

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 6, стр. 385–439 (2009)*УДК 517.977.58  
MSC 49N05ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ  
ПОЗИЦИОННО-ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

ABSTRACT. A method of sequential synthesis of time optimal control by a linear system with unknown disturbance is considered. A simple way of forming in real time a piecewise constant finite control moving a linear system from an initial state to the origin is proposed, the approximate solution to speed problem being provided. The relations are obtained that transform sequence of the finite controls to time optimal control. The evaluations consist in solving repeatedly the system of linear algebraic equations and integrating the matrix differential equation on the displacement intervals of the control switching times and that of the final control time. The simple and constructive conditions are obtained for: occurrence of discontinuous mode; moving the representative point along the switching manifolds; transformation of the optimal control structure in moving the phase trajectory of the system with uncontrollable disturbance. The method is evaluated in terms of its computational burden and the procedure of setting initial approximation that substantially decreases it is examined. The computational algorithm is given. Sequence of the controls is proved to converge to optimal control.

**Keywords:** optimal control, speed, duration of computation, finite control, linear system, disturbance, phase trajectory, switching time, adjoint system, variation, iteration.

---

ALEKSANDROV, V.M., SEQUENTIAL SYNTHESIS OF TIME OPTIMAL CONTROL  
BY A LINEAR SYSTEM WITH DISTURBANCE.

© 2009 АЛЕКСАНДРОВ В.М.

Работа поддержана СОРАН (проект № 85).

Поступила 1 апреля 2009 г., опубликована 11 ноября 2009 г.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема синтеза оптимального управления представляет значительный теоретический и практический интерес, так как только при синтезе управления система обладает робастностью к изменению ее параметров, действию различного рода внешних и параметрических возмущений, неточной реализацией моментов переключений, несоответствию принятого математического описания реальной управляемой системе и т.д. Проблема синтеза оптимального управления сложными динамическими системами аналитически неразрешима и сопряжена с принципиальными и вычислительными трудностями [ 1 ]. До настоящего времени не имеется методов синтеза оптимального управления, за исключением простейших систем и линейно-квадратичных задач без ограничений на управление. Одним из возможных подходов к решению проблемы синтеза является реализация оптимального управления в реальном времени в процессе сопровождения фазовой траектории движения динамической системы, когда управление формируется как функция дискретных текущих значений фазовых координат [ 2 ], [ 3 ]. В результате формируется оптимальное позиционно - программное управление, которое стремится к оптимальному позиционному управлению ( т. е. к синтезу оптимального управления ), если время, затрачиваемое на вычисление программного управления, стремится к нулю. Позиционно - программное управление существенно сложнее программного оптимального управления, так как требует создания алгоритмов программного управления в реальном времени, конструирования алгоритмов перестройки структуры оптимального управления при движении изображающей точки по многообразиям переключений, преодоления вырожденности при вычислении точек переключений оптимального управления, получения конструктивных условий перехода к скользящему режиму, условий возникновения новых и исключения прежних точек переключений управления и др. [ 4 ] - [ 6 ]. Актуальная проблема оптимального управления в реальном времени развивается в работах [ 7 ] - [ 9 ]. Нахождению программного оптимального управления посвящено большое количество работ. Трудности при решении задач оптимального управления вызваны необходимостью решать краевую задачу, большой размерностью систем, наличием ограничений на управления и фазовые координаты, многоэкстремальностью, сложным характером нелинейностей, действием на систему различного рода возмущений. Многочисленные трудности привели к большому разнообразию вычислительных методов их преодоления [ 10 ] - [ 20 ]. Однако разрывность решения сопряженной системы, частое обращение при последовательном синтезе к процедуре изменения структуры управления, возникновение скользящего режима делают невозможным применение известных методов и требуют разработки нового метода формирования программного оптимального управления в реальном времени.

Предлагаемый метод оптимального по быстродействию позиционно - программного управления линейной системой с неизвестным возмущением содержит ряд этапов. Первый этап (раздел 2) основан на формировании финитного управления, которое обладает рядом важных свойств и дает приближенное решение задачи линейного быстродействия [ 21 ]. Финитное управление переводит линейную систему из любого начального состояния в начало координат за фиксированное время и является своеобразной кусочно-постоянной аппроксимацией искомого оптимального управления. Моменты переключений, время

перевода и весовые коэффициенты финитного управления не зависят от начального условия. Именно это свойство позволяет вычислить весовые коэффициенты предварительно до начала процесса управления. Простота реализации финитного управления позволяет формировать его в реальном времени, а структура финитного управления позволяет определить оптимальное управление в начальный момент. Это управление  $u^\circ(t) = u^\circ(t_0)$  сразу подается на управляемый объект. На втором этапе (раздел 3) финитное управление преобразуется в оптимальное по быстродействию управление линейной системой без возмущения. Получены соотношения, преобразующие последовательность финитных управлений в оптимальное управление. Вычисления сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений и интегрированию матричного дифференциального уравнения на интервалах перемещения моментов переключений и конечного момента времени. Рассмотрен способ задания начального приближения, значительно уменьшающий вычислительную трудоемкость. На третьем этапе (раздел 4) вычисляется оптимальное управление с учетом возмущения. Получена система линейных алгебраических уравнений, связывающая отклонения фазовых координат с отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы и отклонением конечного момента. На четвертом этапе (раздел 5) рассматривается коррекция моментов переключений и конечного момента оптимального управления при сопровождении фазовой траектории движения управляемого объекта. Доказана (раздел 6) локальная и глобальная сходимости вычислительного метода и сходимости последовательности управлений к оптимальному по быстродействию управлению. Получены (раздел 7) простые конструктивные условия возникновения скользящего режима, движения по многообразиям переключений и изменения структуры оптимального управления при сопровождении фазовой траектории движения объекта с неконтролируемым возмущением. В разделе 8 приведен по шагам итерационный вычислительный алгоритм. В разделе 9 доказано, что если не учитывать возмущение в алгоритме управления, то фазовое состояние линейной динамической системы при одновременном действии возмущения и оптимального управления переводится в состояние динамического равновесия. В разделе 10 дана оценка вычислительной трудоемкости метода. В Заключении отмечены основные особенности предлагаемого метода.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V. \quad (2.1)$$

Здесь  $x$  —  $n$ -мерный вектор фазового состояния;  $A(t)$  и  $B(t)$  — непрерывные матрицы размеров  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно;  $u$  —  $m$ -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

$F$  —  $n$ -мерный вектор неизвестного непрерывного возмущения, компоненты которого ограничены по условиям:  $\left| \left( \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F d\tau \right)_i \right| + \left| \left( \Phi(t_k, t_0) x(t_0) \right)_i \right|$

$\leq \left| \left( \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) M d\tau \right)_i \right| \quad \forall i = \overline{1, n}$ , где  $\Phi(t, t_0)$  - фундаментальная матрица решений уравнения (2.1);  $M$  - максимальное управляющее воздействие. Физический смысл этих ограничений следующий. Отклонение на заданном интервале времени каждой фазовой координаты, порожденное *максимальным* допустимым управлением, должно быть больше (либо равно) суммарного отклонения каждой фазовой координаты, вызванного действием возмущения и свободного движения системы. Свободное движение порождается начальным условием и для неустойчивых систем отклонения фазовых координат в конечный момент могут быть значительными. При увеличении максимальных значений управлений ( т. е. предельных значений  $M_j, j = \overline{1, m}$  ) увеличиваются возмущения, которые могут быть парированы, и увеличивается область начальных условий, из которой возможен перевод системы в начало координат.

Возмущения, действующие на объект, вызываются различными причинами. Это могут быть внешние неконтролируемые детерминированные воздействия, различного рода нелинейности, неучтенные при линеаризации, параметрические возмущения, вызванные несоответствием параметров модели и объекта либо различием размерности математического описания модели и объекта и т. д.

Предполагается, что линейная модель объекта без возмущения  $F$

$$\dot{x}_m = A(t)x_m + B(t)u, \quad x_m(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V \quad (2.3)$$

полностью управляема, т.е.

$$\text{rang} \left[ \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n \quad (2.4)$$

и переводима ограниченным управлением (2.2) из заданного начального условия  $x_m(t_0) = x_0$  в начало координат  $x_m(t_k) = 0$ , т.е.  $x_0$  принадлежит области управляемости  $V$ .

Наряду с (2.3) будем рассматривать также более общую модель объекта с возмущением

$$\dot{x}'_m = A(t)x'_m + B(t)u + F_i, \quad x'_m(t_i) = x(t_i), \quad t \in [t_i, t_k^{(i)}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

где  $F_0 \equiv 0$  и (2.5) при  $i = 0$  совпадает с (2.3).

Вычисление оптимального управления в реальном времени требует введения нового класса ограничений - ограничения на время вычисления оптимального управления

$$\min_{j \in [1, m]} (\nu_j^1 - t_0) \geq h. \quad (2.6)$$

Здесь:  $\nu_j^1$  - первый момент переключения  $j$  компоненты вектора управления;  $h$  - время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления.

**Задача.** Найти в реальном времени в процессе сопровождения фазовой траектории движения системы (2.1) допустимое управление  $u^\circ(t)$ , переводящее за минимальное время  $T = t_k - t_0$  систему (2.1) с возмущением  $F$  из заданного начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в начало координат  $x(t_k) = 0$ .

Решение задачи состоит из ряда этапов, включающих решение следующих подзадач:

- Определение оптимального по быстродействию управления  $u^\circ(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$ ;
- Вычисление оптимального по быстродействию управления системой без возмущения (2.3);
- Вычисление оптимального по быстродействию управления системой с возмущением (2.5);
- Сопровождение и коррекция оптимального управления при движении системы (2.1).

**Замечание 1.** В работе находится оптимальное по быстродействию управление системой (2.1) в процессе её движения и сопровождения фазовой траектории. Вычисляется программное оптимальное по быстродействию управление для периодически измеряемых и обновляемых значений координат фазовой траектории, отстоящих друг от друга на время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления. Периодически вычисляются и средние ( за время между измерениями фазовых координат ) значения возмущений, которые учитываются при нахождении программного оптимального управления. Таким образом, при сопровождении фазовой траектории движения системы периодически обновляются значения фазовых координат и возмущений. Период обновления равен времени, которое необходимо для вычисления программного оптимального по быстродействию управления. В результате формируется позиционно - программное управление, которое стремится к позиционному управлению, если время вычисления стремится к нулю.

**Замечание 2.** При синтезе управление формируется как функция фазовых координат, т. е.  $u_{sint} = u(x)$ . При программном управлении оно реализуется как функция времени, т. е.  $u_{pr} = u(t)$ . В случае позиционно - программного управления формируется как функция текущих дискретных значений фазовых координат  $x(t_i)$  так и времени  $t$ , т. е.  $u_{ppr} = u(x(t_i), t)$ . Если время вычисления программного управления стремится к нулю, то  $u_{ppr}$  стремится к  $u_{sint}$ .

**Замечание 3.** Задачи оптимального управления рассматриваются при наличии различных ограничений, что приводит к различным структурам оптимальных управлений. Введение в теорию оптимального управления и рассмотрение временных процессов, в частности вычисление оптимального управления в реальном времени, приводит к появлению нового типа ограничения – ограничения по времени. Нарушение ограничения (2.6) не ведет к потере работоспособности алгоритма управления, но приводит к структуре оптимального управления, отличной от традиционного программного оптимального по быстродействию управления в задаче линейного быстродействия с фиксированным левым концом.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ $u^\circ(t_0)$ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

На первом этапе решается следующая задача.

**Задача 1.** Найти в реальном времени оптимальное по быстродействию управление  $u^\circ(t_0)$  линейной системой без возмущения (2.3) в начальный момент  $t = t_0$ .

**3.1. Определение начальных условий сопряженной системы и моментов переключений управления.** На интервале  $[t_0, t_k]$ , где  $t_k$  произвольно,

выберем произвольно  $n - 1$  точек переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, q_j}$ ;  $\sum_{j=1}^m q_j = n - 1$ , для компонент вектора управления:  $\nu_j^p$  –  $p$ -й момент переключения  $j$ -й компоненты вектора управления  $u(t)$ . Для линейной системы оптимальное по быстродействию управление [1] задается выражением

$$u_j^\circ(t) = M_j \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.1)$$

где  $[B_j(t)]^*$  – транспонированный  $j$ -й столбец матрицы  $B(t)$ ;  $\psi(t)$  – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0, \quad (3.2)$$

имеющее следующий вид:  $\psi(t) = \hat{\Phi}(t, t_0)\psi(t_0)$ . Здесь  $\hat{\Phi}(t, t_0)$  – фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения (3.2), которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t, t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0, t_0) = I, \quad (3.3)$$

где  $I$  – единичная матрица. Нетрудно показать, что фундаментальная матрица  $\Phi(t, t_0)$  решений прямой системы (2.3) связана с фундаментальной матрицей  $\hat{\Phi}(t, t_0)$  решений сопряженной системы (3.2) соотношением  $\hat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$ . Для уменьшения объема вычислений целесообразно не вычислять обратную матрицу, а использовать выражение  $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\hat{\Phi}(t, t_0)]^*$ .

