S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 366–380 (2009) УДК 512.542
MSC 20D20

ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ Ф. ХОЛЛА

Д. О. РЕВИН

Abstract. In the paper, we discuss perspectives of future investigations of the Hall π-properties E_π, C_π and D_π in finite groups. A series of open problems is stated, both comparatirely new and well-known ones. It is proven that there are infinitely many infinite sets π of primes with $E_\pi \Rightarrow D_\pi$. Precisely if π consists of the primes $p > x$, for every real $x \geqslant 7$ then $E_\pi \Rightarrow D_\pi$. This result continues the investigations initiated by well-known Hall's conjecture of 1956 that $E_\pi \Rightarrow D_\pi$ for every set π of odd primes. This conjecture was disproved by F. Gross, who showed in 1984 that, for every finite set π of odd primes with $|\pi| \geq 2$, there exists a finite group G such that $G \in E_\pi$ and $G \notin D_\pi$.

Keywords: prime number, π-subgroup, π-Hall subgroup, properties E_π, C_π and D_π.

Введение

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π, через $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Группа с условием $\pi(G) \subseteq \pi$ называется π-группой. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G:H|) \subseteq \pi'$. В соответствии с [1] будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π, если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством* C_π. Если, к тому же, любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством* D_π. Группу

Revin, D.O., Around a conjecture of P. Hall.

Работа поддержана программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-344.2008.1), РФФИ (грант 08-01-00322), АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.419).

Поступила 3 сентября 2009 г., опубликована 7 ноября 2009 г.

со свойством E_π (C_π, D_π) будем называть также E_π-*группой* (соответственно, C_π-, D_π-*группой*). Символы E_π, C_π и D_π будут использоваться также для обозначения классов всех E_π-, C_π- и D_π-групп соответственно.

Холловы π-свойства E_π, C_π и D_π связаны с обобщением на π-подгруппы теорем Силова. Исследования по данной тематике восходят к работам Ф.Холла и С.А.Чунихина [2–4], результаты которых можно сформулировать так: конечная группа обладает свойством D_π для всех множеств π простых чисел тогда и только тогда, когда она разрешима. Следовательно, изучать холловы π-свойства нужно, когда множество π фиксировано, а группа неразрешима. Интерес к данной тематике проявляли многие известные специалисты.

Серия исследований, выполненных в течение последних десяти лет [5–13], привела к тому, что для любой конечной группы G с известными композиционными факторами и любого множества π простых чисел с помощью несложных арифметических действий можно сказать, обладает группа G свойством D_π или нет. Более точно, с помощью классификации конечных простых групп было доказано, что группа G обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждый ее композиционный фактор [9, теорема 7.7], а также было получено описание конечных простых групп со свойством D_π в терминах естественных арифметических параметров этих групп [13, следствие теоремы 3].

Означают ли полученные результаты, что исследование теорем силовского типа и, в частности, изучение групп из класса D_π полностью себя исчерпало и не имеет дальнейших перспектив? Цель данной работы — показать, что это не так, и что полученные результаты можно рассматривать как некоторый инструмент для дальнейших исследований, и они отнюдь не исчерпывают всей тематики. Ситуацию с D_π-группами в данный момент можно сравнить в миниатюре с теорией конечных групп после завершения классификации. Как классификация конечных простых групп не закрывает все известные вопросы и означает вовсе не смерть теории конечных групп, а лишь переход этой теории в новое качество, так и характеризация D_π-групп не дает ответа на все мыслимые вопросы, связанные с этими группами. Она лишь позволяет глубже исследовать уже известные вопросы и ставить новые, не менее естественные и важные.

В качестве одного из известных старых вопросов, ответ на на которые не вытекает автоматически из полученной характеризации D_π-групп, упомянем проблему Х. Виландта, сформулированную в его пленарном докладе на конференции по теории конечных групп в Санта-Круз в 1979 году [14].

Проблема 1. *Пусть задано некоторое множество простых чисел π. Найти все конечные простые неабелевы группы, у которых всякая подгруппа обладает свойством D_π.*

Естественность этой проблемы очевидна. Действительно, свойство D_π означает выполнение в группе для ее π-подгрупп полного аналога теоремы Силова. Однако свойство D_π, вообще говоря, не означает выполнение этого аналога для всех подгрупп данной группы, в то время, как теорема Силова, ввиду ее универсального характера, справедлива не только для самой группы, но и для всех ее подгрупп. Таким образом, естественно ввести в рассмотрение класс W_π всех конечных групп, в которых выполнен усиленный аналог теоремы Силова, а именно, свойство D_π имеет место для всех подгрупп. Можно показать, что этот класс замкнут относительно взятия (необязательно нормальных) подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Поэтому конечная группа принадлежит W_π тогда и только тогда, когда в W_π входит каждый ее композиционный фактор. Следовательно, для получения исчерпывающей характеризации групп класса W_π достаточно знать, какие простые группы лежат в этом классе, т. е. решить проблему 1. Поскольку решение этой проблемы, по-видимому, потребует знания всех подгрупп любой известной простой группы, ее решение не вытекает напрямую из полученных ранее результатов и представляется делом отдаленного будущего.

