кольцах Ли $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ (где L_i — аддитивные подгруппы, удовлетворяющие включениям $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j\,(\mathrm{mod}\,n)}$), нуль-компонента которых тривиальна: $L_0 = 0$. По теореме Крекнина [1] тогда L разрешимо n-ограниченной ступени (т. е. ограниченной сверху в терминах n). По теореме Хигмэна [10], если n — простое число, то L нильпотентно n-ограниченной ступени. Крекнин и Кострикин [2, 1] получили другое доказательство теоремы Хигмэна, включающее явную оценку сверху

Khukhro, E. I., Lie rings with a finite cyclic grading in which there are many commuting components.

Поступила 23 апреля 2009 г., опубликована 30 сентября 2009 г.

для ступени нильпотентности. В работе автора [12] доказано, что если вдобавок для некоторого m каждая компонента градуировки коммутирует со всеми компонентами, кроме не более чем m компонент, то ступень разрешимости (или нильпотентности) L m-ограничена. В доказательстве этого результата были использованы теоремы Шалева [17] и автора [8], в которых ступень разрешимости (нильпотентности) кольца L была ограничена в терминах количества нетривиальных компонент градуировки.

Теоремы Хигмэна, Крекнина и Кострикина были обобщены на случай автоморфизмов конечного порядка n с данной конечной размерностью (или количеством) неподвижных точек, что также включает (и во многом сводится к ним) результаты о $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных алгебрах (кольцах) Ли L с конечномерной (или конечной) нуль-компонентой размерности $\dim L_0 = r$ (порядка $|L_0| = r$). Согласно теоремам Хухро и Макаренко [7, 15, 4] тогда L содержит разрешимый идеал n-ограниченной ступени разрешимости и (n,r)-ограниченной коразмерности (индекса в аддитивной группе), а для простого n — нильпотентный идеал n-ограниченной ступени нильпотентности и (n,r)-ограниченной коразмерности (индекса в аддитивной группе). В работах Макаренко [5] и Макаренко–Хухро–Шумяцкого [14] теоремы Шалева и Хухро о малом числе компонент аналогичным образом были обобщены на случай конечномерной (или конечной) нуль-компоненты размерности $\dim L_0 = r$ (порядка $|L_0| = r$).

Используя эти результаты Макаренко и Макаренко–Хухро–Шумяцкого, в настоящей заметке мы отвечаем на вопрос из [12], обобщая результаты этой работы на случай конечномерной (или конечной) нуль-компоненты размерности $\dim L_0 = r$ (порядка $|L_0| = r$).

Теорема 1. *Пусть* $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ *—* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$*-градуированная алгебра (кольцо) Ли, где* L_i *— аддитивные подгруппы, удовлетворяющие* $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j \,(\mathrm{mod}\, n)}$. *Предположим, что нуль-компонента конечномерна (конечна) размерности* $\dim L_0 = r$ *(порядка* $|L_0| = r$*) и для некоторого* m *каждая компонента градуировки* L_k *при* $k \neq 0$ *коммутирует со всеми компонентами, кроме не более чем* m *компонент:* $|\{i \mid [L_k, L_i] \neq 0\}| \leqslant m$ *для каждого* $k \neq 0$.

(а) *Тогда* L *содержит разрешимый идеал* m*-ограниченной ступени разрешимости и* (n,r)*-ограниченной коразмерности (индекса в аддитивной группе).*

(б) *Если вдобавок* n *— простое число, то* L *содержит нильпотентный идеал* m*-ограниченной ступени нильпотентности и* (n,r)*-ограниченной коразмерности (индекса в аддитивной группе).*

Заметим, что в теореме 1 условие о малом числе некоммутирующих компонент не налагается на L_0, что важно для приложений.

В работе автора [12] из теоремы о градуированных кольцах Ли было выведено следствие о так называемых двойных фробениусовых группах, обобщавшее одну лемму Мазурова из [3]. В качестве иллюстрации здесь мы также получаем следствие о метациклической фробениусовой группе автоморфизмов.