Моменты переключений компонент вектора оптимального управления и их число на интервале  $[t_0, t_k]$  однозначно определяются функциями переключений  $[B_j(t)]^* \psi(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , если известно решение  $\psi(t)$ , т.е. известны начальные условия  $\psi_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$  сопряженной системы. Они находятся следующим образом. В заданные  $q_j$  моменты переключений  $\nu_j^p$ ,  $p = \overline{1, q_j}$  для  $j$ -й компоненты вектора управления функция переключений равна нулю, т.е.

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\psi(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1. \quad (3.4)$$

Получили систему из  $(n - 1)$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными, которыми являются начальные условия  $\psi_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$  сопряженной системы.

Введем обозначение  $\hat{\psi}(t_0) = \psi(t_0)/\psi_\alpha(t_0)$ , где  $\psi_\alpha(t_0) \neq 0$  любая фазовая координата,  $\alpha \in [1, n]$ . В силу однородности функции Понтрягина  $H(\psi(t), x(t), u(t))$  полагаем  $|\psi_\alpha(t_0)| = 1$  и получаем из (3.4) систему

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\hat{\psi}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1 \quad (3.5)$$

из  $(n - 1)$  линейных алгебраических уравнений с  $(n - 1)$  неизвестными  $\hat{\psi}_i(t_0)$  (т.к.  $\hat{\psi}_\alpha(t_0) = 1$ ).

Из (3.5) находим начальные условия нормированной сопряженной системы  $\hat{\psi}(t_0)$ , которое с *точностью до знака* совпадают с искомыми начальными условиями  $\psi_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Важно подчеркнуть, что для нахождения моментов переключений управления нет необходимости в определении знака  $\psi_\alpha(t_0)$ . Функция переключений  $[B_j(t)]^* \psi(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$  при  $\psi_\alpha(t_0) = +1$  симметрична функции переключений при  $\psi_\alpha(t_0) = -1$  и обе функции проходят через одни и те же нули (моменты переключений). Поэтому задавая *произвольно* знак  $\psi_\alpha(t_0)$  и полагая  $|\psi_\alpha(t_0)| = 1$ , решаем (3.2) на интервале  $[t_0, t_k]$  и находим все остальные ( $r_j - 1$  для  $j$ -й компоненты) моменты переключений управления, соответствующие ( $n - 1$ ) заданным моментам переключений.

Важно отметить, что заданием ( $n - 1$ ) моментов переключений *однозначно* задаются на интервале  $[t_0, \infty)$  все остальные моменты переключений (если они существуют). С изменением начальных условий и интервала управления  $[t_0, t_k]$  изменяются не только значения моментов переключений, но возможно и их количество.

**3.2 Формирование финитного управления.** Введем *переменные* ограничения, зависящие от начальных условий, и ограничим компоненты вектора управления по условию

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

где  $N_{ij}$  – весовые коэффициенты. Пусть начальная точка  $x(t_0) = x_0$  расположена на  $i$ -й оси фазового пространства, т.е. вектор начальных условий  $x^{(i)}(t_0)$  содержит только одну ненулевую компоненту  $x_i(t_0)$  для некоторого фиксированного  $i$ . Рассмотрим процесс формирования управления из начального условия  $i$ -й фазовой координаты. Для рассматриваемого начального условия ограничение (3.6) принимает вид

$$|u_j^{(i)}| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим задачу оптимального линейного быстрогодействия. Для нахождения минимального времени  $T^{(i)} = t_k^{(i)} - t_0$  перевода системы (2.3) из начального состояния  $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$  в нулевое конечное состояние  $x(t_k^{(i)}) = 0$  воспользуемся принципом максимума [1]. Запишем функцию Понтрягина  $H$  переменных  $x, \psi, u$ :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u,$$

где  $\psi^*$  – транспонированный вектор решения сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0. \quad (3.8)$$

Для оптимальности управления  $u(t)$  и траектории  $x(t)$  необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\psi(t)$ , соответствующей функциям  $u(t)$  и  $x(t)$ , что для всех  $t \in [t_0, t_k^{(i)}]$  функция  $H(x(t), \psi(t), u(t))$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u = u(t)$  максимума

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \sup_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u).$$

Функция  $H$  максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют соотношению:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij} |x_i(t_0)| \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.9)$$

Пусть  $x_i(t_0) = x_i^+(t_0) > 0$ . Тогда (3.9) можно записать так:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i^+(t_0)\text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.10)$$

Здесь  $\psi^{(i)}(t)$  – решение сопряженной системы (3.8), соответствующее положительному значению  $x_i(t_0)$ . Если  $x_i(t_0) = -x_i^+(t_0) < 0$ , то

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i^+(t_0)\text{sign}[B_j(t)]^* \widehat{\psi}^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.11)$$

где  $\widehat{\psi}^{(i)}(t)$  – решение сопряженной системы, соответствующее симметричной точке  $[-x_i^+(t_0)]$ . В силу симметрии относительно начала координат многообразий переключений оптимального управления имеем  $\widehat{\psi}^{(i)}(t) = -\psi^{(i)}(t)$ . Запишем теперь (3.11) так:

$$u_j^{(i)}(t) = -N_{ij}x_i^+(t_0)\text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.12)$$

Объединим (3.12) и (3.10) для произвольного значения  $x_i(t_0)$ . Получим

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i(t_0)\text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.13)$$

Выпишем решение дифференциального уравнения (2.3) в конечный момент  $t_k^{(i)}$ :

$$x(t_k^{(i)}) = \Phi(t_k^{(i)}, t_0)x^{(i)}(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) B_j(\tau) u_j^{(i)}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.14)$$

Обозначим через  $\Gamma^{(i)}(t, t_0)$   $i$ -й вектор-столбец фундаментальной матрицы решений  $\Phi(t, t_0)$ . Тогда первое слагаемое в правой части уравнения (3.14) можно записать так:

$$\Phi(t_k^{(i)}, t_0)x^{(i)}(t_0) = \Gamma^{(i)}(t_k^{(i)}, t_0)x_i(t_0), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.15)$$

Подставим в (3.14) выражения (3.15), (3.13) и конечное условие  $x(t_k^{(i)}) = 0$ . Получим уравнение, которое связывает моменты переключений управления (3.13), время перевода  $T^{(i)} = t_k^{(i)} - t_0$  и начальное условие  $x_i(t_0)$  с параметрами управляемой системы:

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int_{t_0}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \text{sign}[B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k^{(i)}, t_0) \right] x_i(t_0) = 0, \quad (3.16)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Выразим решение сопряженной системы через фундаментальную матрицу решений прямой системы и начальное условие

$$\psi^{(i)}(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Подставив (3.17) в (3.16), получим систему из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, которыми являются начальные условия  $\psi_\xi^{(i)}(t_0)$ ,  $\xi = \overline{1, n}$ :

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int_{t_0}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \text{sign}[B_j(\tau)]^* [\Phi^{-1}(\tau, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0) d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k^{(i)}, t_0) \right] \times \\ \times x_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.18)$$



Так как  $x_i(t_0) \neq 0 \forall i = \overline{1, n}$ , из (3.18) получаем *основное* уравнение, связывающее моменты переключений управления

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i(t_0)\text{sign}[B_j(t)]^*[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*\psi^{(i)}(t_0), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m},$$

с параметрами управляемой системы

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \text{sign}[B_j(\tau)]^* [\Phi^{-1}(\tau, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0) d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k^{(i)}, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

Решив (3.19), найдем начальные условия  $\psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$ ,  $\xi = \overline{1, n}$  сопряженной системы. Они определяют все моменты переключений управления (3.13), которые задаются функцией переключений  $[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)$ . Из (3.19) непосредственно следует, что *моменты переключений управления (3.13) не зависят от значения  $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$ .*

В случае постоянных матриц  $A$  и  $B$  из (3.19) получаем следующее *основное* уравнение, связывающее моменты переключений управления (3.13) с матрицами  $A, B$  и коэффициентом  $N_{ij}$ :

$$\sum_{j=1}^m \int_0^{T^{(i)}} e^{A(T^{(i)}-\tau)} B_j N_{ij} \text{sign}[B_j]^* \psi^{(i)}(\tau) d\tau + \Gamma^{(i)}(T^{(i)}) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.20)$$

Из (3.20) непосредственно следует, что *моменты переключений не зависят от начального момента  $t_0$ , начального условия  $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$  и постоянны.* В результате доказана

**Теорема 1.** *Моменты переключений управления (3.13), сформированного из начального условия  $i$ -й фазовой координаты, не зависят от значения  $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$ .*

*В случае постоянных матриц  $A$  и  $B$  моменты переключений не зависят от начального момента  $t_0$ , начального условия  $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$  и постоянны.*

Обозначим точки пересечения границы множества достижимости  $D_T$  за время  $T = t_k - t_0$  с осями фазового пространства через  $\pm(x_i(t_0))_{\max}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Весовые коэффициенты  $N_{ij}$  выбираем из условия

$$N_{ij}|x_i(t_0)|_{\max} = M_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.21)$$

В результате время перевода  $T^{(i)}$  равно заданному значению  $T$ , т.е.  $T^{(i)} = T$  и  $t_k^{(i)} = t_k$ .

Каждая из компонент управления (3.13) представляет чередующуюся последовательность разнополярных импульсов, величина которых прямо пропорциональна начальному условию  $x_i(t_0)$ , а моменты переключений равны значениям моментов переключений оптимального по быстрдействию управления для максимального отклонения  $|x_i(t_0)|_{\max}$ . Таким образом, финитное управление совпадает с оптимальным управлением при максимально допустимых “осевых” начальных условиях и сохраняет эти моменты переключений и время перевода. При этом для каждой компоненты величина финитного управления не превышает предельно допустимого значения  $M_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  и пропорциональна начальному условию. Управление (3.13) переводит систему (2.3) из *любой*

начальной точки, расположенной на  $i$ -й фазовой оси в начало координат за фиксированное (заданное) время  $T = t_k - t_0$ . Учитывая, что функция переключения  $\text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t) = \pm 1$  и задает моменты переключений, финитное управление может быть записано в следующем простом виде:

$$u_j^{(i)}(t)_\Phi = \pm N_{ij} x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n}.$$

В общем случае, когда вектор начальных условий  $x(t_0)$  содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих, сформированных из каждой фазовой координаты

$$u_j(t)_\Phi = \sum_{i=1}^n N_{ij} x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.22)$$

В силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем управление (3.22) переводит систему (2.3) из *любого* начального состояния  $x(t_0)$  в начало координат  $x(t_k) = 0$  за фиксированное (заданное) время  $T = t_k - t_0$ .

Независимость моментов переключений финитного управления от начальных условий упрощает техническую реализацию и особенно в случае постоянных матриц  $A$  и  $B$  управляемой системы, так как в этом случае моменты переключений не зависят и от начального момента  $t_0$  и постоянны. Весовые коэффициенты ( $N_{ij}$ ) и моменты переключений ( $\nu_{ij}^p$ ) вычисляются *предварительно, до начала процесса управления*. Сложность реализации практически не увеличивается с ростом порядка управляемой системы и числа управляющих параметров. Формирование управления сводится к умножению начального условия на известный весовой коэффициент и изменению знака этого произведения в известные моменты переключений. Отсутствие вычислений при формировании финитного управления делает возможным управление в реальном времени быстродействующими объектами и процессами.

Следует отметить, что рассмотренный метод независимого формирования управления из каждой фазовой координаты позволяет формировать управление и из части фазовых координат и решать задачи по переводу не только в точку, но и на  $r$ -мерное многообразие.

Сохраним независимость моментов переключений от начальных условий  $x_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , но другим способом сформируем финитное управление, при котором существенно уменьшается вычислительная трудоемкость. Такое финитное управление целесообразно использовать в качестве хорошего начального приближения в итерационной процедуре нахождения оптимального по быстродействию управления, что улучшает сходимость и уменьшает число итераций [ 22 ], [ 23 ].