Другой группой открытых проблем являются вопросы, связанные с наследуемостью свойств E_π, C_π и D_π теми или иными классами подгрупп. Общая теория показывает, что классы E_π и D_π оказываются замкнутыми относительно взятия нормальных подгрупп, а класс C_π, вообще говоря, нет (т. е. не для всякого множества π). Имеются и другие виды подгрупп, для которых естественно и полезно было бы исследовать вопрос о наследуемости холловых π-свойств. Выделим некоторые из них.[1]

Очевидным и тривиальным представляется утверждение о том, что свойство E_π наследуется надгруппами π-холловых подгрупп.

Проблема 2. *Пусть $G \in C_\pi$ и H — π-холлова подгруппа группы G. Верно ли, что $K \in C_\pi$ для любой подгруппы K такой, что $H \le K \le G$?*

Отметим, что эквивалентная формулировка этой проблемы такова: верно ли, что в C_π-группе π-холловы подгруппы пронормальны?

Проблема 3. *Пусть $G \in D_\pi$ и H — π-холлова подгруппа группы G. Верно ли, что $K \in D_\pi$ для любой подгруппы K такой, что $H \le K \le G$?*

Последнюю проблему можно усилить следующим образом.

Проблема 4. *Пусть $G \in D_\pi$. Верно ли, что $K \in D_\pi$ для любой подгруппы K группы G такой, что $K \in E_\pi$?*

В случае отрицательного решения этой проблемы естественно представляет интерес следующее ослабление проблемы 1.

Проблема 5. *Пусть задано некоторое множество простых чисел π. Найти все конечные простые неабелевы группы, у которых всякая E_π-подгруппа обладает свойством D_π.*

Наконец, среди вопросов, которые видятся на сегодняшний момент, имеется серия проблем, которые могут быть охарактеризованы как арифметические и которым посвящена данная статья. Наиболее общая постановка задачи здесь такова.

Проблема 6. *Для каких множеств π простых чисел одно или несколько включений в цепочке*

$$B_\pi \subseteq D_\pi \subseteq C_\pi \subseteq E_\pi \subseteq \mathfrak{G},$$

являются равенствами?

---

[1]Прблемы 2–5 принадлежат, наряду с автором, Е.П.Вдовину.

Здесь $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп, а B_π — класс конечных групп, обладающих (суб)нормальным рядом, каждый фактор которого либо является π-группой, либо имеет порядок, делящийся не более, чем на одно простое число из π. В частности, класс B_π включает в себя классы π-разделимых и π-отделимых групп. Для обозначения групп из этого класса Л.А.Шеметков предложит термин *π-разотделимые группы.*[2]

Тривиальные примеры выполнения равенств $B_\pi = D_\pi = C_\pi = E_\pi = \mathfrak{G}$ дают пустое множество, множество всех простых чисел и любое одноэлементное множество π.

Из [13, следствие теоремы 3] вытекает

Предложение 1. *Если $2, 3 \in \pi$, то $B_\pi = D_\pi$.*

Это утверждение использует классификацию конечных простых групп.

З. Арад и М. Вард [19, теорема 4.9] также с использованием классификации конечных простых групп доказали

Предложение 2. *Если $\pi = 2'$, то $D_\pi = C_\pi = E_\pi$.*

Этот результат, как, впрочем, и вся проблематика восходят к знаменитой гипотезе Ф.Холла 1956 года о том, что для любого множества простых чисел π такого, что $2 \notin \pi$, имеет место равенство классов групп $E_\pi = D_\pi$.

Условие $2 \notin \pi$ в гипотезе Ф. Холла возникло не случайно. Рассмотрим пример.

Пусть $2, 3 \in \pi$ и множество π отлично от множества всех простых чисел. Пусть $p = \min \pi'$. Рассмотрим симметрическую группу $G = S_p$ степени p. Она обладает ровно одним классом сопряженных π-холловых подгрупп, каждая из которых изоморфна S_{p-1}. Поэтому $G \in C_\pi$. Каждая π-холлова подгруппа из G является стабилизатором точки в естественном подстановочном представлении. Рассмотрим π-подгруппу $K = \langle (1, 2, \ldots, p-2)(p-1, p) \rangle$ группы G. Она действует без неподвижных точек, а потому не содержится ни в какой π-холловой подгруппе группы G. Таким образом, $G \notin D_\pi$.

Тем самым, мы доказали следующее

Предложение 3. *Пусть множество простых чисел π содержит 2 и 3 и отлично от множества всех простых чисел. Тогда включение $D_\pi \subseteq C_\pi$ является строгим.*

Ф. Гросс [15] опроверг гипотезу Ф. Холла в оригинальной постановке, доказав следующее утверждение.

Предложение 4. *Для любого конечного множества нечетных простых чисел π, содержащего более одного элемента, существует конечная E_π-группа, не обладающая свойством D_π.*

Тем не менее, Ф.Гроссу с помощью классификации конечных простых групп удалось доказать ослабленный аналог гипотезы Ф. Холла [16, 17].

---

[2]Напомним, что конечная группа называется *π-разделимой* (*π-separable*), если любой ее главный фактор является π- или π'-группой. Конечная группа называется *π-отделимой* (*π-selected*), если порядок каждого ее главного фактора делится не более, чем на одно простое число из π. Эти понятия восходят к работам С.А.Чунихина. Для перевода термина "π-разотделимая группа"Л.А.Шеметков предложил термин "π-sepselected group".

Предложение 5. *Если множество π простых чисел таково, что $2 \notin \pi$, то $E_\pi = C_\pi$.*

Следствием предложений 4 и 5 является такое утверждение.

