S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 26–48 (2009) УДК 512.554.3

MSC 17B99

МЕТАБЕЛЕВЫ Q-АЛГЕБРЫ ЛИ

Э. Ю. ДАНИЯРОВА

Abstract. This is the second paper in the series of three, which are in the series of papers, the aim of which is to construct algebraic geometry over metabelian Lie algebras. For investigation of quasiidentity of coordinate algebras we introduce metabelian Lie Q-algebras. We have come to the characterization of such algebras by several ways. We prove the theorem of embedding an arbitrary Q-algebra into the direct sum of primary Q-algebras.

Keywords: matabelian Lie algebra over a field, Q-algebra, U-algebra, primary algebra, semiprimary algebra, primary decomposition, diophantine pojective vatiety over a field.

Содержание

Daniyarova, E.Yu., Metabelian Lie Q-algebras.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00057).

Поступила 23 апреля 2007 г., опубликована 12 февраля 2009 г.

Введение

Статья является второй в цикле из трёх статьей — “Метабелевы U-алгебры Ли” [1], “Метабелевы Q-алгебры Ли”, “Аксиомы метабелевых U-алгебр и Q-алгебр Ли”. Все три работы написаны в рамках проекта по построению алгебраической геометрии над метабелевыми алгебрами Ли. Понимание этой статьи предполагает знакомство с предыдущей работой [1]. Кроме того, материал статьи в своих пересечениях с теорией модулей над коммутативными кольцами многочленов существенно опирается на определения, обозначения и результаты статьи [2].

Мотивы введения двух новых понятий, — метабелевых U-алгебр и Q-алгебр Ли, — раскрыты в предисловии к статье [1]. Не будем здесь повторяться. Если основным объектом изучения предыдущей работы [1] был класс $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k, то в этой работе внимание сфокусировано на классе $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ всех метабелевых Q-алгебр Ли над полем k.

Работа разбита на три параграфа. В первом параграфе мы вводим ключевое понятие статьи — понятие метабелевой Q-алгебры Ли над полем k, как алгебры, радикал Фиттинга которой является Q-модулем над кольцом многочленов (Q-модулям над кольцами многочленов и их свойствам посвящена работа [2]). В разделе 1.2 мы изучаем свойства и рассматриваем частные случаи Q-алгебр. В разделе 2.2 показано, что алгебра Ли A является метабелевой Q-алгеброй Ли тогда и только тогда, когда она изоморфна подалгебре конечной прямой суммы конечно порождённых U-алгебр (следствие 2.1).

Следующая работа данного цикла из трёх статей замыкает проводимые рассуждения. В ней будет дано описание конечно порождённых алгебр из универсального класса $\mathfrak{U}$, порождённого классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, и из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$, порождённого классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$. Полученные результаты разнятся в случаях конечного и бесконечного поля k. Если поле k конечно, то любая алгебра Ли из класса $\mathfrak{U}$ является U-алгеброй, а любая конечно порождённая алгебра Ли из $\mathfrak{Q}$ является Q-алгеброй. Если же поле k бесконечно, то классы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$ шире, чем $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ и $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ соответственно.

Для описания конечно порождённых алгебр из универсального класса $\mathfrak{U}$ над бесконечным полем k в статье [1] мы ввели понятие примарной метабелевой алгебры Ли, обобщающее понятие U-алгебры. Аналогично, преследуя цель описания конечно порождённых алгебр из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$, в этой работе мы вводим понятие полупримарной метабелевой алгебры Ли. Это понятие одновременно обобщает понятие Q-алгебры и понятие примарной алгебры. Полупримарным метабелевым алгебрам Ли посвящён второй параграф этой работы. В разделе 2.2 построена теория примарного разложения полупримарных метабелевых алгебр Ли. Здесь доказана теорема 2.3 о том, что произвольная полупримарная алгебра подпрямо вкладывается в прямую сумму примарных алгебр.

В третьей статье данного цикла из трёх будет доказано, что любая конечно порождённая алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$ (квазимногообразия $\mathfrak{Q}$) является примарной (полупримарной). При этом класс $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{Q}$) содержит не все примарные (полупримарные) алгебры. Алгебры из классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$ обладают дополнительным ограничением на аннуляторы элементов радикала Фиттинга: ими могут быть только так называемые Q-радикальные идеалы. Это обстоятельство послужило причиной включения в данную статью третьего параграфа.

Третий параграф данной работы начинается с определения Q-радикального идеала кольца многочленов над полем k, как обобщения понятия Q-идеала из статьи [2]. В разделе 3.2 показано, что такие идеалы взаимно однозначно соответствуют диофантовым проективным многообразиям над полем k. Чтобы наглядно продемонстрировать вклад теории проективных многообразий в описание алгебр класса $\mathfrak{U}$, мы включаем в работу раздел 3.3, состоящий из примеров. В разделах 3.4 и 3.5 даны определения соответственно U-примарной метабелевой алгебры Ли и Q-полупримарной метабелевой алгебры Ли (аннуляторами элементов радикалов Фиттинга таких алгебр могут быть только Q-радикальные идеалы). Доказано, что произвольная U-примарная алгебра дискриминируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ (предложение 3.6), а произвольная Q-полупримарная алгебра аппроксимируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ (предложение 3.8).

На протяжении этой статьи все рассматриваемые кольца многочленов предполагаются зависящими от конечного числа переменных.

1. Метабелевы Q-алгебры Ли

Пусть A — метебелева алгебра Ли над полем k. Придерживаясь обозначений из статьи [1], символом "$\circ$" мы будем обозначать операцию лиева умножения в алгебре A, через $\mathrm{Fit}(A)$ будем обозначать радикал алгебры A, и через R_A — универсальную обёртывающую алгебры $A/\mathrm{Fit}(A)$. Напомним, что алгебра R_A изоморфна кольцу многочленов от $\dim_k(A/\mathrm{Fit}(A))$ переменных над полем k и радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ обладает структурой модуля над кольцом R_A [1, раздел 1.3].

В работе [2] определено понятие Q-модуля над кольцом многочленов. Ссылаясь на это понятие, мы вводим термин метабелевой Q-алгебры Ли, как алгебры, радикал Фиттинга которой является Q-модулем. Всякая метабелева U-алгебра Ли [1] является частным случаем Q-алгебры. Для построения новых примеров Q-алгебр мы доказываем, что прямая сумма Q-алгебр является Q-алгеброй. Чтобы разгрузить соответствующее доказательство от технических деталей, общих для прямых сумм метабелевых алгебр Ли, мы вводим в содержание параграфа вводный раздел 1.1.

Напомним, что в статье [1] через $\mathfrak{M}$ мы обозначили многообразие метабелевых алгебр Ли над полем k и через $\mathfrak{M}'$ — подкласс метабелевых алгебр Ли, в которых радикал Фиттинга является абелевым идеалом. Ясно, что прямая сумма метабелевых алгебр Ли является метабелевой алгеброй Ли. Ниже мы покажем, что класс $\mathfrak{M}'$ также замкнут относительно конечных прямых сумм.

1.1. **Прямые суммы метабелевых алгебр Ли.** Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — метабелевы алгебры Ли над полем k. Обозначим через A прямую сумму этих алгебр, $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. На A стандартным образом определена структура k-алгебры Ли и $A \in \mathfrak{M}$. В некоторых случаях нам будет удобнее вместо прямой суммы $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ писать прямое произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$, — для конечного числа слагаемых это одно и то же. Для каждого индекса $i = \overline{1,n}$ обозначим через X_i базис алгебры A_i по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A_i)$.

Лемма 1.1. *В обозначениях выше верно, что:*

(1) $A^2 = A_1^2 \oplus \ldots \oplus A_n^2$;
(2) $\mathrm{C}(A) = \mathrm{C}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{C}(A_n)$;
(3) $\mathrm{Fit}(A) = \mathrm{Fit}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Fit}(A_n)$;
(4) $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — *базис алгебры* A *по модулю радикала Фиттинга* $\mathrm{Fit}(A)$.

Доказательство. Утверждения пунктов 1 и 2 тривиальны. Пункт 3 следует из [1, лемма 1.1], пункт 4 — из пункта 3. □

Следствие 1.1. *Класс* $\mathfrak{M}'$ *замкнут относительно конечных декартовых произведений:* $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \in \mathfrak{M}'$ *тогда и только тогда, когда* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}'$.

Следствие 1.2. *Пусть* $A \in \mathfrak{M}'$. *Тогда радикал Фиттинга* $\mathrm{Fit}(A)$ *как* R_A*-модуль* [1, раздел 1.3] *является декартовой суммой радикалов Фиттинга* $\mathrm{Fit}(A_1), \ldots, \mathrm{Fit}(A_n)$ *как модулей над соотвествующими кольцами многочленов* $R_{A_1}, \ldots, R_{A_n}$ [2, раздел 2.1].

Все проведённые выше рассуждения имеют свои аналоги для подпрямых сумм метабелевых алгебр Ли. Пусть D — подпрямая сумма алгебр $A_1, \ldots, A_n$, то есть $D \leq A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и для каждого $i = \overline{1,n}$ проекция $\lambda_i : D \to A_i$ является эпиморфизмом алгебр Ли.

Лемма 1.2. *В обозначениях выше верно, что:*

(1) *коммутант* D^2 *есть подпрямая сумма коммутантов* $A_1^2, \ldots, A_n^2$;
(2) *центр* $\mathrm{C}(D)$ *есть подалгебра прямой суммы* $\mathrm{C}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{C}(A_n)$;
(3) $\mathrm{Fit}(D) = D \cap \mathrm{Fit}(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$.