Разобьем интервал  $[t_0, t_k]$  произвольно точками переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  и полагаем для единообразия записи  $\nu_j^0 = t_0$ ,  $\nu_j^{r_j} = t_k$ . Моменты переключений финитного управления приняты одинаковыми для всех фазовых координат. Тогда весовые коэффициенты  $N_{ij}$  принимают различные значения  $N_{ij}^p$  на каждом  $p$ -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где  $r_j$  — число интервалов знакопостоянства  $j$ -й компоненты.

Финитное управление при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений формируется по алгоритму

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.23)$$

В общем случае, когда вектор начальных условий  $x(t_0)$  содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих (3.23), сформированных из начальных значений каждой фазовой координаты

$$u_j^\Phi(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad (3.24)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p].$$

Суммарное управление (3.24) в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему (2.3) из *любого* начального состояния  $x(t_0)$  в начало координат  $x(t_k) = 0$  за фиксированное время  $T = t_k - t_0$  при кусочно-постоянных ограничениях

$$|u_j(t)| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.25)$$

Введем обозначение

$$\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t). \quad (3.26)$$

Для финитного управления (3.24) получаем следующее простое выражение:

$$u_j^\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.27)$$

Управление представляет собой последовательность разнополярных импульсов, сформированных из начальных значений каждой фазовой координаты. Величины импульсов пропорциональны начальным условиям, взятым с некоторым весом  $\hat{N}_{ij}^p$ , который различен на каждом интервале постоянства.

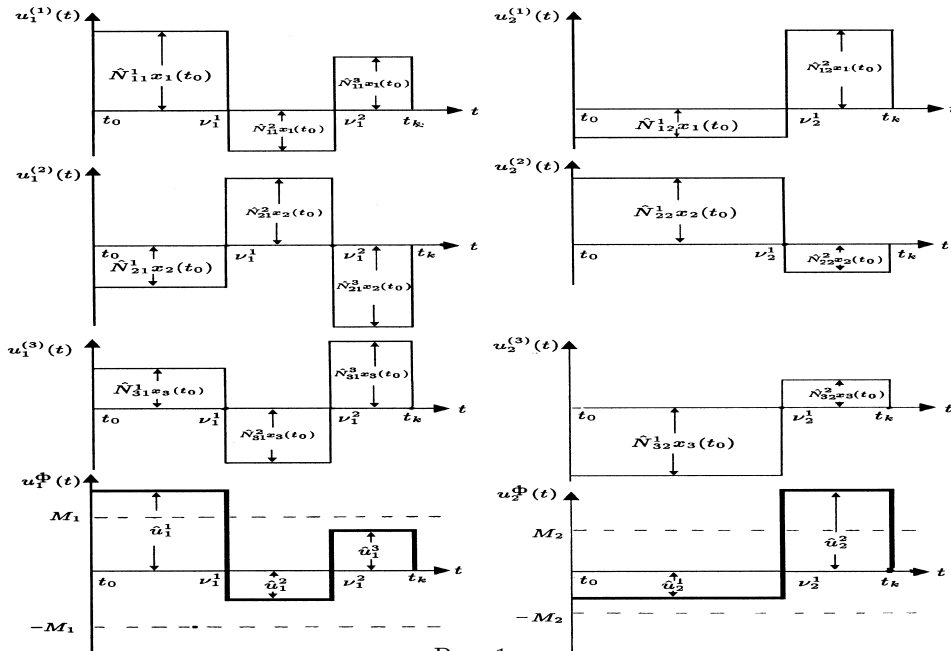


Рис. 1

На рис. 1 приведена качественная картина формирования финитного управления для системы третьего порядка с двумя управляющими параметрами  $u_1$  и  $u_2$ . Каждая компонента  $u_j^\Phi(t)$ ,  $j = \overline{1, 2}$  образуется суммированием трех составляющих  $u_j^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Весовые коэффициенты  $N_{ij}^p$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j}$  связаны с параметрами системы (2.3) следующим (аналогичным (3.19)) уравнением

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij}^p \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t) + \Gamma(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.28)$$

Учитывая, что  $\Gamma(t_k, t_0) = \Phi(t_k, t_0) I_i$ , где  $I_i$  —  $i$ -й вектор-столбец единичной матрицы, а фундаментальная матрица  $\Phi(t_k, t_0)$  — невырождена, систему уравнений (3.28) с учетом (3.26) представим следующим образом

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.29)$$

Пусть определены все моменты переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ , число которых  $\sum_{j=1}^m r_j - m \geq n$ . Число параметров  $\hat{N}_{ij}^p$  может быть больше числа уравнений. Поэтому для  $i$ -й фазовой координаты на  $n$  интервалах знакопостоянства управления считаем коэффициенты  $\hat{N}_{ij}^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, q_j}$ , где  $\sum_{j=1}^m q_j = n$ , неизвестными, а на остальных интервалах полагаем  $\hat{N}_{ij}^{p+1} = -\hat{N}_{ij}^p$ ,  $p = \overline{q_j, r_j}$ . Смена знаков у коэффициентов обусловлена сменой знака оптимального управления на каждом интервале. В результате получаем  $n$  систем, каждая из которых состоит из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными  $\hat{N}_{ij}^p$ ,  $p = \overline{1, q_j}$ ,  $\sum_{j=1}^m q_j = n$ :

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{q_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=q_j+1}^{r_j} (-1)^{p-q_j} \hat{N}_{ij}^{q_j} \times \right. \\ \left. \times \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.30)$$

Решение системы (3.30) существует, если выполнено условие полной управляемости (2.4).

Финитное управление (3.27) обладает рядом важных свойств. Во-первых, оно переводит систему из любого начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в начало координат  $x(t_k) = 0$  за заданное фиксированное время  $T = t_k - t_0$ . Во-вторых, из (3.30) непосредственно видно, что весовые коэффициенты  $\hat{N}_{ij}^p$  не зависят от начальных условий и поэтому могут быть найдены предварительно, т.е. до начала процесса управления. Это значительно упрощает реализацию финитного

управления (3.27), которое формируется практически мгновенно (несколько десятков операций умножения и сложения). В-третьих, финитное управление является своеобразной кусочно-постоянной аппроксимацией искомого оптимального управления и содержит информацию о его структуре. Именно на этом свойстве и основано рассмотренное ниже определение оптимального управления  $u(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$ .

Финитное и оптимальное управления в общем случае имеют различные моменты переключений и, как следствие, имеют различные амплитуды управлений: оптимальное управление имеет равные (по модулю) величины управлений, а финитное – различные величины управляющих воздействий на каждом из интервалов знакопостоянства. Идея предлагаемого метода заключается в постепенном выравнивании величин финитного управления до соответствующих предельных значений  $\pm M_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  при оптимальном управлении. По мере изменения величин управляющих воздействий соответствующим образом изменяются с помощью сопряженной системы моменты переключений и финитное управление стремится к оптимальному управлению. Действительно, оптимальное управление единственно, если начало координат является внутренней точкой области управления  $U$  и выполнено условие общности положения [ 1 ]. Для параллелепипедных ограничений (2.2) начало координат является внутренней точкой области управления  $U$ . В случае скалярного управления условие полной управляемости (2.4) адекватно условию общности положения. Поэтому для скалярного управления в силу единственности оптимального управления финитное управление при выравнивании амплитуд до  $\pm M_j$  стремится к оптимальному управлению. В случае векторного управления выполнение (более слабого) условия полной управляемости (2.4) не обязательно влечет выполнение условия общности положения (при параллелепипедных ограничениях это более жесткое условие покомпонентной полной управляемости) и оптимальное управление может быть не единственным. В таком случае финитное управление стремится к одному из оптимальных управлений.

Итак, задав произвольно моменты переключений, решаем системы линейных алгебраических уравнений (3.30) и находим весовые коэффициенты  $\hat{N}_{ij}^p$ . Формируем по формуле (3.27) финитное управление.

**3.3. Выбор опорной последовательности и опорного интервала.** Рассмотрим процедуру выбора опорной последовательности и опорного интервала. Проверяем смену знаков у финитных управлений  $u_j^p$  и выделяем такие номера интервалов  $p = k_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$  для которых знаки на этом и последующих интервалах совпадают. В этом случае не происходит чередование знаков управляющих воздействий и выполняется соотношение  $\text{sign } u_j^{k_\alpha} = \text{sign } u_j^{k_\alpha+1}$ . Финитное и оптимальное управление для  $\beta$ -й компоненты совпадают по знакам на такой последовательности интервалов, для которой достигается максимум выражения

$$\sum_{p=k_{\mu-1}+1}^{k_\mu} |u_\beta^p|(\nu_\beta^p - \nu_\beta^{p-1}) = \max_{\substack{p \in [1, r_j] \\ j \in [1, m]; \alpha \in L}} \sum_{p=k_{\alpha-1}+1}^{k_\alpha} |u_j^p|(\nu_j^p - \nu_j^{p-1}). \quad (3.31)$$

Если знаки чередуются на всех интервалах, то полагаем  $\alpha = 1$ ,  $k_0 = 0$ ,  $k_1 = r_\beta$ . На рис. 2 приведено финитное управление (качественная картина) и показана "опорная" последовательность импульсов (заштрихованная область;  $v = 2$ ). В

двух случаях (на первом и втором интервалах, на пятом и шестом интервалах) не происходит чередования знаков управляющих воздействий.

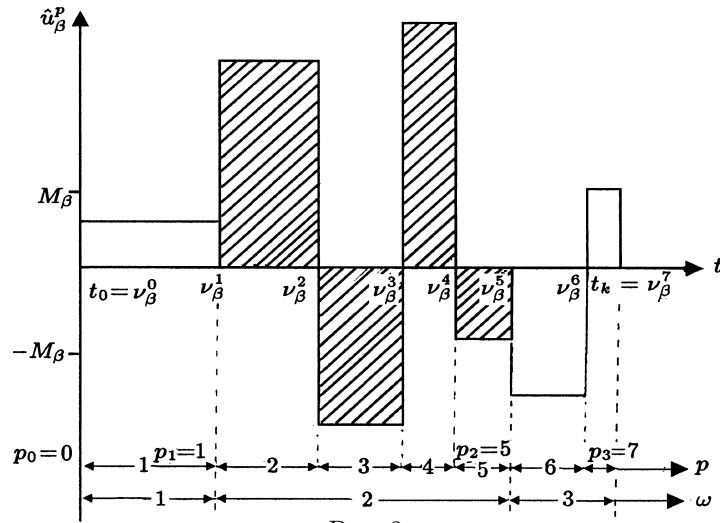


Рис. 2

Примем интервал  $p = k_\mu$  в качестве опорного. Для  $\beta$ -й компоненты легко находим путем пересчета знак оптимального управления на первом интервале и, следовательно, в начальный момент времени  $t_0$ :

$$u_\beta(t_0) = M_\beta \operatorname{sign} \left[ (-1)^{(k_\mu-1)} u_\beta^{k_\mu} \right]. \quad (3.32)$$

Учитывая, что  $u_j(t) = M_j \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$ , а  $\psi(t_0) = \hat{\psi}(t_0) \psi_\alpha(t_0)$ , из (3.32) получаем

$$\operatorname{sign} \psi_\alpha(t_0) \operatorname{sign} [B_j(t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) = \operatorname{sign} \left[ (-1)^{(k_\mu-1)} u_\beta^{k_\mu} \right]. \quad (3.33)$$

Значение  $\hat{\psi}(t_0)$  определено из (3.5). Из (3.33) находим знак  $\psi_\alpha(t_0)$ , а, следовательно, и само начальное условие  $\psi(t_0)$ , так как  $|\psi_\alpha(t_0)| = 1$ . Имеем

$$u_j^\circ(t_0) = M_j \operatorname{sign} [B_j(t_0)]^* \psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.34)$$

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ БЕЗ ВОЗМУЩЕНИЯ

Нетрудно видеть, что реализация финитного управления требует незначительного числа лишь операций умножения и сложения, а следовательно, весьма малого времени на его реализацию. Именно это обстоятельство позволяет обеспечить выполнение ограничения (2.6) и определить в реальном времени оптимальное управление  $u^\circ(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$ . Это управление остается неизменным до момента первого переключения, что позволяет на этом интервале производить вычисление оптимального управления и обеспечивает оптимальность процесса управления, хотя момент первого переключения (и последующие моменты переключений) еще не вычислен. Оптимальность процесса управления может быть нарушена, если управление не будет

вычислено до первого момента переключения, т.е. будет нарушено ограничение (2.6).

Итак, найдено в реальном времени оптимальное управление  $u^\circ(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$ , которое сразу подается на управляемый объект (2.1) и одновременно уже в процессе движения и сопровождения фазовой траектории начинается вычисление моментов переключений оптимального управления и времени перевода объекта в требуемое конечное состояние (начало координат). На рис. 3 приведены оптимальные фазовые траектории движения объекта и модели: 1 – фазовая траектория движения объекта; 2, 3, 4, ... – фазовые траектории движения модели.