Предложение 6. *Существует континуум множеств τ нечетных простых чисел, для которых включение $D_\tau \subseteq C_\tau$ является строгим.*

Действительно, для любой пары (G, π), где π — конечное множество нечетных простых чисел, а конечная группа G обладает свойством C_π, но не обладает свойством D_π (существование такой группы гарантировано предложениями 4 и 5) рассмотрим всевозможные множества τ нечетных простых чисел такие, что $\pi \subseteq \tau$ и $(\tau \setminus \pi) \cap \pi(G) = \varnothing$. Ясно, что таких множеств τ континуально много. Ясно также, что $G \in C_\tau \setminus D_\tau$ для любого такого τ.

Отметим, что для множеств, содержащих 2, утверждение, аналогичное предложению 6, прямо следует из предложения 3.

В связи с этим утверждением и как очевидным ослабление гипотезы Ф. Холла возникает следующая проблема.

Проблема 7. *Верно ли, что существует континуум множеств π простых чисел, для которых $E_\pi = C_\pi = D_\pi$?*

Понятно, что число таких множеств π бесконечно, поскольку бесконечно число одноэлементных множеств простых чисел. Но для положительного решения проблемы 7 потребуется построить континуальную серию *бесконечных* множеств π, для которых $E_\pi = C_\pi = D_\pi$. До настоящего времени имелось лишь два примера таких бесконечных множеств — множество $2'$ и множество всех простых чисел.

В данной статье мы укажем счетную серию таких множеств. А именно, в качестве основного результата настоящей работы мы с помощью классификации конечных простых групп докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть для любого действительного числа x через π_x обозначено множество всех простых чисел p таких, что $p > x$. Тогда $E_{\pi_x} = C_{\pi_x} = D_{\pi_x}$ для всех $x \geqslant 7$.*

Автору не известно ни одного примера, который бы показывал необходимость каких-либо ограничений на x в этой теореме. Таким образом, мы можем сформулировать еще одну открытую проблему.

Проблема 8. *Верно ли, что если π_x имеет тот же смысл, что и в теореме 1, то $E_{\pi_x} = C_{\pi_x} = D_{\pi_x}$ для любого $x \in \mathbb{R}$?*

В пользу положительного решения данной проблемы говорит предложение 2, из которого вытекает положительный ответ в случае $x < 3$. Так как $\pi_x = \pi_y$ для любых $x, y \in [r, s)$, где r и s — последовательные простые числа, ввиду теоремы 1 и предложения 2, для полного решения проблемы 8 достаточно рассмотреть случаи $x = 3$ и $x = 5$.

Другим результатом статьи является следующее утверждение, показывающее, что требование нечетности простых чисел из π в условии предложения 4 можно опустить. Этот результат не зависит от классификации конечных простых групп.

Теорема 2. *Для любого конечного множества простых чисел π, содержащего более одного элемента, существует конечная C_π-группа, не обладающая свойством D_π.*

Теоремы 1 и 2 и их доказательства наглядно демонстрируют, что изучаемые вопросы носят теперь скорее арифметический а не теоретико-групповой характер.

1. Предварительные результаты и обозначения

Всюду далее считаем, что π — некоторое множество простых чисел. Символ x означает некоторое действительное число, а π_x — множество всех простых чисел из интервала $(x, +\infty)$. Нам понадобится обозначение для мощности множества всех простых чисел, принадлежащих промежутку $(0, x]$. Поскольку символ $\pi(x)$ уже занят для множества простых делителей натурального числа x, мы будем обозначать эту мощность через $\rho(x)$.

Если r — нечетное простое число, а $q > 1$ — натуральное число, взаимно простое с r, то положим

$$e(q, r) = \min\{e \in \mathbb{N} \mid q^e \equiv 1 \pmod r\}.$$

Приведем серию арифметических лемм.

Нам понадобится следующее усиление известных неравенств П. Л. Чебышева для функции $\rho(x)$ и асимптотического закона распределения простых чисел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\rho(x)}{x/\ln x} = 1,$$

доказанного Ж. Адамаром и Ш. Ж. Валле-Пуссеном. Результат принадлежит Б. Россеру.

Лемма 1. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ такого, что $x \geqslant 55$, выполнено неравенство*

$$\frac{x}{\ln x + 2} < \rho(x) < \frac{x}{\ln x - 4}.$$

Доказательство. См. [23]. □

Лемма 2. *Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $x \geqslant 9$. Тогда справедливы неравенства:*

$$\rho(x) < \frac{3x - 10}{4} < x - 2 < x - 1 < x < \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Доказательство. Ввиду условия $x \geqslant 9$, достаточно доказать лишь первое неравенство в этой цепочке, поскольку остальные тривиальны.