Доказательство. Справедливость утверждений пунктов 1 и 2 проверяется тривиально. Для доказательства пункта 3 достаточно проверить включение $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$ [1, лемма 1.4]. По лемме 1.1, $\mathrm{Fit}(A) = \mathrm{Fit}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Fit}(A_n)$, следовательно, необходимо показать, что $\lambda_i(\mathrm{Fit}(D)) \subseteq \mathrm{Fit}(A_i)$ для всех $i = \overline{1,n}$. Последнее включение следует из того, что гомоморфизм λ_i является эпиморфизмом [1, лемма 1.13]. □

Следствие 1.3. *Если* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}'$, *то* $D \in \mathfrak{M}'$.

Следствие 1.4. *Пусть* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}'$. *Тогда радикал Фиттинга* $\mathrm{Fit}(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$ *со структурой* R_D*-модуля* [1, пример 2] *является поддекартовой суммой модулей* $\mathrm{Fit}(A_1), \ldots, \mathrm{Fit}(A_n)$ [2, раздел 2.1], *а радикал Фиттинга* $\mathrm{Fit}(D)$ — *его* R_D*-подмодулем.*

Доказательство. Эпиморфизмы λ_i опускаются до k-линейных однородных эпиморфизмов колец многочленов $\varphi_i : R_D \to R_{A_i}$ [1, следствие 1.5], с помощью которых определим структуру R_D-модуля на прямой сумме $\mathrm{Fit}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Fit}(A_n)$ [2, раздел 2.1]. С другой стороны, имея башню алгебр $D \leq A$, такую, что $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$ можно определить на $\mathrm{Fit}(A)$ структуру R_D-модуля [1, пример 2], так, что $\mathrm{Fit}(D)$ является подмодулем R_D-подмодуля $\mathrm{Fit}(A)$. По лемме 1.1, $\mathrm{Fit}(A) = \mathrm{Fit}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Fit}(A_n)$. Нетрудно проверить, что таким образом на $\mathrm{Fit}(A)$ определена одна и та же структура R_D-модуля. □

1.2. **Определение, примеры и свойства метабелевых Q-алгебр Ли.** Изложение материала этого раздела существенно опирается на результаты, терминологию и обозначения статьи [2], в которой были определены Q-модули. Определение Q-алгебры впервые было введено в препринте [3].

Пусть A — метабелева алгебра Ли над полем k. По умолчанию будем предполагать, что A — ненулевая алгебра. В этом случае $\mathrm{Fit}(A) \neq 0$.

Определение. Конечно порождённую метабелеву алгебру Ли A будем называть *Q-алгеброй*, если

(1) радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — абелев идеал;
(2) $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов является Q-модулем;
(3) пересечение центра алгебры A с её коммутантом равно нулю: $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$.

Определение. Метабелеву Q-алгебру Ли A над полем k будем называть (*не-*)*изолированной* (соответственно, (*не-*)*примарной*, (*не-*)*вырожденной*), если её радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — (не-)изолированный (соответственно, (не-)примарный, (не-)вырожденный) Q-модуль.

Замечание. Определения выше требуют обоснования корректности. В самом деле, структура радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуля над кольцом многочленов R_A зависит от выбора базиса факторалгебры $A/\mathrm{Fit}(A)$, однако замена одного базиса другим равносильна k-линейному однородному автоморфизму в кольце многочленов R_A. Изменения в модульной структуре радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ при линейных автоморфизмах кольца R_A не влияют на такие его свойства, как "быть или не быть Q-модулем", "быть (не-)изолированным Q-модулем", "быть (не-)примарным Q-модулем", "быть (не-)вырожденным Q-модулем" [2, лемма 2.5]. Кроме того, мощность ассоциатора $\mathrm{Ass}(\mathrm{Fit}(A))$ также инвариантна относительно линейных автоморфизмов кольца R_A.

Если Q-алгебра A вырождена, то следуя статье [2], через Δ будем обозначать максимальный линейный идеал кольца многочленов R_A.

Примером Q-алгебры может служить любая конечно порождённая метабелева U-алгебра Ли A. Действительно, $\mathrm{Fit}(A)$ абелев и является модулем без кручения, а модуль без кручения — это частный случай Q-модуля. Равенство $\mathrm{C}(A) \cap A^2{=}0$ также имеет место [1, следствие 2.3]. Ясно, что в этом случае $\mathrm{Ass}(A) = \{0\}$. Таким образом, любая конечно порождённая U-алгебра является примарной Q-алгеброй. Как показано в следующей лемме, верно и обратное.

Лемма 1.3. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- *A — примарная Q-алгебра;*
- *A — U-алгебра.*

Доказательство. Выше приведено обоснование того, что U-алгебра является примарной Q-алгеброй. Докажем обратное утверждение. Пусть A — примарная Q-алгебра и $\mathrm{Ass}(A) = \{p_1\}$, следовательно, $\mathrm{Ann}(A) = p_1$. Необходимо показать, что $p_1 = 0$. По определению идеал p_1 является линейным, то есть порождается линейными однородными многочленами кольца R_A. Но в аннуляторе $\mathrm{Ann}(A)$ каждый линейный однородный многочлен равен нулю [1, лемма 1.3], следовательно, $p_1 = 0$. □

Мы можем сформулировать критерий вырожденности для U-алгебр. Пусть A — конечно порождённая метабелева U-алгебра Ли над полем k. Радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, как модуль без кручения над кольцом R_A, является вырожденным тогда и только тогда, когда $R_A = k$ [2, раздел 2.1]. Таким образом, U-алгебра A вырождена тогда и только тогда, когда она абелева [1, параграф 2].

Так как модуль без кручения является частным случаем изолированного Q-модуля, то конечно порождённая метабелева U-алгебра Ли является частным случаем изолированной Q-алгебры. Нетрудно показать, что критерий вырожденности для U-алгебр распространяется на произвольные изолированные Q-алгебры.

Лемма 1.4. *Пусть A — изолированная метабелева Q-алгебра Ли над полем k. Алгебра A вырождена в том и только том случае, если она абелева.*

Доказательство. Если A — абелева алгебра, то она является вырожденной, что было замечено выше. Обратно, если A — изолированная вырожденная Q-алгебра, то она является примарной Q-алгеброй [2, лемма 2.4], то есть попросту U-алгеброй, поэтому A абелева. □

Таким образом, любая изолированная неабелева Q-алгебра является невырожденной. Оказывается, что для невырожденных алгебр третье требование в определении Q-алгебры следует из первых двух.

Лемма 1.5. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ которой абелев и является невырожденным Q-модулем. Тогда A — Q-алгебра.*

Доказательство. Покажем, что в условиях леммы выполнено равенство $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$. Действительно, если $y \in A^2$ и $y \neq 0$, то $\mathrm{Ann}(y) \neq \Delta$ в силу невырожденности радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, следовательно, существует такой элемент $a \in A \setminus \mathrm{Fit}(A)$, что $y \circ a \neq 0$. Следовательно, $y \notin \mathrm{C}(A)$. □

Следствие 1.5. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ которой абелев и является изолированным Q-модулем. Тогда A — Q-алгебра.*

Доказательство. В силу леммы 1.5 достаточно рассмотреть случай, когда радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль вырожден. Но вырожденный изолированный модуль примарен [2, лемма 2.4]. Алгебра A с примарным вырожденным радикалом Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелева. □

В результате, можно записать новое, эквивалентное старому, определение изолированной Q-алгебры.

Определение. Конечно порождённая метабелева алгебра Ли A над полем k называется *изолированной Q-алгеброй*, если

(1) радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — абелев идеал;
(2) аннулятор любого ненулевого элемента $y \in \mathrm{Fit}(A)$ есть Q-идеал;
(3) идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}(\mathrm{Fit}(A))$ изолированы друг от друга.

Действительно, если A — изолированная Q-алгебра, то пункты 1, 2, 3 определения выше выполнены. Обратно, если A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли и справедливы пункты 1, 2, 3, то радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — изолированный Q-модуль [2, лемма 2.2] и, по следствию 1.5, A — изолированная Q-алгебра.

Понятие изолированной Q-алгебры имеет важное значение при построении алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли F конечного ранга $r \geqslant 2$ над конечным полем k — любая координатная алгебра над F является невырожденной изолированной метабелевой Q-алгеброй Ли [3].

В статье [2] для построения новых примеров Q-модулей из уже известных было показано, что прямая сумма Q-модулей является Q-модулем. Аналогичное утверждение верно и для Q-алгебр.