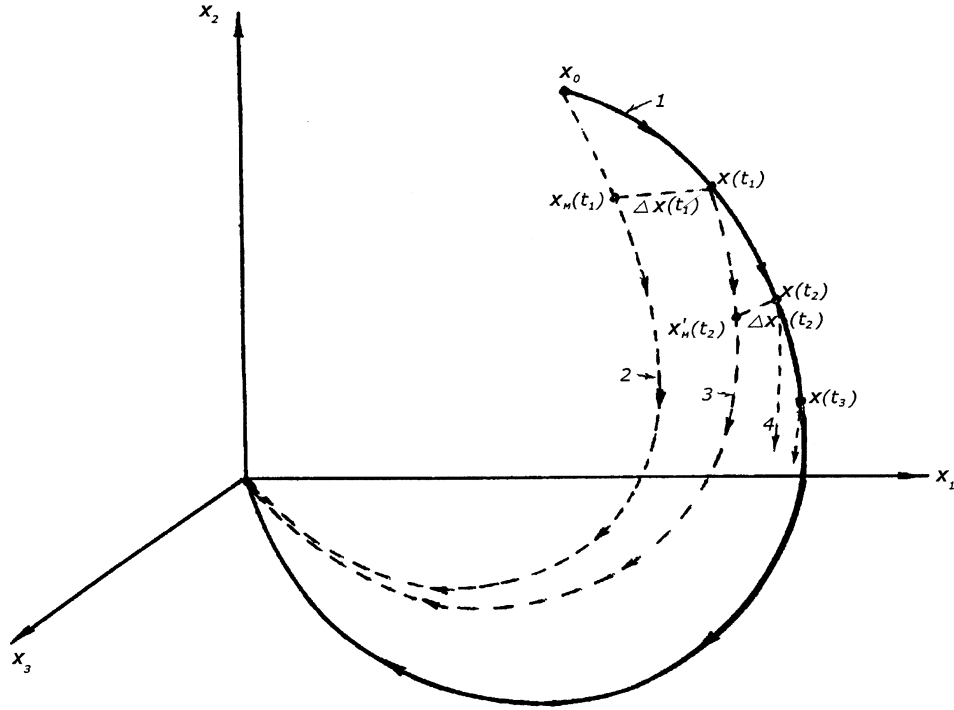


Рис. 3

Вычисление оптимального управления производится поэтапно. На втором этапе находится оптимальное по быстродействию управление линейной системой без возмущения.

**Задача 2.** Найти допустимое управление  $u^\circ(t)$ , переводящее линейную систему (2.3) за минимальное время  $T = t_k - t_0$  из заданного начального состояния  $x_m(t_0) = x_0$  в начало координат  $x_m(t_k) = 0$ .

**4.1. Определение отклонений фазовых координат при вариации моментов переключений.** Выпишем решение уравнения (2.3) в конечный момент времени  $t = t_k$  для кусочно-постоянного управления  $u(t)$ , компоненты которого переключаются в моменты времени  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j}$  (включая начальный момент  $t_0 = \nu_j^0$  и конечный момент  $t_k = \nu_j^{r_j}$  в число переключений для компактной формы записи) и принимают значения  $u_j(t) = u_j^p$ ,  $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ :

$$x_M(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p d\tau.$$

Изменим моменты переключений  $\nu_j^p$  на  $\Delta\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ , а конечный момент  $t_k$  – на  $\Delta t_k$ . Для отклонения фазовых координат  $\Delta\tilde{x}_M(t_k)$  получим выражение

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}_M(t_k) &= \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) [u_j^p - u_j^{p+1}] d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{t_k}^{t_k + \Delta t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^{r_j} d\tau + [\Phi(t_k + \Delta t_k, t_0) - \Phi(t_k, t_0)] x_M(t_0). \end{aligned}$$

Если  $\Delta\nu_j^p$  и  $\Delta t_k$  достаточно малы (а это, как показано ниже, всегда достижимо), то можно записать следующее приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю  $\Delta\nu_j^p$  и  $\Delta t_k$ :

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}_M(t_k) &\cong \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [u_j^p - u_j^{p+1}] \Delta\nu_j^p + \\ &+ \sum_{j=1}^m B_j(t_k) u_j^{r_j} \Delta t_k + A(t_k) \Phi(t_k, t_0) x_0 \Delta t_k. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Корректность записи последнего слагаемого в (4.1) следует из представления  $\Phi(t_k + \Delta t_k, t_0) = \Phi(t_k + \Delta t_k, t_k) \Phi(t_k, t_0)$ . Если принять, что на малом интервале  $t \in [t_k + \Delta t_k, t_k]$  параметры матрицы  $A(t)$  практически постоянны и равны  $A(t_k)$ , то можно записать  $\Phi(t_k + \Delta t_k, t_k) = e^{A(t_k)\Delta t_k}$ . Разложив матрицу  $e^{A(t_k)\Delta t_k} = (E + A(t_k)\Delta t_k)$  в ряд Тейлора и ограничив ряд лишь линейными членами, получим вышеприведенное соотношение.

**4.2. Отклонение фазовых координат при вариации величин управляющих параметров.** Отклонение величины финитного управления от соответствующего предельно допустимого значения при оптимальном управлении для  $j$ -й компоненты на  $p$  интервале составляет

$$\Delta u_j^p = M_j \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi(t) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{Mi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p].$$

Отклонения управляющих параметров  $\Delta u_j^p$  порождают следующие отклонения фазовых координат в конечный момент времени  $t_k$ :

$$\Delta\hat{x}_M(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left\{ M_j \operatorname{sign} [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{Mi}(t_0) \right\} d\tau.$$

При значительном отклонении финитного управления от оптимального необходимо существенное изменение произвольно выбранных моментов переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  и конечного момента  $t_k$ . Однако при



больших отклонениях сходимость вычислительного процесса не гарантируется. Чтобы обеспечить сходимость вычислительного процесса будем выравнивать амплитуды управляющих воздействий не сразу полностью, а постепенно, беря лишь *часть* отклонения.

Пусть на  $p$ -м интервале знакопостоянства отклонение финитного управления от оптимального для  $j$ -й компоненты составляет

$$\Delta u_j^p = M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{mi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j},$$

где  $S_j(p) = \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$ ,  $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ . Возьмем лишь  $\xi$ -ю часть этого отклонения

$$\Delta \hat{u}_j^p = \xi \Delta u_j^p, \quad 0 < \xi \leq 1.$$

Теперь управление будет стремиться не к  $\pm M_j$ , а к промежуточной величине

$$u_j^{\text{пп}} = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{mi}(t_0) + \xi \left[ M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{mi}(t_0) \right].$$

Отклонение фазовых координат, вызванное отклонениями управляющих параметров на величину  $\xi \Delta u_j^p$ , определяется выражением

$$\Delta \hat{x}_m(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \xi \left[ M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{mi}(t_0) \right] d\tau. \quad (4.2)$$

**4.3. Основное уравнение баланса отклонений.** Отклонение  $\Delta \hat{x}_m(t_k)$  (4.2), вызванное отличием управляющих параметров от предельно допустимых значений, должно быть скомпенсировано отклонением фазовых координат  $\Delta \tilde{x}_m(t_k)$  (4.1), порожденным изменением моментов переключений управления и времени перевода системы. Должно выполняться основное уравнение баланса отклонений

$$\Delta \hat{x}_m(t_k) + \Delta \tilde{x}_m(t_k) = 0. \quad (4.3)$$

Подставим в (4.3) выражение (4.1) и (4.2) с  $\xi = 1$ . Получим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[ M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{mi}(t_0) \right] d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) \times \\ & \times B_j(\nu_j^p) \left[ u_j^p - u_j^{p+1} \right] \Delta \nu_j^p + \left[ \sum_{j=1}^m B_j(t_k) u_j^{r_j} + A(t_k) \Phi(t_k, t_0) x_0 \right] \Delta t_k = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В (4.4), во-первых, число неизвестных  $\Delta \nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  и  $\Delta t_k$  может быть не равным числу уравнений. Во-вторых, и это главное, при интегрировании возможно возникновение новых и исключение прежних моментов переключений. Поэтому для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого) необходимо перейти к определению числа и расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. Для этого установим связь между отклонениями  $\Delta \nu_j^p$  моментов переключений и отклонениями

$\Delta\hat{\psi}_i(t_0)$  начальных условий нормированной сопряженной системы. Число последних всегда  $(n - 1)$ . Вместе с  $\Delta t_k$  они образуют  $n$  неизвестных, которые и находим из решения системы  $n$  линейных алгебраических уравнений.

**4.4. Связь между отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы и отклонениями моментов переключений управления.** Для  $j$ -й компоненты вектора управления функция переключений равна нулю в каждый из  $(r_j - 1)$  моментов переключений, т.е. справедливо уравнение

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.5)$$

Изменим  $\hat{\psi}(t_0)$  на  $\Delta\hat{\psi}(t_0)$ . Это порождает изменение  $\nu_j^p$  на  $\Delta\nu_j^p$ :

$$[B_j(\nu_j^p + \Delta\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p + \Delta\nu_j^p, t_0) (\hat{\psi}(t_0) + \Delta\hat{\psi}(t_0)) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\left[ B_j(\nu_j^p) + \Delta\tilde{\nu}_j^p \frac{dB_j(\nu_j^p)}{dt} \right]^* \left[ \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) + \Delta\tilde{\nu}_j^p \frac{d\hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)}{dt} \right] (\hat{\psi}(t_0) + \Delta\hat{\psi}(t_0)) = 0, \\ j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Здесь  $\Delta\tilde{\nu}_j^p$  – диагональная матрица размера  $(n \times n)$  с элементом  $\Delta\nu_j^p$  на диагонали. Учитывая равенство  $\frac{d\hat{\Phi}}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t, t_0)$ , получим

$$\begin{aligned} & [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) + [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \Delta\nu_j^p - [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \times \\ & \times \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \Delta\nu_j^p - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) (\Delta\nu_j^p)^2 + [B_j(\nu_j^p)]^* \times \\ & \times \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta\hat{\psi}(t_0) + [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta\hat{\psi}(t_0) \Delta\nu_j^p - [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \times \\ & \times \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta\hat{\psi}(t_0) \Delta\nu_j^p - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta\hat{\psi}(t_0) (\Delta\nu_j^p)^2 = 0, \\ & j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \end{aligned}$$

Пренебрегая малыми величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (4.5), получим приближенное уравнение, связывающее приращения  $\Delta\hat{\psi}(t_0)$  и  $\Delta\nu_j^p$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) - [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \right\} \Delta\nu_j^p + \\ & + [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta\hat{\psi}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \end{aligned}$$

В результате находим связь между приращениями начальных условий нормированной сопряженной системы и приращениями моментов переключений управления

$$\begin{aligned} \Delta\nu_j^p & \cong \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} \times \\ & \times [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (4.6) имеет простой вид, благодаря простым структурам матриц.

Соотношение (4.6) компактно запишем так:

$$\Delta\nu_j^p \cong \mathfrak{L} \Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.6)'$$

Важно подчеркнуть, что с изменением начальных условий изменяются значения моментов переключений управления и возможно появление новых моментов переключений. Формула (4.6) позволяет находить приращение любого момента переключения на интервале  $[t_0, \infty)$ . Это существенно в случае появления новых моментов переключений при увеличении интервала управления  $[t_0, t_k]$ .