Теорема 2. *Пусть* BC *— конечная фробениусова группа с ядром* B *простого порядка* p *и дополнением* C *порядка* t*, действующая на конечной группе* A *так, что* $|C_A(B)| = s$*, причем* $(|A|, |BC|) = 1$. *Если централизатор* $C_A(C)$ *абелев, то группа* A *содержит характеристическую подгруппу* (p,s)*-ограниченного индекса, которая нильпотентна* t*-ограниченной ступени.*

По теоремам Фонга, Хартли–Майкснера–Петтета и Хухро [9, 11, 16, 6, 7] группа A содержит подгруппу (p, s)-ограниченного индекса, которая нильпотентна p-ограниченной ступени, причем эту подгруппу можно выбрать характеристической по теореме Макаренко–Хухро [13]. Однако в теореме 2 важно ограничить ступень нильпотентности такой подгруппы в терминах t.

Функции, ограничивающие ступени разрешимости и нильпотентности, индексы и коразмерности в теоремах 1, 2 могут быть явно оценены сверху, хотя такие оценки в работе не выписываются.

Доказательства в настоящей работе частично повторяют рассуждения из [12]; для удобства читателя мы приводим их здесь полностью, не ограничиваясь ссылками на соответствующие части работы [12].

2. Градуированные кольца и алгебры Ли

В этом параграфе мы обозначаем через $\langle U\rangle$ подкольцо (подалгебру) Ли, порожденную подмножеством U, а через ${}_{\mathrm{id}}\langle U\rangle$ — идеал, порожденный подмножеством U. Произведения в кольце (алгебре) Ли называются коммутаторами. По определению два элемента или подмножества коммутируют (или централизуют друг друга), если их коммутатор равен 0. Члены ряда коммутантов («квадратов») кольца (алгебры) Ли L — это $L^{(0)} = L$; $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$. Кольцо (алгебра) Ли L разрешимо ступени не выше n, если $L^{(n)} = 0$ (часто также говорят об «индексе разрешимости»). Члены нижнего центрального ряда определяются как $\gamma_1(L) = L$; $\gamma_{k+1}(L) = [\gamma_k(L), L]$ (часто обозначаются как степени L). Кольцо (алгебра) Ли L нильпотентно ступени не выше c, если $\gamma_{c+1}(L) = 0$ (часто также говорят об «индексе нильпотентности»). Простой коммутатор $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ веса (длины) s — это по определению коммутатор $[...[[a_1, a_2], a_3], \dots, a_s]$.

Пусть $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированное кольцо (алгебра) Ли, где L_i — аддитивные подгруппы, удовлетворяющие $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j\,(\mathrm{mod}\,n)}$. Элементы компонент градуировки L_i будем называть *однородными*, а коммутаторы от однородных элементов — *однородными коммутаторами*. Аддитивная подгруппа H из L называется *однородной*, если $H = \bigoplus_i (H \cap L_i)$; тогда обозначаем $H_i = H \cap L_i$. Ясно, что подкольцо (подалгебра) или идеал, порожденный однородными аддитивными подгруппами, однородно(а,ен). Однородное подкольцо (подалгебра) и фактор-кольцо по однородному идеалу можно считать $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированными кольцами (алгебрами) Ли с индуцированными градуировками.

Соглашение об индексах. На протяжении всей работы строчная латинская буква с индексом i будет обозначать однородный элемент из компоненты градуировки L_i, причем индекс будет указывать лишь на компоненту, которой этот элемент принадлежит: $x_i \in L_i$. Для облегчения обозначений мы не будем использовать нумерующие индексы для элементов компонент L_j, так что разные элементы могут обозначаться одинаковыми символами, когда важно лишь то, какой компоненте принадлежат эти элементы. Например, x_i и x_i могут быть разными элементами из L_i, так что $[x_i, x_i]$ может быть ненулевым элементом из L_{2i}. Эти индексы будут рассматриваться по модулю n; например, $a_{-i} \in L_{-i} = L_{n-i}$.

