S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 326–339 (2009) УДК 514.765
MSC 53C30

СИГНАТУРА КРИВИЗНЫ РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ПЯТИМЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

А. Г. КРЕМЛЕВ

Abstract. In this paper, we classify all possible signatures of the Ricci operator of left invariant Riemannian metrics on five dimensional nilpotent Lie groups.

Keywords: Riemannian manifold, homogeneous space, Lie group, Ricci curvature.

1. Введение

Известно, что различные ограничения на кривизну риманова многообразия позволяют получить информацию о его геометрическом и топологическом строении. Примеры дают классические теоремы Майерса и Бохнера. Для заданного однородного пространства G/H (где H — компактная подгруппа группы Ли G) естественно попытаться отыскать общие свойства операторов Риччи для всевозможных G-инвариантных римановых метрик на пространстве G/H. Это можно сделать разными способами. Один из возможных вариантов — рассмотреть все возможные сигнатуры операторов Риччи G-инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H. Для пространств малой размерности этот вопрос может быть полностью разрешен. Благодаря работе Дж. Милнора [12] мы знаем ответ на этот вопрос в размерности не больше 3. Работы [10, 11, 13] дают ответ на поставленный вопрос для всех четырехмерных однородных пространств, отличных от групп Ли.

Kremlyov, A.G., Ricci curvatures of left invariant Riemannian metrics on five dimensional nilpotent Lie groups.

Работа выполнена при поддержке Совета по ведущим научным школам Российской Федерации (грант НШ-5682.2008.1).

Поступила 7 ноября 2008 г., опубликована 6 ноября 2009 г.

Таблица 1.

№	Сигнатура	№	Сигнатура	№	Сигнатура
1	$(-,-,-,-,-)$	8	$(-,-,0,0,+)$	15	$(-,+,+,+,+)$
2	$(-,-,-,-,0)$	9	$(-,-,0,+,+)$	16	$(0,0,0,0,0)$
3	$(-,-,-,-,+)$	10	$(-,-,+,+,+)$	17	$(0,0,0,0,+)$
4	$(-,-,-,0,0)$	11	$(-,0,0,0,0)$	18	$(0,0,0,+,+)$
5	$(-,-,-,0,+)$	12	$(-,0,0,0,+)$	19	$(0,0,+,+,+)$
6	$(-,-,-,+,+)$	13	$(-,0,0,+,+)$	20	$(0,+,+,+,+)$
7	$(-,-,0,0,0)$	14	$(-,0,+,+,+)$	21	$(+,+,+,+,+)$

Здесь уместно напомнить некоторые структурные результаты о римановых однородных многообразиях малой размерности. В размерности 2 все односвязные однородные римановы многообразия являются симметрическими. Каждое односвязное трехмерное или четырехмерное риманово многообразие представляет собой либо симметрическое пространство, либо группу Ли с левоинвариантной римановой метрикой [10, 11, 13]. Напомним, что каждое односвязное симметрическое пространство является прямым метрическим произведением евклидова пространства и неприводимых симметрических пространств, при этом неприводимые симметрические пространства являются эйнштейновыми (т. е. имеют постоянную кривизну Риччи). Таким образом, проблема определения сигнатуры оператора Риччи на симметрических пространствах имеет очевидное решение. Гораздо более интересной является проблема определения возможных сигнатур оператора Риччи левоинвариантных метрик на заданной группе Ли. В работах [4, 5] получен результат для групп Ли размерности 4.

Переход к размерности 5 – следующий шаг в изучении сформулированной выше проблемы. Настоящая работа посвящена классификации возможных сигнатур операторов Риччи левоинвариантных метрик Ли на произвольной пятимерной нильпотентной группе Ли.

Под сигнатурой симметрического оператора A, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, мы понимаем упорядоченный набор $\Big(\mathrm{sgn}(\lambda_1), \mathrm{sgn}(\lambda_2), \dots, \mathrm{sgn}(\lambda_n)\Big)$, где $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ — собственные значения оператора A, а $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x. Для упрощения изложения нам будет удобно занумеровать все возможные сигнатуры для пятимерного случая так, как это указано в таблице 1.

Проблема определения возможных сигнатур оператора Риччи левоинвариантных метрик на заданной группе Ли по сути локальная, поэтому естественно переформулировать ее в терминах метрических алгебр Ли (см. подробности в следующем разделе).