**4.5. Вычисление оптимального по быстродействию управления линейной системой.** Подставив (4.6)' в (4.4) получим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными, которыми являются  $n - 1$  приращение  $\Delta\hat{\psi}(t_0)$  и отклонение  $\Delta t_k$  конечного момента  $t_k$ :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[ M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_{mi}(t_0) \right] d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) \times \\ \times B_j(\nu_j^p) \left[ u_j^p - u_j^{p+1} \right] \xi \Delta\hat{\psi}(t_0) + \left[ \sum_{j=1}^m B_j(t_k) u_j^{r_j} + A(t_k) \Phi(t_k, t_0) x_0 \right] \Delta t_k = 0. \quad (4.7)$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений (4.7) и находим  $\Delta\hat{\psi}(t_0)$  и  $\Delta t_k$ . Определить "малы" или "велики" отклонения  $\Delta\hat{\psi}(t_0)$ ,  $\Delta t_k$  и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Проще это сделать по отклонениям моментов переключений  $\Delta\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ . Если

$$\max_{j,p} \left[ |\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k| \right] \leq \gamma(t_k - t_0), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (4.8)$$

( где  $\gamma$  - задано ), то отклонения достаточно малы и обеспечивается сходимость вычислительного процесса. Значение  $\gamma(t_k - t_0)$  является предельно допустимым, при котором гарантируется сходимость вычислительного процесса. Если (4.8) нарушается, то в качестве искомого приращения принимаем  $\xi \Delta\nu_j^p$ ,  $\xi \Delta\hat{\psi}(t_0)$ ,  $\xi \Delta t_k$ . Регулирующий параметр  $\xi$  вычисляется по формуле

$$\xi = \frac{\gamma(t_k - t_0)}{\max_{j,p} \left[ |\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k| \right]} \quad (4.9)$$

и находим новые значения конечного момента, моментов переключений и начального условия сопряженной системы

$$t_k^{(1)} = t_k + \xi \Delta t_k; \quad \nu_j^{p,(1)} = \nu_j^p + \xi \Delta\nu_j^p; \quad \hat{\psi}^{(1)}(t_0) = \hat{\psi}(t_0) + \xi \Delta\hat{\psi}(t_0). \quad (4.10)$$

В результате максимальное отклонение на этой итерации принимается равным предельно допустимому значению, а остальные значения приращений уменьшаются в  $\xi$  раз. Таким образом, компенсируется на этой итерации не все отклонение  $\Delta\hat{x}_m$ , а лишь его  $\xi$ -я часть. Так постепенно осуществляется выравнивание амплитуд финитного управления до предельных значений  $\pm M_j$  оптимального по быстродействию управления. Процесс вычислений заканчивается, если  $\|x_m(t_k)\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  задано и характеризует точность перехода в начало координат с найденными моментами переключений при предельных значениях управляющих параметров  $u_j = \pm M_j$ .

Доказательство сходимости последовательности финитных управлений к оптимальному по быстродействию управлению приведено в [ 3 ].

**4.6. Выбор начального приближения.** Выбор хорошего начального приближения значительно уменьшает число необходимых итераций и, следовательно, вычислительную трудоемкость метода. Из способа формирования конечного управления следует, что для точек  $x_{mi}^*(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , расположенных на фазовых осях, при выполнении условия  $N_{ij}|x_{mi}^*(t_0)| = M_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , конечное управление совпадает с оптимальным. Для других начальных условий это различие увеличивается. Уменьшить различие в быстродействии можно следующим образом. Разобьем все множество начальных условий  $x_m(t_0) \in X$  на  $k$  подмножеств  $Y_c$ ,  $c = \overline{1, k}$  с различными значениями весовых коэффициентов  $\hat{N}_{ij}^{p,c}$ , моментов переключений и заданного времени перевода  $T_c$  для каждого подмножества, полагая  $T_c < T_{c+1}$ . Весьма просто такое разбиение осуществить совокупностью гиперплоскостей, каждая из которых описывается одним из нижеследующих уравнений при фиксированном  $c$  :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_{mi}(t_0)}{\pm x_{mi}^{(c)}} - 1 = 0, \quad c = \overline{1, k}. \quad (4.11)$$

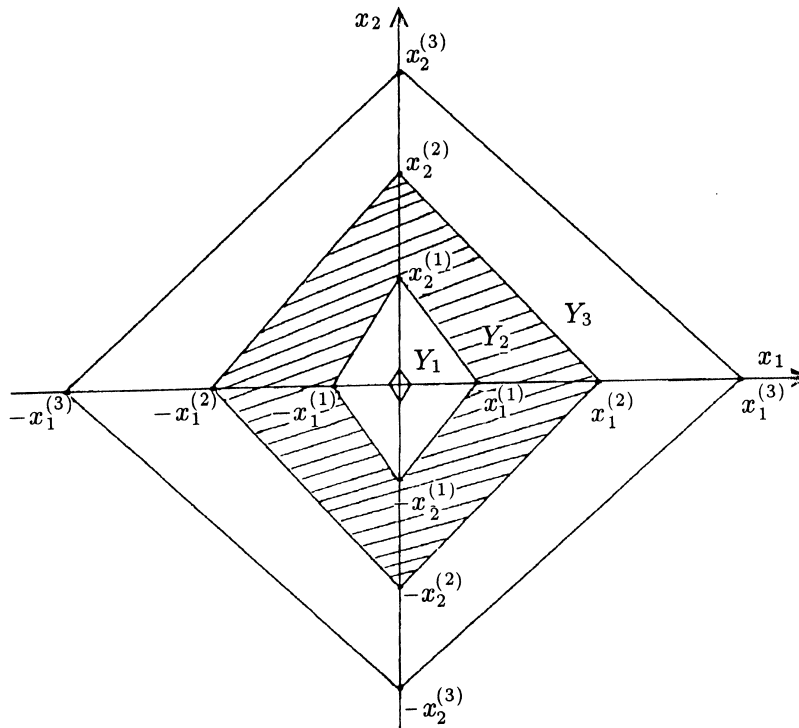


Рис. 4

Здесь  $x_{mi}^{(c)}$  – точки на фазовых осях, переход из которых в начало координат происходит за одинаковые времена  $T_c$ , т.е.  $x_{mi}^{(c)}$  – граничные точки пересечения с осями фазового пространства границ областей достижимости  $D_{T_c}$  за время  $T_c$ . Задача нахождения  $x_{mi}^{(c)}$  является обратной задачей оптимального управления и решается *предварительно до начала процесса управления*. Проведем через  $n$

различных граничных точек, принадлежащих различным фазовым осям, гиперплоскости (4.11). На рис. 4 показано разбиение области начальных условий на ряд подобластей.

Число гиперплоскостей, которые проходят через  $2n$  граничных точек, равно  $2^n$ . Совокупность гиперплоскостей (4.11), ограничивающих часть фазового пространства, может быть описана векторным уравнением

$$P_c x_m(t_0) - I = 0. \quad (4.12)$$

Здесь  $x_m(t_0)$  –  $n$ - мерный вектор начального состояния;  $I$  – единичный вектор-столбец размера  $2^n$ ;  $P_c$  – матрица размера  $2^n \times n$ , составленная из  $2^n$  комбинаций различных значений  $\frac{1}{\pm x_{Mi}^{(c)}}$  по  $n$  в каждой строке. Если выполнено условие

$$P_c x_m(t_0) - I \leq 0, \quad c = \overline{1, k} \quad (4.13)$$

для всех  $2^n$  линейных неравенств, то точка  $x_m(t_0)$  находится внутри (либо на границе в случае равенства) фазового пространства, ограниченного гиперплоскостями (4.11).

Нетрудно видеть, что (4.13) для каждого  $c$  выделяет многогранник, вписанный в множество достижимости  $D_{T_c}$  за время  $T_c$  и имеющий с ним  $2n$  общих граничных точек. Аппроксимация областей достижимости эллипсоидами намного сложнее [ 24 ].

Для выделения подмножества  $Y_c$ , которому принадлежит точка  $x_m(t_0)$  и, следовательно, весовых коэффициентов  $\hat{N}_{ij}^{p,c}$ , времени перевода  $T_c$  и моментов переключений, с которыми формируется финитное управление, нет необходимости в рассмотрении *всех* неравенств (4.13). *Достаточно* рассмотреть предельное соотношение

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c)}} \right| - 1 \leq 0, \quad c = \overline{1, k}. \quad (4.14)$$

Минимальное значение  $c$ , при котором выполняется (4.14), и определяет подмножество  $Y_c$ , принадлежность к которому задается так:

$$Y_c = \left\{ x_m(t_0) : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c)}} \right| - 1 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c-1)}} \right| - 1 > 0 \right\}. \quad (4.15)$$

Если для произвольно выбранного  $c$  выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c)}} \right| - 1 < 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c-1)}} \right| - 1 \leq 0,$$

то это является условием уменьшения  $c$ . Если

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c)}} \right| - 1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c-1)}} \right| - 1 > 0,$$

то это является условием увеличения  $c$ . Процесс выбора  $c$  заканчивается, если

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c)}} \right| - 1 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{Mi}(t_0)}{x_{Mi}^{(c-1)}} \right| - 1 > 0.$$

Так целенаправленно происходит выбор  $c$  и, следовательно,  $\hat{N}_{ij}^{p,c}$ , времени  $T_c$  и соответствующих моментов переключений, с которыми происходит формирование финитного управления для всех точек подмножества  $Y_c$

$$u_j^\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^{p,c} x_{mi}(t_0), \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1,c}, \nu_j^{p,c}]. \quad (4.16)$$

Нетрудно видеть, что каждый раз выделяется многогранник, вписанный в множество достижимости  $D_{T_c}$  за время  $T_c$  и имеющий с ним  $2n$  общих граничных точек. В результате для системы  $n$  порядка имеем  $2nk$  граничных точек, времена перевода из которых совпадают с временами оптимального по быстродействию управления. Поэтому такая конструкция является аппроксимирующей и дает приближенное решение задачи оптимального быстродействия [ 21 ]. Эта процедура позволяет получить хорошее начальное приближение.

Сложность реализации финитного управления (4.16) незначительно увеличивается с ростом порядка управляемой системы и числа управляющих параметров, так как весовые коэффициенты для каждого подмножества  $Y_c$ ,  $c = \overline{1, k}$  вычисляются предварительно до начала процесса управления, а процедура выделения необходимого подмножества сводится к проверке простых неравенств.

Следует отметить, что трудоемкость любого вычислительного метода в теории оптимального управления принято определять числом решений задач Коши, так как они наиболее трудоемки по сравнению с другими операциями и именно операция интегрирования занимает основное время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления. В рассматриваемом методе вычисление оптимального управления сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, которое в отличие от решения задач Коши требует малого времени. Задание хорошего начального приближения значительно уменьшает число необходимых итераций и, следовательно, дополнительно уменьшает время вычислений. Именно эти обстоятельства обеспечивают выполнение ограничения (2.6), которое накладывается на допустимое время вычисления управления и позволяет реализовать оптимальное управление в реальном времени. Нарушение ограничения (2.6) приводит к изменению структуры управления, увеличению времени перевода системы в начало координат и рассматривается в разделе 8.

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

Найдено оптимальное по быстродействию управление, переводящее линейную систему без возмущения (2.3) из заданного начального состояния  $x_m(t_0) = x_0$  в требуемое конечное состояние (начало координат). Управляемый объект (2.1) за время вычисления  $h_1 = t_1 - t_0$  управлением  $u^\circ(t) = u^\circ(t_0)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  переводится в некоторое состояние  $x(t_1)$ . Без возмущения линейная система (2.3) переходит в состояние  $x_m(t_1) = x_{mo}$ , отличное от  $x(t_1)$ . На рис. 5 приведены оптимальные фазовые траектории движения объекта и модели: 1 – фазовая траектория движения объекта; 2, 3, 4, ... – фазовые траектории движения модели.

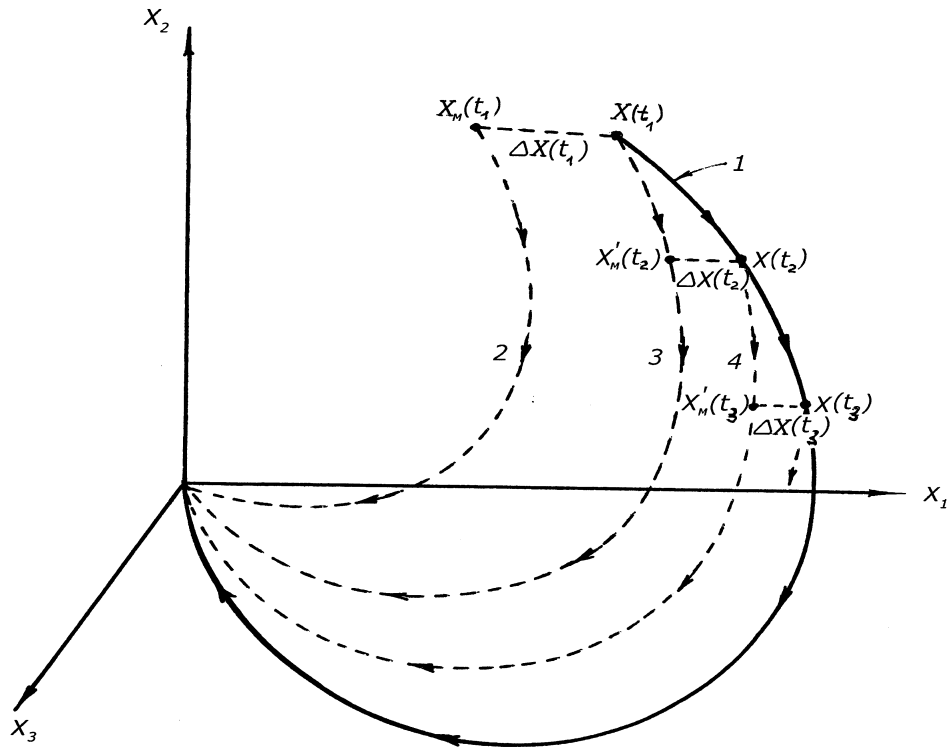


Рис. 5

В результате приходим к следующей задаче.