Предложение 1.6. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — метабелевы Q-алгебры Ли над полем k и A — их прямая сумма $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Тогда алгебра A является метабелевой Q-алгеброй Ли.*

Доказательство. В разделе 1.1 показано, что в условиях предложения радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев и как R_A-модуль является декартовой суммой модулей $\mathrm{Fit}(A_1), \ldots, \mathrm{Fit}(A_n)$. Декартова сумма Q-модулей является Q-модулем [2, предложение 2.6]. Справедливость равенства $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$ следует из леммы 1.1. □

Следствие 1.6. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — изолированные метабелевы Q-алгебры Ли над полем k и $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Если все алгебры $A_1, \ldots, A_n$ неабелевы, то A — изолированная Q-алгебра. Если же существуют такие индексы i и j, что A_i абелева и A_j неабелева, то алгебра A не является изолированной.*

Доказательство. Модуль $\mathrm{Fit}(A)$ изолирован тогда и только тогда, когда все модули $\mathrm{Fit}(A_i)$ вырождены или невырождены одновременно [2, лемма 2.8], а в силу леммы 1.4, изолированная Q-алгебра невырождена тогда и только тогда, когда она неабелева. □

Замечание. Следствие 1.6 нельзя перенести с прямых сумм на подпрямые суммы Q-алгебр. В [2, пример 5] показано, что поддекартова сумма модулей без кручения может быть неизолированным Q-модулем. С помощью этого примера без труда строится подпрямая сумма неабелевых U-алгебр, которая является неизолированной Q-алгеброй.

Непосредственно из определения Q-модуля следует, что подмодуль Q-модуля является Q-модулем. Аналогичное утверждение справедливо и для Q-алгебр: подалгебра Q-алгебры является Q-алгеброй. Различие в том, что для Q-алгебр этот факт не является тривиальным следствием определения, хотя бы уже потому, что радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ подалгебры D Q-алгебры A может не быть подмодулем модуля $\mathrm{Fit}(A)$. Соответствующий контрпример существует даже для U-алгебр [1, пример 3]. В случае прямых сумм U-алгебр радикал Фиттинга подалгебры, тем более, может иметь довольно сложную структуру, что, тем не менее, не затрудняет доказательства следующей леммы.

Лемма 1.7. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — конечно порождённые метабелевы U-алгебры Ли над полем k и D — подалгебра прямой суммы $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Тогда D является Q-алгеброй.*

Доказательство. Поскольку подалгебра U-алгебры является U-алгеброй [1, лемма 2.4], без ограничения общности можно считать, что D — это подпрямая сумма алгебр $A_1, \ldots, A_n$. В разделе 1.1 показано, что радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ абелев и как модуль является подмодулем в поддекартовой сумме модулей $\mathrm{Fit}(A_1), \ldots, \mathrm{Fit}(A_n)$, следовательно, $\mathrm{Fit}(D)$ — Q-модуль [2, предложение 2.6]. Равенство $\mathrm{C}(D) \cap D^2 = 0$ следует из леммы 1.2. □

Следствие 1.7. *Подпрямая сумма конечно порождённых неабелевых метабелевых U-алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k является невырожденной Q-алгеброй.*

Доказательство. Пусть D — подпрямая сумма алгебр $A_1, \ldots, A_n$. Так как алгебры $A_1, \ldots, A_n$ неабелевы, то их радикалы Фиттинга являются невырожденными Q-модулями. Поддекартова сумма $\mathrm{Fit}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Fit}(A_n)$ невырожденных Q-модулей является невырожденным Q-модулем [2, лемма 2.7]. Следовательно, $\mathrm{Fit}(D)$, как подмодуль поддекартовой суммы, также является невырожденным Q-модулем. □

2. Полупримарные метабелевы алгебры Ли

В этом параграфе мы вводим определение полупримарной метабелевой алгебры Ли, которое одновременно обобщает понятия метабелевой Q-алгебры Ли и примарной метабелевой алгебры Ли [1, раздел 2.2]. В разделе 2.2 докажем, что произвольная полупримарная метабелева алгебра Ли подпрямо вкладывается в прямую сумму примарных метабелевых алгебр Ли. Частным случаем этого результата является вложение произвольной Q-алгебры в прямую сумму U-алгебр.

Отметим, что на полупримарные алгебры переносятся многие факты, справедливые для Q-алгебр. Однако нашей основной целью является изучение класса Q-алгебр. Мы не ставим перед собой задачу столь же детального описания полупримарных алгебр и вводим здесь эти объекты только для потребностей, которые возникают при исследовании квазимногообразия $\mathfrak{Q}$, порождённого метабелевыми Q-алгебрами Ли. По этой причине о полупримарных алгебрах приведём минимум сведений, необходимых для дальнейших приложений.

2.1. **Определение и примеры полупримарных метабелевых алгебр Ли.** Начнём с определения полупримарного модуля, обобщающего понятие Q-модуля. Пусть R — коммутативное кольцо многочленов над полем k. Напомним, что полупростым идеалом кольца R называется конечное пересечение простых идеалов [2, раздел 1.2].

Определение. Конечно порождённый модуль M над кольцом многочленов R будем называть *полупримарным*, если

(1) аннулятор любого ненулевого элемента $y \in M$ является полупростым идеалом кольца R;
(2) $M[\,p\,] \cap M \cdot p = 0$ для любого идеала p из ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$,

где $M \cdot p =$ модуль $\langle \{y \cdot f \mid y \in M,\ f \in p\} \rangle$ и $M\,[\,p\,] = \{y \in M \mid \mathrm{Ann}(y) \supseteq p\}$.

Замечание. Если модуль M удовлетворяет пункту 1 определения выше, то аннулятор любого элемента $0 \neq y \in M$ представим в виде пересечения простых идеалов из ассоциатора $\mathrm{Ass}(M)$ [2, лемма 2.1], причём всегда можно подобрать такой многочлен $s \in R$, что $y \cdot s \neq 0$ и $\mathrm{Ann}(y \cdot s) \in \mathrm{Ass}(M)$ [2, следствие 2.1]. Отсюда следует, что справедливость для модуля M пункта 2 определения выше равносильна тому, что $M[S] \cap M \cdot S = 0$ для любого подмножества S кольца R.

Пример 1. Всякий примарный R-модуль M является полупримарным. Действительно, пусть $\mathrm{Ann}(M) = p$. Тогда по определению аннулятор $\mathrm{Ann}(y)$ каждого элемента $0 \neq y \in M$ совпадает с идеалом p, в частности, является полупростым идеалом. В этом случае $M[p] = M$ и $M \cdot p = 0$.

Пример 2. Всякий Q-модуль является полупримарным модулем. По определению любой Q-идеал является конечным пересечением линейных идеалов, а все линейные идеалы просты, в частности, каждый Q-идеал полупрост. Таким образом, любой Q-модуль удовлетворяет пункту 1 определения выше, а пункту 2 Q-модуль удовлетворяет по определению.

Отметим несколько фактов о Q-модулях из статьи [2], которые без изменений переносятся на полупримарные модули с дословным повторением доказательств. Напомним, что в работе [2] мы пользовались следующей процедурой расширения скаляров: пусть R и K — кольца многочленов над полем k, $\varphi : K \to R$ — линейный гомоморфизм колец многочленов и M — R-модуль. Тогда следующее правило определяет на M структуру K-модуля:

$$y \cdot g = y \cdot \varphi(g), \quad y \in M, \ g \in K.$$

При этом $\mathrm{Ann}_K(y) = \varphi^{-1}(\mathrm{Ann}_R(y))$ для любого $y \in M$. Справедливы следующие утверждения.

- Если M полупримарен над кольцом R, то M полупримарен над кольцом K [2, лемма 2.5].
- Если φ — эпиморфизм, то $\mathrm{Ass}_K(M) = \{\varphi^{-1}(p) \mid p \in \mathrm{Ass}_R(M)\}$.
- Прямая сумма полупримарных модулей является полупримарным модулем [2, предложение 2.6].

Определение. Конечно порождённую метабелеву алгебру Ли A над полем k назовём *полупримарной*, если

(1) радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — абелев идеал;
(2) $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов является полупримарным модулем;
(3) пересечение центра алгебры A с её коммутантом равно нулю: $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$.

Замечание. Определение полупримарной метабелевой алгебры Ли корректно, то есть не зависит от деталей определения модульной структуры на радикале Фиттинга. Это доказывается так же, как подобное утверждение для Q-алгебр.

Очевидно, что любая метабелева Q-алгебра Ли A является полупримарной, в этом случае все идеалы ассоциатора $\mathrm{Ass}(A)$ линейны. Кроме того, любая конечно порождённая примарная алгебра Ли является полупримарной [1, следствие 2.3]. Новые примеры полупримарных алгебр можно получить с помощью следующих двух утверждений.

Предложение 2.1. *Прямая сумма полупримарных метабелевых алгебр Ли над полем k является полупримарной метабелевой алгеброй Ли.*

Доказательство. Предложение доказывается с помощью тех же рассуждений, какие проведены при доказательстве предложения 1.6. □

Лемма 2.2. *Подалгебра прямой суммы конечно порождённых примарных метабелевых алгебр Ли над полем k является полупримарной метабелевой алгеброй Ли.*

Доказательство. Лемма доказывается так же, как лемма 1.7. □

2.2. **Примарное разложение полупримарных метабелевых алгебр Ли.** Целью этого раздела является построение вложения произвольной полупримарной метабелевой алгебры Ли A над полем k в прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ примарных метабелевых алгебр Ли над полем k. Решение поставленной задачи начнём с вложения радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как R_A-модуля в прямую сумму примарных модулей.

Замечание. В статье [2] построено вложение произвольного Q-модуля в прямую сумму примарных Q-модулей. Точно такие же рассуждения можно провести для полупримарных модулей. В самом деле, пусть M — полупримарный модуль над кольцом многочленов R над полем k и $\mathrm{Ass}(M) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Для каждого индекса $i = \overline{1,n}$ определим примарную компоненту модуля M, ассоциированную с идеалом p_i:

$$Q_i = \{y \in M \mid \quad \exists \ f \in R \setminus p_i \quad y \cdot f \in M \cdot p_i\}.$$

Дословно повторяя рассуждения, проведённые для Q-модулей, можно показать, что $Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = 0$ [2, лемма 2.10] и для каждого $i = \overline{1,n}$ фактормодуль M/Q_i является примарным модулем над кольцом R с ассоциированным простым идеалом p_i [2, лемма 2.11].

