S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 251–271 (2009) УДК 519.21

MSC 60F10

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С СЕМИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

Abstract. In the present paper, as in [1], we obtain some integral and integro-local theorems for the sums $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ of independent random variables with general semiexponential distribution (i.e., a distribution whose right tail has the form $\mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-t^\beta L(t)}$, where $\beta \in (0,\ 1)$ and $L(t)$ is a slowly varying function with some smoothness properties). These theorems describe the asymptotic behavior as $x \to \infty$ of the probabilities

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta))$$

on the whole semiaxis (i.e., in the zone of normal deviations and all zones of large deviations of x: in the Cramér and intermediate zones, and also in the "extrem" zone where the distribution of S_n is approximated by that of maximal summand).

In the present paper (in contrast to [1]) we have used the minimal moment condition $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ on the left tail of the distribution. Under this condition we can not define a segment of the Cramér series (the probabilities under consideration were described via the segment of the Cramér series in the Cramér and intermediate zones in [1]), and have to consider another characteristic instead of it.

Keywords: semiexponential distribution, deviation function, integral theorem, integro-local theorem, segment of Cramér series, random walk, large deviations, Cramér zone of deviations, intermediate zone of deviations, zone of approximated by the maximal summand.

Mogulskii, A.A., Integral and integro-local theorems for the sums of random variables with semiexponential distribution.

Работа поддержана РФФИ (гранты 05-01-00810, 07-01-00595), НШ-8980.2006.1, РНШ.2.1.1.1379).

Поступила 19 августа 2009 г., опубликована 8 октября 2009 г.

§ 1. Основные условия и определения. Постановка задачи.

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$, имеющих общее с ξ распределение $\mathbf{F}(B)=\mathbf{P}(\xi\in B)$, среднее $a:=\mathbf{E}\xi$, дисперсию $b^2:=\mathbf{D}\xi$ и характеристическую функцию $\mathfrak{f}(t)=\mathbf{E}e^{it\xi}, \quad t\in\mathbb{R}$. Везде ниже через $L=L(t)$ мы будем обозначать медленно меняющуюся функцию (м.м.ф.) при $t\to\infty$, а через $l=l(t)$— правильно меняющуюся функцию вида

$$l(t)=t^{\beta}L(t), \quad \beta\in(0,1), \tag{1.1}$$

удовлетворяющую следующему условию гладкости

[**D**]. *Если $t\to\infty$ и $v=o(t)$, то*

$$l(t+v)-l(t)=v\frac{\beta l(t)}{t}(1+o(1))+o(1). \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) означает, что

$$l(t+v)-l(t)=\begin{cases} v\frac{\beta l(t)}{t}(1+o(1)), & \text{если} \quad \liminf\limits_{t\to\infty}\frac{vl(t)}{t}>0,\\ o(1), & \text{если} \quad \limsup\limits_{t\to\infty}\frac{vl(t)}{t}=0.\end{cases}$$

Определение 1.1. Будем говорить (следуя [2]), что распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ принадлежит классу $\mathcal{S}e$ *семиэкспоненциальных распределений с параметром* $\beta\in(0,1)$, если его правый хвост $F_+(t):=\mathbf{P}(\xi\geq t)$ имеет вид

$$F_+(t)=e^{-l(t)} \quad \text{при} \quad t\geq 0,$$

где функция l вида (1.1) удовлетворяет условию [**D**].

Класс $\mathcal{S}e$ семиэкспоненциальных распределений определен и достаточно полно изучен в [2], [3]. Хорошо известно, что он является подклассом класса $\mathcal{S}$ *субэкспоненциальных распределений*, которые характеризуются соотношением

$$\mathbf{P}(\xi_1+\xi_2\geq t)\sim 2\mathbf{P}(\xi\geq t) \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{1.3}$$

Не ограничивая общности мы можем рассматривать лишь два типа распределений (или случайных величин):

[**Z**]. *Арифметический, когда* $\mathbf{P}(\xi\in\mathbb{Z})=1$, *и для некоторого* $y_0\in\mathbb{Z}$, *такого, что* $\mathbf{P}(\xi=y_0)>0$, *общий наибольший делитель возможных значений* $\xi-y_0$ *равен* 1 *($\mathbb{Z}$-множество целых чисел).*

Ясно, что для арифметических случайных величин выполняется $\mathfrak{f}(2\pi t)=1$ при любом целом t.

[**R**]. *Нерешетчатый, когда никаким линейным преобразованием величина ξ не может быть сделана арифметической.*

Для нерешетчатых случайных величин выполняется $|\mathfrak{f}(t)|<1$ при любом вещественном $t\neq 0$.

Пусть распределение $\mathbf{F}$ лежит в классе $\mathcal{S}e$ при некотором $\beta\in[0,1]$. Как хорошо известно (см., например, [3], [2], [1]), для выполнения соотношения (1.2), в котором отсутствует последний поправочный член $o(1)$, достаточно выполнение следующего условия

[$\mathbf{D}_1$]. *При выполнении* [**R**] *функция $L(t)$ при некотором $t_0>0$ и всех $t\geq t_0>0$ дифференцируема и*

$$L'(t)=o\Big(\frac{L(t)}{t}\Big) \quad \textit{при} \quad t\to\infty;$$

при выполнении [$\mathbf{Z}$]

$$L(k+1) - L(k) = o(\frac{L(k)}{k}) \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Обозначим $\Delta[x) = [x,\ x+\Delta)$ полуинтервал, начинающийся в точке x и имеющий длину $\Delta > 0$, и положим

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n.$$

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n \geq x), \qquad \mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)),$$

где $n \geq 1$, $x \to \infty$ (в "крайних" зонах уклонений (см. ниже формулировки Теорем 2.2, 2.3) возможность, когда $n \geq 1$ остается ограниченным при $x \to \infty$, не исключается); параметр $\Delta > 0$ может быть любым фиксированным положительным числом в случае [$\mathbf{R}$] и $\Delta = 1$ в случае [$\mathbf{Z}$]. Заметим, что в случае [$\mathbf{Z}$] полуинтервал $\Delta[x)$ для $\Delta = 1$ содержит единственную целочисленную точку и вместо

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)) \tag{1.4}$$

мы можем для целочисленных x изучать вероятности

$$\mathbf{P}(S_n = x). \tag{1.5}$$

Утверждения об асимптотическом поведении вероятностей (1.4) называют *интегро-локальными теоремами (см., например,* [1], [4]*)* (иногда — *локальными* (см., например, [5]), в отличие от *интегральных теорем*, в которых изучаются вероятности вида

$$\mathbf{P}(S_n \geq x), \tag{1.6}$$

и *локальных теорем*, в которых изучается асимптотика плотности случайной величины S_n, если таковая имеется, или вероятности вида (1.5) в арифметическом случае. Как правило, интегральные теоремы можно получить как следствия из соответствующих интегро-локальных (или локальных) теорем, но не наоборот, так что интегро-локальные теоремы являются более сильными. Как отмечено в [1], есть ряд задач для решения которых "не хватает" интегральных теорем и нужны интегро-локальные теоремы. Например, при изучении вероятностей больших уклонений с помощью преобразования Крамера (см. [6], [7]), при решении некоторых граничных задач для случайных блужданий (см. [8]), при описании асимптотики вероятностей т.н. сверхбольших уклонений (см. [9], [10]) и в ряде других случаев нужны именно интегро-локальные теоремы.

К настоящему времени теория интегральных и интегро-локальных теорем для сумм S_n случайных величин с распределением из класса $\mathcal{S}e$ развита достаточно полно. Интегральные теоремы получены в работах [11]—[24], [2], [3], [1], а интегро-локальные теоремы—в работах [2], [1] (см. также обзоры, приведенные в [1], [2]). Настоящая работа является обобщением работы [1], в которой интегральные и интегро-локальные теоремы для слагаемых из класса $\mathcal{S}e$ получены на всей полуоси $x \geq 0$ (причем, интегро-локальные теоремы на всей полуоси в [1] получены впервые). Остановимся кратко на результатах работы [1].

Важную роль в описании зон уклонений играют функции вида (определения этих функций даны ниже, в § 2)

$$\sigma_1(n) = n^{\frac{1}{2-\beta}} L_1(n), \quad \sigma_2(n) = n^{\frac{1}{2-2\beta}} L_2(n), \tag{1.7}$$

где $L_1(n)$, $L_2(n)$—м.м.ф. В [1] и во всех предыдущих работах, где осуществляется описание вероятностей (1.4), (1.5), (1.6) с помощью отрезка ряда Крамера в крамеровской и промежуточной зонах уклонений, когда

$$0 \le x \le c\sigma_2(n), \quad \text{где} \quad c > 0\text{—любая фиксированная константа},$$

используется моментное условие (для распределения $\mathbf{F}$ из $\mathcal{S}e$ оно регламентирует убывание его левого хвоста):

$$\mathbf{E}|\xi|^\kappa < \infty, \quad \text{где} \quad \kappa \ge 3. \tag{1.8}$$

Отметим, что константа $\kappa = \kappa(\beta)$ в (1.8) зависит от параметра β и неограниченно возрастает, когда β приближается к 1. В частности, в [1], где эта константа выбрана близким к оптимальному способом, она равна $[\frac{1}{1-\beta}] + 2$, если число $\frac{1}{1-\beta}$ не целое, и равно $[\frac{1}{1-\beta}] + 1$, если $\frac{1}{1-\beta}$ целое и $L(t) \sim L = const$. Из условия (1.8) следует, что для центрированной случайной величины $\xi - a$ определены и конечны *семиинварианты* (см., например, [5])