Нильпотентные алгебры Ли размерности 5 были классифицированы В. В. Морозовым [6]. Г.М. Мубаракзяновым в работе [7] получена классификация всех вещественных алгебр Ли пятого порядка. Здесь, используя нумерацию из

Таблица 2.

Алгебра Ли	Ненулевые коммутаторы
$5A_1$	
$A_{3,1} \oplus 2A_1$	$[e_2, e_3] = e_1$
$A_{4,1} \oplus A_1$	$[e_2, e_4] = e_1, [e_3, e_4] = e_2$
$A_{5,1}$	$[e_3, e_5] = e_1, [e_4, e_5] = e_2$
$A_{5,2}$	$[e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = e_2, [e_4, e_5] = e_3$
$A_{5,3}$	$[e_3, e_4] = e_2, [e_3, e_5] = e_1, [e_4, e_5] = e_3$
$A_{5,4}$	$[e_2, e_4] = e_1, [e_3, e_5] = e_1$
$A_{5,5}$	$[e_3, e_4] = e_1, [e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = e_2$
$A_{5,6}$	$[e_3, e_4] = e_1, [e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = e_2, [e_4, e_5] = e_3$

работы [7], мы приведем список всех пятимерных нильпотентных вещественных алгебр Ли (таблица 2). Отметим, что $5A_1$ является коммутативной алгеброй Ли, а алгебры Ли $A_{3,1} \oplus 2A_1$ и $A_{4,1} \oplus A_1$ - это разложимые пятимерные нильпотентные алгебры Ли.

Откладывая до следующего раздела определения понятий, сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Для нильпотентной пятимерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ из таблицы 2 сигнатура s из таблицы 1 реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда в таблице 3 на пересечении строки, соответствующей алгебре $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак "+".*

Доказательство теоремы 1, заключается в последовательном изучении всех пятимерных нильпотентных вещественных алгебр Ли и приводится в разделе 3 настоящей работы.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная некоммутативная алгебра Ли размерности ≤ 5. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{g}$ оператор Риччи* Ric *метрической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, Q)$ имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.*

В размерности ≤ 2 нильпотентные алгебры Ли коммутативны. Для нильпотеньных алгебр Ли размерности 3 и 4 нужные результаты получены в работах [12] и [2] соответственно, а для размерности 5 это следует непосредственно из теоремы 1.

2. Предварительные сведения

Напомним, что *метрической алгеброй Ли* называется пара $(\mathfrak{g}, Q)$, где $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, а Q — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Произвольная левоинвариантная риманова метрика ρ на группе Ли G определяет скалярное произведение Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и наоборот, каждое

Таблица 3.

-	Алгебра Ли								
№	$5A_1$	$A_{3,1}\oplus 2A_1$	$A_{4,1}\oplus A_1$	$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$	$A_{5,6}$
1	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	−	−	−	−	−	−	−	−	−
3	−	−	−	−	+	−	+	+	+
4	−	−	−	−	−	−	−	−	−
5	−	−	+	−	+	−	−	+	+
6	−	−	+	+	+	+	−	+	+
7	−	−	−	−	−	−	−	−	−
8	−	+	+	−	+	−	−	−	+
9	−	−	+	−	+	+	−	−	+
10	−	−	−	−	+	+	−	−	+
11	−	−	−	−	−	−	−	−	−
12	−	−	−	−	−	−	−	−	−
13	−	−	−	−	−	−	−	−	−
14	−	−	−	−	−	−	−	−	−
15	−	−	−	−	−	−	−	−	−
16	+	−	−	−	−	−	−	−	−
17	−	−	−	−	−	−	−	−	−
18	−	−	−	−	−	−	−	−	−
19	−	−	−	−	−	−	−	−	−
20	−	−	−	−	−	−	−	−	−
21	−	−	−	−	−	−	−	−	−

скалярное произведения Q на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику ρ на группе G.