Пусть теперь $M = \mathrm{Fit}(A)$, $R = R_A$ и $\mathrm{Ass}(A) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Положим $M_i = M/Q_i$, $i = \overline{1,n}$. Чтобы построить искомые примарные алгебры $A_1, \ldots, A_n$ воспользуемся “задачей о построения гомоморфного образа” [1, раздел 1.9] — достроим примарные модули $M_1, \ldots, M_n$ до подходящих метабелевых алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$.

Положим $V = A/\mathrm{Fit}(A)$ и зафиксируем сечение $\rho : V \to A$. Тогда $A = \rho(V) \oplus_k \mathrm{Fit}(A)$. Образ элемента $a \in A$ в факторалгебре $V = A/\mathrm{Fit}(A)$ будем обозначать через $\overline{a}$. Для каждого индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$ введём следующие обозначения:

- Через q_i обозначим максимальный линейный идеал кольца R, содержащийся в идеале p_i, и через W^i — линейное подпространство пространства V, порождающее идеал q_i: $\mathrm{id}\langle W^i \rangle = q_i$.
- Пусть $V_i = V/W^i$ и $\varphi_i : V \to V_i$ — канонический эпиморфизм, а $\phi_i : V_i \to V$ — некоторое сечение. Через $\tau_i : V_i \to A$ обозначим композицию $\rho \circ \phi_i$.
- Положим $R_i = R/q_i$. Заметим, что R_i есть кольцо многочленов от r_i переменных над полем k, где r_i — коразмерность линейного идеала q_i [2, раздел 1.1]. Эпиморфизм $\varphi_i : V \to V_i$ линейных пространств распространяется до линейного эпиморфизма колец многочленов $\varphi_i : R \to R_i$ и $\varphi_i(p_i)$ — простой идеал кольца R_i, не содержащий ненулевых линейных однородных многочленов.

- Через μ_i обозначим канонический эпиморфизм R-модулей $\mu_i : M \to M_i$. Поскольку $q_i \subseteq p_i$ и M_i — примарный модуль с ассоциированным идеалом p_i, то на M_i естественным образом определяется структура R_i-модуля, так, что
$$\mu_i(y \cdot f) = \mu_i(y) \cdot \varphi_i(f), \quad y \in \mathrm{Fit}(A),\ f \in R.$$
Как R_i-модуль M_i является примарным с ассоциированным идеалом $\varphi_i(p_i)$.
- Положим $B_i = V_i \oplus_{m_i} M_i$ [1, раздел 1.9], где $m_i \in Z^2(V_i, M_i)$:
$$m_i(x_1, x_2) = \mu_i(\tau_i(x_1) \circ \tau_i(x_2)), \quad x_1, x_2 \in V_i.$$

Предположим, что $V_i \neq 0$ (случай $V_i = 0$ будет рассмотрен чуть позже). Тогда мы находимся в условиях "задачи о построении гомоморфного образа в примарной алгебре" [1, раздел 2.3]:

(1) V_i — ненулевая абелева алгебра Ли V над полем k, $\varphi_i : A/\mathrm{Fit}(A) \to V_i$ — k-линейный эпиморфизм;
(2) M_i — примарный модуль без линейного кручения над кольцом многочленов $R_i = U(V_i)$, $\mathrm{Ann}(M_i) = \varphi_i(p_i)$, и $\mu_i : \mathrm{Fit}(A) \to M_i$ — k-линейный эпиморфизм, такой, что $\mu_i(y \cdot x) = \mu_i(y) \cdot \varphi_i(x)$ для любых $y \in \mathrm{Fit}(A)$ и $x \in A/\mathrm{Fit}(A)$.

Согласно [1, предложение 1.19, утверждение 2.8], существует примарная метабелева алгебра Ли A_i, $B_i \leq A_i \leq (B_i)_{p_i}$, такая, что $R_{A_i} = R_i$ и $\mathrm{Fit}(A_i)$ — примарный модуль над кольцом R_i с ассоциированным идеалом $\varphi_i(p_i)$, содержащий M_i. Также существует эпиморфизм алгебр Ли $\lambda_i : A \to A_i$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathrm{Fit}(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mu_i} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_i} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} & & \\
0 & \longrightarrow & M_i \subseteq \mathrm{Fit}(A_i) & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & V_i = A_i/\mathrm{Fit}(A_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

коммутативной.

Представим алгебру A как линейное пространство в виде прямой суммы своих подпространств:
$$A = U_i \oplus_k W_i \oplus_k \mathrm{Fit}(A),$$
где $U_i = \rho(\phi_i(V_i))$ и $W_i = \rho(W^i)$. Тогда гомоморфизм алгебр Ли $\lambda_i : A \to (B_i)_{p_i}$ как k-линейное отображение определяется правилом [1, следствие 1.8]:

$$\lambda_i(y) = \mu_i(y), \quad y \in \mathrm{Fit}(A),$$
$$\lambda_i(u) = \varphi_i(\overline{u}), \quad u \in U_i,$$
$$\lambda_i(w) = \frac{\mu_i(w \circ \rho(\phi_i(x_0^i)))}{x_0^i}, \quad w \in W_i,$$

где $0 \neq x_0^i \in V_i$. При этом $A_i = \lambda_i(A)$. Поскольку A — конечно порождённая алгебра, то A_i также конечно порождена.

Замечание. Если p_i — линейный идеал кольца R, то $q_i = p_i$ и $\varphi_i(p_i) = 0$, следовательно, A_i — метабелева U-алгебра Ли.

Напомним, что мы не рассмотрели случай, когда $V_i = 0$. Это возможно либо если $V = 0$, либо если $p_i = \Delta$ (Δ — максимальный линейный идеал кольца R). Равенство $V = 0$ означает, что A — абелева алгебра Ли, а для абелевых алгебр задача построения примарного разложения решается тривиально.

Равенство $p_i = \Delta$ означает, что алгебра A вырождена. В этом случае примарную компоненту, соответствующую идеалу Δ, будем обозначать через Q_Δ, аналогично — $M_\Delta = M/Q_\Delta$ и $\mu_\Delta : M \to M_\Delta$. В качестве алгебры A_i положим абелеву алгебру Ли M_Δ, а в качестве λ_i — k-линейное отображение $\lambda_i : A \to M_\Delta$:

$$\lambda_i(y) = \mu_\Delta(y), \quad y \in \mathrm{Fit}(A), \qquad \lambda_i(v) = 0, \quad v \in \rho(V).$$

Очевидно, что отображение λ_i сюръективно. Для того, чтобы оно было гомоморфизмом алгебр Ли, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $A^2 \subseteq \ker \mu_\Delta$ [1, следствие 1.6]. Включения $A^2 \subseteq Q_\Delta$ можно достигнуть, переопределив примарную компоненту Q_Δ: в роли Q_Δ может выступать произвольный максимальный элемент семейства Ω [2, раздел 2.4]. Так как множество Ω индуктивно, то достаточно показать, что $A^2 \in \Omega$. Для этого необходимо проверить выполнение двух условий: $A^2 \supseteq M \cdot \Delta$ и $A^2 \cap M[\Delta] = 0$. Справедливость первого из них очевидна, а справедливость второго следует из двух равенств: $M[\Delta] = \mathrm{C}(A)$ и $A^2 \cap \mathrm{C}(A) = 0$.

Теорема 2.3. *Любая конечно порождённая полупримарная метабелева алгебра Ли A над полем k подпрямо вкладывается в прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ некоторых примарных метабелевых алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k, где $n = |\mathrm{Ass}(A)|$. Любая метабелева Q-алгебра Ли подпрямо вкладывается в прямую сумму примарных метабелевых Q-алгебр Ли.*

Доказательство. При доказательстве теоремы будем использовать введённые выше обозначения. Для каждого $i = \overline{1,n}$ определены конечно порождённая примарная метабелева алгебра Ли A_i и эпиморфизм алгебр Ли $\lambda_i : A \to A_i$. При этом каждому линейному идеалу $p_i \in \mathrm{Ass}(A)$ соответствует метабелева U-алгебра Ли A_i, а каждому нелинейному идеалу $p_i \in \mathrm{Ass}(A)$ — примарная метабелева алгебра Ли с ассоциированным простым идеалом $\varphi_i(p_i)$. Согласно лемме 1.3, понятия U-алгебры и примарной Q-алгебры совпадают на конечно порождённых объектах, следовательно, если A — метабелева Q-алгебра Ли, то для каждого индекса $i = \overline{1,n}$ алгебра A_i является примарной Q-алгеброй.

Обозначим через λ сумму $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, то есть

$$\lambda : \ A \ \to \ A_1 \oplus \ldots \oplus A_n, \quad \lambda(a) = \lambda_1(a) + \ldots + \lambda_n(a), \quad a \in A.$$

Ясно, что λ — гомоморфизм алгебр Ли, образ которого $\lambda(A)$ — подпрямая сумма в прямой сумме $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Для полного доказательства теоремы осталось показать, что действие λ инъективно.