**Задача 3.** Вычислено оптимальное по быстрдействию управление, переводящее линейную систему без возмущения (2.3) из начального состояния  $x_m(t_1) = x_{m0}$  в начало координат  $x_m(t_k) = 0$ .

Требуется найти допустимое управление, переводящее за минимальное время  $T^{(1)} = t_k^{(1)} - t_1$  линейную систему (2.5) с возмущением  $F_1$  из начального состояния  $x'_m(t_1) = x(t_1)$  в начало координат  $x'_m(t_k^{(1)}) = 0$ .

**5.1. Определение возмущения  $F_i$ .** Так как  $F$  – неизвестное возмущение, то его необходимо *периодически* вычислять в процессе движения системы (2.1). Возмущение  $F$ , действующее на систему, вызывает на интервале  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , отклонение фазовой траектории на величину

$$\Delta x(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau. \quad (5.1)$$

Для определения возмущения измерим в момент  $t = t_i$  значения фазовых координат объекта (2.1) и вычислим  $x_m(t_i)$  для модели объекта (2.3) при одинаковых управлениях. Тогда

$$x(t_i) - x_m(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau. \quad (5.2)$$

Если  $F$  непрерывная ограниченная функция (что предполагается в постановке основной задачи), то справедливо

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau = \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) d\tau \right] F_i, \quad (5.3)$$

где  $F_i$  – среднее значение возмущения на интервале  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ . Из (5.2) имеем

$$F_i = \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) d\tau \right]^{-1} \left[ x(t_i) - x_m(t_i) \right]. \quad (5.4)$$

Если время  $h = t_i - t_{i-1}$  вычисления оптимального управления достаточно мало, то справедливо приближенное выражение

$$F_i \cong \frac{x(t_i) - x_m(t_i)}{h}. \quad (5.5)$$

**5.2. Вариация моментов переключений управления и конечного момента.** Выпишем решение уравнения (2.3) в конечный момент  $t = t_k^{(1)}$  при вычисленном оптимальном управлении  $u^\circ(t)$ ,  $t \in [t_1, t_k^{(1)}]$ , переводящем систему в начало координат  $x(t_k^{(1)}) = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t_k^{(1)}, t_1) x_m(t_1) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ + \sum_{j=1}^m \int_{\nu_j^{r_j-1}}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S(r_j) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Выпишем решение уравнения (2.5) для  $i = 1$  с тем же вычисленным оптимальным управлением  $u^\circ(t)$ ,  $t \in [t_1, t_k^{(1)}]$ , но при другом начальном условии  $x'_m(t_1) = [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)]$ :

$$\begin{aligned} x'_m(t_k^{(1)}) = \Phi(t_k^{(1)}, t_1) [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)] + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ + \sum_{j=1}^m \int_{\nu_j^{r_j-1}}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S(r_j) d\tau + \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) F_1 d\tau, \end{aligned} \quad (5.7)$$



где  $x'_m(t_k^{(1)}) \neq 0$ ,  $\Delta x(t_1) = x(t_1) - x_m(t_1)$ .

Изменим моменты переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  на  $\Delta \nu_j^p$ , а  $t_k^{(1)}$  – на  $\Delta t_k^{(1)}$  так, чтобы система (2.5) переводилась в начало координат:

$$\begin{aligned}
 & \Phi(t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}, t_1) [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)] + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\
 & + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta \nu_j^p} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{\nu_j^{r_j-1}}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S(r_j) d\tau + \\
 & + \sum_{j=1}^m \int_{t_k^{(1)}}^{t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S(r_j) d\tau + \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) F_1 d\tau + \quad (5.8) \\
 & + \int_{t_k^{(1)}}^{t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) F_1 d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Представим первое слагаемое в левой части уравнения (5.8) приближенно следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \Phi(t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}, t_1) [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)] = [E + A(t_k^{(1)}) \Delta t_k^{(1)}] \times \\
 & \times \Phi(t_k^{(1)}, t_1) [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)]. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Корректность приближенного соотношения (5.9) следует из представления  $\Phi(t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}, t_1) = \Phi(t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}, t_k^{(1)}) \Phi(t_k^{(1)}, t_1)$ . Если принять, что на малом интервале  $[t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}, t_k^{(1)}]$  параметры матрицы  $A(t)$  изменяются незначительно, то можно записать  $\Phi(t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}, t_k^{(1)}) = e^{A(t_k^{(1)}) \Delta t_k^{(1)}}$ . Разложив матрицу  $e^{A(t_k^{(1)}) \Delta t_k^{(1)}}$  в ряд Тейлора и ограничив ряд лишь линейными членами, получим приближенное соотношение (5.9).

Подставим (5.9) и (5.6) в (5.8). Получим

$$\begin{aligned}
 & \Phi(t_k^{(1)}, t_1) \Delta x(t_1) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta \nu_j^p} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\
 & + \sum_{j=1}^m \int_{t_k^{(1)}}^{t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) B_j(\tau) M_j S(r_j) d\tau + \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) F_1 d\tau + \quad (5.10) \\
 & + \int_{t_k^{(1)}}^{t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) F_1 d\tau + A(t_k^{(1)}) \Phi(t_k^{(1)}, t_1) [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)] \Delta t_k^{(1)} = 0.
 \end{aligned}$$

Из (5.10) в предположении малости отклонений  $\Delta\nu_j^p$  и  $\Delta t_k^{(1)}$  получаем следующее приближенное уравнение, связывающее отклонения  $\Delta\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  и  $\Delta t_k^{(1)}$  с отклонениями в конечный момент фазовых координат, вызванными изменением начального условия на  $\Delta x(t_1)$  и действием возмущения  $F_1$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t_k^{(1)}, t_1)\Delta x(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) d\tau \right] F_1 + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1)}, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta\nu_j^p + \\ + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1)}) M_j S_j(r_j) + F_1 + A(t_k^{(1)}) \Phi(t_k^{(1)}, t_1) x(t_1) \right\} \Delta t_k^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению числа и расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. Подставив (4.6)' в (5.11), получим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными, которыми являются  $(n-1)$  отклонений  $\Delta\hat{\psi}_i(t_1)$  и отклонение  $\Delta t_k^{(1)}$  конечного момента  $t_k^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t_k^{(1)}, t_1)\Delta x(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) d\tau \right] F_1 + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1)}, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \times \\ \times \mathfrak{L} \Delta\hat{\psi}(t_1) + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1)}) M_j S_j(r_j) + F_1 + A(t_k^{(1)}) \Phi(t_k^{(1)}, t_1) x(t_1) \right\} \times \\ \times \Delta t_k^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Решив (5.12), находим  $\Delta\hat{\psi}(t_1)$  и  $\Delta t_k^{(1)}$ . Определяем из (4.6)  $\Delta\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ . Проверяем выполнение условия (4.8). Если (4.8) не нарушается, то полагаем  $\hat{\psi}^0(t_1) = \hat{\psi}^{(1)}(t_1) + \Delta\hat{\psi}^{(1)}(t_1)$ , и  $t_k^{(1),0} = t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}$ . Эти значения принимаем в качестве *нулевого приближения* в итерационной процедуре нахождения искомого оптимального управления. Решаем систему

$$\begin{aligned} x'_m(t_k^{(1),s}) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1),s}, \nu_j^{p,s}) B_j(\nu_j^{p,s}) M_j S_j(p) \mathfrak{L} \Delta\hat{\psi}^s(t_1) + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1),s}) \times \right. \\ \left. \times M_j S_j(r_j) + F_1 + A(t_k^{(1),s}) \Phi(t_k^{(1),s}, t_1) x(t_1) \right\} \Delta t_k^{(1),s} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

Полагаем  $t_k^{(1),s+1} = t_k^{(1),s} + \Delta t_k^{(1),s}$ ;  $\hat{\psi}^{s+1}(t_1) = \hat{\psi}^s(t_1) + \Delta\hat{\psi}^s(t_1)$ ;  $\nu_j^{p,s+1}(t_1) = \nu_j^{p,s}(t_1) + \Delta\nu_j^{p,s}(t_1)$ . В (5.13)  $x'_m(t_k^{(1),s})$  – решение в конечный момент уравнения (2.5) с уточненными на каждой  $s$  итерации значениями моментов переключений и конечного момента времени. Это отклонение фазовой траектории от начала координат, которое вызвано приближенностью используемых для вычисления соотношений. Отклонения должны быть скомпенсированы в итерационной процедуре соответствующим изменением моментов переключений и конечного момента. Процесс вычислений заканчивается, если  $\|x'_m(t_k^{(1),s})\| \leq \varepsilon$ .

Если (4.8) не выполняется, то для сходимости вычислительного процесса необходимо уменьшить отклонения. Это достигается введением регулирующего параметра  $\rho_1$

$$\rho_1 \leq \frac{\gamma(t_k^{(1)} - t_0)}{\max_{j,p} [|\Delta\nu_j^p|, |\Delta t_k^{(1)}|]}. \quad (5.14)$$

Решаем следующую видоизмененную систему

$$\begin{aligned} \rho_1 \left\{ \Phi(t_k^{(1)}, t_1) \Delta x(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) d\tau \right] F_1 \right\} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1)}, \nu_j^p) \times \\ \times B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \mathfrak{L} \Delta \hat{\psi}(t_1) + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1)}) M_j S_j(r_j) + \rho_1 F_1 + \right. \\ \left. + A(t_k^{(1)}) \Phi(t_k^{(1)}, t_1) [x_m(t_1) + \rho_1 \Delta x(t_1)] \right\} \Delta t_k^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Решив (5.15), находим новые начальные условия сопряженной системы  $\hat{\psi}^{(1)}(t_1) + \Delta \hat{\psi}^{(1)}(t_1)$ , конечный момент  $t_k^{(1)} + \Delta t_k^{(1)}$  и моменты переключений  $\nu_j^p(t_1) + \Delta \nu_j^p(t_1)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ , которые принимаем в качестве *нулевого приближения* в итерационной процедуре компенсации  $\rho_1$  части отклонения  $\Delta x(t_1)$  и  $\rho_1$  части возмущения  $F_1$ :

$$\begin{aligned} x'_m(t_k^{(1),s}) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1),s}, \nu_j^{p,s}(t_1)) B_j(\nu_j^{p,s}(t_1)) M_j S_j(p) \mathfrak{L} \hat{\psi}^s(t_1) + \\ + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1),s}) M_j S_j(r_j) + \rho_1 F_1 + A(t_k^{(1),s}) \Phi(t_k^{(1),s}, t_1) \times \right. \\ \left. \times [x_m(t_1) + \rho_1 \Delta x(t_1)] \right\} \Delta t_k^{(1),s} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

Полагаем  $t_k^{(1),s+1} = t_k^{(1),s} + \Delta t_k^{(1),s}$ ;  $\hat{\psi}^{s+1}(t_1) = \hat{\psi}^s(t_1) + \Delta \hat{\psi}^s(t_1)$ ;  $\nu_j^{p,s+1}(t_1) = \nu_j^{p,s}(t_1) + \Delta \nu_j^{p,s}(t_1)$ . В (5.16)  $x'_m(t_k^{(1),s})$  – решение в конечный момент уравнения

$$\dot{x}'_m = A(t)x'_m + B(t)u^s + \rho_1 F_1, \quad x'_m(t_1) = x_m(t_1) + \rho_1 \Delta x(t_1)$$

с уточненным на каждой  $s$  итерации управлением  $u^s(t)$ . Итерационный процесс вычислений заканчивается, если  $\|x'_m(t_k^{(1),s})\| \leq \varepsilon$ . Затем берем  $\rho_2$  часть от оставшихся отклонения и возмущения и т.д. Так последовательно по *частям* осуществляется компенсация отклонения  $\Delta x(t_1)$  и возмущения  $F_1$ .

Доказательство сходимости вычислительного метода приведено в разделе 7.

6. СОПРОВОЖДЕНИЕ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА И  
КОРРЕКЦИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

За время  $h_2 = t_2 - t_1$  вычисления оптимального управления для линейной системы (2.5) с возмущением  $F_1$ , переводимой из точки  $x(t_1)$ , объект под действием вычисленного к моменту  $t = t_1$  оптимального управления и неизвестного возмущения  $F$  перейдет в точку  $x(t_2)$  (см. рис. 5). На четвертом этапе возникает задача сопровождения фазовой траектории движения объекта и коррекции оптимального управления.