Определение 1. *Две метрические алгебры* $(\mathfrak{g}, Q)$ *и* $(\mathfrak{g}', Q')$ *будем называть изометричными, если соответствующие им односвязные разрешимые группы Ли* G*, снабженные левоинвариантными римановыми метриками* (G, ρ) *и* (G', ρ') *являются изометричными как римановы многообразия.*

Определение 2. *Две метрические алгебры* $(\mathfrak{g}, Q)$ *и* $(\mathfrak{g}', Q')$ *будем называть изоморфными, если существует линейное отображение* $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$*, которое является одновременно и изометрией евклидовых пространств и изоморфизмом алгебр Ли.*

Понятно, что изоморфные метрические алгебры являются изометричными. Обратное, вообще говоря, неверно [2]. Поскольку нильпотентные алгебры Ли являются унимодулярными с нулевой формой Киллинга, то для вычисления кривизны Риччи нильпотентной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$ справедлива следующая формула:

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\sum_i \mathrm{ad}'_{X_i}\mathrm{ad}_{X_i} + \frac{1}{4}\sum_i \mathrm{ad}_{X_i}\mathrm{ad}'_{X_i},$$

где векторы X_i, $i = 1, \ldots, \dim(\mathfrak{g})$, образуют ортонормированный базис рассматриваемой алгебры, а через ad'_{X_i} обозначается оператор, сопряженный оператору ad_{X_i} относительно $(\cdot,\cdot)$ [2].

Напомним еще одно

Определение 3. *Разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется вполне разрешимой, если все операторы $\mathrm{ad}(Z)$, $Z \in \mathfrak{g}$, имеют только вещественные собственные значения.*

Следует отметить, что нильпотентные метрические алгебры Ли являются вполне разрешимыми. Значение введенного выше понятия видно из следующего предложения.

Предложение 1 ([1])**.** *Две метрические вполне разрешимые алгебры Ли $(\mathfrak{g}, Q)$ и $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{Q})$ изометричны тогда и только тогда, когда они изоморфны.*

Приводимые ниже результаты во многих случаях помогают получить важную информацию о количестве положительных и отрицательных собственных значений оператора Риччи.

Предложение 2 ([12])**.** *Пусть $(\mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$ — нильпотентная некоммутативная метрическая алгебра Ли. Тогда для произвольной левоинвариантной метрики на g существуют направления со строго положительной и строго отрицательной кривизной Риччи.*

Далее нам понадобятся хорошо известный результат о локализации собственных значений симметричной матрицы и следствие из него.

Предложение 3 ([9], Теорема 4.3.8)**.** *Пусть $\widehat{A}$ — симметричная вещественная $\big((n+1)\times(n+1)\big)$-матрица, A — матрица, полученная из $\widehat{A}$ удалением строки и столбца с номером $n+1$. Предположим, что собственные значения λ_i и $\widehat{\lambda}_i$ матриц A и $\widehat{A}$ соответственно упорядочены по возрастанию. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\widehat{\lambda}_1 \le \lambda_1 \le \widehat{\lambda}_2 \le \cdots \le \widehat{\lambda}_n \le \lambda_n \le \widehat{\lambda}_{n+1}.$$

Следствие 2. *Пусть A — симметричная вещественная $(n \times n)$-матрица, и пусть B — $(m \times m)$-матрица, полученная из A удалением $(n-m)$ строк и столбцов с совпадающими номерами. Если матрица B положительно (отрицательно) определена, то матрица A имеет не менее m положительных (соответственно отрицательных) собственных значений.*

Приведем список всех нильпотентных некоммутативных метрических алгебр Ли размерности 5 с точностью до изоморфизма

Предложение 4 ([8], Теорема 3)**.** *Следующий список содержит все с точностью до изоморфизма нильпотентные некоммутативные метрические алгебры Ли $\mathcal{N}$ размерности 5. Для каждой алгебры $\mathcal{N}$ указан канонический ортонормированный базис, нетривиальные коммутаторы базисных векторов и центр $\mathcal{Z}(\mathcal{N})$, кроме того, в Таблице 4 приведен вид оператора Риччи* Ric.