Допустим, что элемент $a \in A$ лежит в ядре $\ker \lambda$, следовательно, $a \in \ker \lambda_i$ для всех $i = \overline{1,n}$. Запишем элемент a в виде суммы: $a = v + y$, где $v \in \rho(V)$ и $y \in \mathrm{Fit}(A)$. Тогда $v \in W_i$ для каждого индекса $i = \overline{1,n}$ [1, следствие 1.9]. Так как $\mathrm{id}\langle W^i \rangle \subseteq p_i$, то $\overline{v} \in p_1 \cap \ldots \cap p_n$. Но $p_1 \cap \ldots \cap p_n = \mathrm{Ann}(A)$ [2, следствие 2.2], следовательно, $v = 0$ [1, лемма 1.3]. Остаётся $a = y$, причём $\mu_i(y) = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, то есть $y \in Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = 0$. Таким образом, $a = 0$. □

Следствие 2.1. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A является метабелевой Q-алгеброй Ли;*
(2) *Алгебра A вкладывается в конечную прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ некоторых конечно порождённых метабелевых U-алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k.*

Доказательство. Любая Q-алгебра вкладывается в прямую сумму U-алгебр по теореме 2.3, а подалгебра прямой суммы U-алгебр является Q-алгеброй по лемме 1.7. □

Следствие 2.2. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *Алгебра A является полупримарной метабелевой алгеброй Ли;*
(2) *Алгебра A вкладывается в конечную прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ некоторых конечно порождённых примарных метабелевых алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k.*

Доказательство. Необходимо дословно повторить доказательство предыдущего следствия. □

Следствие 2.3. *Подалгебра полупримарной метабелевой алгебры Ли является полупримарной метабелевой алгеброй Ли. Подалгебра метабелевой Q-алгебры Ли является метабелевой Q-алгеброй Ли.*

Следствие 2.4. *Пусть u и v — два элемента полупримарной метабелевой алгебры Ли A, такие, что $\overline{u}, \overline{v} \in p_i \in \mathrm{Ass}(A)$. Тогда $u \circ v \in Q_i$, где Q_i — ассоциированная с p_i примарная компонента.*

Доказательство. Если $p_i = \Delta$, то $A^2 \subseteq Q_\Delta$ и доказывать нечего. Если $p_i \neq \Delta$, то $u \circ v \in \ker \mu_i$ [1, следствие 1.10], то есть $u \circ v \in Q_i$. □

В общем случае невозможно построить гомоморфизм λ, не прибегая к локализации (нам известны примеры, подтверждающие это утверждение [3]). Однако иногда локализации можно избежать. Своеобразным критерием здесь является следующее предложение, при формулировке и доказательстве которого будем пользоваться обозначениями из доказательства теоремы 2.3.

Предложение 2.4. *Пусть A — полупримарная метабелева алгебра Ли над полем k. Допустим, что для любого идеала $p_i \in \mathrm{Ass}(A)$ и любого элемента $w \in W_i$ существует такой элемент $c_w \in \mathrm{Fit}(A)$, что $(c_w - w) \circ u \in Q_i$ для всех $u \in \rho(V)$. В этом случае гомоморфизм λ из теоремы 2.3 является подпрямым вложением алгебры A в прямую сумму примарных метабелевых алгебр Ли $(V_1 \oplus_{m_1} M_1) \times \ldots \times (V_n \oplus_{m_n} M_n)$.*

Доказательство. В условиях данного предложения $\mu_i(w \circ u) = \mu_i(c_w \circ u)$ для любых $w \in W_i$, $u \in U_i$. В этом случае для каждого индекса $i = \overline{1, n}$ алгебра A_i совпадает с $V_i \oplus_{m_i} M_i$ [1, следствие 1.11], следовательно, образом вложения λ из теоремы 2.3 является прямая сумма $(V_1 \oplus_{m_1} M_1) \times \ldots \times (V_n \oplus_{m_n} M_n)$. □

3. Метабелевы U-примарные и Q-полупримарные алгебры Ли

Как было сказано во введении, в случае бесконечного поля k в универсальном классе $\mathfrak{U}$ присутствуют примарные алгебры, отличные от U-алгебр, а в квазимногообразии $\mathfrak{Q}$ — полупримарные алгебры, отличные от Q-алгебр. При этом все примарные и полупримарные алгебры классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$

обладают тем свойством, что аннуляторы элементов в их радикалах Фиттинга являются Q-радикальными идеалами. Алгебры с такими ограничениями на аннуляторы мы назвали соответственно U-примарными (раздел 3.4) и Q-полупримарными (раздел 3.5).

Определение Q-радикального идеала кольца многочленов над полем k дано в разделе 3.1. Там же собраны основные свойства Q-радикальных идеалов. В разделе 3.2 показано, что класс Q-радикальных идеалов кольца многочленов $k[x_1,\ldots,x_r]$ совпадает с классом радикальных идеалов для диофантовых проективных многообразий над полем k. Раздел 3.3 включает в себя два примера. Первый — пример простого нелинейного Q-радикального идеала I в кольце многочленов $k[x,y,z]$ над произвольным бесконечным полем k, $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Второй — пример примарной метабелевой алгебры Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$, с которой ассоциирован произвольный наперёд заданный радикальный идеал невырожденного проективного многообразия над полем k.

Основным результатом этого параграфа является предложение 3.6, согласно которому произвольная U-примарная алгебра дискриминируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$. Как следствие получается результат о том, что произвольная Q-полупримарная алгебра аппроксимируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ (предложение 3.8).

Напомним, что k-алгебра Ли A *аппроксимируется* классом k-алгебр Ли $\mathcal{K}$, если для любого элемента $0 \neq a \in A$ найдётся алгебра $B_a \in \mathcal{K}$ и гомоморфизм алгебр Ли $\lambda_a : A \to B_a$, такой, что $\lambda_a(a) \neq 0$. Если для любого конечного подмножества X ненулевых элементов алгебры A найдётся такая алгебра B_X и гомоморфизм $\lambda_X : A \to B_X$, что $\lambda_X(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то говорят, что алгебра A *дискриминируется* классом $\mathcal{K}$.

Если алгебра A аппроксимируется (дискриминируется) классом $\mathcal{K}$, то она лежит в квазимногообразии (универсальном замыкании), порождённом классом $\mathcal{K}$ (см., например, [4, 5]).

3.1. **Q-радикальные идеалы.** Пусть R — коммутативное кольцо многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_r$ над полем k. Напомним, что Q-радикалом $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(S)$ множества $S \subset R$ мы называем пересечение всех линейных идеалов, содержащих множество S, если такие существуют, и $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(S) = R$ в противном случае [2].

Определение. Идеал I кольца многочленов R назовём *Q-радикальным*, если $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I) = I$ и $I \neq R$.

Замечание. Если основное поле k конечно, то множество линейных идеалов кольца многочленов R конечно, следовательно, понятия Q-идеала и Q-радикального идеала совпадают. В случае бесконечного поля это не так, что будет показано в примере 3 ниже.

Определение. Q-радикальный идеал I кольца многочленов R будем называть *невырожденным*, если он не содержит ненулевых линейных однородных многочленов кольца R. В противном случае идеал I *вырожден*.

Таким образом, любой ненулевой линейный идеал кольца многочленов R вырожден.

Отметим несколько тривиальных фактов о Q-радикалах:

- Пересечение любого семейства линейных идеалов кольца многочленов R является Q-радикальным идеалом.
- Пересечение любого семейства Q-радикальных идеалов кольца многочленов R является Q-радикальным идеалом.
- Для любых подмножеств $S_j \subseteq R$, $j \in J$, верно, что

$$\mathrm{Rad_Q}(\bigcup_{j\in J} S_j) \quad = \quad \bigcap_{j\in J} \mathrm{Rad_Q}(S_j).$$

Ясно, что произвольный Q-идеал является Q-радикальным. По определению, Q-идеал представим в виде конечного пересечения линейных идеалов, то есть простых Q-идеалов. Аналогичный результат справедлив для Q-радикальных идеалов.

Лемма 3.1. *Всякий Q-радикальный идеал кольца многочленов R полупрост, более того, представим в виде конечного пересечения простых Q-радикальных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — Q-радикальный идеал кольца многочленов R и $I = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha$ — представление идеала I в виде пересечения линейных идеалов кольца R. Для любого многочлена $f \in R$ и любого натурального числа n из условия $f^n \in I$ следует, что $f^n \in p_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, то есть $f \in p_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, и $f \in I$. Таким образом, идеал I полупрост [2, лемма 1.2].

Представим идеал I в виде несократимого пересечения простых идеалов кольца R: $I = I_1 \cap \ldots \cap I_m$. Тогда для каждого $\alpha \in \Lambda$ включение $I_1 \cap \ldots \cap I_m \subseteq p_\alpha$ влечёт существование такого индекса $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $I_j \subseteq p_\alpha$. Таким образом, множество Λ представимо в виде объединения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$, где $\Lambda_j = \{\alpha \in \Lambda \,|\, I_j \subseteq p_\alpha\}$, $j = \overline{1,m}$. Для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что $I_j = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda_j} p_\alpha$, $j = \overline{1,m}$.