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = b^2, \quad \gamma_3, ..., \gamma_\kappa.$$

С помощью семиинвариантов $\gamma_2, ..., \gamma_\kappa$ можно построить полиномы степени κ

$${}^\kappa\Lambda(\alpha) = \sum_{j=2}^{\kappa} \alpha^j \frac{v_j}{j!}, \quad {}^\kappa\Lambda_0(\alpha) = \sum_{j=3}^{\kappa} \alpha^j \frac{v_j}{j!}, \tag{1.9}$$

где коэффициенты $v_j = v_j(\gamma_2, ..., \gamma_j)$ являются “абсолютными” (не зависящими от распределения $\xi - a$) функциями своих аргументов (алгоритм построения которых приведен в разделе 4.3 работы [1]). В частности, $v_2 = \frac{1}{\gamma_2}$, $v_3 = -\frac{\gamma_3}{\gamma_2^3}$, $v_4 = -\frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{\gamma_2^5}$ и т.д. Полином (1.9) называют *отрезок ряда Крамера (или урезанный ряд Крамера)* для случайной величины $\xi - a$ (см., например, [5]). В *крамеровской зоне уклонений*, когда

$$0 \le x << \sigma_1(n) \tag{1.10}$$

(выражение $a_n << b_n$ для положительных последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ означает, что $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$), изучаемые в интегро-локальной теореме вероятности (1.4) описываются с помощью функции ${}^\kappa\Lambda(\alpha)$ (см. [1])

$$\mathbf{P}(S_n - na \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}b} e^{-{}^\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n},$$

где фиксированное $\Delta > 0$ произвольно в случае [$\mathbf{R}$] и $\Delta = 1$ в случае [$\mathbf{Z}$]. В *промежуточной зоне*, когда

$$\sigma_1(n) << x << \sigma_2(n), \tag{1.11}$$

справедливо при тех же $\Delta > 0$ представление

$$\mathbf{P}(S_n - na \in \Delta[x)) \sim \Delta n\beta \frac{l(x)}{x} e^{-M(x,n)},$$

где

$$M(x,n) := \min_{0 \le t \le (1-\delta)x} \{l(x-t) + {}^\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n\}, \quad \delta = \frac{1-\beta}{2-\beta}.$$

В зоне *аппроксимации максимальным слагаемым*, когда

$$\sigma_2(n) << x, \tag{1.12}$$

для описания изучаемых вероятностей уже не требуются функции ${}^{\kappa}\Lambda(\alpha)$, $M(x,n)$, поскольку в этой зоне при тех же Δ справедливо соотношение (см. [1])

$$\mathbf{P}(S_n - na \in \Delta[x)) \sim \Delta n\beta \frac{l(x)}{x} e^{-l(x)}.$$

Асимптотика изучаемых вероятностей (1.4) найдена в [1] и на стыках зон (1.10), (1.11), (1.12). Аналогично в [1] во всех зонах и на стыках между ними изучены вероятности (1.6) в интегральных теоремах.

В настоящей работе, отказавшись от условия (1.8) (мы требуем только конечности второго момента случайной величины ξ из класса $\mathcal{S}e$), мы, естественно, не можем привлекать к описанию изучаемых вероятностей отрезок ряда Крамера ${}^{\kappa}\Lambda(\alpha)$ и построенную с его помощью функцию $M(x,n)$, и вынуждены использовать другую функцию $\hat{\Lambda}(\alpha)$ и другую функцию $\hat{M}(x,n)$, определяемую соотношением

$$\hat{M}(x,n) := \min_{0\le t\le(1-\delta)x} \{l(a+b(x-t)) + \hat{\Lambda}(\frac{x}{n})n\}, \quad \delta = \delta_0 := \frac{1-\beta}{2-\beta}. \tag{1.13}$$

Для конструирования функции $\hat{\Lambda}(\alpha)$ построим сначала “аналог производящей функции моментов” для нормированной и центрированной случайной величины $\overline{\xi} := \frac{\xi-a}{b}$: для $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}(\beta) := [\frac{4}{1-\beta}] + 1$ положим

$$\hat{\varphi}(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\overline{\xi}};\ \overline{\xi} \le 0) + \sum_{k=0}^{\hat{\kappa}} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbf{E}(\overline{\xi}^k;\ \overline{\xi} > 0).$$

Тогда функция

$$\hat{A}(\lambda) := \ln \hat{\varphi}(\lambda)$$

будет “играть роль” логарифма производящей функции моментов для случайной величины $\overline{\xi}$. Очевидно, что

$$\hat{A}(0) = 0, \quad \hat{A}'(0+0) = 0, \quad \hat{A}''(0+0) = 1.$$

Однако она не выпукла на всей полуоси, поскольку ее производная $\hat{A}'(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ стремится к нулю, оставаясь положительной. Выберем положительное число λ_1 такое, что

$$\inf_{0<\lambda\le\lambda_1} \hat{A}''(\lambda) > 0,$$

и для этого λ_1 определим функцию

$$\hat{\Lambda}(\alpha) := \sup_{0\le\lambda\le\lambda_1} \{\lambda\alpha - \hat{A}(\lambda)\}, \tag{1.14}$$

которая будет ”играть роль“ функции уклонений случайной величины $\overline{\xi}$. Эта функция обладает основными свойствами, присущими функции уклонений (см. [25]); в частности, она неотрицательна, выпукла вниз как преобразование Лежандра над выпуклой функцией

$$\hat{A}_*(\lambda) := \begin{cases} \hat{A}(\lambda), & \text{если} \quad \lambda \in [0, \lambda_1], \\ \infty, & \text{если} \quad \lambda \notin [0, \lambda_1]. \end{cases}$$

При этом она удовлетворяет соотношениям

$$\hat{\Lambda}(0) = 0, \quad \hat{\Lambda}'(0) = 0, \quad \hat{\Lambda}''(0+0) = 1,$$

свойственным функции уклонений случайной величины с нулевым средним и единичной дисперсией, удовлетворяющей моментному условию Крамера. Итак, функция $\hat{\Lambda}(\alpha)$, "играющая роль" функции уклонений (см. [25]) случайной величины $\overline{\xi}$, заменит отрезок ряда Крамера в утверждениях настоящей работы. Отметим, что идея использования функции $\hat{\varphi}(\lambda)$ в качестве производящей функции моментов присутствует в работе [26] (к сожалению, основное утверждение этой работы ошибочно (см. [27])).

§ 2. Формулировки основных результатов

2.1. Основные обозначения. Везде ниже случайная величина ξ (ее распределение) лежит в классе $\mathcal{S}e$ при некотором $\beta \in (0,1)$, удовлетворяет условию $[\mathbf{R}]$ или $[\mathbf{Z}]$ и условию

$$\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty. \tag{2.1}$$

Наряду со случайной величиной ξ определим ее центрированную и нормированную версию

$$\overline{\xi} := \frac{\xi - a}{b},$$

где, напомним, a и b^2 есть среднее и дисперсия ξ, соответственно. Величины ξ и $\overline{\xi}$ удовлетворяют условию $[\mathbf{R}]$ одновременно, но если для ξ выполнено условие $[\mathbf{Z}]$, то $\overline{\xi}$ может и не удовлетворять этому условию. Обозначим

$$\overline{l}(t) := -\ln \mathbf{P}(\overline{\xi} \ge t) = l(a + bt),$$

так что выполняется

$$\overline{l}(t) = t^{\beta}\overline{L}(t), \qquad \overline{L}(t) = (b + a/t)^{\beta} L(a + bt).$$

Определим, следуя [3], [2], [1] функции

$$w_1(t) := \frac{\overline{l}(t)}{t^2} = t^{\beta-2}\overline{L}(t), \quad w_2(t) := \frac{\overline{l}^2(t)}{t^2} = t^{2\beta-2}\overline{L}^2(t),$$

которые сходятся к 0 при $t \to \infty$, и при этом, очевидно $w_1(t) = o(w_2(t))$ при $t \to \infty$. Функции $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(t)$, необходимые для описания зон уклонений, определяются как обратные функции

$$\sigma_i(t) := w_i^{(-1)}(\frac{1}{t}) = \inf\{u : \ w_i(u) \le \frac{1}{t}\}, \quad i = 1, 2,$$

также введенные и изученные в [3], [2], и допускающие представления (1.7). При этом выполнены соотношения $w_i(\sigma_i(t)) \sim \frac{1}{t}$, при $t \to \infty$, $i = 1, 2$, так что

$$\overline{l}(\sigma_1(n)) \sim \frac{\sigma_1^2(n)}{n}, \quad \overline{l}(\sigma_2(n)) \sim \frac{\sigma_2(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty$$

(см., например, [3], [2]).

