S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 381–384 (2009) УДК 517.91
Краткие сообщения MSC 34C

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ИЗОХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В. В. ИВАНОВ

Abstract. Integral formulas are exposed which express a relation between the movement times of transversal plain flows along the opposite sides of the "dynamic quadrangles" generated by the flows. In the formulas, the main role is played by the Poisson bracket. An application is presented to the theory of isochronous oscillations.

Keywords: dynamic quadrangles, Poisson brackets, isochronous oscillations

1. Пусть в какой–нибудь области ориентированной евклидовой плоскости заданы два гладких векторных поля a и b. Будем считать, что они трансверсальны, а пара (a, b) ориентирована положительно. *Динамическим четырехугольником* (рис. 1) мы называем любую фигуру D в рассматриваемой области, которая ограничена участками двух траекторий поля a и двух траекторий поля b, причем вся она дважды расслаивается отрезками траекторий наших двух полей, соединяющими соответствующие противоположные стороны четырехугольника. Пусть O означает ту единственную из вершин четырехугольника D, из которой *выходят* избранные нами траектории полей a и b. Буквами A и B мы обозначим вершины, в которые нас *приводят* потоки, порождаемые полями a и b. Наконец, буква C будет означать последнюю вершину четырехугольника, где *встречаются* траектория поля a, начинающаяся в точке B, и траектория поля b, выходящая из точки A.

Времена движений вдоль сторон OA и OB мы обозначим соответственно буквами s_0 и t_0. Аналогично, s_1 и t_1 будут означать времена движений вдоль

Ivanov, V. V., Dynamic quadrangles and isochronous oscillations.

Представлена В. М. Гордиенко 5 ноября 2009 г., опубликована 7 ноября 2009 г.

сторон BC и AC. Как мы сейчас увидим, разности $s_1 - s_0$ и $t_1 - t_0$ можно выразить двойными интегралами по области D, в которых главное действующее лицо — скобка Пуассона $[a, b] = da(b) - db(a)$ векторных полей a и b.

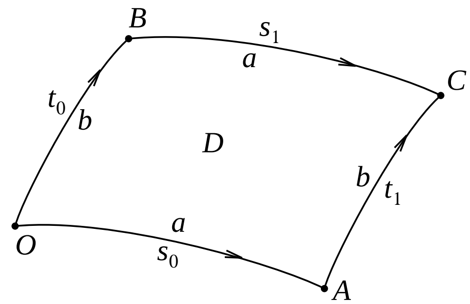

Рис. 1. Динамический четырехугольник

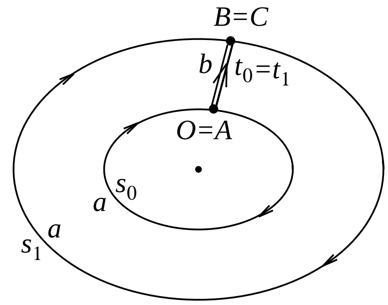

Рис. 2. Изохронный центр

В дальнейшем Δ означает площадь «переменного» параллелограмма, построенного по векторам a и b, а символ $\perp$ означает поворот вектора на 90° против часовой стрелки, что на *ориентированной* плоскости имеет определенный смысл. В соответствии с этим соглашением, очевидно, $\Delta = a^\perp \cdot b$.

Теорема. *Времена движений вдоль сторон динамического четырехугольника D векторных полей a и b связаны соотношениями*

$$s_1 - s_0 = \iint\limits_D \frac{[a,b] \cdot b^\perp}{\Delta^2}\, dS, \qquad t_1 - t_0 = \iint\limits_D \frac{[a,b] \cdot a^\perp}{\Delta^2}\, dS, \tag{1}$$

2. В этой заметке мы не можем позволить себе отягощать деталями наши рассуждения. Заметим, что достаточно доказать инфинитезимальный вариант теоремы. Для того чтобы у читателя возник способствующий пониманию психологический настрой, положим

$$d\sigma := s_0, \quad d\sigma' := s_1, \quad d\tau := t_0, \quad d\tau' := t_1,$$

а также договоримся символом $o(k)$ обозначать любую числовую или векторную функцию от $d\sigma$ и $d\tau$, бесконечно малую относительно k-ой степени наибольшего из значений этих положительных переменных. Важно подчеркнуть, что все эти «o-малые» будут у нас «равномерными» на компактах, к числу которых относятся и динамические четырехугольники.

Пусть dS означает площадь четырехугольника D. Как мы увидим,

$$d\sigma' - d\sigma = \frac{[a,b] \cdot b^\perp}{\Delta^2} dS + o(2), \qquad d\tau' - d\tau = \frac{[a,b] \cdot a^\perp}{\Delta^2} dS + o(2). \tag{2}$$

Ясно, что из этих асимптотических формул непосредственно вытекают нужные нам интегральные соотношения (1).

Пусть φ означает угол между векторами a и b. Тогда, как нетрудно понять,

$$dS = |a|\,|b|\,\sin\varphi d\sigma d\tau + o(2) = \Delta d\sigma d\tau + o(2).$$

Поэтому предыдущие формулы (2) эквивалентны следующим двум:

$$d\sigma' - d\sigma = \frac{[a,b]\cdot b^{\perp}}{\Delta} d\sigma d\tau + o(2), \qquad d\tau' - d\tau = \frac{[a,b]\cdot a^{\perp}}{\Delta} d\sigma d\tau + o(2). \tag{3}$$

Именно эти соотношения нам и остается доказать.