Зафиксируем индекс $j \in \{1, \ldots, m\}$. Включение $I_j \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda_j} p_\alpha$ гарантируется определением множества Λ_j. Пусть теперь $f \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda_j} p_\alpha$. Поскольку пересечение $I_1 \cap \ldots \cap I_m$ несократимо, найдётся многочлен $g \in \bigcap\limits_{i\neq j} I_i$ и $g \notin I_j$. Тогда $fg \in p_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$, то есть $fg \in I$. В частности, $fg \in I_j$. Но поскольку $g \notin I_j$, имеем $f \in I_j$. □

Напомним, что Q-идеал прост тогда и только тогда, когда он линеен. Для Q-радикальных идеалов это неверно: в примере 3 ниже мы покажем, что для любого бесконечного поля k, $\mathrm{char}(k) \neq 2$, существуют простые нелинейные Q-радикальные идеалы.

Преобразования Q-идеалов при линейных гомоморфизмах колец многочленов описаны в [2, предложение 1.4]. Сформулируем и докажем аналог этого предложения для Q-радикальных идеалов.

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi : R \to R'$ — линейный гомоморфизм колец многочленов. Тогда*

(1) *полный прообраз $\varphi^{-1}(I')$ Q-радикального идеала I' кольца R' является Q-радикальным идеалом в кольце R;*

(2) *если φ — линейный эпиморфизм, то образ $\varphi(I)$ Q-радикального идеала I кольца R, такого, что $\ker\varphi \subseteq I$, является Q-радикальным идеалом в кольце R'.*

Доказательство. В самом деле, пусть $I' = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} p'_\alpha$ — пересечение линейных идеалов кольца R'. Тогда $\varphi^{-1}(I') = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \varphi^{-1}(p'_\alpha)$. Прообразом линейного идеала является линейный идеал [2, предложение 1.4], следовательно, $\varphi^{-1}(I')$ — Q-радикальный идеал.

Если $I = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha$ — представление идеала I в виде пересечения линейных идеалов кольца R, φ — линейный эпиморфизм и $\ker\varphi \subseteq p_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, то $\varphi(I) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \varphi(p_\alpha)$. Образом линейного идеала является линейный идеал, следовательно, $\varphi(I)$ — Q-радикальный идеал. □

Следствие 3.1. *При линейном изоморфизме колец многочленов Q-радикальные идеалы переходят в Q-радикальные идеалы.*

Классификация Q-радикальных идеалов кольца многочленов R является важной задачей для наших дальнейших исследований. В следующем разделе будет показано, что эта задача сводится к проблеме классификации диофантовых проективных многообразий над полем k.

3.2. **Редукция к проективным многообразиям.** Пусть k — поле и R — коммутативное кольцо многочленов от переменных $x_1, \dots, x_r$ над полем k.

Цель этого раздела — показать, что Q-радикальные идеалы кольца многочленов R являются известными объектами алгебраической геометрии над полем k, а именно: класс Q-радикальных идеалов в точности совпадает с классом радикальных идеалов для диофантовых проективных многообразий над полем k. Отсюда следует, что задача классификации всех Q-радикальных идеалов кольца многочленов R является давно известной проблемой диофантовой алгебраической геометрии над полем k.

В случае конечного поля k задача классификации Q-радикальных идеалов кольца R решается тривиально: в кольце R существует лишь конечное число линейных идеалов; всевозможные их пересечения образуют класс Q-радикальных идеалов. По этой причине далее всюду в этом разделе будем предполагать, что поле k имеет бесконечную мощность.

Для того, чтобы дальнейший текст был понятен не специалистам по алгебраической геометрии, перечислим используемые здесь термины, обозначения и простейшие факты алгебраической геометрии над полем k. За подробностями мы отсылаем к [6, 7].

Для любого подмножества $S \subseteq R$ следующее множество точек пространства k^r называется (диофантовым) алгебраическим множеством над полем k:

$$\mathrm{V}(S) \;=\; \{(x_1, \dots, x_r) \in k^r \mid f(x_1, \dots, x_r) = 0 \quad \forall\, f \in S\}.$$

Радикалом $\mathrm{Rad}(Y)$ произвольного подмножества $Y \subseteq k^r$ является следующий идеал кольца R:

$$\mathrm{Rad}(Y) \;=\; \{f \in R \mid f(x_1, \dots, x_r) = 0 \quad \forall\, (x_1, \dots, x_r) \in Y\}.$$

Многообразием называют любое неприводимое алгебраическое множество $Y \subseteq k^r$. Алгебраическое множество $Y \subseteq k^r$ является многообразием тогда и только тогда, когда его радикал $\mathrm{Rad}(Y)$ является простым идеалом кольца R. Алгебраическое множество $Y \subseteq k^r$ называется невырожденным, если оно не содержится ни в какой гиперплоскости пространства k^r.

Под радикальным идеалом $I \lhd R$ мы будем понимать идеал, для которого справедливо равенство $\mathrm{Rad}(\mathrm{V}(I)) = I$. В случае когда, поле k алгебраически замкнуто, по теореме Гильберта о нулях радикал $\mathrm{Rad}(\mathrm{V}(I))$ идеала $I \lhd R$ совпадает с $\sqrt{I}$. Класс радикальных идеалов неприводимых алгебраических множеств над алгебраически замкнутым полем k совпадает с классом $\mathrm{Spec}(R)$ всех простых идеалов кольца R.

Идеал I кольца многочленов R называется однородным, если он порождается однородными многочленами. Существует эквивалентное определение: идеал $I \lhd R$ однороден, если для любого натурального числа n и любого многочлена $f \in R$ степени n из условия $f \in I$ следует, что $f_i \in I$ для всех $i = \overline{0, n}$, где f_i — однородная компонента многочлена f степени i (то есть сумма всех одночленов степени i многочлена f). Класс простых однородных идеалов кольца R обозначается через $\mathrm{Proj}\,(R)$. Нетрудно проверить, что любой линейный идеал кольца многочленов R входит в класс $\mathrm{Proj}\,(R)$.

Однородным радикальным идеалам кольца R взаимно однозначно соответствуют проективные алгебраические множества над полем k (то есть такие алгебраические множества, которые вместе с каждой своей точкой целиком содержат прямую, проходящую через данную точку и начало координат в k^r). При этом неприводимым проективным алгебраическим множествам (проективным многообразиям) соответствуют простые однородные радикальные идеалы. Обозначим через $\mathrm{Proj}'(R)$ семейство простых однородных радикальных идеалов кольца многочленов R, $\mathrm{Proj}'(R) \subseteq \mathrm{Proj}\,(R)$. Если поле k алгебраически замкнуто, то $\mathrm{Proj}'(R) = \mathrm{Proj}\,(R)$.

Оказывается, что в случае произвольного бесконечного поля k класс $\mathrm{Proj}'(R)$ совпадает с классом простых Q-радикальных идеалов кольца многочленов R. Прежде, чем доказывать это утверждение, разберём подробнее случай линейного идеала и докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. *Линейные идеалы кольца многочленов $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ над бесконечным полем k радикальны и находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными подпространствами пространства k^r.*

Доказательство. Действительно, пусть p — линейный идеал кольца R, порождённый линейным подпространством W пространства переменных V кольца многочленов R ($V = \mathrm{lin}_k\{x_1, \ldots, x_r\}$). Каждый элемент $w \in W$ — это однородный линейный многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_r$, следовательно, алгебраическое множество $\mathrm{V}(p)$ — это решение системы однородных линейных алгебраических уравнений, то есть $\mathrm{V}(p)$ — линейное подпространство в k^r. Так как поле k бесконечно, то только многочлены из идеала $p = \mathrm{id}\langle W\rangle$ могут обращаться в ноль во всех точках линейного пространства $\mathrm{V}(p)$, следовательно, $\mathrm{Rad}(\mathrm{V}(p)) = p$.

Справедливо и обратное утверждение: любое линейное подпространство L пространства k^r является решением системы однородных линейных уравнений над k, следовательно, L — алгебраическое множество, а его радикал $\mathrm{Rad}(L)$ — линейный идеал кольца R. $\square$

Линейные подпространства L пространства k^r называются линейными многообразиями (если поле k бесконечно, то L — неприводимое алгебраическое множество, так как его радикал $\mathrm{Rad}(L)$ — линейный идеал кольца R, в частности, простой идеал). Если $\mathrm{Rad}(L) \neq 0$, то L — вырожденное алгебраическое множество.

Утверждение 3.4. *Пусть k — бесконечное поле и $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ — кольцо многочленов над полем k. Идеал I кольца многочленов R является Q-радикальным тогда и только тогда, когда I совпадает с радикалом* $\mathrm{Rad}(Y)$ *некоторого непустого диофантового проективного алгебраического множества $Y \subseteq k^r$.*

Доказательство. Во-первых, пересечение любого семейства радикальных (аналогично, однородных) идеалов кольца R является радикальным (однородным) идеалом. Во-вторых, если поле k бесконечно, всякий линейный идеал однороден и по лемме 3.3 радикален. Следовательно, любой Q-радикальный идеал является радикальным однородным идеалом. Таким образом, всякий Q-радикальный идеал I является радикалом некоторого проективного алгебраического множества $Y \subseteq k^r$.