Напомним, что функции $\hat{\Lambda}(t)$, $\hat{M}(x,n)$ были определены формулами (1.14), (1.13), соответственно. Обозначим далее

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \hat{\Lambda}_0(t) := \hat{\Lambda}(t) - \frac{t^2}{2}.$$

Поскольку функция $\bar{l}(t) = -\ln \mathbf{P}(\bar{\xi} \geq t)$ *полунепрерывна снизу*, т.е. для любого $t_0 \in \mathbb{R}$
$$\liminf_{t \to t_0} \bar{l}(t) \geq \bar{l}(t_0),$$
то этим же свойством обладает и функция аргумента t
$$\hat{M}(x,t,n) := \bar{l}(x-t) + n\hat{\Lambda}(\frac{t}{n}).$$
Поэтому для фиксированного числа $\delta_0 := \frac{1-\beta}{2-\beta} \in [0,\ 1)$ найдется точка $t(x,n)$ из отрезка $[0,\ (1-\delta_0)x]$, в которой функция $\hat{M}(x,t,n)$ достигает своего минимума $\hat{M}(x,n)$ на этом отрезке (см. определение (1.13)):
$$\hat{M}(x,n) := \min_{0 \leq t \leq (1-\delta_0)x} \hat{M}(x,t,n) = \hat{M}(x, t(x,n), n).$$
Поскольку при $\sqrt{n} << t$ справедливо
$$n\hat{\Lambda}(\frac{t}{n}) \sim \frac{t^2}{2n},$$
то (см. [1]) для $x = s\sigma_1(n)$, $n \to \infty$, при любом фиксированном $s > 0$ выполняются соотношения
$$\hat{M}(x,n) \sim \bar{l}(x)G_1(s), \quad \hat{M}(x,n) \sim \frac{x^2}{2n}G_2(s), \tag{2.2}$$
где
$$G_i(s) := \min_{0 \leq p \leq 1-\delta_0} H_i(s,p), \qquad i = 1,2, \tag{2.3}$$
$$H_1(s,p) := (1-p)^\beta + \frac{1}{2}p^2 s^{2-\beta}, \quad H_2(s,p) := 2s^{\beta-1}H_1(s,p) = 2s^{\beta-2}(1-p)^\beta + p^2.$$
Для изучения свойств функций $G_1(s)$, $G_2(s)$ обозначим максимальное p из отрезка $[0, 1-\delta_0]$, для которого достигается минимум в (2.3), через $p(s)$, так что $G_i(s) = H_i(s, p(s))$ (очевидно, что $p(s)$ не зависят от $i = 1,2$).

Введем в обиход (следуя [1]) две положительные константы s_-, s_0,
$$s_- := (\beta(1-\beta))^{\frac{1}{2-\beta}} + \beta(\beta(1-\beta))^{\frac{\beta-1}{2-\beta}}, \quad s_0 := \frac{(2-\beta)}{(2-2\beta)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}}. \tag{2.4}$$
В [1] (при доказательстве леммы 2.1) показано, что всегда $s_- < s_0$.

Лемма 2.1. [1]*Функции $G_1(s)$, $G_2(s)$ и $p(s)$ имеют свойства:*
(*a*) *функции $G_1(s)$ и $G_2(s)$ связаны между собой соотношением*
$$G_1(s) = G_2(s)\frac{s^{2-\beta}}{2};$$
функция $G_2(s)$ убывает, а функция $G_1(s)$ возрастает при $s > 0$;
$$G_2(s_0) = 1, \quad G_2(s) \to \infty \quad \textit{при} \quad s \to 0; \quad G_1(s) \to 1 \quad \textit{при} \quad s \to \infty;$$
(*b*) *Функция $p(s)$ непрерывна и положительна при $s \geq 0$, убывает при $s \geq s_-$, и постоянна при $s \in [0, s_-]$;*
$$p(s_-) = \frac{1}{2-\beta}, \quad p(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad p(s) \sim \frac{\beta}{s^{2-\beta}} \quad \textit{при} \quad s \to \infty,$$
где константы s_-, s_0 определены в (2.4).

Таким образом, Лемма 2.1 описывает свойства функций $G_1(s)$ и $G_2(s)$, в терминах которых получена асимптотика функции $\hat{M}(x,n)$ в области $x = s\sigma_1(n)$ при любом фиксированном $s > 0$ (см. (2.2)). В области $\sigma_1(n) << x$ выполняется (см. [1])

$$\hat{M}(x,n) = \bar{l}(x)(1 + o(1)),$$

а для $x = s\sigma_2(n)$, $s > 0$—

$$\hat{M}(x,n) = \bar{l}(x) - \frac{\beta^2}{2s^{2-2\beta}} + o(1),$$

так что при $\sigma_2(n) << x$ справедливо

$$\hat{M}(x,n) = \bar{l}(x) + o(1).$$

2.2.Теорема о грубой (логарифмической) асимптотике вероятностей больших уклонений сумм S_n. Теорема, описывающая асимптотику последовательности

$$\ln \mathbf{P}(S_n - na \geq x)$$

в области больших уклонений, когда $x >> \sqrt{n}$, получена в [1] (теорема 2.1) при минимальном моментном условии (2.1) на левый хвост распределения ξ. Тут мы приведем измененную формулировку теоремы 2.1 в [1], исключив условие нормированности $b^2 = 1$. Это условие, разумеется, не ограничивало общности утверждения. Однако, отказ от этого условия во всех теоремах настоящей работы позволит устранить тот “разнобой”, который, к сожалению, есть в [1]: там в теоремах 2.1, 2.2, 2.3 это условие присутствует, а в теореме 2.4 его нет, и это обстоятельство затрудняет сравнение этих теорем.

Теорема 2.1.[1] *Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ для некоторого $\beta \in (0,1)$. Тогда для $\sqrt{n} << x$, $s := \frac{x}{b\sigma_1(n)}$ справедливо*

$$\ln \mathbf{P}(S_n - na \geq x) \sim \begin{cases} -\frac{x^2}{2b^2 n}, & \text{если} \quad \sqrt{n} << x, \quad s \leq s_0, \\ -G_1(s)l(x), & \text{если} \quad s \geq s_0, \end{cases}$$

где $G_1(s)l(x) \sim G_2(s)\frac{x^2}{2b^2 n}$ для каждого фиксированного $s > 0$, и $G_1(s) \to 1$ при $s \to \infty$.

Отметим, что в Теореме 2.1 отсутствуют структурные условия [$\mathbf{R}$] или [$\mathbf{Z}$] (эти условия отсутствуют и в точной интегральной Теореме 2.2 и понадобятся только в интегро-локальных теоремах). Из Теоремы 2.1 следует, что “точка” $x = bs_0\sigma_1(n)$ разделяет крамеровскую и некрамеровскую зоны уклонений.

2.3. Интегральная теорема на всей прямой. Пусть

$$c_1(s) := [\frac{H_2''(s,p(s))}{2}]^{-1/2} \quad \text{для} \quad s \geq s_0, \quad c_1(s) = c_1(s_0) \quad \text{для} \quad s \leq s_0,$$

где функция $H_2''(s,p)$ есть вторая производная функции $H_2(s,p)$ по аргументу p:

$$H_2''(s,p) := \frac{\partial^2 H_2(s,p)}{\partial p^2} = -\beta(1-\beta)\frac{2}{s^{2-\beta}}(1-p)^{\beta-2} + 2.$$

В силу Леммы 2.1 функция $c_1(s)$ непрерывна и положительна для всех $s \geq 0$, $c_1(s) \to 1$ при $s \to \infty$, и $p(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ *для некоторого* $\beta \in (0,1)$ *и* $s_1 = \frac{x}{b\sigma_1(n)}$. *Тогда имеет место равномерное в области* $x >> \sqrt{n}$ *при* $x \to \infty$ *соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n - na \geq x) \sim \Phi(-\frac{x}{b\sqrt{n}})e^{-\hat{\Lambda}_0(\frac{x}{bn})n} + nc_1(s_1)e^{-\hat{M}(x/b,n)},$$

где $c_1(s_1) \to 1$ *при* $s_1 \to \infty$. *При этом*

$$\Phi(-\frac{x}{b\sqrt{n}})e^{-\hat{\Lambda}_0(\frac{x}{bn})n} \sim \frac{b\sqrt{n}}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\hat{\Lambda}(\frac{x}{bn})n}$$

для $\sqrt{n} << x$. *В частности, для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(S_n - na \geq x) \sim \begin{cases} \Phi(-\frac{x}{b\sqrt{n}})e^{-\hat{\Lambda}_0(\frac{x}{bn})n}, & \text{если} \ \ x \geq \sqrt{n}, \ \ s_1 \leq s_0 - \varepsilon, \\ nc_1(s_1)e^{-\hat{M}(x/b,n)}, & \text{если} \ \ s_1 \geq s_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

В “крайней” зоне уклонений, когда $x = s_2 b\sigma_2(n) \to \infty$ *при* $s_2 \geq c = conct > 0$, *выполняется*

$$\mathbf{P}(S_n - na \geq x) \sim nc_2(s_2)e^{-l(x)},$$

где $c_2(s_2) := exp\{\frac{\beta^2}{2(s_2)^{2-2\beta}}\} \to 1$ *при* $s_2 \to \infty$.

Поскольку область нормальных уклонений $x < \sqrt{n}$, очевидно, покрывается центральной предельной теоремой, то Теорема 2.2, как и теорема 2.2 в [1], действует на всей оси (см. по этому поводу комментарии в [1] после формулировки теоремы 2.2).