Заметим, что по соглашению об индексах однородный коммутатор лежит в компоненте L_s, где s — сумма по модулю n индексов всех элементов, входящих в этот коммутатор.

Доказательство теоремы 1. Для каждого $k \neq 0$ обозначим через N_k множество тех индексов $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которых $[L_k, L_i] \neq 0$. По условию теоремы $|N_k| \leqslant m$.

Лемма 1. *Однородное подкольцо (подалгебра) $\langle L_i \mid i \in S\rangle$, порожденное любыми $s = |S|$ компонентами градуировки, имеет не более $s(m+1)$ нетривиальных компонент индуцированной градуировки.*

Доказательство. Сразу заметим, что в число $s(m+1)$ нетривиальных компонент рассматриваемого подкольца (подалгебры) мы, конечно, включаем все L_i при $i \in S$. Аддитивная группа рассматриваемого подкольца (подалгебры) порождается (натянута на) однородными простыми коммутаторами от элементов $x_i \in L_i$ при $i \in S$. Выделим в таком коммутаторе последний элемент $x_i \in L_i$ не из L_0:

$$[\ldots, x_i, x_0, \ldots x_0], \tag{1}$$

где $i \neq 0$, элементы $x_0 \in L_0$ могут отсутствовать, а начальный отрезок перед x_i может быть пустым. (Если же все элементы коммутатора лежат в L_0, то весь коммутатор лежит в L_0 с «уже учтенным» индексом $0 \in S$.)

Если начальный отрезок в (1) перед x_i пуст, то весь коммутатор (1) лежит в L_i с «уже учтенным» индексом $i \in S$. В противном случае мы можем записать

$$[\ldots, x_i, x_0, \ldots x_0] = [y_j, x_i, x_0, \ldots x_0] \in L_{i+j},$$

где $y_j \in L_j$ обозначает начальный отрезок перед последним элементом $x_i \in L_i$ не из L_0. Для того, чтобы этот коммутатор был ненулевым, должно выполняться $j \in N_i$, так что для данного i имеется не более m возможных значений для индекса j. Поэтому всего имеется не более ms возможностей для суммы $i + j$. Вместе с уже учтенными однородными коммутаторами из L_i при $i \in S$ получаем не более $ms+s$ возможных значений индекса ненулевого однородного элемента рассматриваемого подкольца. $\square$

Лемма 2. *Однородный идеал ${}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$, порожденный любой компонентой градуировки L_k при $k \neq 0$, содержится в подкольце $\langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$ и потому имеет не более $(m+1)^2$ нетривиальных компонент индуцированной градуировки.*

Доказательство. Аддитивная группа идеала ${}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$ порождается однородными простыми коммутаторами вида

$$[x_k, l_{i_1}, \ldots, l_{i_t}], \tag{2}$$

где $x_k \in L_k$ и $l_{i_s} \in L_{i_s}$ для всевозможных i_s. Используя двойную индукцию, докажем, что любой такой коммутатор лежит в подкольце $\langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$. Первый параметр индукции – это t; для данного t используется индукция по позиции первого (слева) индекса среди тех индексов i_j в (2), что не лежат в N_k (если таких индексов нет, то коммутатор (2) очевидным образом лежит в $\langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$). Доказываемое утверждение очевидно для $t = 0$. Пусть $t = 1$. Если $i_1 \in N_k$, то $[x_k, l_{i_1}] \in \langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$, как и требуется. Если же $i_1 \notin N_k$, то $[x_k, l_{i_1}] = 0$. Теперь пусть $t > 1$, и пусть i_u — первый индекс не из N_k среди индексов i_j в (2). Если $i_u = i_1$, то $[x_k, l_{i_1}] = 0$ и весь коммутатор (2) тривиален. В противном случае перенесем элемент l_{i_u} в коммутаторе (2) налево через предыдущий элемент:

$$[x_k, \dots, l_{i_{u-1}}, l_{i_u}, \dots] = [x_k, \dots, [l_{i_{u-1}}, l_{i_u}], \dots] + [x_k, \dots, l_{i_u}, l_{i_{u-1}}, \dots],$$