3. О геометрии теперь можно забыть — нам здесь нужен только обычный локальный анализ. Он приводит нас к четырем асимптотическим формулам. Две из них определяют с нужной нам точностью положение точек A и B:

$$A = O + a d\sigma + da(a)\frac{d\sigma^2}{2} + o(2), \qquad B = O + b d\tau + db(b)\frac{d\tau^2}{2} + o(2).$$

Две другие определяют положение точки C, в которую мы можем прийти за время $d\tau'$ из точки A, двигаясь вдоль поля b, а можем попасть в нее же за время $d\sigma'$, если выйдем из точки B и будем двигаться вдоль поля a. Применяя, где это не приводит к потере информации, очевидные эквивалентности $d\sigma' \sim d\sigma$ и $d\tau' \sim d\tau$, или, точнее говоря, $d\sigma' = d\sigma + o(1)$ и $d\tau' = d\tau + o(1)$, мы получим оставшиеся две из упомянутых выше асимптотических формул:

$$C = A + b d\tau' + db(a) d\sigma d\tau + db(b)\frac{d\tau^2}{2} + o(2),$$

$$C = B + a d\sigma' + da(b) d\sigma d\tau + da(a)\frac{d\sigma^2}{2} + o(2).$$

4. Заменяя A и B в последних двух формулах их асимптотическими выражениями, мы приходим к линейному уравнению

$$a d\sigma' - b d\tau' = a d\sigma - b d\tau - [a,b]\, d\sigma d\tau + o(2)$$

относительно времен $d\sigma'$ и $d\tau'$. Это векторное уравнение эквивалентно паре скалярных уравнений (3). Действительно, умножая его «скалярно» на вектор $b^{\perp}$, а также замечая, что $a^{\perp}\cdot b + a\cdot b^{\perp} = 0$, мы получим:

$$d\sigma' = d\sigma + \frac{[a,b]\cdot b^{\perp}}{a^{\perp}\cdot b} d\sigma d\tau + o(2).$$

Это — первое из равенств (3). Аналогично, ко второму из равенств (3) нас приводит умножение того же уравнения на вектор $a^{\perp}$:

$$d\tau' = d\tau + \frac{[a,b]\cdot a^{\perp}}{a^{\perp}\cdot b} d\sigma d\tau + o(2).$$

Нам осталось только еще раз упомянуть об импликациях (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1).

5. Как легко видеть, из только что доказанных формул непосредственно вытекает, в частности, двумерный вариант классической теоремы о том, что потоки, порожденные двумя векторными полями, коммутируют тогда и только тогда, когда скобка Пуассона этих векторных полей равна нулю [1]. В самом деле, коммутируемость потоков, очевидно, означает, что $s_0 = s_1$ и $t_0 = t_1$ для каждого динамического четырехугольника, а это эквивалентно равенству нулю произведений $[a,b]\cdot a^{\perp}$ и $[a,b]\cdot b^{\perp}$, что для неколлинеарных векторных полей a и b выражается одним равенством $[a,b] = 0$. Наши рассуждения, разумеется, относятся лишь к трансверсальным полям, но формулы (1) можно видоизменить таким образом, что они будут применимы и к «вырожденному» случаю.

Отметим еще один пример применения установленных здесь формул, относящийся к теории изохронных систем, которая интенсивно развивается в последнее время (см. [2] и указанную там литературу). Пусть векторное поле a имеет особую точку типа «центр» и в некоторой проколотой ее окрестности существует такое трансверсальное ему поле b, что $[a, b] = 0$. Тогда центр *изохронный*, т. е. время движения по любым близким к нему замкнутым траекториям одно и то же для всех таких траекторий [2, 3]. Действительно, любые две близкие к особой точке замкнутые траектории поля a соединяются кусочком траектории поля b, как это показано на рис. 2. В результате кольцо превращается в динамический четырехугольник. Он немного необычный, но к нему, очевидно, применимы формулы (1). Вторая из них здесь бесполезна, первая же — приводит к равенству $s_0 = s_1$, выражающему изохронность центра.

Заметим, что ровно к этим же выводам, вслед за авторами работы [4], мы пришли бы и в том значительно более общем случае, когда для поля a можно найти такое трансверсальное ему поле b, что скобка Пуассона $[a, b]$, всего лишь, коллинеарна полю b, поскольку тогда $[a, b] \cdot b^{\perp} = 0$, а значит, снова $s_0 = s_1$.

Формулировки доказанных здесь утверждений были приведены в [5]. Пользуясь случаем, выражаю искреннюю признательность Е. П. Волокитину, которому я обязан не только замечательными компьютерными рисунками в этой заметке, но и моим интересом к изохронным системам.

Работа выполнена в рамках междисциплинарного интеграционного проекта №107 «Методы исследования дифференциально-разностных уравнений и приложения к задачам биологии и химии», поддержанного Сибирским отделением Российской академии наук.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1989.

[2] J. Chavarriga, M. Sabatiny, *A survey of isochronous centers*, Qualitative Theory of Dynamical Systems. **1**: 1 (1999), 1–70.

[3] Villarini M., *Regularity properties of the period function near a centre of planar vector fields*, Nonlinear Analisys. T. M. A. **19** (1992), 787–803.

[4] A. Algaba, E. Freire, E.Gamero, *Isochronicity via normal form*, Qual. Theory Dyn. Syst. **1**: 2 (2000), 133–156.

[5] В. В. Иванов, *Динамические четырехугольники трансверсальных векторных полей и скобки Пуассона*, Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск, Россия, 5-12 октября, 2008. Тезисы докладов, с. 140.

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `iva@math.nsc.ru`