Замечание 2.1. Если “не обращать внимание” на отсутствие в Теореме 2.2 условия нормировки $b^2 = 1$ (или считать $b^2 = 1$, что в известном смысле не ограничивает общности рассмотрений), то можно сказать, что по форме утверждение Теоремы 2.2 совпадает с утверждением теоремы 2.2 в [1], если в последней заменить функции ${}^{\kappa}\Lambda$, ${}^{\kappa}\Lambda_0$, M на функции $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}_0$, $\hat{M}$, соответственно. Однако в Теореме 2.2 отсутствует условие (1.8), позволяющее построить отрезки ряда Крамера ${}^{\kappa}\Lambda$, ${}^{\kappa}\Lambda_0$. Отметим, что функции $\hat{\Lambda}(t)$, $\hat{\Lambda}_0(t)$, $\hat{M}(x,n)$ в Теореме 2.2 “менее удобны и просты”, чем соответствующие функции ${}^{\kappa}\Lambda(\mathrm{t})$, ${}^{\kappa}\Lambda_0(t)$, $\hat{M}(x,n)$ (скажем, функция ${}^{\kappa}\Lambda_0(t)$, определенная в (1.9), есть полином степени κ, что позволяет весьма просто описывать изучаемую вероятность в крамеровской зоне уклонений), и это обстоятельство является “платой” за более слабые условия в Теореме 2.2.

2.4. Интегро-локальные теоремы на всей полупрямой. Тут, как и в [1], нам понадобится дополнительное условие:

$[\mathbf{D}_0]$. *В случае* $[\mathbf{R}]$ *для каждого фиксированного* $\Delta > 0$ *при* $t \to \infty$

$$l(t+\Delta) - l(t) \sim \Delta\beta\frac{l(t)}{t};$$

в случае $[\mathbf{Z}]$ *для целых* k *при* $k \to \infty$

$$l(k+1) - l(k) \sim \beta\frac{l(k)}{k}.$$

Функция $\beta\frac{l(t)}{t}$ в условии $[\mathbf{D}_0]$ “играет роль” производной $l'(t)$ и асимптотически совпадает с ней, если последняя существует и ведет себя достаточно правильно. Как отмечено в [1], это условие в области “не очень больших уклонений” не потребуется. Отметим еще, что в области “очень больших уклонений” (например, когда $n = 1$, а $x \to \infty$), условие [$\mathbf{D}_0$] необходимо, поскольку совпадает с доказываемым утверждением (см. Теорему 2.3 ниже). Отметим еще, что условие [$\mathbf{D}_1$], приведенное в § 1 как достаточное для [$\mathbf{D}$], является достаточным и для [$\mathbf{D}_0$].

Для $x = s\sigma_1(n)$ обозначим

$$m(x,s) := \beta\frac{l(x)}{x} \times \begin{cases}(1-p(s))^{\beta-1}, & \text{если } \ s \ge s_0,\\ (1-p(s_0))^{\beta-1}, & \text{если } \ s \le s_0.\end{cases}$$

В силу утверждения (b) Леммы 2.1

$$p(s) \to 0, \quad m(x,s) \sim \beta\frac{\bar{l}(x)}{x} \qquad s \to \infty.$$

Можно показать, кроме того, что для каждого фиксированного $\Delta > 0$ справедливо

$$\hat{M}(x+\Delta, n) - \hat{M}(x,n) \sim \Delta m(x, s_1)$$

в зоне $s_1 := \frac{x}{b\sigma_1(n)} \ge s_0$. Таким образом, функция $m(x, s_1)$ играет роль производной функции $\hat{M}(x,n)$ по аргументу x.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ при некотором $\beta \in (0,1)$ и пусть выполнено условие [$\mathbf{D}_0$]. Пусть Δ равно 1 в случае [$\mathbf{Z}$], и равно любому фиксированному положительному числу в случае [$\mathbf{R}$]. Тогда для $s_1 = \frac{x}{b\sigma_1(n)}$ выполняется равномерное по x в области $\frac{x}{b} \ge \sqrt{n}$ при $x \to \infty$ соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n - an \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta}{b\sqrt{2\pi n}}e^{-\hat{\Lambda}(\frac{x}{bn})n} + \frac{\Delta}{b}nm(\frac{x}{b}, s_1)c_1(s_1)e^{-\hat{M}(\frac{x}{b},n)}, \tag{2.5}$$

где $\frac{1}{b}m(\frac{x}{b}, s_1)c_1(s_1) \sim \beta\frac{l(x)}{x}$ при $s_1 \to \infty$. В частности, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ и для $\frac{x}{b} \ge \sqrt{n}$ справедливо

$$\mathbf{P}(S_n - an \in \Delta[x)) \sim \begin{cases}\frac{\Delta}{b\sqrt{2\pi n}}e^{-\hat{\Lambda}(\frac{x}{bn})n}, & \text{если} \quad s_1 \le s_0 - \varepsilon,\\ \frac{\Delta}{b}nm(\frac{x}{b}, s_1)c_1(s_1)e^{-\hat{M}(\frac{x}{b},n)}, & \text{если} \quad s_1 \ge s_0 + \varepsilon.\end{cases} \tag{2.6}$$

Для x из “крайней” зоны уклонений, когда $\frac{x}{b} = s_2\sigma_2(n) \to \infty$ при $s_2 \ge c = const > 0$, справедливо

$$\mathbf{P}(S_n - an \in \Delta[x)) \sim \Delta n\beta\frac{l(x)}{x}c_2(s_2)e^{-l(x)}, \tag{2.7}$$

где $c_2(s_2) := e^{\frac{\beta^2}{2s_2^{2-2\beta}}} \to 1$ при $s_2 \to \infty$. В частности, при $n = 1$ и $x \to \infty$ соотношение (2.7) совпадает с условием [$\mathbf{D}_0$]:

$$\mathbf{P}(S_1 - a \in \Delta[x)) \sim \mathbf{P}(S_1 \in \Delta[x)) \sim \Delta\beta\frac{l(x)}{x}e^{-l(x)}.$$

Если $x = O(\sigma_2(n))$, то условие [$\mathbf{D}_0$] излишне.

Поскольку область $0 \le \frac{x}{b} \le \sqrt{n}$ покрывает интегро-локальная теорема в области нормальных уклонений, то Теорема 2.3 является (как и теоремы 2.3—2.4 в [1]) интегро-локальными теоремами, действующими на всей полуоси. Они являются аналогами равномерного в области $x \ge \sqrt{n}$ представления

$$\mathbf{P}(S_n - na \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta}{b\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2b^2}} + \Delta n\beta\frac{l(x)}{x}$$

для правильно меняющихся хвостов $\mathbf{P}(\xi \geq x) := F_+(x) = l(t) = t^\beta L(t)$ (см. [28]).

Замечание 2.2. 1. Теорема 2.3 является аналогом (обобщением) теорем 2.3 и 2.4 из [1], и к ней в полной мере применимо Замечание 2.1, высказанное после Теоремы 2.2.

2. В Теоремах 2.2—2.3 мы несколько изменили определения функций $\hat{\Lambda}(t)$ и $\hat{M}(x,n)$ по сравнением с определениями аналогичных функций в [1]; именно, мы даем эти определения для центрированной и нормированной версии $\overline{\xi} = \frac{\xi-a}{b}$ случайной величины ξ, а не для самой ξ. Такое задание нам представляется более удобным, устраняющим "разнобой" с условием нормирования $b^2 = 1$, который есть в утверждениях работы [1] (о котором мы уже говорили), и позволяющим дать формулировку в Теореме 2.3, объединяющую нерешетчатый и арифметический случаи.

3. Из Теоремы 2.3 интегральная Теорема 2.2 в области $\sigma_2(n) << x$, вообще говоря, не следует (в Теореме 2.2 отсутствует условие $[\mathbf{D}_0]$).

§ 3. Доказательства Теорем 2.2—2.3.

3.1. Предварительные замечания. Условие

$$a := \mathbf{E}\xi = 0, \quad b^2 := \mathbf{D}\xi = 1, \tag{3.1}$$

при котором случайные величины $\xi, \overline{\xi} := \frac{\xi-a}{b}$ совпадают, значительно упрощает многие обозначения, которые появятся в ходе доказательства. Это условие не ограничивает общности рассмотрений для нерешетчатых случайных величин, однако в арифметическом случае $[\mathbf{Z}]$ это не так. Поэтому для того, чтобы использовать (3.1) и при этом не исключать арифметические ξ (при доказательстве "арифметической" части Теоремы 2.3), мы рассмотрим более широкое условие $[\mathbf{Z}_{h,c}]$ *решетчатости (с шагом $h > 0$ и сдвигом $c \in (-\infty, \infty)$)*:

$[\mathbf{Z}_{h,c}]$. *Случайная величина ξ представляется в виде $\xi = c + h\zeta$, где случайная величина ζ является арифметической (удовлетворяет условию $[\mathbf{Z}]$).*

Если выполнено $[\mathbf{Z}_{h,c}]$, то условие (3.1) уже не ограничивает общности рассмотрений, т.к. для арифметического ξ константы c и h всегда можно подобрать так, чтобы (3.1) выполнялось, причем константу c можно выбрать из полуинтервала $[0, h)$; при этом вероятность (1.4) следует изучать для $\Delta = h$, а вероятность (1.5)—для x вида $x = nc + kh$, $k \in \mathbb{Z}$. Итак, *везде в последующем мы будем считать, что условие (3.1) выполнено.*

Доказательства, приведенные ниже в нерешетчатом случае $[\mathbf{R}]$, полностью сохраняется и в решетчатом случае $[\mathbf{Z}_{h,c}]$ (т.е. при доказательстве "арифметической части" Теоремы 2.3)), если в нужном месте доказательств использовать соответствующую версию интегро-локальной теоремы в области нормальных уклонений для схемы серий из работы [23] (в разделе 3.6 мы цитируем нужные версии этих теорем как в нерешетчатом, так и в решетчатом случаях). По этой причине мы опускаем доказательство в решетчатом случае $[\mathbf{Z}_{h,c}]$ и, начиная с этого места, *ограничиваемся рассмотрением случайных величин, удовлетворяющих условиям (3.1),* $[\mathbf{R}]$ (за исключением уже упомянутого раздела 3.6, где, наряду с нерешетчатым, рассмотрен и решетчатый случай).