где соответствующие части, обозначенные точками, одинаковы во всех трех коммутаторах. Первое слагаемое справа лежит в $\langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$ по предположению первой (объемлющей) индукции, поскольку это более короткий коммутатор вида (2), в котором элемент

$$l'_{i_{u-1}+i_u} = [l_{i_{u-1}}, l_{i_u}] \in L_{i_{u-1}+i_u}$$

рассматривается как одно вхождение. Второе же слагаемое справа лежит в $\langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$ по предположению второй (внутренней) индукции.

Итак, ${}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle \subseteq \langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$. По лемме 1 число нетривиальных компонент градуировки в $\langle L_k,\, L_i \mid i \in N_k\rangle$ не превосходит $(m+1)(m+1)$, так как $|N_k| \leqslant m$. Значит, то же верно и для числа нетривиальных компонент в ${}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть $k \neq 0$ — произвольный ненулевой индекс градуировки, который мы зафиксируем на время. По лемме 2 идеал $M = {}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$ имеет не более $(m+1)^2$ нетривиальных компонент $M_s = M \cap L_s$ индуцированной градуировки. По условию каждая из компонент $M_s = M \cap L_s$ этого идеала с *ненулевым* индексом $s \neq 0$ может не централизоваться не более чем m компонентами кольца L. Если же $[M_0, L_t] \neq 0$, то $[M_0, L_t] \subseteq M_t \neq 0$ и потому M_t — одна из ненулевых компонент идеала M; так как число последних не превосходит $(m+1)^2$, то и число таких L_t не превосходит $(m+1)^2$. В результате не централизовать идеал $M = {}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$ могут не более $(m+1)^3$ компонент градуировки.

Пусть Z_k — множество всех таких индексов j, что $[L_j,\, {}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle] = 0$. Так как централизатор идеала ${}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$ является идеалом в L, однородный идеал $I_k = {}_{\mathrm{id}}\langle L_j \mid j \in Z_k\rangle$ также централизует идеал ${}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle$. Тогда фактор-кольцо L/I_k имеет не более $(m+1)^3$ нетривиальных компонент в индуцированной градуировке. Нулевая компонента индуцированной градуировки фактор-кольца L/I_k также конечна (конечномерна) и ее порядок (размерность) не превосходит $r = |L_0|$ ($= \dim L_0$). По теореме Макаренко [5] кольцо (алгебра) Ли L/I_k содержит разрешимый идеал m-ограниченной ступени разрешимости $f(m)$ и (m, r)-ограниченного индекса в аддитивной группе ((m, r)-ограниченной коразмерности).

Обозначим через J_k полный прообраз этого идеала в L. Тогда его $f(m)$-й член ряда коммутантов $J_k^{(f(m))}$ содержится в I_k. Поскольку $[I_k,\, {}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle] = 0$ и, в частности, $[I_k,\, L_k] = 0$, получаем

$$[J_k^{(f(m))},\, L_k] = 0.$$

Положим $J = \bigcap_{k=1}^{n} J_k$. Тогда $[J^{(f(m))},\, L_k] = 0$ для всех $k \neq 0$. Индекс J в аддитивной группе L (его коразмерность) не превосходит произведения индексов (суммы коразмерностей) идеалов J_k и потому (n, r)-ограничен(а).