Таблица 4

№	Оператор Риччи
1	$-\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\ \ \varepsilon^2, \varepsilon^2, \sigma^2, \sigma^2, -\varepsilon^2-\sigma^2$
2	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A & -\gamma\rho & \upsilon\rho & 0 & 0 \\ -\gamma\rho & -B & -\upsilon\gamma & -\upsilon\sigma & 0 \\ \upsilon\rho & -\upsilon\gamma & C & -\gamma\sigma & \varepsilon\upsilon \\ 0 & -\upsilon\sigma & -\gamma\sigma & -D & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\upsilon & 0 & E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2, B=\varepsilon^2+\upsilon^2+\rho^2,$ $C=\varepsilon^2-\gamma^2-\rho^2, D=\sigma^2, E=\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2+\rho^2,$
3	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & -F & -\upsilon\sigma & 0 \\ 0 & -F & C & G & \varepsilon\upsilon \\ 0 & -\upsilon\sigma & G & D & H \\ 0 & 0 & \varepsilon\upsilon & H & E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2, C=\varepsilon^2-\delta^2-\gamma^2,$ $D=\tau^2+\delta^2-\sigma^2, E=\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2, F=\tau\delta+\upsilon\gamma, G=\varepsilon\tau-\gamma\sigma, H=\tau\upsilon+\delta\gamma$
4	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A & -\gamma\rho & \upsilon\rho & 0 & 0 \\ -\gamma\rho & -B & -F & -\upsilon\sigma & 0 \\ \upsilon\rho & -F & C & G & \varepsilon\upsilon \\ 0 & -\upsilon\sigma & G & D & H \\ 0 & 0 & \varepsilon\upsilon & H & E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2, C=\varepsilon^2-\delta^2-\gamma^2-\rho^2,$ $D=\tau^2+\delta^2-\sigma^2, E=\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2+\rho^2, F=\tau\delta+\upsilon\gamma, G=\varepsilon\tau-\gamma\sigma, H=\tau\upsilon+\delta\gamma,$
5	$-\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\ \ \sigma^2+\delta^2, \delta^2, \sigma^2, -\delta^2, -\sigma^2$
6	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & -\tau\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\tau\gamma & C & \varepsilon\tau & \varepsilon\upsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon\tau & D & \tau\upsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon\upsilon & \tau\upsilon & E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2,$ $C=\varepsilon^2-\gamma^2, D=\tau^2+\gamma^2, E=\upsilon^2,$
7a	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & -\tau\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\tau\gamma & B & \varepsilon\tau & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\tau & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\gamma^2, B=\varepsilon^2-2\gamma^2,$ $C=\tau^2+\gamma^2, D=\gamma^2$
7b	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -A & 0 & \upsilon\rho & 0 & 0 \\ 0 & -B & -\tau\gamma & 0 & 0 \\ \upsilon\rho & -\tau\gamma & C & \varepsilon\tau & \varepsilon\upsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon\tau & D & \tau\upsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon\upsilon & \tau\upsilon & E \end{pmatrix}$ $A=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2, B=\varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2,$ $C=\varepsilon^2-\gamma^2-\rho^2, D=\tau^2+\gamma^2, E=\upsilon^2+\rho^2$
8	$-\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\ \ \varepsilon^2, \varepsilon^2, -\varepsilon^2, 0, 0$

Таблица 5.

Алгебра Ли	Метрическая алгебра Ли	Алгебра Ли	Метрическая алгебра Ли
$5A_1$	коммутативная	$A_{5,3}$	$\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)$
$A_{3,1}\oplus 2A_1$	$\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)$	$A_{5,3}$	$\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)$
$A_{4,1}\oplus A_1$	$\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)$	$A_{5,4}$	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma)$
$A_{5,1}$	$\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)$	$A_{5,5}$	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$
$A_{5,2}$	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma)$	$A_{5,6}$	$\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)$

1) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_5$, $[X_3,X_4]=\sigma X_5$, $\varepsilon\geq\sigma>0$,

2) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\gamma X_5$, $[X_1,X_4]=\sigma X_5$, $[X_2,X_3]=\rho X_5$, $\varepsilon>0$, $\sigma>0$, $\rho>0$, $\upsilon\geq 0$, $\gamma\geq 0$,

3) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\delta X_4+\gamma X_5$, $[X_1,X_4]=\sigma X_5$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\tau\geq 0$, $\sigma>0$ (*если* $\tau=0$, *то* $\gamma\geq 0$),

4) $\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^5(\varepsilon,\delta,\tau,\sigma,\upsilon,\gamma,\rho))=\{X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\delta X_4+\gamma X_5$, $[X_1,X_4]=\sigma X_5$, $[X_2,X_3]=\rho X_5$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\tau\geq 0$, $\sigma>0$, $\rho>0$ (*если* $\tau=0$, *то* $\gamma\geq 0$),