Отметим еще, что случай, когда переменная n в Теоремах 2.2-2.3 не растет, достаточно прост: в этом случае $\hat{M}(x,n) = l(x) + o(1)$ при $x \to \infty$, и, скажем, интегральная теорема является следствием того известного факта, что любое семиэкспоненциальное распределение является субэкспоненциальным (см.

(1.3) и [3], [2]). Поэтому ниже, в доказательствах основных утверждений, этот случай мы исключаем и считаем, что переменная n неограниченно растет, а параметр $x = x(n) \to \infty$ есть функция n.

3.2. Схема доказательства основных утверждений настоящей работы полностью повторяет схему доказательства основных утверждений работы [1]. Для $\Delta \in (0,\ \infty]$; $x, y \in (0,\ \infty)$; $i, j \in \{1, ..., n\}$ обозначим

$$D_n := \{S_n \in \Delta[x)\}, \quad B_j := \{\xi_j < y\}, \quad B := \cap_{i \le n} B_i, \quad B^{(j)} := \cap_{i \le n,\ i \ne j} B_i.$$

Будем использовать очевидные тождества

$$P := \mathbf{P}(D_n) = P_0 + P_{\ge 1}, \quad P = P_0 + P_1 + P_{\ge 2}, \tag{3.2}$$

где

$$P_0 := \mathbf{P}(D_n B), \quad P_1 := \mathbf{P}(D_n \cup_{j \le n} \overline{B}_j B^{(j)}) = n\mathbf{P}(D_n \overline{B}_n B^{(n)}),$$
$$P_{\ge 1} := \mathbf{P}(D_n \cup_{j \le n} \overline{B}_j) = P_1 + P_{\ge 2}, \quad P_{\ge 2} := \mathbf{P}(D_n \cup_{1 \le i < j \le n} \overline{B}_i \overline{B}_j).$$

Доказательство каждой из Теорем 2.2, 2.3 заключается в оценивании слагаемых P_0 и $P_{\ge 1}$ или P_0, P_1 и $P_{\ge 2}$ в правых частях тождеств (3.2).

Как уже отмечалось, значение $y = \delta x$ будет в дальнейшем определять уровень срезки величины ξ_k. Этот уровень будет зависеть от зоны рассматриваемых уклонений $x = s_1 \sigma_1(n)$. Другими словами, параметр $\delta = \delta(s_1)$ будет зависеть от s_1 и будет определяться следующими соотношениями

$$\delta(s_1) = \begin{cases} \frac{1}{s_1}, & \text{если} \quad s_1 < (\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ \frac{1}{2}\delta_*, & \text{если} \quad s_1 \in [(\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}},\ s_*], \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad s_1 > s_*, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\delta_* = \delta_*(s_*)$ будет выбрано позже, $s_* > s_0$—достаточно большое фиксированное число (нетрудно показать, что $s_0 \ge \frac{1}{2}$, $(\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}} \le \frac{1}{4}$, так что точка s_0 всегда лежит в интервале $((\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}},\ s_*)$). Из (3.3) видно, что уровень срезки $y = \delta(s_1)x$ в области $s_1 < (\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}}$ равен $\sigma_1(n)$ и от x (от s_1) не зависит.

В ряде случаев нам будет удобно использовать также "дуальную" форму записи уровней срезки

$$y = \rho(s_1)\sigma_1(n)$$

в "масштабе" $\sigma_1(n)$. Так как $x = s_1\sigma_1(n)$, то очевидно, что $\rho(s_1) = s_1\delta(s_1)$, и наряду с (3.3) мы получаем представление

$$\rho(s_1) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s_1 < (\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ \frac{s_1}{2}\delta_*, & \text{если} \quad s_1 \in [(\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}},\ s_*], \\ \frac{s_1}{2}, & \text{если} \quad s_1 > s_*, \end{cases} \tag{3.4}$$

из которого видно, что множитель $\rho(s_1)$ в первой и второй зонах параметра s_1 лежит в ограниченных пределах, отделенных от 0 и ∞. В дальнейшем (см. раздел 3.3 и Лемму 3.1) для этих двух зон мы иногда будем использовать единый уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$, где ρ будет выбираться подходящим образом.

3.3. Изучение слагаемого P_0 в тождествах (3.2) для уклонений $x = O(\sigma_1(n))$. Для изучения асимптотики

$$P_0 = \mathbf{P}(S_n \in \Delta[x),\ B). \tag{3.5}$$

построим "срезанную" на уровне y случайную величину $\xi^{(y)}$ с распределением

$$\mathbf{F}^{(y)}(U) = \mathbf{P}(\xi^{(y)} \in U) := \mathbf{P}(\xi \in U |\ \xi < y),$$

и определим преобразование Лапласа над $\mathbf{F}^{(y)}$ (производящую функцию моментов), его логарифм и функцию уклонений, отвечающую $\xi^{(y)}$, соответственно, равенствами

$$\varphi_y(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\xi^{(y)}}, \quad A_y(\lambda) := \ln\varphi_y(\lambda), \quad \Lambda_y(\alpha) := \sup_{\lambda}\{\lambda\alpha - A_y(\lambda)\},$$

где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

В настоящем разделе мы будем рассматривать уклонения $x = s\sigma_1(n)$ при $0 \le s \le s_+$, где s_+—произвольное фиксированное положительное число. Для этих уклонений мы будем использовать *единый* уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$, где $\rho \in (0,\ \infty)$ (ср. с (3.4)). Однако константу $\rho = \frac{y}{\sigma_1(n)}$ мы будем трактовать более широко— не как фиксированную постоянную, а как функцию $\rho = \rho_n$ от n, сходящуюся к конечному пределу $\rho_+ \in (0,\ \infty)$, так что $y = \rho_n\sigma_1(n) \sim \rho_+\sigma_1(n)$, где $\rho_+ = \rho(s_+) \in (0,\ \infty)$ будет выбрано в Лемме 3.1 ниже. Аналогичное расширенное толкование справедливо для δ (см. (3.3)).

Обозначим далее

$$S_n^{(y)} := \xi_1^{(y)} + ... + \xi_n^{(y)}$$

сумму независимых копий случайной величины $\xi^{(y)}$. Тогда, очевидно, изучаемая вероятность (3.5) представима в виде

$$P_0 = c_n(y)\mathbf{P}(S_n^{(y)} \in \Delta[x)), \quad c_n(y) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}^n(\xi < y).$$

Для уровней срезки $y = \rho\sigma_1(n) \sim \rho_+\sigma_1(n)$ справедливы неравенства

$$\mathbf{P}(\overline{B}) \le n\mathbf{P}(\xi \ge y) \le ne^{-l(\rho_+\sigma_1(n))(1+o(1))},$$

где $l(\rho_+\sigma_1(n)) \sim \rho_+^\beta l(\sigma_1(n)) \sim \rho_+^\beta \frac{\sigma_1^2(n)}{n}$ и $n^\gamma << \frac{\sigma_1^2(n)}{n}$ при $n \to \infty$ и некотором $\gamma \in (0,\ \frac{\beta}{2-\beta})$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{B}) \to 0, \quad c_n(y) = \mathbf{P}(B) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Стало быть, задача изучения P_0 сводится к задаче изучения вероятности

$$\mathbf{P}(S_n^{(y)} \in \Delta[x)).$$

Это задача о больших или нормальных уклонениях сумм случайных величин “в схеме серий”, когда распределение слагаемого зависит от n. Мы воспользуемся здесь схемой исследования, изложенной в работах [6], [7], которая состоит в последовательном использовании преобразования Крамера и интегро-локальной теоремы в схеме серий в области нормальных уклонений.

Наряду со случайной величиной $\xi^{(y)}$ рассмотрим ее преобразование Крамера $\xi_\lambda^{(y)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi_\lambda^{(y)} \in U) := \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda\xi^{(y)}};\ \xi^{(y)} \in U)}{\varphi_y(\lambda)}.$$

Обозначим далее $\xi^{(y,\alpha)} := \xi_{\lambda_y(\alpha)}^{(y)} - \alpha$, где $\lambda_y(\alpha) := \Lambda_y'(\alpha)$ есть решение уравнения $\varphi_y'(\lambda)/\varphi_y(\lambda) = \alpha$ (производные берутся по аргументам α и λ, соответственно), так что $\mathbf{E}\xi^{(y,\alpha)} = 0$ для всех α из интервала $(\mathbf{E}\xi^{(y)},\ y)$ (отметим, что всегда $\mathbf{E}\xi^{(y)} < 0$). Используя далее стандартную технику (см., например, [6], равенства (2.4)), можно записать

$$\mathbf{P}(S_n^{(y)} \in \Delta[x)) = e^{-n\Lambda_y(\alpha)}\mathbf{E}(e^{-\lambda_y(\alpha)S_n^{(y,\alpha)}};\ S_n^{(y,\alpha)} \in \Delta[0)), \tag{3.6}$$

где $\alpha = \frac{x}{n}$ и $S^{(y,\alpha)}(n)$ есть сумма n независимых копий $\xi^{(y,\alpha)}$. Если равномерно по $\alpha \in [0,\ s_+\sigma_1(n)/n]$ справедливы соотношения

$(A1)$ $\lambda_y(\alpha) = o(1)$;

$(A2)$ $\mathbf{P}(S^{(y,\alpha)}(n) \in \Delta[0)) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}$;

$(A3)$ $\Lambda_y(\alpha) = \hat{\Lambda}(\alpha) + o(1/n)$,

(для чего уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$ следует выбрать специальным образом), то из (3.6) получим следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ для некоторого $\beta \in (0,1)$ и выполнены условия (3.1), $[\mathbf{R}]$. Пусть фиксированы произвольные положительные числа $s_+ > 0$ и $\Delta > 0$. Если выбрать уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$ при $\rho = \rho_n \to \rho_+ := (\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}} s_+^{-\frac{1}{1-\beta}} = s_+\delta_*(s_+)$ (ср. с (3.3), (3.4)), то при $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x);\ B) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\hat{\Lambda}(\frac{x}{n})n}, \tag{3.7}$$

равномерное в области $x \in [0,\ s_+\sigma_1(n)]$ (в области $s \in [0,\ s_+]$). Кроме того, в этой области значений x справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(S_n \geq x;\ B) \leq e^{-\frac{x^2}{2n}(1+\varepsilon_n(1))}, \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_n = o(1)$ при $n \to \infty$.