Подкольцо (подалгебра) $\langle L_1, \dots, L_{n-1}\rangle$, порожденное компонентами с ненулевыми индексами, на самом деле является идеалом кольца (алгебры) L, так как $[L_i, L_0] \subseteq L_i$ для всех i. Его индекс (коразмерность), очевидно не превосходит $r = |L_0|$ ($= \dim L_0$). Положим $K = J \cap \langle L_1, \dots, L_{n-1}\rangle$. Тогда $[K^{(f(m))},\, K] =$

0 и идеал K разрешим ступени не выше $f(m)+1$. Индекс K в аддитивной группе L (его коразмерность) также (n,r)-ограничен(а).

Если вдобавок n — простое число, то применяя теорему Макаренко–Хухро–Шумяцкого [14] получим, что для заданного (произвольного) $k \neq 0$ кольцо (алгебра) Ли L/I_k содержит нильпотентный идеал m-ограниченной ступени нильпотентности $c(m)$ и (m,r)-ограниченного индекса в аддитивной группе ((m,r)-ограниченной коразмерности).

Обозначим через U_k полный прообраз этого идеала в L. Тогда $\gamma_{c(m)+1}(U_k) \subseteq I_k$. Поскольку $[I_k,\ {}_{\mathrm{id}}\langle L_k\rangle] = 0$ и, в частности, $[I_k,\ L_k] = 0$, получаем

$$[\gamma_{c(m)+1}(U_k),\ L_k] = 0.$$

Положим $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тогда $[\gamma_{c(m)+1}(U),\ L_k] = 0$ для всех $k \neq 0$. Индекс U в аддитивной группе L (его коразмерность) не превосходит произведения индексов (суммы коразмерностей) идеалов U_k и потому (n,r)-ограничен(а).

Положим $V = U \cap \langle L_1, \ldots, L_{n-1}\rangle$. Тогда $[\gamma_{c(m)+1}(V),\ V] = 0$ и идеал V нильпотентен ступени не выше $f(m)+1$. Индекс V в аддитивной группе L (его коразмерность) также (n,r)-ограничен(а). $\square$

3. Метациклическая фробениусова группа автоморфизмов

Доказательство теоремы 2. По теоремам Фонга, Хартли–Майкснера–Петтета и Хухро [9, 11, 16, 6, 7], группа A содержит подгруппу A_1 (p,s)-ограниченного индекса, которая нильпотентна p-ограниченной ступени $n = n(p)$, причем эту подгруппу можно выбрать характеристической по теореме Макаренко–Хухро [13]. Наша же задача найти подгруппу ограниченного индекса, которая нильпотентна t-ограниченной ступени. Поскольку условие теоремы переносится на подгруппу A_1BC (возможно, с меньшим значением $|C_{A_1}(B)| \leqslant s$), мы можем заменить A на A_1 и после переобозначений считать, что подгруппа A нильпотентна p-ограниченной ступени $n = n(p)$.

Так как ступень нильпотентности n подгруппы A p-ограничена, то можно вести индукцию по n: достаточно научиться находить характеристическую подгруппу (p,s)-ограниченного индекса в A, ступень нильпотентности которой строго меньше ступени нильпотентности группы A — до тех пор, пока эта ступень нильпотентности не станет меньше некоторого t-ограниченного числа (которое будет определяться функцией из теоремы 1(б)).

Пусть $B = \langle b\rangle$ и $C = \langle c\rangle$. Пусть $b^c = b^{1/q}$, где q и $1/q$ рассматриваются как элементы поля $\mathbb{F}_p$; при этом $b^{c^{-1}} = b^q$. Тогда порядок элемента q в мультипликативной группе поля $\mathbb{F}_p$ равен $|c| = t$.

Рассмотрим присоединенное кольцо Ли группы A

$$L(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i/\gamma_{i+1},$$

где γ_i — члены нижнего центрального ряда группы A. Ступени нильпотентности группы A и кольца $L(A)$ совпадают. Действие группы BC на A естественным образом индуцирует действие на $L(A)$. Заметим, что здесь $|C_{L(A)}(b)| = s = |C_A(b)|$ в силу взаимной простоты порядков $|A|$ и $|B|$.