Докажем сначала, что

$$\frac{3x - 10}{4} > \frac{x}{\ln x - 4} \quad \text{при} \quad x \geqslant 212. \tag{1}$$

Ввиду условия $x \geqslant 212$, (1) равносильно следующему неравенству:

$$\ln x > f(x), \ \text{где } f(x) = \frac{16}{3} + \frac{40}{3(3x - 10)}. \tag{2}$$

При рассматриваемых значениях x функция $\ln x$ возрастает, а функция $f(x)$ убывает. Следовательно, при $x \geqslant 212$ выполнено

$$\ln x \geqslant \ln 212 > 5.355 > f(212) \geqslant f(x).$$

Таблица 1. Значения функций $\rho(x)$ и $g(x) = (3x-10)/4$

x	ρ	g	x	ρ	g	x	ρ	g	x	ρ	g
9	4	4.25	47	15	32.75	101	26	73.25	157	37	115.25
11	5	5.75	53	16	37.25	103	27	74.75	163	38	119.75
13	6	7.25	59	17	41.75	107	28	77.75	167	39	122.75
17	7	10.25	61	18	43.25	109	29	79.25	173	40	127.25
19	8	11.75	67	19	47.75	113	30	82.25	179	41	131.75
23	9	14.75	71	20	50.75	127	31	92.75	181	42	133.25
29	10	19.25	73	21	52.25	131	32	95.75	191	43	140.75
31	11	20.75	79	22	56.75	137	33	100.25	193	44	142.25
37	12	25.25	83	23	59.75	139	34	101.75	197	45	145.25
41	13	28.25	89	24	64.25	149	35	109.25	199	46	146.75
43	14	29.75	97	25	70.25	151	36	110.75	211	47	155.75

Тем самым, при $x \geqslant 212$ неравенства (1) и (2) доказаны. Ввиду леммы 1 неравенство

$$\rho(x) < \frac{3x-10}{4} \tag{3}$$

выполнено для $x \geqslant 212$.

Докажем неравенство (3) для $x \in [9, 212)$. Поскольку на любом промежутке $[r, s)$, где r и s — соседние простые числа, левая часть неравенства (3) постоянна, в то время как правая часть строго возрастает, мы можем считать, что либо $x = 9$, либо x является простым числом из промежутка $x \in [9, 212)$. Для всех таких значений неравенство (3) проверяется непосредственно, см. табл. 1. $\square$

Лемма 3. (Теорема Жигмонди) *Пусть q и m — натуральные числа, причем $q, m > 1$. Тогда найдется такое нечетное простое число r, что $e(q, r) = m$, за исключением следующих случаев:*

(1) *$q = 2$ и $m = 6$;*
(2) *$q = 2^l - 1$ для некоторого $l > 1$ и $m = 2$.*

Доказательство. См. [22]. $\square$

Пусть число $q > 1$ фиксировано. Заметим, что в соответствии с леммой 3 для каждого, кроме, может быть одного, числа $q^i - 1$ в последовательности $q^2 - 1, q^3 - 1, \ldots$ существует простой делитель r_i, который не делит ни один из предшествующих членов последовательности и не делит число $q - 1$. Будем называть такое число r_i *примитивным простым делителем* числа $q^i - 1$.

Лемма 4. *Пусть G — конечная группа и A — ее нормальная подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $G \in E_\pi$, то $A, G/A \in E_\pi$.*
(2) *Если $A, G/A \in D_\pi$, то $G \in D_\pi$.*

Доказательство. (1) См. [1, лемма 1]. (2) См. [9, теорема 7.7]. $\square$

2. Доказательство теоремы 1

Нам понадобятся обозначения для конечных простых групп. Через A_n мы обозначаем знакопеременную группу степени n. Через $O'N$ обозначена спорадическая группа О'Нэна–Симса. Для групп лиева типа мы следуем обозначениям из [20]. Конечное поле из q элементов обозначается через $\mathbb{F}_q$.

Лемма 5. *Если π — некоторое множество нечетных простых чисел и $G = A_n \in E_\pi$ — знакопеременная группа, то $|\pi \cap \pi(G)| \le 1$. В частности, $G \in D_\pi$.*

Доказательство. Следует из [9, теорема 4.3], [1, теорема A4] и [21]. □

Лемма 6. *Если π — некоторое множество нечетных простых чисел, G — простая спорадическая группа или группа Титса и $G \in E_\pi \setminus D_\pi$, то $G = O'N$, $\pi \cap \pi(G) = \{3, 5\}$. В частности, $7, 11, 19, 31 \in \pi(G) \setminus \pi$ и $\pi \neq \pi_x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Требуемое следует из [16, теорема 6.14]. □

Лемма 7. *Пусть π — некоторое множество нечетных простых чисел, G — простая группа лиева типа с базовым полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p > 0$, причем $G \in E_\pi \setminus D_\pi$. Положим $r = \min \pi \cap \pi(G)$ и $\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{r\}$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений.*