**Задача 4.** Вычислено оптимальное управление, переводящее линейную систему (2.5) с возмущением  $F_1$  из начальной точки  $x'_m(t_2)$  в начало координат  $x'_m(t_k^{(2)}) = 0$ .

Требуется найти оптимальное управление, переводящее линейную систему (2.5) с другим возмущением  $F_2$  из другой начальной точки  $[x'_m(t_2) + \Delta x(t_2)]$  в начало координат  $x'_m(t_k^{(2)}) = 0$ .

**6.1. Основное уравнение связи отклонений.** Основное отличие четвертого этапа от третьего состоит в том, что рассматривается движение с различными возмущениями  $F_1$  и  $F_2$  и различными начальными условиями. Прделав аналогичные третьему этапу выкладки, получим следующее основное уравнение, связывающее отклонения начального условия нормированной сопряженной системы  $\Delta\hat{\psi}(t_2)$  и конечного момента  $\Delta t_k^{(2)}$  с отклонениями фазовых координат

$$\begin{aligned} \Phi(t_k^{(2)}, t_2)\Delta x(t_2) + \left[ \int_{t_2}^{t_k^{(2)}} \Phi(t_k^{(2)}, \tau) d\tau \right] (F_2 - F_1) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(2)}, \nu_j^p(t_2)) \times \\ \times B_j(\nu_j^p(t_2)) M_j S_j(p) \mathcal{L} \Delta\hat{\psi}(t_2) + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(2)}) M_j S_j(r_j) + \right. \\ \left. + F_2 + A(t_k^{(2)}) \Phi(t_k^{(2)}, t_2) x(t_2) \right\} \Delta t_k^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Решив (6.1), находим  $\Delta\hat{\psi}(t_2)$  и  $\Delta t_k^{(2)}$ . Вычисляем по формуле (4.6)  $\Delta\nu_j^p(t_2)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ . Проверяем выполнение условия (4.8). Если (4.8) выполняется, то находим значения  $t_k^{(2)} + \Delta t_k^{(2)}$ ;  $\hat{\psi}(t_2) + \Delta\hat{\psi}(t_2)$ ;  $\nu_j^p(t_2) + \Delta\nu_j^p(t_2)$ , которые принимаем в качестве *начального приближения* в итерационной процедуре поиска оптимального управления. Если (4.8) не выполняется, то компенсируем отклонение фазовых координат по частям.

**6.2. Вычислительный алгоритм.** На отрезке прямой, соединяющем точки  $x'_m(t_i)$  и  $x(t_i)$ , выбираем произвольную точку  $\bar{x}^{(1)} = x'_m(t_i) + \rho_1(x(t_i) - x'_m(t_i))$ ,  $0 < \rho_1 < 1$ . Находим соответствующее этой точке значение возмущения  $\bar{F}^{(1)} = F_{i-1} + \rho_1(F_i - F_{i-1})$ . Решаем систему линейных алгебраических уравнений при  $\alpha = 1$ :

$$\rho_\alpha \left\{ \Phi(t_k^{(i)}, t_i) \Delta x(t_2) + \left[ \int_{t_i}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) d\tau \right] (F_i - F_{i-1}) \right\} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(i)}, \nu_j^p(t_i)) \times$$

$$\begin{aligned} & \times B_j(\nu_j^p(t_i))M_jS_j(p)\mathfrak{L}\Delta\hat{\psi}(t_i) + \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(i)})M_jS_j(r_j) + \right. \\ & \left. + \bar{F}^{(\alpha)} + A(t_k^{(i)})\Phi(t_k^{(i)}, t_i)\bar{x}^{(1)} \right\} \Delta\bar{t}_k^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Находим  $\Delta\hat{\psi}(t_i)$  и  $\Delta\bar{t}_k^{(i)}$ . Так как  $\rho_1$  выбрано произвольно, то произвольны и значения  $\Delta\hat{\psi}(t_i)$ ,  $\Delta\bar{t}_k^{(i)}$ . По формуле (4.6) вычисляем отклонения  $\Delta\bar{\nu}_j^p(t_i)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ . Значение  $\gamma(t_k^{(i)} - t_i)$  является предельно допустимым, при котором гарантируется сходимость вычислительного процесса. Если

$$\max_{j,p} \left[ |\Delta\bar{\nu}_j^p(t_i)|, |\Delta\bar{t}_k^{(i)}| \right] \leq \gamma(t_k^{(i)} - t_i), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (6.3)$$

то отклонения малы и обеспечивается сходимость вычислительного процесса. Если хотя бы одно из вычисленных значений  $|\Delta\bar{\nu}_j^p(t_i)|$ ,  $|\Delta\bar{t}_k^{(i)}|$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  превышает предельно допустимое значение, то отклонения следует уменьшить, т.е. точка  $\bar{x}^{(1)}$  взята "далеко". Если, наоборот, максимальное из вычисленных значений  $|\Delta\bar{\nu}_j^p(t_i)|$ ,  $|\Delta\bar{t}_k^{(i)}|$  меньше предельно допустимого значения, то точка  $\bar{x}^{(1)}$  взята "близко" к точке  $x_m(t_i)$  и процесс движения по отрезку прямой, соединяющему точки  $x_m(t_i)$  и  $x(t_i)$ , будет происходить с малым шагом. Целесообразно двигаться с предельно допустимым значением. Для этого вычисляем параметр

$$\xi_1 = \frac{\gamma(t_k^{(i)} - t_i)}{\max_{j,p} \left[ |\Delta\bar{\nu}_j^p(t_i)|, |\Delta\bar{t}_k^{(i)}| \right]} \quad (6.4)$$

и находим "уточненные" значения отклонений и новые значения конечного момента, моментов переключений, начального условия сопряженной системы

$$\begin{aligned} t_k^1 &= t_k^{(i)} + \xi_1 \Delta\bar{t}_k^{(i)}, \quad \nu_j^{p,1}(t_i) = \nu_j^p(t_i) + \xi_1 \Delta\bar{\nu}_j^p(t_i); \\ \hat{\psi}^1(t_i) &= \hat{\psi}(t_i) + \xi_1 \Delta\hat{\psi}(t_i) \end{aligned} \quad (6.5)$$

и "уточненную" точку  $x^{(1)}$  на отрезке прямой, соединяющем  $x'_m(t_i)$  с  $x(t_i)$ :

$$x^{(1)} = x'_m(t_i) + \xi_1 \rho_1 (x(t_i) - x'_m(t_i)). \quad (6.6)$$

Уточняем соответствующее этой точке возмущение

$$F^{(1)} = F_{i-1} + \xi_1 \rho_1 (F_i - F_{i-1}). \quad (6.7)$$

Эти значения  $t_k^1$ ,  $\nu_j^{p,1}(t_i)$ ,  $\hat{\psi}^1(t_i)$  принимаем в качестве *начального приближения в итерационной процедуре* поиска оптимального по быстродействию управления  $u^{(1)}(t)$ , переводящего линейную систему (2.5) с возмущением  $F^{(1)}$  из точки  $x^{(1)}$  в начало координат. Итерационная процедура нахождения оптимального управления вызвана приближенностью используемых соотношений, в частности, (4.1) и (4.6). Опуская индексацию по начальному моменту времени  $t_i$ , итерационный процесс нахождения оптимального управления осуществляем на основе следующего уравнения

$$x'_m(t_k^s) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^s, \nu_j^{p,s}) B_j(\nu_j^{p,s}) M_j S_j(p) \mathfrak{L} \Delta \hat{\psi}^s(t_i) +$$

$$+ \left\{ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^s) M_j S_j(r_j) + F^{(1)} + A(t_k^s) \Phi(t_k^s, t_i) x^{(1)} \right\} \times \quad (6.8)$$

$$\times \Delta t_k^s = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Полагаем  $t_k^{s+1} = t_k^s + \Delta t_k^s$ ;  $\hat{\psi}^{s+1}(t_i) = \hat{\psi}^s(t_i) + \Delta \hat{\psi}^s(t_i)$ ;  $\nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \Delta \nu_j^{p,s}$ .  
В (6.8)  $x'_m(t_k^s)$  – решение в конечный момент уравнения (2.5)

$$\dot{x}'_m = A(t)x'_m + B(t)u^s + F^{(1)}, \quad x'_m(t_i) = x^{(1)}, \quad (6.9)$$

с уточненным на каждой  $s$  итерации управлением  $u^s(t)$ :

$$x'_m(t_k^s) = \Phi(t_k^s, t_i) x^{(1)} + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1,s}}^{\nu_j^{p,s}} \Phi(t_k^s, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau +$$

$$+ \left[ \int_{t_i}^{t_k^s} \Phi(t_k^s, \tau) d\tau \right] F^{(1)}. \quad (6.10)$$

Итерационный процесс вычислений заканчивается, если  $\|x'_m(t_k^s)\| \leq \varepsilon$ . Затем на отрезке прямой, соединяющем  $x'_m(t_i)$  с  $x(t_i)$ , выбирается точка  $x^{(2)}$  и соответствующее возмущение  $F^{(2)}$ , сразу полагая  $\rho_2 = \xi_1 \rho_1$  и далее проводя дальнейшие уточнения. Для точки  $x^{(2)}$  найденное управление принимается в качестве начального приближения и т.д.

На каждом шаге движения по отрезку прямой осуществляется проверка: достигнута точка  $x(t_i)$  или не достигнута. Для этого достаточно для любой фазовой координаты, например, первой сравнить знаки разности  $(x_1(t_i) - x_1^{(\alpha-1)})$  на  $\alpha - 1$  шаге и  $(x_1(t_i) - x_1^{(\alpha)})$  на  $\alpha$  шаге. Если  $\text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(\alpha-1)}) = \text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(\alpha)})$ , то точка  $x(t_i)$  еще не достигнута и процесс движения по прямой следует продолжить. Если  $\text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(\alpha-1)}) \neq \text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(\alpha)})$ , то точка  $x(t_i)$  уже достигнута и "пройдена", что недопустимо. Точка  $x^{(\alpha)}$  должна совпадать с точкой  $x(t_i)$ , а возмущение  $F^{(\alpha)}$  – с  $F_i$ . Для этого следует принять  $\xi_\alpha \rho_\alpha = 1$ . Находим  $\xi_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha}$  (где  $\rho_\alpha$  целесообразно принять равным  $\xi_{\alpha-1} \rho_{\alpha-1}$ ). Вычисляем значения конечного момента, моментов переключений и начального условия нормированной сопряженной системы

$$t_k^\alpha = t_k^{\alpha-1} + \xi_\alpha \Delta \bar{t}_k; \quad \nu_j^{p,\alpha} = \nu_j^{p,\alpha-1} + \xi_\alpha \Delta \bar{\nu}_j^p;$$

$$\hat{\psi}^\alpha(t_i) = \hat{\psi}^{\alpha-1}(t_i) + \xi_\alpha \Delta \bar{\psi}(t_i). \quad (6.11)$$

Эти значения  $t_k^\alpha, \nu_j^{p,\alpha}, \hat{\psi}^\alpha(t_i)$  принимаем в качестве *начального приближения* в итерационной процедуре поиска *искомого* оптимального по быстродействию управления, переводящего линейную систему с возмущением  $F_i$  из заданного начального состояния  $x(t_i)$  в начало координат.

Доказательство сходимости вычислительного метода дано в разделе 7.

Важно отметить следующее. Основные вычислительные затраты вызваны интегрированием систем дифференциальных уравнений. Поэтому трудоемкость вычислительных методов принято оценивать по затратам на интегрирование (числу решений задач Коши). В рассматриваемом методе нет необходимости в многократном решении задач Коши, которое ведет к большим

вычислительным затратам. Достаточно интегрировать системы дифференциальных уравнений лишь на перемещения конечного момента и моментов переключений. Суммарные затраты на интегрирование в этом случае определяются (при монотонной сходимости, которая достигается при малых отклонениях) суммарными отклонениями первоначально заданных моментов переключений и конечного момента (начальных приближений) от их истинных значений и *не зависят от количества итераций*.

Суммарное количество итераций при движении по отрезку прямой, соединяющему две точки в фазовом пространстве, практически не зависят в широком диапазоне от способа передвижения: чем больше  $\rho$ , тем меньше шагов по прямой, но тем больше итераций на каждом шаге. И наоборот, чем меньше  $\rho$ , тем больше шагов по прямой, но тем меньше число итераций на каждом шаге. Из этого следует: *выбор параметра  $\gamma$  в широком диапазоне не влияет на вычислительную трудоемкость метода*. При его выборе важно лишь, чтобы гарантировалась локальная сходимость метода.