5) $\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\delta,\sigma))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\delta X_4$, $[X_1,X_3]=\sigma X_5$, $\delta\geq\sigma>0$,

6) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\gamma X_4$, $\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$, $\upsilon\geq 0$, $\gamma>0$,

7a) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\gamma))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4$, $[X_1,X_3]=\gamma X_4$, $[X_2,X_3]=\gamma X_5$, $\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$, $\gamma>0$,

7b) $\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^5(\varepsilon,\tau,\upsilon,\gamma,\rho))=\{X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3+\tau X_4+\upsilon X_5$, $[X_1,X_3]=\gamma X_4$, $[X_2,X_3]=\rho X_5$, $\varepsilon>0$, $\tau\geq 0$, $\upsilon\geq 0$, $\gamma>\rho>0$,

8) $\mathcal{N}_3^5(\varepsilon)=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_3^5(\varepsilon))=\{X_3,X_4,X_5\}$, $[X_1,X_2]=\varepsilon X_3$, $\varepsilon>0$.

Все перечисленные метрические алгебры Ли являются попарно неизоморфными между собой, более того, алгебры из разных пунктов неизоморфны даже как неметрические. Параметры, которые фигурируют в определении вышеприведенных метрических алгебр Ли, являются вещественными. Если в описании не указано дополнительных ограничений, то они могут принимать любые значения.

В таблице 5 приведены соответствия между метрическими и неметрическими алгебрами Ли.

3. Доказательство теоремы

Для исследования всевозможных сигнатур оператора Риччи на нильпотентных неметрических алгебрах Ли размерности 5 достаточно исследовать все нильпотентные метрические алгебры Ли, приведенные в предложении 4 с точностью до изоморфизма. При доказательстве теоремы воспользуемся таблицей

4, в которой приведен вид оператора Риччи, а также таблицей 5, в которой показана связь метрических и неметрических алгебр Ли.

Для удобства изложения ведем дополнительное обозначение. Пусть A — симметричная вещественная $(n \times n)$-матрица, через $A_{i,j,\dots,k}$ обозначим матрицу, полученную из A удалением строк и столбцов с номерами $i, j, \dots, k$.

3.1. **Алгебра $5A_1$.** Для абелевой алгебры Ли $5A_1$ все структурные константы $C_{i,j}^k$ нулевые, поэтому нулевым является и оператор Риччи Ric. Таким образом, мы получаем следующее очевидное

Предложение 5. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $5A_1$ реализуется только сигнатура $(0,0,0,0,0)$ (сигнатура 16 из таблицы 1).*

3.2. **Алгебра $A_{3,1} \oplus 2A_1$.**

Предложение 6. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{3,1} \oplus 2A_1$ реализуется только сигнатура $(-,-,0,0,+)$ (сигнатура 8 из таблицы 1).*

Доказательство. Оператор Риччи имеет вид $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\left(\varepsilon^2, \varepsilon^2, -\varepsilon^2, 0, 0\right)$. Так как $\varepsilon > 0$, то $(-,-,0,0,+)$ является единственной возможной сигнатурой для оператора Ric. □

3.3. **Алгебра $A_{4,1} \oplus A_1$.**

Предложение 7. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{4,1} \oplus A_1$ реализуются только сигнатуры $(-,-,-,0,+)$, $(-,-,-,+,+)$, $(-,-,0,0,+)$, $(-,-,0,+,+)$ (сигнатуры 5, 6, 8, 9 из таблицы 1).*

Доказательство. В таблице 6 приведены значения параметров ε, τ, υ, γ, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 6.

№ сигнатуры	Сигнатура	ε	τ	υ	γ
5	$(-,-,-,0,+)$	1	0	0	2
6	$(-,-,-,+,+)$	1	0	1	1
8	$(-,-,0,0,+)$	1	0	0	1
9	$(-,-,0,+,+)$	2	0	0	1

Рассмотрим (2×2)-матрицу

$$\mathrm{Ric}_{3,4,5} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 + \tau^2 + \upsilon^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\upsilon \geq 0$. Эта матрица отрицательно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух отрицательных собственных значений. Значит, в этом случае сигнатуры 11–21 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи.