(1) *$p \in \pi$, p делит $|W|$ (порядок группы Вейля W группы G, см. табл. 2), любое число t из $\pi \cap \pi(G) \setminus \{p\}$ делит $q - 1$ и не делит $|W|$;*
(2) *$p \notin \pi$ и выполнено одно из следующих условий:*
  (2.1) *$G = A_{n-1}(q)$, $e(r, q) = r - 1$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$, $[n/(r-1)] = [n/r]$, и для всех $t \in \tau$ выполнено $e(t, q) = 1$ и $n < t$;*
  (2.2) *$G = {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $e(r, q) = r - 1$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$, $[n/(r-1)] = [n/r]$ и для всех $t \in \tau$ выполнено $e(t, q) = 2$ и $n < 2t$;*
  (2.3) *$G = {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $e(r, q) = [(r-1)/2]$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$, $[n/(r-1)] = [n/r]$ и для всех $t \in \tau$ выполнено $e(t, q) = 2$ и $n < 2t$;*
  (2.4) *$G = E_6(q)$, $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q-1)$, $3, 13 \in \pi \cap \pi(G)$, $5 \notin \pi \cap \pi(G)$;*
  (2.5) *$G = {}^2E_6(q)$, $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q+1)$, $3, 13 \in \pi \cap \pi(G)$, $5 \notin \pi \cap \pi(G)$;*
  (2.6) *$G = E_7(q)$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(q-1)$ или $\pi(q+1)$, $3, 13 \in \pi \cap \pi(G)$, $5, 7 \notin \pi \cap \pi(G)$;*
  (2.7) *$G = E_8(q)$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(q-1)$ или $\pi(q+1)$, $3, 13 \in \pi \cap \pi(G)$, $5, 7 \notin \pi \cap \pi(G)$;*
  (2.8) *$G = E_8(q)$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(q-1)$ или $\pi(q+1)$, $5, 31 \in \pi \cap \pi(G)$, $3, 7 \notin \pi \cap \pi(G)$;*
  (2.9) *$G = F_4(q)$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(q-1)$ или $\pi(q+1)$, $3, 13 \in \pi \cap \pi(G)$.*

Доказательство. Если $p \in \pi$, то требуемое следует из [16, теорема 3.2] и [8, теорема 3.3]. Если $p \notin \pi$ и G — классическая группа, то требуемое следует из [18, теоремы 4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9 и следствие 4.7] и [10, теоремы 1 и 2]. Если $p \notin \pi$ и G — исключительная группа лиева типа, то требуемое следует из [7, леммы 7–14] и [10, теоремы 1, 2 и 3]. □

Лемма 8. *Пусть $\pi = \pi_x$ для некоторого $x \geqslant 9$. Пусть G — простая группа лиева типа с базовым полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p \in \pi$. Тогда если $G \in E_\pi$, то $G \in D_\pi$.*

Таблица 2. Простые группы лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$

S	ограничения	$\lvert W\rvert$
$A_n(q)$	$q > 3$ при $n = 1$	$(n+1)!$
$B_n(q)$	$n \geq 2$; $q > 2$ при $n = 2$	$2^n n!$
$C_n(q)$	$n \geq 3$	$2^n n!$
$D_n(q)$	$n \geq 4$	$2^{n-1} n!$
${}^2A_n(q)$	$n \geq 2$; $q > 2$ при $n = 2$	$2^l l!$, где $l = \left[\frac{n+1}{2}\right]$
${}^2D_n(q)$	$n \geq 4$	$2^{n-1}(n-1)!$
$E_6(q)$		$2^7.3^4.5$
$E_7(q)$		$2^{10}.3^4.5.7$
$E_8(q)$		$2^{14}.3^5.5^2.7$
$F_4(q)$		$2^7.3^2$
$G_2(q)$	$q > 2$	$2^2.3$
${}^3D_4(q)$		$2^2.3$
${}^2E_6(q)$		$2^7.3^2$
${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	2
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	2^4
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	2

Доказательство. Допустим, это не так. Тогда, в силу леммы 7(1), число p делит порядок группы Вейля группы G. С другой стороны, $p \in \pi$, поэтому $p > x \geqslant 9$. Отсюда следует, что G не является исключительной группой (см. табл. 2).

Для классических групп идея доказательства состоит в следующем. Для каждой такой группы G мы укажем линейную функцию $f(x) = ax + b$, $a > 0$, такую, что из предположения $G \in E_\pi \setminus D_\pi$ вытекает неравенство $\rho(x) \geqslant f(x)$. Для достаточно больших x это неравенство противоречит асимптотическому закону

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\rho(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Для получения противоречия с условием $x \geqslant 9$ воспользуемся леммой 2.

Итак, считаем, что G совпадает с одной из групп $A_{n-1}(q)$, ${}^2A_{n-1}(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$, ${}^2D_n(q)$. Ввиду леммы 7(1) все простые числа из $\pi \cap \pi(G) \setminus \{p\}$ делят $q-1$.

Рассмотрим все возможные случаи по отдельности.

Случай 1. $G = A_{n-1}(q)$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{\delta} q^{n(n-1)/2} \prod_{i=2}^{n} (q^i - 1), \quad \delta = (n, q-1).$$

По лемме 3 для любого $i = 2, \ldots, n$, кроме, может быть, одного, найдется простое число r_i, делящее $q^i - 1$ и не делящее $q^j - 1$ для всех $j = 1, \ldots, i-1$. Поскольку $r_i \notin \pi(q-1)$ и $r_i \in \pi(G)$, ни одно из чисел r_i не лежит в $\pi = \pi_x$, поэтому $r_i \leqslant x$. Таким образом, на отрезке $(0, x]$ имеется по крайней мере $n-2$ различных простых числа. Значит,

$$\rho(x) \geqslant n - 2. \tag{4}$$

Далее, так как p делит порядок группы Вейля, $p \leqslant n$. Кроме того, $p > x$, так как $p \in \pi$. Следовательно, $n > x$. Теперь из (4) следует неравенство

$$\rho(x) > x - 2.$$

Противоречие с леммой 2.