Расширим основное кольцо примитивным корнем p-й степени из единицы ω, полагая $L = L(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega]$. Действие группы BC на $L(A)$ естественным образом продолжается на L. Тогда мы получаем аналог разложения в сумму собственных подпространств относительно линейного преобразования b:

$$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_{p-1}, \qquad \text{где } L_i = \{x \in L \mid xb = \omega^i x\}.$$

Здесь и далее используется правая операторная запись. Сумма является прямой, так как действие копростое. Тем самым получаем $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуировку кольца L, так как $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j\,(\mathrm{mod}\,p)}$, что легко проверить непосредственным вычислением. Здесь и далее мы рассматриваем индексы, указывающие на компоненты этой градуировки, как элементы поля $\mathbb{F}_p$, т. е. по модулю p. Заметим также, что $|L_0| = |C_L(b)| = |C_{L(A)}(b)|^{p-1} = s^{p-1}$.

Группа C переставляет компоненты L_i в соответствии с ее действием на $B\backslash\{1\}$, а именно, $L_k c = L_{kq}$ (напомним, что здесь kq вычисляется по модулю p). В самом деле, если $x_k \in L_k$, то $(x_k c)b = x_k cbc^{-1}c = x_k b^q c = \omega^{kq} x_k c$.

Подкольцо неподвижных точек действия группы C на L абелево. Действительно,

$$C_L(C) = C_{L(A)}(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega] \qquad \text{и} \qquad C_{L(A)}(C) = \bigoplus_{i=1}^{n} C_{\gamma_i/\gamma_{i+1}}(C),$$

так как действие копростое. Коммутаторы же в кольце Ли $L(A)$ определяются через образы групповых коммутаторов, которые все тривиальны для элементов из $C_{\gamma_i/\gamma_{i+1}}(C) = (C_{\gamma_i}(C)\gamma_{i+1})/\gamma_{i+1}$, поскольку группа $C_A(C)$ абелева по условию.

Наша цель — показать, что каждая компонента L_k при $k \neq 0$ может не централизоваться только ограниченным числом компонент. Пусть $u_k \in L_k$ при $k \neq 0$. Предположим, что $[u_k, v_l] \neq 0$ для $v_l \in L_l$. Для облегчения обозначений положим $u_{kq^i} := u_k c^i \in L_{kq^i}$ и $v_{lq^j} := v_l c^j \in L_{lq^j}$. Сумма по любой C-орбите принадлежит $C_L(C)$. Так как $C_L(C)$ абелев, имеем

$$[u_k + u_{kq} + \cdots + u_{kq^{t-1}},\ v_l + v_{lq} + \cdots + v_{lq^{t-1}}] = 0. \tag{3}$$

Раскрывая скобки в (3), получаем, в частности, слагаемое $[u_k, v_l] \in L_{k+l}$. Если $[u_k, v_l] \neq 0$, то это слагаемое должно сократиться с другим(и) слагаемым(и) в разложении левой части равенства (3), лежащими в той же компоненте L_{k+l}. Значит, $k + l = kq^i + lq^j$ для каких-то i, j, причем q^i, q^j не могут быть одновременно равны 1. Тогда $q^j \neq 1$, так как иначе $k = kq^i$, откуда также $q^i = 1$, поскольку $k \neq 0$, противоречие. Получаем

$$l = -\frac{q^i - 1}{q^j - 1} k.$$

Поскольку $q^t = 1$, имеется только t различных значений степени q^h. Поэтому для каждого $k \neq 0$ имеется не более t^2 значений l таких что $[u_k, v_l] \neq 0$ для каких-то $u_k \in L_k$ и $v_l \in L_l$. Это означает, что $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуированное кольцо Ли L удовлетворяет условию теоремы 1(б) при $m = t^2$ и $r = s^{p-1}$. По этой теореме кольцо Ли L обладает нильпотентным идеалом t-ограниченной ступени нильпотентости и (p, s)-ограниченного индекса в аддитивной группе. Ясно, что тогда и кольцо Ли $L(A)$ обладает нильпотентным идеалом I той же t-ограниченной ступени нильпотентости $g = g(t)$ и (p, s)-ограниченного индекса в аддитивной группе.