Кроме того, матрица

$$\mathrm{Ric}_{1,2,3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tau^2+\gamma^2 & \tau\upsilon \\ \tau\upsilon & \upsilon^2 \end{pmatrix}$$

положительно полуопределена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее одного положительного и одного неотрицательного собственного значения. Значит, и в этом случае сигнатуры 1–4, 7 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи.

Рассмотрим характеристический полином матрицы Ric_1

$$T(x) = x^4 + \widetilde{B}x^2 + \widetilde{C}x + \widetilde{D}.$$

Для существования сигнатуры 10 из таблицы 1 необходимо $\widetilde{D} < 0$, т. е. произведение корней должно быть отрицательным. Но $\widetilde{D} = \upsilon^4\gamma^4 + \varepsilon^2\gamma^4\upsilon^2 \geq 0$. Следовательно сигнатура 10 из таблицы 1 не может быть реализована как сигнатура оператора Риччи. □

3.4. **Алгебра $A_{5,1}$.**

Предложение 8. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{5,1}$ реализуется только сигнатура $(-,-,-,+,+)$ (сигнатура 6 из таблицы 1).*

Доказательство. Оператор Риччи для данной алгебры Ли имеет вид

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\left(\sigma^2+\delta^2, \delta^2, \sigma^2, -\delta^2, -\sigma^2\right).$$

Так как $\delta \geq \sigma > 0$, то очевидно, что сигнатура $(-,-,-,+,+)$ является единственной возможной сигнатурой для оператора Ric. □

3.5. **Алгебра $A_{5,2}$.**

Предложение 9. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{5,2}$ реализуются только сигнатуры $(-,-,-,-,+)$, $(-,-,-,0,+)$, $(-,-,-,+,+)$, $(-,-,0,0,+)$, $(-,-,0,+,+)$ и $(-,-,+,+,+)$ (сигнатуры 3, 5, 6, 8, 9, 10 из таблицы 1).*

Доказательство. В таблице 7 приведены значения параметров ε, δ, τ, σ, υ, γ, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 7.

№ сигнатуры	Сигнатура	ε	δ	τ	σ	υ	γ
3	$(-,-,-,-,+)$	1	1	0	2	1	0
5	$(-,-,-,0,+)$	1	1	0	2	0	0
6	$(-,-,-,+,+)$	1	1	0	2	0	1
8	$(-,-,0,0,+)$	1	1	0	1	0	0
9	$(-,-,0,+,+)$	2	2	0	1	0	0
10	$(-,-,+,+,+)$	3	2	0	2	1	0

Рассмотрим (2×2)-матрицу

$$\mathrm{Ric}_{3,4,5} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geq 0$, $\sigma > 0$ (если $\tau = 0$, то $\gamma \geq 0$). Эта матрица отрицательно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух отрицательных собственных значений. Значит, и в этом случае сигнатуры 11–21 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи.

Кроме того, $\mathrm{Ric}(X_5, X_5) = \upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2 > 0$. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее одного положительного собственного значения. Значит, в этом случае сигнатуры 1, 2, 4, 7 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи. □

3.6. **Алгебра $A_{5,3}$.**

Предложение 10. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{5,3}$ реализуются только сигнатуры $(-,-,-,+,+)$, $(-,-,0,+,+)$ и $(-,-,+,+,+)$ (сигнатуры 6, 9, 10 из таблицы 1).*

Доказательство. Данной неметрической алгебре Ли соответствуют два класса метрических алгебр Ли $7a$ и $7b$ из таблицы 2. Все возможные сигнатуры оператора Риччи неметрической алгебры Ли $A_{5,3}$ могут быть получены как объединение сигнатур двух классов метрических алгебр Ли. Рассмотрим сначала метрическую алгебру Ли $7a$ из таблицы 2.

В таблице 8 приведены значения параметров ε, τ, γ, при которых реализуются сигнатуры на метрической алгебре Ли $7a$ из таблицы 2, указанные в формулировке предложения.

Таблица 8.