Случай 2. $G = {}^2A_{n-1}(q)$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{\delta} q^{n(n-1)/2} \prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i), \quad \delta = (n, q+1).$$

Очевидно, что $q^i + 1$ делит $q^{2i} - 1$. Заметим также, что если простое число r является примитивным делителем числа $q^{2i} - 1$, то r делит $q^i + 1$. Заменим в произведении

$$\prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i)$$

все сомножители вида $q^i + 1$ (т. е. такие, которые соответствуют нечетным i) на $q^{2i} - 1$ и вычеркнем возникающие повторения. Обозначим через $\nu(n)$ число сомножителей в получившемся произведении. Легко показать, что

$$\nu(n) = \begin{cases} \dfrac{3n}{4}, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{3n+1}{4}, & \text{если} \quad n \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{3n-2}{4}, & \text{если} \quad n \equiv 2 \pmod 4, \\ \dfrac{3n-1}{4}, & \text{если} \quad n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

В частности, $\nu(n) \geqslant (3n-2)/4$. По лемме 3 у каждого из $\nu(n)$ сомножителей (кроме, может быть, одного) имеется простой делитель, который не делит $q-1$ и все остальные сомножители. Как и в предыдущем случае, все эти простые числа не лежат в $\pi(q-1)$, но лежат в $\pi(G)$ и значит не лежат в π.[3] Таким образом, на отрезке $(0, x]$ имеется не менее

$$\nu(n) - 1 \geqslant \frac{3n-2}{4} - 1 = \frac{3n-6}{4}$$

простых чисел. Значит,

$$\rho(x) \geqslant \frac{3n-6}{4}. \tag{5}$$

Как и в предыдущем случае, p делит порядок группы Вейля, поэтому

$$p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant \frac{n}{2}.$$

Так как $p \in \pi$, имеем $p > x$. Следовательно, $n/2 > x$ и $n > 2x$. Теперь из (5) следует неравенство

$$\rho(x) > \frac{6x-6}{4} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2},$$

противоречащее лемме 2.

[3] Заметим, что порядок группы G всегда делится на $q+1$, поэтому некоторая степень рассматриваемого нами примитивного простого делителя числа $q^2 - 1$ не сократится полностью при делении на δ.

С л у ч а й 3. $G \in \{B_n(q), C_n(q)\}$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{\delta} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1), \quad \delta = (2, q-1).$$

Рассуждая, как и в предыдущих случаях, заключаем, что существует не менее, чем $n-1$ простых чисел, не принадлежащих π, откуда $\rho(x) \geqslant n-1$. Далее, так как $p \in \pi$ и p делит порядок группы Вейля, имеем $x < p \leqslant n$, поэтому $\rho(x) > x - 1$, что противоречит лемме 2.

С л у ч а й 4. $G = D_n(q)$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{\delta} q^{n(n-1)} (q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1), \quad \delta = (4, q^n - 1).$$

Как и выше, заключаем, что существует не менее, чем $n-2$ простых чисел, не принадлежащих π, откуда $\rho(x) \geqslant n-2$. Так как $p \in \pi$ и p делит порядок группы Вейля, имеем $x < p \leqslant n$, поэтому $\rho(x) > x - 2$, что, как мы видели, противоречит лемме 2.

С л у ч а й 5. $G = {}^2D_n(q)$. В этом случае

$$|G| = \frac{1}{\delta} q^{n(n-1)} (q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1), \quad \delta = (4, q^n + 1).$$

Как и выше, заключаем, что существует не менее, чем $n-1$ простых чисел, не принадлежащих π, откуда $\rho(x) \geqslant n-1$. Так как $p \in \pi$ и p делит порядок группы Вейля, имеем $x < p \leqslant n-1$, поэтому $\rho(x) > x$, вопреки лемме 2.

Тем самым, лемма доказана. $\square$

Лемма 9. *Пусть $\pi = \pi_x$ для некоторого $x \in \mathbb{R}$. Пусть G — простая исключительная группа лиева типа с базовым полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p \notin \pi$. Тогда если $G \in E_\pi$, то $G \in D_\pi$.*

Доказательство. Предположим противное. Множество π обладает следующим очевидным свойством: если $r \in \pi$ то $s \in \pi$ для любого протого числа $s > r$. Теперь из леммы 7(2) следует, что если G — исключительная группа лиева типа, то $G = F_4(q)$ и $3 \in \pi$. Можно считать, что $\pi = 2'$ и $G \in D_\pi$ в силу предложения 2. $\square$

Лемма 10. *Пусть $\pi = \pi_x$ для некоторого $x \geqslant 9$. Пусть G — простая классическая группа лиева типа с базовым полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p \notin \pi$. Тогда если $G \in E_\pi$, то $G \in D_\pi$.*

Доказательство. Из леммы 7(2) следует, что $G \in \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q)\}$ и выполнено одно из условий (2.1)–(2.3) в утверждении леммы. Рассмотрим все возможные случаи.