Обратно, если Y — проективное алгебраическое множество над полем k. Тогда множество Y можно представить в виде объединения всех прямых, целиком в нём содержащихся: $Y = \bigcup\limits_{y \in Y} L_y$. Следовательно, $\mathrm{Rad}(Y) = \bigcap\limits_{y \in Y} \mathrm{Rad}(L_y)$. И поскольку для всех $y \in Y$ радикал $\mathrm{Rad}(L_y)$ суть линейный идеал кольца R, то $\mathrm{Rad}(Y)$ — Q-радикальный идеал. $\square$

Следствие 3.2. *Класс невырожденных Q-радикальных идеалов кольца многочленов R совпадает с классом радикалов невырожденных проективных алгебраических множеств над бесконечным полем k.*

Следствие 3.3. *Если поле k бесконечно, то класс* $\mathrm{Proj}'(R)$ *совпадает с классом простых Q-радикальных идеалов кольца многочленов R. Другими словами, простым Q-радикальным идеалам взаимно однозначно соответствуют непустые проективные многообразия над полем k.*

3.3. **Примеры.** Пусть k — произвольное бесконечное поле, $\mathrm{char}(k) \neq 2$ (все алгебры Ли над полем характеристики два являются коммутативными; коммутативные алгебры лежат за рамками наших исследований). В первом примере этого раздела мы покажем, что над полем k обязательно существуют ненулевые невырожденные простые Q-радикальные идеалы.

Пример 3. Обозначим через $f(x,y,z)$ многочлен $x^2 + y^2 - z^2$ и через $I = \mathrm{id}\langle f \rangle$ — идеал, порождённый многочленом f в кольце $k[x,y,z]$. Нетрудно проверить, что многочлен f неприводим над любым полем k, $\mathrm{char}(k) \neq 2$, следовательно, идеал I прост. Очевидно, что идеал I не содержит ненулевых линейных однородных многочленов, следовательно, он является невырожденным. Покажем, что идеал I Q-радикален над любым бесконечным полем k, $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

В [2, пример 2] соответствующее доказательство было проведено для случая, когда k — это поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Но все сказанные слова можно повторить для произвольного бесконечного поля. Действительно, пусть C_k — подмножество элементов α поля k, для которых $\sqrt{1+\alpha^2} \in k$. Так как поле k бесконечно, то C_k — бесконечное множество (например, $\alpha = 2\beta/(\beta^2-1)$, $\beta \in k$). Пусть P — семейство линейных идеалов p, q, p_α, q_α, $\alpha \in C_k$, где

$$p_\alpha = \mathrm{id}\langle y - \alpha\, x, z - \sqrt{1+\alpha^2}\, x\rangle, \quad p = \mathrm{id}\langle x, y - z\rangle,$$
$$q_\alpha = \mathrm{id}\langle y - \alpha\, x, z + \sqrt{1+\alpha^2}\, x\rangle, \quad q = \mathrm{id}\langle x, y + z\rangle.$$

Так же, как в случае $k = \mathbb{R}$, проверяется, что любой линейный идеал $p \lhd R$, содержащий многочлен f, либо принадлежит семейству идеалов P, либо $p = \Delta$, то есть $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I) = \bigcap\limits_{p\in\mathrm{P}} p$. Кроме того, если некоторый многочлен $g \in R$ содержится в каждом идеале $p \in \mathrm{P}$, то $g \in I$. Таким образом, $I = \bigcap\limits_{p\in\mathrm{P}} p = \mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I)$, то есть идеал I является простым невырожденным Q-радикальным идеалом.

Невырожденным простым Q-радикальным идеалам над полем k взаимно однозначно соответствуют невырожденные проективные многообразия над полем k. Следующий пример показывает, что каждое невырожденное проективное многообразие над полем k вносит свою лепту в описание конечно порождённых алгебр из универсального класса $\mathfrak{U}$.

Пример 4. Предположим, что R — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_r$ над полем k и I — невырожденный простой Q-радикальный идеал кольца R. Пусть $V = \mathrm{lin}_k\{x_1, \ldots, x_r\}$ — линейное пространство и M — конечно порождённый модуль без кручения над факторкольцом R/I. В этом случае модуль M также обладает структурой R-модуля. Ясно, что как R-модуль M примарен и $\mathrm{Ann}_R(M) = I$. Определим метабелеву алгебру Ли $V \oplus_m M$ с помощью расщепляемого расширения ($m \equiv 0$) [1, раздел 1.6]. Так как идеал I невырожден, то R-модуль M не имеет линейного кручения, поэтому справедливы утверждения: $V \oplus_m M \in \mathfrak{M}'$, $\mathrm{Fit}(V \oplus_m M) = M$, $R_{V\oplus_m M} = R$ [1, лемма 1.9]. Следовательно, $V \oplus_m M$ является примарной метабелевой алгеброй Ли с ассоциированным идеалом I. В следующем разделе будет показано, что примарные алгебры, с которыми ассоциированы Q-радикальные идеалы, дискриминируются классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, а потому принадлежат универсальному классу $\mathfrak{U}$.

Из двух примеров выше можно сделать следующий вывод: если k — произвольное бесконечное поле, $\mathrm{char}(k) \neq 2$, то найдётся примарная метабелева алгебра Ли над полем k, которая не является U-алгеброй, но лежит в универсальном классе $\mathfrak{U}$.

3.4. **Метабелевы U-примарные алгебры Ли.** Такие алгебры, как $V \oplus_m M$ из примера 4, в этом разделе мы назовём U-примарными.

Определение. Конечно порождённую метабелеву алгебру A над полем k назовём *U-примарной*, если она является примарной метабелевой алгеброй Ли, а её аннулятор $\mathrm{Ann}(A)$ — простой Q-радикальный идеал кольца многочленов R_A.

Замечание. Так как при линейном автоморфизме кольца многочленов R_A Q-радикальные идеалы переходят в Q-радикальные, то определение U-примарной алгебры корректно.

Напомним, что аннулятор $\mathrm{Ann}(A)$ любой примарной алгебры A не содержит ненулевых однородных линейных многочленов [1, лемма 1.3]. Отсюда следует, что аннулятор $\mathrm{Ann}(A)$ U-примарной алгебры A является невырожденным Q-радикальным идеалом кольца многочленов R_A.

Класс U-примарных метабелевых алгебр Ли над полем k состоит из двух подклассов:

- подкласс конечно порождённых метабелевых U-алгебр Ли над полем k;
- подкласс конечно порождённых метабелевых примарных алгебр Ли над полем k с ассоциированными радикальными идеалами невырожденных диофантовых проективных многообразий над полем k.

Разумеется, если поле k конечно, то всякая U-примарная алгебра над k является U-алгеброй.

Лемма 3.5. *Подалгебра U-примарной метабелевой алгебры Ли над полем k является U-примарной алгеброй.*

Доказательство. Пусть A — U-примарная метабелева алгебра Ли и D — её неабелева подалгебра. Тогда D является примарной метабелевой алгеброй Ли, причём $\mathrm{Fit}(D) \subseteq \mathrm{Fit}(A)$ и аннулятор $\mathrm{Ann}_{R_D}(y)$ произвольного ненулевого элемента $y \in \mathrm{Fit}(D)$ является полным прообразом аннулятора $\mathrm{Ann}_{R_A}(y)$ при линейном вложении колец многочленов $\varphi : R_D \to R_A$ [1, лемма 2.4]. А так как по лемме 3.2 прообразом Q-радикального идеала является Q-радикальный идеал, то всё доказано. □

Предложение 3.6. *Пусть A — U-примарная метабелева алгебра Ли над бесконечным полем k. Тогда алгебра A дискриминируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k.*

Доказательство. Если A — U-алгебра, то доказывать нечего, поэтому предположим, что A — примарная алгебра с ассоциированным простым Q-радикальным идеалом I кольца R_A. Представим идеал I в виде бесконечного пересечения $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha$ линейных идеалов кольца R_A. Договоримся, что в числе этих линейных идеалов нет максимального линейного идеала Δ кольца R_A.

Для краткости введём обозначения $M = \mathrm{Fit}(A)$ и $R = R_A$. По определению алгебра A конечно порождена, поэтому модуль M тоже конечно порождён. Без ограничения общности можно считать, что модуль M свободен над факторкольцом R/I [1, лемма 2.5]. Пусть $y_1, \ldots, y_m$ — свободные порождающие R/I-модуля M.

Для каждого $\alpha \in \Lambda$ определим кольцо многочленов $R_\alpha = R/p_\alpha$, канонический линейный эпиморфизм $\varphi_\alpha : R \to R_\alpha$ и свободный R_α-модуль M_α со свободной базой $\{z_1, \ldots, z_m\}$. Тогда отображение $\mu_\alpha : M \to M_\alpha$, определённое правилом

$$\mu_\alpha(y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_m \cdot f_m) = z_1 \cdot \varphi_\alpha(f_1) + \ldots + z_m \cdot \varphi_\alpha(f_m), \quad f_1, \ldots, f_m \in R,$$

является k-линейной сюръекцией, причём

$$\mu_\alpha(y \cdot f) = \mu_\alpha(y) \cdot \varphi_\alpha(f), \qquad y \in M, \quad f \in R.$$

Ядром отображения μ_α является подмодуль $M \cdot p_\alpha$ модуля M.

Пусть V_α — пространство переменных кольца R_α. Так как $p_\alpha \neq \Delta$, то $V_\alpha \neq 0$. Таким образом, мы находимся в условиях "задачи о построении гомоморфного образа в U-алгебре". Согласно [1, следствие 2.6], найдётся метабелева U-алгебра Ли A_α над полем k и эпиморфизм $\lambda_\alpha : A \to A_\alpha$, ограничение которого на радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ совпадает с действием μ_α, а спуск на факторалгебру $A/\mathrm{Fit}(A)$ совпадет с действием φ_α. Ниже мы покажем, что алгебра A дискриминируется U-алгебрами класса $\{A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ с помощью гомоморфизмов семейства $\{\lambda_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$.