№ сигнатуры	Сигнатура	ε	τ	γ
6	$(-,-,-,+,+)$	1	0	1
9	$(-,-,0,+,+)$	$\sqrt{2}$	0	1
10	$(-,-,+,+,+)$	2	0	1

Рассмотрим (2×2)-матрицу

$$\mathrm{Ric}_{3,4,5} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon^2+\tau^2+\gamma^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2+\tau^2+\gamma^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$. Эта матрица отрицательно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух отрицательных собственных значений. Значит, в этом случае сигнатуры 11–21 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи. Кроме того, матрица

$$\mathrm{Ric}_{1,2,3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tau^2+\gamma^2 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

положительно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух положительных собственных значений. Значит, и в этом случае сигнатуры 1–5, 7, 8 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи метрической алгебры Ли $7a$.

Рассмотрим метрическую алгебру Ли $7b$ из таблицы 2. В таблице 9 приведены значения параметров ε, τ, υ, γ и ρ, при которых реализуются сигнатуры на метрической алгебре Ли $7b$ из таблицы 2, указанные в формулировке предложения.

Таблица 9.

№ сигнатуры	Сигнатура	ε	τ	υ	γ	ρ
6	$(-,-,-,+,+)$	1	0	0	4	3
9	$(-,-,0,+,+)$	5	0	0	4	3
10	$(-,-,+,+,+)$	6	0	0	4	3

Рассмотрим (2×2)-матрицу

$$\mathrm{Ric}_{3,4,5} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\gamma^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, $\upsilon \geq 0$, $\gamma > \rho > 0$. Эта матрица отрицательно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух отрицательных собственных значений. Значит, и в этом случае сигнатуры 11–21 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи. Кроме того, (2×2)-матрица

$$\mathrm{Ric}_{1,2,3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tau^2+\gamma^2 & \tau\upsilon \\ \tau\upsilon & \upsilon^2+\rho^2 \end{pmatrix}$$

положительно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух положительных собственных значений. Значит, и в этом случае сигнатуры 1–5, 7, 8 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи на метрической алгебре Ли $7b$ из таблицы 2.

То есть, только сигнатуры $(-,-,-,+,+)$, $(-,-,0,+,+)$ и $(-,-,+,+,+)$ (сигнатуры 6, 9, 10 из таблицы 1), могут быть реализованы, как сигнатуры оператора Риччи для неметрической алгебры Ли $A_{5,3}$. □

3.7. Алгебра $A_{5,4}$.

Предложение 11. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{5,4}$ реализуется только сигнатура $(-,-,-,-,+)$ (сигнатура 3 из таблицы 1).*

Доказательство. Оператор Риччи имеет вид

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\left(\varepsilon^2,\varepsilon^2,\sigma^2,\sigma^2,-\varepsilon^2-\sigma^2\right).$$

Так как $\varepsilon \geq \sigma > 0$, то $(-,-,-,-,+)$ является единственной возможной сигнатурой для оператора Ric. □

3.8. **Алгебра $A_{5,5}$.**

Предложение 12. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{5,5}$ реализуются только сигнатуры* $(-,-,-,-,+)$, $(-,-,-,0,+)$, $(-,-,-,+,+)$ *(сигнатуры 3, 5, 6 из таблицы 1).*

Доказательство. В таблице 10 приведены значения параметров ε, σ, υ, γ, ρ при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 10.

№ сигнатуры	Сигнатура	ε	σ	υ	γ	ρ
3	$(-,-,-,-,+)$	1	1	0	0	2
5	$(-,-,-,0,+)$	1	1	0	0	1
6	$(-,-,-,+,+)$	2	1	0	0	1

Рассмотрим (3×3)-матрицу

$$\mathrm{Ric}_{3,5} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon^2+\upsilon^2+\gamma^2+\sigma^2 & \gamma\rho & 0 \\ \gamma\rho & \varepsilon^2+\upsilon^2+\rho^2 & \upsilon\sigma \\ 0 & \upsilon\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $\rho > 0$, $\upsilon \geq 0$, $\gamma \geq 0$. Легко проверить, что матрица $\mathrm{Ric}_{3,5}$ отрицательно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее трех отрицательных собственных значений. Значит, что в этом случае сигнатуры 7–21 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи.