С л у ч а й 1. Предположим, что верно утверждение (2.1), т. е. $G = A_{n-1}(q)$, $e(q, r) = r - 1$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$, $[n/(r-1)] = [n/r]$ и для всех $t \in \tau$ выполнено $e(t, q) = 1$ и $n < t$. Напомним, что здесь и далее $r = \min \pi \cap \pi(G)$ и

$\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{r\}$. Рассуждая также, как и в доказательстве леммы 8, среди простых делителей числа

$$|G|_{p'} = \frac{1}{\delta}\prod_{i=2}^{n}(q^i - 1), \quad \delta = (n, q-1),$$

мы можем указать не менее $n-3$ чисел, не принадлежащих π (число сомножителей $n-1$; мы не рассматриваем примитивные делители числа $q^{r-1}-1$, поскольку таким делителем является число r; один из сомножителей может оказаться исключением в теореме Жигмонди[4]). Кроме того, по условию $p \notin \pi$. Следовательно, существует не менее $n-2$ чисел, не лежащих в π. Все они лежат в интервале $(0, x]$, значит $\rho(x) \geqslant n-2$. Поскольку $r \in \pi(G)$ и $e(q,r) = r-1$, имеем $r - 1 \leqslant n$. Далее, соотношение $[n/(r-1)] = [n/r]$ в утверждении (2.1) означает, что $r \leqslant n$, а поскольку $r \in \pi = \pi_x$, имеем $x < r \leqslant n$. Таким образом,

$$\rho(x) \geqslant n - 2 > x - 2.$$

Но, как мы видели в доказательстве леммы 8, это неравенство невозможно.

Случай 2. Пусть верно утверждение (2.2), т. е. $G = {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $e(q,r) = r-1$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $[n/(r-1)] = [n/r]$ и для всех $t \in \tau$ выполнено $e(t,q) = 2$ и $n < 2t$. Рассмотрим число

$$|G|_{p'} = \frac{1}{\delta}\prod_{i=2}^{n}(q^i - (-1)^i), \quad \delta = (n, q+1).$$

Пусть $\nu(n)$ имеет тот же смысл, что и в доказательстве леммы 8. Повторяя рассуждения из этой леммы, убеждаемся, что среди простых делителей числа $|G|_{p'}$ не менее $\nu(n) - 3$ не принадлежат π (отнимаем 3, поскольку, во-первых, возможно исключение в теореме Жигмонди, во-вторых и в третьих, примитивные делители чисел $q^2 - 1$ и $q^{r-1} - 1$ могут не лежать в π). По условию $p \notin \pi$. Таким образом, имеется не менее $\nu(n) - 2$ простых чисел, не принадлежащих $\pi = \pi_x$. Следовательно,

$$\rho(x) \geqslant \nu(n) - 2 \geqslant (3n-2)/4 - 2 = (3n-10)/4.$$

Число $e(q,r) = r-1$ четно и, поскольку $r \in \pi(G)$, $r - 1 \leqslant n$. Из условия $[n/(r-1)] = [n/r]$ в утверждении (2.2) заключаем, что $r \leqslant n$. В силу того, что $r \in \pi = \pi_x$, имеем $x < r \leqslant n$. Таким образом,

$$\rho(x) \geqslant (3n-10)/4 > (3x-10)/4,$$

что противоречит лемме 2.

Случай 3, когда выполнено утверждение (2.3), т. е. $G = {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $e(q,r) = (r-1)/2$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $[n/(r-1)] = [n/r]$ и для всех $t \in \tau$ выполнено $e(t,q) = 2$ и $n < 2t$. Этот случай разбирается аналогично предыдущему. Небольшая разница в рассуждениях лишь в том, что число $e(q,r) = (r-1)/2$ нечетно. Поскольку произведение

$$\prod_{i=2}^{n}(q^i - (-1)^i)$$

[4]Заметим, что числа из τ являются примитивными делителями числа $q-1$, которое не фигурирует в произведении.

делится на r, один из его сомножителей совпадает с $q^{r-1}-1$ и, как и в предыдущем случае, $r-1 \leqslant n$. Следовательно, мы получаем то же неравенство

$$\rho(x) \geqslant (3n-10)/4 > (3x-10)/4,$$

вопреки лемме 2. □

Лемма 11. *Пусть $\pi = \pi_x$ для некоторого $x \in \mathbb{R}$ и $x \geqslant 7$. Тогда для любой простой группы G если $G \in E_\pi$, то $G \in D_\pi$.*

Доказательство. Из классификации конечных простых групп [24, Классификационная теорема] и лемм 5–10 вытекает справедливость доказываемого утверждения при $x \geqslant 9$. Остается заметить, что для всех $x \in [7, 11)$ множества π_x совпадают. Тем самым, лемма доказана для всех $x \geqslant 7$. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $\pi = \pi_x$, где $x \geqslant 7$. Пусть G — конечная группа. Покажем, что если $G \in E_\pi$, то $G \in D_\pi$. Доказывать будем индукцией по порядку группы G. Если $|G| = 1$, то $G \in D_\pi$. Если G — простая группа, то $G \in D_\pi$ по лемме 11. Поэтому считаем, что группа G обладает нетривиальной собственной нормальной подгруппой A. Так как $G \in E_\pi$, по лемме 4(1) имеем $A, G/A \in E_\pi$. Так как порядки групп A и G/A меньше, чем порядок группы G, по предположению индукции $A, G/A \in D_\pi$. Теперь ввиду леммы 4(2) получаем $G \in D_\pi$. □

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 12. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$, где q — степень простого числа p. Пусть π — множество простых чисел такое, что $3, p \notin \pi$, а $2 \in \pi$. Пусть $\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{2\} \neq \varnothing$, а φ — множество простых чисел Ферма, принадлежащих τ. Пусть число $\varepsilon \in \{1, -1\}$ выбрано таким образом, что $q - \varepsilon$ делится на 4. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *$G \in C_\pi$ и тогда и только тогда, когда $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$ и выполнено одно из следующих условий:*
   - (1.1) *$\varepsilon = 1$ и $s > n$ для любого $s \in \tau$;*
   - (1.2) *$\varepsilon = -1$ и $s > (n+1)/2$ для любого $s \in \tau$.*

(2) *$G \in D_\pi$ тогда и только тогда, когда $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, $s > n$ для любого $s \in \tau$ и $t > n+1$ для любого $t \in \varphi$.*

Доказательство. См. [12, Основная теорема и лемма 3]. □

Доказательство теоремы 2. Пусть π конечное множество простых чисел, содержащее более одного элемента. Покажем, что существует конечная группа G такая, что $G \in C_\pi \setminus D_\pi$.