Образ идеала I в аддитивной фактор-группе $L(A)/\gamma_2(L(A))$ можно рассматривать как подгруппу фактор-группы $A/\gamma_2(A)$. Пусть N — полный прообраз этой подгруппы в A. Из определения операций в $L(A)$ вытекает, что нильпотентность идеала I ступени g влечет включение $\gamma_{g+1}(N) \leqslant \gamma_{g+2}(A)$, откуда будет следовать, что $\gamma_n(N) \leqslant \gamma_{n+1}(A) = 1$ до тех пор, пока $g < n$. В силу индукции по n, упомянутой в начале доказательства, отсюда вытекает существование подгруппы (p, s)-ограниченного индекса и t-ограниченной ступени нильпотентности $g = g(t)$. Эту подгруппу, как уже упоминалось, можно выбрать характеристической по теореме Макаренко–Хухро [13]. $\square$

Список литературы

[1] В. А. Крекнин, *Разрешимость алгебр Ли с регулярным автоморфизмом конечного порядка*, Докл. АН СССР **150** (1963), 467–469.

[2] В. А. Крекнин, А. И. Кострикин, *Алгебры Ли с регулярным автоморфизмом*, Докл. АН СССР **149** (1963), 249–251.

[3] В. Д. Мазуров, *Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов*, Алгебра и логика **41** (2002), 166–198.

[4] Н. Ю. Макаренко, *Нильпотентный идеал в кольцах Ли с автоморфизмом простого порядка*, Сиб. матем. ж. **46** (2005), 1361–1374.

[5] Н. Ю. Макаренко, *Градуированные алгебры Ли с малым числом нетривиальных компонент*, Сиб. матем. ж. **48** (2007), 116–137.

[6] Е. И. Хухро, *Конечные p-группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек*, Матем. заметки **38** (1985), 652–657.

[7] Е. И. Хухро, *Группы и кольца Ли, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка*, Матем. сб. **181** (1990), 1197–1219.

[8] Е. И. Хухро, *Конечные группы ограниченного ранга с почти регулярным автоморфизмом простого порядка*, Сиб. матем. ж. **43** (2002), 1182–1191.

[9] P. Fong, *On orders of finite groups and centralizers of p-elements*, Osaka J. Math. **13** (1976), 483–489.

[10] G. Higman, *Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements*, J. London Math. Soc. (2) **32** (1957), 321–334.

[11] B. Hartley and T. Meixner, *Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small*, Arch. Math. (Basel) **36** (1981), 211–213.

[12] E. I. Khukhro, *Graded Lie rings with many commuting components and an application to 2-Frobenius groups*, Bull. London Math. Soc. **40**: 5 (2008), 907–912.

[13] E. I. Khukhro and N. Yu. Makarenko, *Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities*, J. London Math. Soc. **75**: 3 (2007), 635–646.

[14] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, and P. Shumyatsky, *Nilpotent ideals in graded Lie algebras and almost constant-free derivations*, Commun. Algebra **36**: 5 (2008), 1869–1882.

[15] N. Yu. Makarenko and E. I. Khukhro, *Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms*, J. Algebra **277** (2004), 370–407.

[16] M. R. Pettet, *Automorphisms and Fitting factors of finite groups*, J. Algebra **72** (1981), 404–412.

[17] A. Shalev, *Automorphisms of finite groups of bounded rank*, Israel J. Math. **82** (1993), 395–404.

Евгений Иванович ХУХРО,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: khukhro@yahoo.co.uk