Пусть $\dim_k(A/\mathrm{Fit}(A)) = r$ и $Y \subseteq k^r$ — невырожденное проективное многообразие, соответствующее идеалу I. Каждому линейному идеалу p_α соответствует линейное подмногообразие $L_\alpha \subset Y$, причём замыкание множества $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} L_\alpha$ в топологии Зарисского пространства k^r совпадает с Y. Для произвольного многочлена $f \in R$ определим алгебраическое множество Y_f как замыкание в топологии Зарисского множества $\bigcup\limits_{f\,\in\, p_\alpha} L_\alpha$. Если $f \notin I$, то включение $Y_f \subset Y$ является строгим.

Теперь аналогичным образом для каждого элемента $c \in A$ определим алгебраическое множество Y_c, взяв замыкание в топологии Зарисского множества $\bigcup\limits_{c\,\in\,\ker\lambda_\alpha} L_\alpha$. Мы покажем, что для любого ненулевого элемента $c \in A$ найдётся такой многочлен $f_c \notin I$, что $Y_c \subseteq Y_{f_c}$. Отсюда будет следовать, что алгебра A дискриминируется классом $\{A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$: действительно, для любого конечного подмножества $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ненулевых элементов алгебры A включения $Y_{c_i} \subset Y$, $i = \overline{1,n}$, являются строгими, и так как алгебраическое множество Y неприводимо, включение $Y_{c_1} \cup \ldots \cup Y_{c_n} \subset Y$ также является строгим, следовательно, найдётся такой параметр $\alpha \in \Lambda$, что $c_i \notin \ker_\alpha$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Итак, пусть c — ненулевой элемент алгебры A. Если $c \in A \setminus \mathrm{Fit}(A)$, то в качестве искомого многочлена f_c выберем линейный однородный многочлен кольца R, действие которого определяется умножением на элемент c. Так как радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ примарной алгебры A не имеет линейного кручения [1, лемма 2.3], то $f_c \notin I$. Кроме того, включение $c \in \ker\lambda_\alpha$ влечёт $f_c \in p_\alpha$ [1, следствие 1.9], следовательно, $Y_c \subseteq Y_{f_c}$.

Пусть теперь $c \in M$. Так как R/I-модуль M свободен, элемент c имеет однозначную запись: $c = y_1 \cdot f_1 + \ldots + y_m \cdot f_m$, $f_i \in R/I$, $i = \overline{1,n}$. Поскольку $c \neq 0$, хотя бы один из многочленов $f_1, \ldots, f_m$ не лежит в аннуляторе $\mathrm{Ann}(M) = I$. Без ограничения общности будем считать, что $f_1 \notin I$ и положим $f_c = f_1$. Тогда $f_c \notin I$ и включение $c \in \ker\lambda_\alpha$ означает, что $c \in M \cdot p_\alpha$, следовательно, $f_i \in p_\alpha$ для всех $i = \overline{1,n}$. Таким образом, $Y_c \subseteq Y_{f_c}$, что и требовалось доказать. □

Из предложения 3.6 следует, что любая U-примарная метабелева алгебра Ли над полем k принадлежит универсальному классу $\mathfrak{U}$, порождённому всеми метабелевыми U-алгебрами Ли над полем k. В следующей работе данного цикла из трёх статьей будет доказано, что верно и обратное: любая конечно порождённая алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$ является U-примарной метабелевой алгеброй Ли.

3.5. **Метабелевы Q-полупримарные алгебры Ли.** Так же, как в разделе 3.4 мы сузили класс примарных алгебр, определив U-примарные алгебры, в этом разделе мы определим Q-полупримарные алгебры, как подкласс полупримарных алгебр.

Определение. Конечно порождённую метабелеву алгебру A над полем k назовём *Q-полупримарной*, если она является полупримарной метабелевой алгеброй Ли и аннулятор $\mathrm{Ann}(y)$ любого ненулевого элемента $y \in \mathrm{Fit}(A)$ является Q-радикальным идеалом кольца многочленов R_A.

Замечание. В силу следствия 3.1, определение Q-полупримарной алгебры корректно.

Всякая U-примарная метабелева алгебра Ли является Q-полупримарной. Равно как и любая Q-алгебра служит примером Q-полупримарной алгебры. Если поле k конечно, то понятия Q-полупримарной алгебры и Q-алгебры совпадают. Если поле k бесконечно и $\mathrm{char}(k) \neq 2$, то существуют Q-полупримарные алгебры, отличные от Q-алгебр — например, алгебра $V \oplus_m M$ из примера 4. Следующее утверждение является аналогом следствия 2.2.

Утверждение 3.7. *Пусть A — конечно порождённая метабелева алгебра Ли над полем k. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A является Q-полупримарной метабелевой алгеброй Ли;*
(2) *Алгебра A вкладывается в конечную прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ некоторых U-примарных метабелевых алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k.*

Доказательство. Любая полупримарная метабелева алгебра Ли A вкладывается в прямую сумму примарных алгебр $A_1, \ldots, A_n$ по теореме 2.3. Необходимо показать, что, если A — Q-полупримарная алгебра, то алгебры $A_1, \ldots, A_n$ являются U-примарными. Действительно, для любого $i = \overline{1,n}$ с алгеброй A_i ассоциирован идеал $\varphi_i(p_i)$ и поскольку $p_i \supseteq \ker\varphi_i$, то по лемме 3.2 идеал $\varphi_i(p_i)$ является Q-радикальным.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — U-примарные метабелевы алгебры Ли над полем k и D — подалгебра прямой суммы $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Согласно следствию 2.2, D является полупримарной алгеброй. Необходимо показать, что ассоциатор $\mathrm{Ass}(D)$ состоит из Q-примарных простых идеалов кольца R_D. Так как по лемме 3.5 подалгебра U-примарной алгебры является U-примарной, то можно считать, что D — подпрямая сумма, следовательно, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(D)$ как R_D-модуль является подмодулем в поддекартовой сумме модулей $\mathrm{Fit}(A_1), \ldots, \mathrm{Fit}(A_n)$. Следовательно, определены линейные эпиморфизмы колец многочленов $\varphi_i : R_D \to R_{A_i}$ и аннулятор $\mathrm{Ann}_{R_D}(y)$ ненулевого элемента $y \in \mathrm{Fit}(D)$, равен пересечению $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\mathrm{Ann}_{R_{A_i}}(y_i))$, где $y = y_1 + \ldots + y_n$, $y_i \in \mathrm{Fit}(A_i)$, $i = \overline{1,n}$ [2, раздел 2.1]. По лемме 3.2 идеал $\mathrm{Ann}_{R_D}(y)$ является Q-радикальным идеалом. □

Следствие 3.4. *Конечная прямая сумма Q-полупримарных метабелевых алгебр Ли над полем k является Q-полупримарной алгеброй.*

Следствие 3.5. *Подалгебра Q-полупримарной метабелевой алгебры Ли является Q-полупримарной алгеброй.*

Предложение 3.8. *Пусть A — Q-полупримарная метабелева алгебра Ли над бесконечным полем k. Тогда алгебра A аппроксимируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k.*

Доказательство. Согласно утверждению 3.7, без ограничения общности можно считать, что алгебра A есть прямая сумма $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ U-примарных метабелевых алгебр Ли. Пусть $\lambda_i : A \to A_i$ — эпиморфизм алгебр Ли, равный i-ой проекции, $i = \overline{1,n}$. Тогда для произвольного ненулевого элемента $a \in A$ найдётся такой индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\lambda_i(a) \neq 0$. По предложению 3.6 найдутся метабелева U-алгебра Ли A_α и гомоморфизм $\lambda_\alpha : A_i \to A_\alpha$, такие, что $\lambda_\alpha(\lambda_i(a)) \neq 0$. Таким образом, композиция $\lambda_\alpha \circ \lambda_i : A \to A_\alpha$ является гомоморфизмом алгебры A в U-алгебру A_α, переводящим ненулевой элемент a в ненулевой элемент. □

Из предложения 3.8 следует, что любая Q-полупримарная метабелева алгебра Ли над полем k принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{Q}$, порождённому всеми метабелевыми Q-алгебрами Ли над полем k. В следующей работе будет доказан встречный результат: всякая конечно порождённая алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ является Q-полупримарной метабелевой алгеброй Ли.

Список литературы

[1] Э. Ю. Даниярова, *Метабелевы U-алгебры Ли*, Сибирские электронные математические известия, 5 (2008), 355–382. http://semr.math.nsc.ru/v5/p355-382.pdf

[2] Э. Ю. Даниярова, *Q-идеалы в кольцах многочленов и Q-модули над кольцами многочленов*, Сибирские электронные математические известия, 4 (2007), 64–84. http://semr.math.nsc.ru/v4/p64-84.pdf

[3] Э. Ю. Даниярова, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли III: Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств*, Препринт, Омск: Изд-во ОмГУ, 130 с., 2005.

[4] Э. Ю. Даниярова, *Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли*, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2007), 8–39.

[5] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, Москва, 1970.

[6] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, Москва, 1981.

[7] Дж. Харрис, *Алгебраическая геометрия. Начальный курс*, МЦНМО, Москва, 2005.

Даниярова Эвелина Юрьевна
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: evelina.omsk@list.ru