Ввиду предложений 3, 4 и 5 можно считать, что $2 \in \pi$, а $3 \notin \pi$. Пусть

$$\tau = \pi \setminus \{2\} = \{r_1, \dots, r_m\},$$

причем $r_1 < \dots < r_m$.

Рассмотрим всевозможные числа вида $4r_1 \dots r_m t - 1$, где t пробегает множество натуральных чисел. По теореме Л. Дирихле о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии [25] среди чисел такого вида найдется простое число p. Ясно, что $p \notin \pi$. Положим $n = r_1$ и $G = A_{n-1}(p)$. Покажем, что $G \in C_\pi \setminus D_\pi$.

Во-первых, 4 и все числа из τ делят $p+1$ в силу выбора числа p. Таким образом, $\varepsilon = -1$ и $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$. Далее, $(n+1)/2 = (r_1+1)/2 < r_1 < \cdots < r_m$. Значит, по лемме 12(1) $G \in C_\pi$. Во-вторых, $G \notin D_\pi$ по лемме 12(2), так как $r_1 = n$. $\square$

Список литературы

[1] P. Hall, *Theorems like Sylow's*, Proc. London Math. Soc., **6**: 22 (1956), 286–304.

[2] P. Hall, *A note on soluble groups*, J. London Math. Soc., **3** (1928), 98–105.

[3] P. Hall, *A characteristic property of soluble groups*, J. London Math. Soc., **12** (1937), 198–200.

[4] С. А. Чунихин, *О разрешимых группах*, Изв. НИИММ Том. унив., **2** (1938), 220–223.

[5] В. Д. Мазуров, Д. О. Ревин, *О холловом D_π-свойстве для конечных групп*, Сибирский матем. ж., **38**: 1 (1997), 106–113.

[6] Д. О. Ревин, *Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π*, Матем. труды, **2**: 1 (1999), 157–205.

[7] Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин, *Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп*, Алгебра и логика, **41**: 1 (2002), 15–56.

[8] Д. О. Ревин, *Свойство D_π в одном классе конечных групп*, Алгебра и логика, **41**: 3 (2002), 335–370.

[9] D. O. Revin, E. P. Vdovin, *Hall subgroups of finite groups*, Contemporary Mathematics, **402** (2006), 229–265.

[10] Д. О. Ревин, *Свойство D_π конечных групп в случае, когда $2 \notin \pi$*, Труды ИММ УрО РАН, **13**: 1 (2006), 166–182.

[11] Д. О. Ревин, *Характеризация конечных D_π-групп*, Доклады РАН, **417**: 5 (2007), 601–604.

[12] Д. О. Ревин, *Свойство D_π в линейных и унитарных группах*, Сиб. матем. ж., **49**: 2 (2008), 437–448.

[13] Д. О. Ревин, *Свойство D_π в конечных простых группах*, Алгебра и логика, **47**: 3 (2008), 364–394.

[14] H. Wielandt, *Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute*, The Santa Cruz conf. on finite groups, Santa Cruz, 1979. Proc. Sympos. Pure Math., **37**, Providence RI: Amer. Math. Soc., 1980, 161–173.

[15] F. Gross, *Odd order Hall subgrous of* $\mathrm{GL}(n,q)$ *and* $\mathrm{Sp}(2n,q)$, Math. Z., **187**: 2 (1984), 185–194.

[16] F. Gross, *On a conjecture of Philip Hall*, Proc. London Math. Soc., Ser. III, **52**: 3 (1986), 464–494.

[17] F. Gross, *Conjugacy of odd order Hall subgroups*, Bull. London Math. Soc., **19**: 4 (1987), 311–319.

[18] F. Gross, *Odd order Hall subgroups of the classical linear groups*, Math. Z., **220**: 3 (1995), 317–336.

[19] Z. Arad, M. B. Ward, *New criteria for the solvability of finite groups*, J. Algebra, **77**: 1 (1982), 234–246.

[20] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley and Sons, London, 1972.

[21] J. G. Thompson, *Hall subgroups of the symmetric groups*, J. Comb. Th., **1**: 2 (1966), 271–279.

[22] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, J. Monatshefte Math. Phys, **3** (1892), 265–284.

[23] B. Rosser, *Explicit Bounds for Some Functions of Prime Numbers*, Amer. J. Math., **63**: 1 (1941), 211–232.

[24] D. Gorenstein, *Finife simple groups: An introduction to their Classification*, Rutgers, Univ. New Jersey, New Brunswick, 1982.

[25] L. Dirichlet, *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sing, unendlich viele Primzahlen erhält*, Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (1837), 45—81.

Данила Олегович Ревин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия;
Новосибирский госуниверситет,
ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: revin@math.nsc.ru