Замечание 3.1. *Если в условиях Леммы 3.1 для произвольного фиксированного $q \in (0,\ 1]$ выбрать уровень срезки $y = q\rho\sigma_1(n) \sim q\rho_+\sigma_1(n)$ (т.е. "асимптотически" не выше, чем в Лемме 3.1), то утверждения Леммы 3.1 сохранятся.*

Действительно, выберем $s'_+ = s_+q^{-(1-\beta)}$, так что $\rho'_+ = \delta_*(s'_+)s'_+ = q\delta_*(s_+)s_+$. Для этого s'_+ в силу Леммы 3.1 соотношения (3.7), (3.8) справедливы равномерно в области $x \in [0,\ s'_+\sigma_1(n)]$. Осталось заметить, что значение $s'_+ = s_+q^{-(1-\beta)}$ не меньше, чем s_+, так что соотношения (3.7), (3.8) справедливы также равномерно и в области $x \in [0,\ s_+\sigma_1(n)]$.

Доказательство Леммы 3.1, которое состоит, как уже было сказано, в основном в доказательстве соотношений $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, помещено нами в раздел 3.7.

3.4. Доказательство Теорем 2.2 —2.3. Воспользуемся следующим утверждением: *при $x = s_1\sigma_1(n)$ и $x \geq \sqrt{n}$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\gamma > 0$ такое, что при $s_1 \in (0,\ s_0 - \varepsilon]$*

$$\hat{M}(x,n) \geq (1+\gamma)\frac{x^2}{2n}(1+\alpha_n), \tag{3.9}$$

где $\alpha_n = o(1)$ при $n \to \infty$; при $s_1 \geq s_0 + \varepsilon$

$$\frac{x^2}{2n} \geq (1+\gamma)\hat{M}(x,n)(1+\beta_n), \tag{3.10}$$

где $\beta_n = o(1)$ при $n \to \infty$.

Докажем это утверждение. Если параметр s_1 лежит в фиксированном компакте $[s_*,\ s^*]$, не содержащем точку 0, то соотношения (3.9), (3.10) следуют из Леммы 2.1. Если же $s_1 = o(1)$ или $s_1 \to \infty$ при $n \to \infty$, то соотношения (3.9), (3.10) вытекают из очевидных соотношений

$$\frac{x^2}{2n} << \hat{M}(x,n), \quad \hat{M}(x,n) = o(\frac{x^2}{2n}) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

соответственно.

В силу соотношений (3.9), (3.10) для доказательства, скажем, Теоремы 2.3 (т.е. для доказательства соотношения (2.5) во всей зоне уклонений) достаточно убедиться в справедливости (2.5) *только в зоне* $s_2 \in [s_0 - \varepsilon,\ s_0 + \varepsilon]$ и в справедливости (2.6). Аналогично можно поступать и при доказательстве Теоремы 2.2. Таким образом, соотношения (3.9), (3.10) позволяют выполнять доказательства Теорем 2.2-2.3 "по частям", т.е. отдельно в разных зонах уклонений. Если воспользоваться доказательствами теорем 2.1—2.3, выполненными в работе [1] (на базе Леммы 3.1, тоже приведенной и доказанной в [1]), и заменить в этих доказательствах функции ${}^{\kappa}\Lambda(t)$, ${}^{\kappa}\lambda(t) := {}^{\kappa}\Lambda'(t)$, $M(x,n)$ на функции $\hat{\Lambda}(t)$, $\hat{\lambda}(t) := \hat{\Lambda}'(t)$, $\hat{M}(x,n)$, соответственно, то мы получим доказательства Теорем 2.2—2.3 (на базе Леммы 3.1). Поэтому нам осталось доказать Лемму 3.1. Прежде чем доказывать Лемму 3.1, приведем несколько вспомогательных утверждений.

3.5. Теорема непрерывности для преобразования Лежандра. Пусть для любого $r \in [0,\ 1]$ задана выпуклая вниз функция $A_{(r)}(\lambda)$; $\lambda \in [0,\ \infty)$, принимающая значения на множестве $(-\infty,\ \infty]$, зависящая от параметра r, и при этом конечная и дважды непрерывно дифференцируемая по λ из множества $\lambda \in [0,\ \varepsilon]$, где константа $\varepsilon \in (0,\ 1]$ фиксирована. Пусть $A_{(r)}(0) = A_{(0)}(0) = 0$ при всех $r \in [0,\ 1]$, а производная $A'_{(r)}(\lambda)$ функции $A_{(r)}(\lambda)$ по аргументу λ удовлетворяют соотношениям $A'_{(r)}(0) \le 0$ при всех $r \in (0,\ 1]$, $A'_{(0)}(0) = 0$. Обозначим при $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \in [0,\ 1]$ через

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) := \sup_{\lambda \ge 0}\{\lambda\alpha - A_{(r)}(\lambda)\}$$

преобразование Лежандра над функцией $A_{(r)}(\lambda)$. Вторую производную функции $A_{(r)}(\lambda)$ по λ обозначим $A''_{(r)}(\lambda)$.

Лемма 3.2. [1]*Пусть фиксированы вещественные* $\varepsilon \in (0,\ 1]$, $C \in [1/\varepsilon,\ \infty)$ *и целое* $N \ge 3$. *Пусть для всех* $r \in (0,\ \frac{1}{C}]$ *выполнены неравенства*

$$\sup_{0\le\lambda\le r} |A'_{(r)}(\lambda) - A'_{(0)}(\lambda)| \le Cr^N, \quad \sup_{0\le\lambda\le r} |A''_{(r)}(\lambda) - A''_{(0)}(\lambda)| \le Cr^{N-1},$$

$$\sup_{0\le\lambda\le r} |A''_{(0)}(\lambda) - 1| \le Cr.$$

Тогда уравнение

$$A'_{(r)}(\lambda) = \alpha$$

имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$ *при* $\alpha \in [0,\ \frac{3}{8C}]$, *если* $r = 0$ *и при* $\alpha \in [0,\ \frac{1}{2}r]$, *если* $r \in (0,\ \frac{1}{3C})$. *При этом*

$$\Lambda_{(0)}(\alpha) = \int_0^\alpha \lambda_{(0)}(t)dt \quad \textit{для} \quad \alpha \in [0,\ \frac{3}{8C}].$$

Кроме того, для всех $r \in (0,\ \frac{1}{3C})$ *справедливо:*

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = -A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0)) + \int_0^\alpha \lambda_{(r)}(t)dt, \quad \textit{где} \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{2}r;$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\lambda_{(r)}(\alpha) - \lambda_{(0)}(\alpha)| \le 2r^N;$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\Lambda_{(r)}(\alpha) - \Lambda_{(0)}(\alpha)| \le 2r^{N+1}.$$

3.6. Равномерные интегро-локальные теоремы для сумм случайных величин в области нормальных уклонений. Пусть для каждого $n = 1, 2, ...$ задана случайна величин $\xi_{(n)}$ с распределением $\mathbf{F}_{(n)}$ и характеристической функцией $\mathfrak{f}_{(n)}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_{(n)}}$; $t \in \mathbb{R}$. Будем предполагать, что при всех $n \geq 1$

$$\mathbf{E}\xi_{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi_{(n)}^2 = 1. \tag{3.11}$$

Обозначим

$$S_n = \xi_{(n)}(1) + ... + \xi_{(n)}(n)$$

сумму независимых случайных величин $\xi_{(n)}(1), ..., \xi_{(n)}(n)$, распределенных как $\xi_{(n)}$.

Следующее условие для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ является аналогом условия $[\mathbf{R}]$ (см. § 1) для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

$[\hat{\mathbf{R}}]$. *Для любых $\delta > 0$, $N < \infty$*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\delta\leq|t|\leq N} |\mathfrak{f}_{(n)}(t)| < 1.$$

Будем говорить, что для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ выполнено условие $[\mathbf{Z}_h]$, если для некоторого вещественного c выполнено условие $[\mathbf{Z}_{h,c}]$ (см. раздел 3.1). Следующее условие для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ является аналогом условия $[\mathbf{Z}_h]$ для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

$[\hat{\mathbf{Z}}_h]$. *Для любого $\delta > 0$*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\delta\leq|t|\leq h^{-1}\pi} |\mathfrak{f}_{(n)}(t)| < 1.$$

и при всех $n \geq 1$ выполнены соотношения $|\mathfrak{f}_{(n)}(2h^{-1}\pi)| = 1$.