Кроме того, $\mathrm{Ric}(X_5, X_5) = \upsilon^2 + \gamma^2 + \sigma^2 + \rho^2 > 0$. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее одного положительного собственного значения. Значит, в этом случае сигнатуры 1, 2, 4 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи. □

3.9. **Алгебра $A_{5,6}$.**

Предложение 13. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{5,6}$ реализуются только сигнатуры* $(-,-,-,-,+)$, $(-,-,-,0,+)$, $(-,-,-,+,+)$, $(-,-,0,0,+)$, $(-,-,0,+,+)$ *и* $(-,-,+,+,+)$ *(сигнатуры 3, 5, 6, 8, 9, 10 из таблицы 1).*

Доказательство. В таблице 11 приведены значения параметров ε, δ, τ, σ, υ, γ, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Рассмотрим (2×2)-матрицу

$$\mathrm{Ric}_{3,4,5} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\sigma^2 & \gamma\rho \\ \gamma\rho & \varepsilon^2+\tau^2+\upsilon^2+\rho^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geq 0$, $\sigma > 0$, $\rho > 0$ (если $\tau = 0$, то $\gamma \geq 0$). Эта матрица отрицательно определена. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее двух отрицательных собственных значений. Значит, и в этом случае сигнатуры 11–21 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи.

Таблица 11.

№ сигнатуры	Сигнатура	ε	δ	τ	σ	υ	γ	ρ
3	$(-,-,-,-,+)$	1	1	0	2	0	0	1
5	$(-,-,-,0,+)$	1	1	0	1	0	0	1
6	$(-,-,-,+,+)$	1	1	1	1	0	0	1
8	$(-,-,0,0,+)$	$\sqrt{2}$	1	0	1	0	0	1
9	$(-,-,0,+,+)$	2	1	0	1	0	0	1
10	$(-,-,+,+,+)$	2	1	0	1	1	0	1

Кроме того, $\mathrm{Ric}(X_5, X_5) = \upsilon^2 + \gamma^2 + \sigma^2 + \rho^2 > 0$. По следствию 2 мы получаем, что матрица Ric имеет не менее одного положительного собственного значения. Значит, в этом случае сигнатуры 1, 2, 4, 7 из таблицы 1 не могут быть сигнатурами оператора Риччи. □

4. Заключительные замечания

Отметим, что доказательство теоремы 1 непосредственно следует из результатов предыдущего раздела. В тоже время законность расположения некоторых знаков “ − ” и “ + ” в таблице 3 можно продемонстрировать, опираясь на некоторые общие результаты, обсуждение которых можно найти в работах [4, 5]. Однако, в процессе доказательства теоремы 1 они нам не понадобились.

Автор надеется на то, что результаты настоящей работы помогут установить другие общие закономерности, связывающие сигнатуру оператора Риччи метрической алгебры Ли с ее алгебраическим строением.

Список литературы

[1] Д.В. Алексеевский, *Сопряженность полярных разложений групп Ли*, Математический сборник, **84** (1971), 14–26.

[2] Д.В. Алексеевский, *Однородные римановы пространства отрицательной кривизны*, Математический сборник, **96** (1975), 93–117.

[3] А.Л. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Мир, Москва, 1990.

[4] А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров, *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай*, Математические труды (в печати).

[5] А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров, *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай*, Математические труды (в печати).

[6] В.В. Морозов, *Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка*, Известия вузов. Мат., **4** (1958), 161–174.

[7] Г.М. Мубаракзянов, *Классификация вещественных структур алгебр Ли 5-го порядка*, Известия вузов. Мат., **3** (1963), 99–106.

[8] Е.В. Никитенко, *О нестандартных эйнштейновых расширениях пятимерных метрических нильпотентных алгебр Ли*, Сибирские Электронные Математические Известия, **3** (2006), 115–136.

[9] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, Москва, 1989.

[10] L. Berard-Bergery, *Les espaces homogenes Riemanniens de dimension 4*, Semin. Arthur Besse, Paris, 1978/79, (1981), 40–60.

[11] S. Ishihara, *Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions*, J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 345–370.

[12] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math. **21** (1976), 293–329.
[13] V. Patrangenaru, *Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples*, Pacific J. Math., **173(1)** (1996), 511–532.

Антон Геннадьевич Кремлев
Рубцовский индустриальный институт,
ул. Тракторная, 2/6,
658207, Рубцовск, Россия
E-mail address: kremant@mail.ru