Введем в рассмотрение условие равномерной интегрируемости квадрата случайной величины $\xi_{(n)}$:

$[\mathbf{I}]$.

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{n\geq1} \mathbf{E}(|\xi_{(n)}|^2;\ |\xi_{(n)}| \geq T) = 0.$$

Сформулированная ниже Теорема 3.1 является непосредственным следствием теорем 1, 2 работы [29].

Теорема 3.1. *Пусть последовательность распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ удовлетворяет условиям (3.11), $[\mathbf{I}]$ и либо условию $[\hat{\mathbf{R}}]$, либо условию $[\hat{\mathbf{Z}}_h]$. Пусть $\Delta > 0$ —любое фиксированное число, если выполнено условие $[\hat{\mathbf{R}}]$ и $\Delta = h$, если выполнено условие $[\hat{\mathbf{Z}}_h]$. Тогда при $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)) = \frac{\Delta}{n^{1/2}}[\phi(\frac{x}{\sqrt{n}}) + \varepsilon_n(x, \Delta)],$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-|t|^2/2}, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0.$$

Для распределений $\mathbf{F}$, не зависящих от n (схема серий отсутствует) утверждение Теоремы 3.1 было установлено Гнеденко ([30], [31]) в арифметическом случае и Шеппом ([32]) и Стоуном ([33]) в нерешетчатом случае (в [29] содержится также обобщение на случай схемы серий аналогичных *многомерных* утверждений, полученных Рвачевой ([34]) для арифметических ξ и Стоуном ([35]) для нерешетчатых).

3.7. Доказательство Леммы 3.1. Обозначим $\alpha^+ := \frac{s_+\sigma_1(n)}{n}$. Рассуждения, приведенные перед формулировкой Леммы 3.1, дают основание утверждать: *если равномерно по* $\alpha \in [0,\ \alpha^+]$ *выполнены соотношения* $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$, *то соотношение (3.7) справедливо равномерно по* $x \in [0,\ s_+\sigma_1(n)]$. Далее, в силу экспоненциального неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(S_n \geq x;\ B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(S_n \geq x|\ B) \leq \mathbf{P}(B)e^{-n\Lambda_y(\frac{x}{n})},$$

где, напомним, $\Lambda_y(\alpha)$ есть функция уклонений срезанной на уровне y случайной величины $\xi^{(y)}$ (см. определение в разделе 3.3). Поэтому равномерное по $x \in [0,\ s_+\sigma_1(n)]$ неравенство (3.8) следует из $(A3)$ и очевидных соотношений

$$\mathbf{P}(B) \to 1, \quad \hat{\Lambda}(\frac{x}{n})n \sim \frac{x^2}{2n} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, для доказательства (3.7), (3.8) нам осталось показать, что соотношения $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ выполнены равномерно по $\alpha \in [0,\ \alpha^+]$.

Напомним, что уровень срезки в Лемме 3.1 выбран следующим образом: $y = \rho\sigma_1(n) \sim \rho_+\sigma_1(n)$ при $\rho_+ := (\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}} s_+^{\frac{1}{1-\beta}}$; функция

$$\lambda_y(\alpha) = \Lambda_y'(\alpha) := \frac{\partial\Lambda_y(\alpha)}{\partial\alpha}$$

определена наряду с функцией $\Lambda_y(\alpha)$ в разделе 3.3. Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [1] (см. лемму 4.3 и формулы (4.23), (4.24) в [1]).

Лемма 3.3.

I. Функции $\lambda_y(\alpha)$, $\Lambda_y(\alpha)$ *при* $\alpha \in [0,\ \alpha^+]$ *имеют вид*

$$\lambda_y(\alpha) = \alpha[1 + \varepsilon_1^{(y)}(\alpha)] + r_1^{(y)}(\alpha), \quad \Lambda_y(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2[1 + \varepsilon_2^{(y)}(\alpha)] + r_2^{(y)}(\alpha), \tag{3.12}$$

где для некоторого $\gamma > 0$ *при* $n \to \infty$, $i = 1, 2$

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq \alpha^+} |r_i^{(y)}(\alpha)| = O(e^{-n^\gamma}), \qquad \sup_{0 \leq \alpha \leq \alpha^+} |\varepsilon_i^{(y)}(\alpha)| = o(1).$$

II. Функция $\varphi_y(\lambda)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda^+} |\varphi_y(\lambda) - 1| = 0, \tag{3.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda^+} |\varphi_y''(\lambda) - \varphi_y''(0)| = 0, \tag{3.14}$$

где

$$\lambda^+ := 2\frac{s_+\sigma_1(n)}{n} = 2\alpha^+.$$

Поскольку $\alpha^+ = o(1)$ при $n \to \infty$, то предпосылка $(A1)$ следует из первого соотношения в (3.12).

Рассмотрим теперь предпосылку $(A2)$. Обозначим $\xi_{(n)} := \xi^{(y,\alpha)}$ при $\alpha \in [0,\ \alpha^+]$, и пусть $\mathbf{F}_{(n)}$ есть распределение $\xi_{(n)}$. Для проверки $(A2)$ достаточно показать, что для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ выполнены условия Теоремы 3.1, приведенной в разделе 3.6.

Из соотношений (3.13), (3.14) следует, что при $n \to \infty$ последовательность распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ слабо сходится вместе со вторым моментом к распределению $\mathbf{F}$ случайной величины ξ. Поэтому условия (3.11), [$\mathbf{I}$] выполнены.

Покажем теперь, что если распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}]$, то последовательность $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ также удовлетворяет условию $[\hat{\mathbf{R}}]$. Для этого воспользуемся следующим *неравенством для модуля характеристической функции случайной величины, подвергнутой "случайному" преобразованию Крамера:*

Теорема 3.2.(Неравенство Юринского; [25], с. 56) *Пусть Y, Z — две случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть $\mathbf{E}e^Z < \infty$. Тогда для $t \in \mathbb{R}$, $p \in (0,\ 1)$, $q = 1-p$, $h = h_p := p(1+\mathbf{E}e^{pZ})\mathbf{E}(e^{pZ}+1)|Z|$ имеет место неравенство*

$$(1 - |\frac{\mathbf{E}e^{itY+Z}}{\mathbf{E}e^Z}|^2)^q \geq \frac{1-|\mathbf{E}e^{itY}|-2h}{2^p(\mathbf{E}e^Z)^{2q}}. \tag{3.15}$$

Пусть распределение случайного вектора (Y, Z) задается соотношением

$$\mathbf{P}(Y \in U,\ Z \in V) := \mathbf{P}(\xi^{(y)} \in U,\ \lambda_y(\alpha)\xi^{(y)} \in V),$$

где $0 \leq \alpha \leq \alpha^+$. Тогда неравенство (3.15) будет иметь вид

$$(1 - |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}|^2)^q \geq \frac{1-|\mathbf{E}e^{it\xi^{(y)}}|-2h}{2^p(\mathbf{E}e^{\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}})^{2q}}.$$

Из того, что ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}]$ вытекает: для любых $c > 0$, $N < \infty$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_{c\leq|t|\leq N}|\mathbf{E}e^{it\xi^{(y)}}| \leq 1-\varepsilon < 1.$$

Выбирая $p > 0$ достаточно малым, мы добиваемся, что $2h$ будет не больше, чем $\varepsilon/2$. В силу (3.13) для всех $\alpha \in (0,\ \alpha^+)$ выполняется $\mathbf{E}e^{\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}} \to 1$ при $n \to \infty$. Поэтому для всех достаточно больших n

$$\inf_{0\leq\alpha\leq\alpha^+}\ \inf_{c\leq|t|\leq N}(1-|\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}|^2)^q > 0, \qquad \sup_{0\leq\alpha\leq\alpha^+}\ \sup_{c\leq|t|\leq N}|\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}| < 1$$

Условие $[\hat{\mathbf{R}}]$ для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ установлено, а вместе с ним—и выполнение условий Теоремы 3.1. Предпосылка $(A2)$ доказана.

Проверим теперь выполнение предпосылки $(A3)$. Напомним, что функцию $\hat{\varphi}(\lambda)$ мы определили следующим образом

$$\hat{\varphi}(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi},\ \xi \leq 0) + \sum_{i=0}^{\hat{\kappa}}\frac{\lambda^i}{i!}\mathbf{E}(\xi^i;\ \xi > 0), \quad \lambda \geq 0,$$

где $\hat{\kappa} = [\frac{4}{1-\beta}] + 1$. Далее мы выбрали $\lambda_1 > 0$ такое, что на отрезке $[0,\ \lambda_1]$ функция $\ln\hat{\varphi}(\lambda)$ строго выпукла, и обозначили

$$\hat{A}_*(\lambda) = \begin{cases} \ln\hat{\varphi}(\lambda), & \text{если} \quad \lambda \in [0,\ \lambda_1], \\ \infty, & \text{если} \quad \lambda \notin [0,\ \lambda_1]. \end{cases}$$

Так определенная функция $\hat{A}_*(\lambda)$ является выпуклой на полуоси $\lambda \geq 0$; это обстоятельство облегчит применение Леммы 3.2. Далее воспользуемся тем, что преобразование Лежандра над $\hat{A}_*(\lambda)$ совпадает с функцией $\hat{\Lambda}(\alpha)$:

$$\hat{\Lambda}(\alpha) := \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda\alpha - \hat{A}_*(\lambda)\}.$$

Докажем далее следующие утверждения: *в зоне* $x \in [0,\ s_+\sigma_1(n)]$ *имеет место соотношение*

$$n\Lambda_y(\frac{x}{n}) = n\hat{\Lambda}(\frac{x}{n}) + o(1), \tag{3.16}$$

которое, очевидно, эквивалентно предпосылке $(A3)$. Итак, для завершения доказательства Леммы 3.1 нам осталось доказать утверждение (3.16).

Доказательство (3.16). Напомним, что $\lambda^+ = \frac{2s_+\sigma_1(n)}{n}$. Очевидно, что для $j = 0, 1, 2$, для производной $\hat{\varphi}^{(j)}(\lambda)$ порядка j функции $\hat{\varphi}(\lambda)$ справедливо

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} |\hat{\varphi}^{(j)}(\lambda) - \hat{\varphi}^{(j)}(0)| = O(\lambda^+) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{3.17}$$

и при этом

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} |\hat{A}''_*(\lambda) - 1| = O(\lambda^+) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.18}$$

Кроме того (см. доказательство леммы 3.3 в [1]) для $j = 0, 1, 2$

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} |\varphi_y^{(j)}(\lambda) - \varphi_y^{(j)}(0)| = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{3.19}$$

где, как и прежде, $\varphi_y^{(j)}(\lambda)$ есть производная порядка j по λ.

Заметим далее, что для $j = 0, 1, 2$

$$|\varphi_y^{(j)}(\lambda) - \hat{\varphi}^{(j)}(\lambda)| \le I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

где

$$I_1(\lambda) := \mathbf{P}(\xi \ge y)|\varphi_y^{(j)}(\lambda)|, \quad I_2(\lambda) := |(1 - \mathbf{P}(\xi \ge y))\varphi_y^{(j)}(\lambda) - \hat{\varphi}^{(j)}(\lambda)|.$$

В силу выбора y и (3.19) для некоторого $\gamma > 0$

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} I_1(\lambda) = O(e^{-n^\gamma}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оценим $I_2(\lambda)$. В силу формулы Тейлора для $j = 1, 2, 3$ и $k = \hat{\kappa}$

$$I_2(\lambda) \le I_3(\lambda) + \frac{\lambda^{k+1-j}}{(k+1-j)!} I_4(\lambda),$$

где

$$I_3 := \sum_{i=0}^{k-j} \frac{\lambda^i}{(i)!} \mathbf{E}(\xi^{i+j};\ \xi \ge y), \quad I_4 := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^{k+1-j};\ 0 < \xi < y).$$

Очевидно, что для некоторого $\gamma > 0$

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} I_3(\lambda) = I_3(\lambda^+) = O(e^{-n^\gamma}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Повторяя далее оценки, которые использовались при доказательстве леммы 3.3 в [1], можно получить для $j = 1, 2, 3$ неравенство

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} I_4(\lambda) \le \mathbf{E}(\xi^{k+1-j};\ \xi > 0) < \infty.$$

Таким образом, для $j = 1, 2, 3$

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} |\varphi_y^{(j)}(\lambda) - \hat{\varphi}^{(j)}(\lambda)| = O((\lambda^+)^{k+1-j}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.20}$$

Из (3.20), (3.17), (3.19) очевидным образом вытекают для $j = 1, 2$ соотношения

$$(3.21) \qquad \sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |A_y^{(j)}(\lambda) - \hat{A}_*^{(j)}(\lambda)| = O((\lambda^+)^{k-j}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из соотношений (3.18), (3.21) в силу Леммы 3.2 следует

$$(3.22) \qquad \sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}\lambda^+} |\Lambda_y(\alpha) - \hat{\Lambda}(\alpha)| = O((\lambda^+)^{k+1}),$$

где $k = \hat{\kappa}$ Поскольку

$$\lambda^+ = O(n^{\frac{\beta-1}{2}}),$$

то

$$n(\lambda^+)^{\hat{\kappa}+1} = o(1),$$

и из (3.22) вытекает (3.16). Лемма 3.1 доказана.

В заключение я выражаю благодарность Рецензенту за весьма полезные замечания и советы.

Список литературы

[1] Боровков А.А., Могульский А.А., *Интегро-локальные и интегральные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями*, Сиб. матем. **47**: 6 (2006), 1218–1257.

[2] Borovkov A.A., Borovkov K.A., *Asymptotic analysis of random walks. Heavy-tailed distributions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 118, Cambridge University Press, 2008,

[3] Боровков А.А., *Вероятности больших уклонений для для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями*, Сиб. матем. ж. **41**: 6 (2000), 1290–1324.

[4] Боровков А.А., Могульский А.А., *Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения.I.*, Теория вероятностей и ее применения, **43**: 3 (1998), 17 с.

[5] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В., *Независимые и стационарно связанные величины*, М.: Наука, 1965.

[6] Боровков А.А., Могульский А.А., *О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I*, Теория вероятностей и ее применения, **51**: 2 (2006), 260–294.

[7] Боровков А.А., Могульский А.А., *О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II*, Теория вероятностей и ее применения, **51**: 4 (2006), 505–521.

[8] Могульский А.А., *О больших уклонениях времени первого прохождения для случайного блуждани с семиэкспоненциально распределенными скачками*, Сиб. матем. ж. **47**: 6 (2006), 1323–1341.

[9] Боровков А.А., Могульский А.А., *Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных векторов на границе и вне крамеровской зоны.I*, Теория вероятн. и ее примен., **53**: 2 (2008), 336–344.

[10] Боровков А.А., Могульский А.А., *Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных векторов на границе и вне крамеровской зоны.II*, Теория вероятн. и ее примен., **53**: 4 (2008), 641–664.

[11] Осипов Л.В., *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин*, Теория вероятностей и ее применения. **17**: 2 (1972), 320–341.

[12] Nagaev S.V., *Large deviations for sums of independent random variables*, Ann. Probab. **7**: 5 (1979), 745–789.

[13] Розовский Л.В., *Вероятности больших уклонений на всей оси*, Теория вероятностей и ее применения, **38**: 1 (1993), 79–109.

[14] Нагаев С.В., *Некоторые предельные теоремы для больших уклонений*, Теория вероятностей и ее применения. **10**: 2 (1965), 231–254.

[15] Петров В.В., *Предельные теоремы для больших уклонений, когда условие Крамера нарушено; I, II*, Вестник ЛГУ, **19** (1963), 49–68; **1** (1968), 58–75.
[16] Вольф В., *О вероятностях больших уклонений в случае нарушени условия Крамера*, Math. Nachr. **70** (1975), 197–215.
[17] Wolf W., *Asymptotische Entwicklungen fer Wahrscheinlichkeiten grosser Abweichungen*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. **40** (1977), 239–256.
[18] Саулис Л., Статулявичус В., *Предельные теоремы о больших уклонениях*, Вильнюс: Мокслас, 1989.
[19] Mikosh T, Nagaev A.V., *Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance*, Extremes, **1** (1998), 81–110.
[20] Нагаев А.В., *Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когда условие Крамера не выполнено.I,II*, Теория вероятностей и ее применения. **14**: 1 (1969), 51–64; **14**: 2, 203–214.
[21] Нагаев А.В., *Об одном свойстве сумм независимых случайных величин*, Теория вероятностей и ее применения. **22**: 2 (1977), 335–346.
[22] Пинелис И.Ф., *Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин*, Тр. Ин-та математики/АН СССР, Сиб. отделение. 1985, 144–173.
[23] Боровков А.А., *Оценки для распределений сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера*, Сиб. матем. ж. **41**: 5 (2000), 997–1038.
[24] Розовский Л.В., *Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона*, Теория вероятностей и ее применения. **34**: 4 (1989), 686–705.
[25] Боровков А.А., Могульский А.А., *Большие уклонения и проверка статистических гипотез*, Новосибирск: Наука, 1992.
[26] Жуленев С.В., *О больших уклонениях. II*, Теория вероятностей и ее применения. **49**: 4 (2004), 672–694.
[27] Боровков А.А., Могульский А.А., Розовский Л.В., Саханенко А.И., *Письмо в редакцию: О работе С.В.Жуленева " О больших уклонениях.II"*, Теория вероятностей и ее применения. **51**: 4 (2006), 445–446.
[28] Могульский А.А., *Интегро-локальная теорема, действующая на всей полуоси, для сумм случайных величин с правильно меняющимися распределениями*// Сиб. матем. ж. **49**: 4 (2000), 837–854.
[29] Боровков А.А., Могульский А.А., *Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий*, Матем. заметки. **79**: 4 (2006), 468–482.
[30] Гнеденко Б.В., *О локальной предельной теореме теории вероятностей*, Успехи матем. наук, **3**: 3 (1948), 187–194.
[31] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н., *Предельные распределени для сумм независимых случайных величин*, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
[32] Shepp, L.A., *A local limit theorem*, Ann. Math. Statist. **35** (1964), 419–423.
[33] Stone C., *On local and ratio limit theorems*, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, **II**: II (1966), 217–224.
[34] Рвачева, Е.Л., *Об областях притяжения многомерных распределений*, Ученые записки Львовского Государственного Университета, Сер. мех.-мат. **6** (1958), 5–44.
[35] Stone C., *A local limit theorem for nonlattice multy-dimensional distribution functions*, Ann Math. Statist. **36** (1965), 546–551.

Анатолий Альфредович Могульский
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mogul@math.nsc.ru