**Замечание 1.** Если  $F = \text{const}$ , то  $F_2 - F_1 = 0$ ,  $\Delta x(t_2) = 0$  и, следовательно,  $\Delta \hat{\psi}(t_2) = 0$  и  $\Delta t_k^{(2)} = 0$ . В процессе сопровождения нет необходимости, так как оптимальное управление вычислено на предыдущем этапе и в дальнейшем остается неизменным.

**Замечание 2.** Если  $F = \text{var}$ , то в процессе сопровождения фазовой траектории движения объекта вычисляется возмущение, измеряются отклонения и корректируются моменты переключений оптимального управления и конечный момент. Фазовое состояние объекта может быть переведено лишь в окрестность начала координат. Погрешность перевода равна  $\Delta x = \Delta F h$ , где  $\Delta F$  – изменение возмущения  $F$  за время  $h$  вычисления оптимального управления. Погрешность перевода может быть уменьшена, если экстраполировать возмущение.

**Замечание 3.** Если  $F = F(x)$ , что характерно для нелинейных систем, и  $F(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то достигим перевод системы в начало координат.

**Замечание 4.** Если  $F \equiv 0$ , то вычисление оптимального управления заканчивается вторым этапом.

## 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕТОДА

Доказательство сходимости метода основано на доказательстве локальной и глобальной сходимости.

**7.1. Локальная сходимость вычислительного метода.** Введем обозначение  $\Delta z^s = (\Delta \hat{\psi}^s(t_i), \Delta t_k^{(i),s})$ , где  $s = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации.

**Теорема 2.** *Существуют такие значения  $\Delta z_*$ , что если  $\|\Delta z^0\| < \|\Delta z_*\|$ , то  $\|\Delta z^{s+1}\| < \|\Delta z^s\|$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  и при некотором конечном  $s = l$  имеем  $\|\Delta z^l\| \leq \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – любое сколь угодно малое наперед заданное число, а последовательность управлений сходится к оптимальному по быстрдействию управлению.*

**Доказательство.** Вариации  $(\Delta\nu_j^p(t_i))$  моментов переключений управления и конечного момента  $(\Delta t_k^{(i)})$  связаны с отклонениями фазовых координат уравнением

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \Phi(t_k^{(i)}, t_i) \Delta x(t_i) + \left[ \int_{t_i}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) d\tau \right] (F_i - F_{i-1}) \right\} + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \times \\ & \times \int_{\nu_j^p(t_i)}^{\nu_j^p(t_i) + \Delta\nu_j^p(t_i)} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{t_k^{(i)}}^{t_k^{(i)} + \Delta t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) \times \\ & \times B_j(\tau) M_j S_j(r_j) d\tau + \left[ F_i + A(t_k^{(i)}) \Phi(t_k^{(i)}, t_i) x(t_i) \right] \Delta t_k^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Обозначим для краткости записи

$$\Delta x^* = \Phi(t_k^{(i)}, t_i) \Delta x(t_i) + \left[ \int_{t_i}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) d\tau \right] (F_i - F_{i-1})$$

и опустим индексацию по времени  $t_i$ , полагая  $\nu_j^p = \nu_j^p(t_i)$ ;  $t_k = t_k^{(i)}$ ;  $\Delta\nu_j^p = \Delta\nu_j^p(t_i)$ .

Так как подинтегральные функции на каждом замкнутом интервале  $[\nu_j^p, \nu_j^p + \Delta\nu_j^p]$  и  $[t_k, t_k + \Delta t_k]$  непрерывны и имеют непрерывные производные, то на основании теоремы о среднем из (7.1) имеем

$$\begin{aligned} & \rho \Delta x^* + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p + \mu_j^p \Delta\nu_j^p) B_j(\nu_j^p + \mu_j^p \Delta\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta\nu_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_k + \mu_j \Delta t_k) \times B_j(t_k + \mu_j \Delta t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k + \\ & + \left[ F_i + A(t_k) \Phi(t_k, t_i) x(t_i) \right] \Delta t_k = 0, \quad 0 < \mu_j^p, \mu_j < 1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Применим теорему Лагранжа о конечном приращении. Получим

$$\begin{aligned} & \rho \Delta x^* + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta\nu_j^p + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p M_j S_j(p) \times \\ & \times \frac{d \left\{ \Phi(t_k, \nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta\nu_j^p) B_j(\nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta\nu_j^p) \right\}}{dt} (\Delta\nu_j^p)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_k) B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k + \sum_{j=1}^m \mu_j M_j S_j(r_j) \times \\ & \times \frac{d \left\{ \Phi(t_k, t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k) B_j(t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k) \right\}}{dt} (\Delta t_k)^2 + \\ & + \left[ F_i + A(t_k) \Phi(t_k, t_i) x(t_i) \right] \Delta t_k = 0, \quad 0 < \mu_j^p, \mu_j < 1; \quad 0 < \Theta_j^p, \Theta_j < 1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Введем обозначения

$$\Delta\nu_j^p = \Delta\tilde{\nu}_j^p + \sigma\nu_j^p; \quad \Delta t_k = \Delta\tilde{t}_k + \sigma t_k. \quad (7.4)$$



Здесь:  $\Delta\nu_j^p$ ,  $\Delta t_k$  – точные (истинные), а  $\Delta\tilde{\nu}_j^p$ ,  $\Delta\tilde{t}_k$  – вычисленные значения отклонений;  $\sigma\nu_j^p$ ,  $\sigma t_k$  – погрешности (ошибки) вычисления отклонений. Значения  $\Delta\tilde{\nu}_j^p$ ,  $\Delta\tilde{t}_k$  определяются из решения системы приближенных линейных алгебраических уравнений (5.11), которая для *вычисленных* значений является *точной*:

$$\begin{aligned} & \rho\Delta x^* + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta\tilde{\nu}_j^p + \\ & + \left[ \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) + A(t_k) \Phi(t_k, t_i) x(t_i) + F_i \right] \Delta\tilde{t}_k = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Подставив (7.4) в (7.3) и, учитывая (7.5) и что  $\Phi(t_k, t_k) = I$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \sigma\nu_j^p + \left[ \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) + A(t_k) \Phi(t_k, t_i) x(t_i) + \right. \\ & \left. + F_i \right] \sigma t_k + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p M_j S_j(p) \frac{dR_j^p(t_k, \nu_j^p)}{dt} (\Delta\nu_j^p)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \mu_j M_j S_j(r_j) \frac{dR_j(t_k, t_k)}{dt} (\Delta t_k)^2 = 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где для сокращения записи использованы обозначения

$$\begin{aligned} R_j^p(t_k, \nu_j^p) &= \Phi(t_k, \nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta\nu_j^p) B_j(\nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta\nu_j^p), \\ R_j(t_k, t_k) &= \Phi(t_k, t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k) B_j(t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k). \end{aligned}$$

Для доказательства сходимости вычислительного процесса важно следующее положение: *погрешности  $\sigma\nu_j^p$ ,  $\sigma t_k$ , полученные на  $s$ -й итерации, являются точными (истинными) значениями отклонений для  $(s+1)$ -й итерации, т.е.*

$$\sigma\nu_j^{p,s} = \Delta\nu_j^{p,s+1}, \quad \sigma t_k^s = \Delta t_k^{s+1}. \quad (7.7)$$

Подставив (7.7) в (7.6), получим уравнение, связывающее отклонения на  $s$ -й и  $(s+1)$ -й итерациях:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^s, \nu_j^{p,s}) B_j(\nu_j^{p,s}) M_j S_j(p) \Delta\nu_j^{p,s+1} + \left[ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^s) M_j S_j(r_j) + \right. \\ & \left. + A(t_k^s) \Phi(t_k^s, t_i) x(t_i) + F_i \right] \Delta t_k^{s+1} = -2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p M_j S_j(p) \frac{dR_j^p(t_k^s, \nu_j^{p,s})}{dt} \times \\ & \times (\Delta\nu_j^{p,s})^2 - \sum_{j=1}^m \mu_j M_j S_j(r_j) \frac{dR_j(t_k^s, t_k^s)}{dt} (\Delta t_k^s)^2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Подставим (4.6)' в (7.8) и получим уравнение, которое связывает отклонение начального условия нормированной сопряженной системы  $\Delta\hat{\psi}(t_i)$  и отклонение  $\Delta t_k$  конечного момента на  $s$  и  $s+1$  итерациях

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^s, \nu_j^{p,s}) B_j(\nu_j^{p,s}) M_j S_j(p) \mathfrak{L} \Delta\hat{\psi}^{s+1}(t_i) + \left[ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^s) M_j S_j(r_j) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A(t_k^s) \Phi(t_k^s, t_i) x(t_i) + F_i \Big] \Delta t_k^{s+1} = -2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p M_j S_j(p) \frac{dR_j^p(t_k^s, \nu_j^{p,s})}{dt} \times \quad (7.9) \\
& \times \mathcal{L}^2 \{ \Delta \hat{\psi}^s(t_i) \} \Delta \hat{\psi}^s(t_i) - \sum_{j=1}^m \mu_j M_j S_j(r_j) \frac{dR_j(t_k^s, t_k^s)}{dt} (\Delta t_k^s)^2.
\end{aligned}$$

Здесь  $\{ \Delta \hat{\psi}^s(t_i) \}$  – диагональная матрица  $(n-1) \times (n-1)$  с элементами  $\Delta \hat{\psi}_\alpha^s(t_i)$  на диагонали;  $\Delta \hat{\psi}^s(t_i)$  –  $(n-1)$ -мерный вектор-столбец с элементами  $\Delta \hat{\psi}_\alpha^s(t_i)$ . Для компактной записи используем обозначение  $\Delta z = (\Delta \hat{\psi}(t_i), \Delta t_k)$ . В результате уравнение (7.9) может быть представлено в следующем виде

$$\Delta z^{s+1} = \mathcal{D}(t_k^s, \nu_j^{p,s}) \{ \Delta z^s \} \Delta z^s. \quad (7.10)$$

Здесь  $\Delta z^s$  –  $n$ -мерный вектор-столбец, компонентами которого являются  $\Delta \hat{\psi}(t_i^s)$  и  $\Delta t_k^s$ ;  $\{ \Delta z^s \}$  – диагональная матрица  $(n \times n)$  с вышеуказанными элементами на диагонали;  $\mathcal{D}(t_k^s, \nu_j^{p,s})$  – матрица размера  $(n \times n)$ .

Из (7.10) непосредственно следует, что в силу *квадратичной* зависимости существуют такие значения  $\Delta z_*$ , что, если  $\| \Delta z^0 \| < \| \Delta z_* \|$ , то  $\| \Delta z^{s+1} \| < \| \Delta z^s \|$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ . Значения  $\| \Delta z \|$  убывают на каждой итерации и, следовательно, существует такой конечный номер итерации  $s = l$ , на которой  $\| \Delta z^l \| \leq \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – любое сколь угодно малое наперед заданное число.

Значение  $\Delta z^0$  (“нулевое” приближение) выбирается по нашему усмотрению и поэтому может быть выбрано такое значение, что  $\| \Delta z^0 \| < \| \Delta z_* \|$ . Действительно, из (6.2) непосредственно следует, что если устремить  $\rho \rightarrow 0$ , то  $\Delta \hat{\psi}(t_i) \rightarrow 0$  и  $\Delta t_k^{(i)} \rightarrow 0$ , т.е.  $\Delta z \rightarrow 0$ . Поэтому выбором параметра  $\rho$  регулируется выбор  $\Delta z^0$  и может быть выбрано  $\| \Delta z^0 \| < \| \Delta z_* \|$ . В этом случае гарантируется сходимость вычислительного процесса, т.е. последовательность управлений сходится к такому управлению, которое переводит линейную систему из заданного начального состояния с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon$  в начало координат. Это управление и есть оптимальное по быстродействию управление, так как управляющие параметры вычисленного управления являются кусочно-постоянными функциями с предельными значениями  $\pm M_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , а моменты переключений задаются сопряженной системой.

Оптимальное управление может быть единственным и не единственным. Оптимальное по быстродействию управление линейной системой единственно, если: 1) начало координат области управления является ее внутренней точкой; 2) выполнено условие общности положения [ 1 ]. При принятых ограничениях (2.2) на управляющие параметры начало координат области управления является ее внутренней точкой. Первое условие выполнено. Условие общности положения при рассматриваемых параллелепипедных ограничениях (2.2) адекватно условию покомпонентной полной управляемости. В данной работе предполагается выполнение менее жесткого условия полной управляемости (2.4), т.е. достаточно выполнения условия управляемости хотя бы для одной компоненты. В случае скалярного управления условия общности положения и полной управляемости совпадают. В силу единственности оптимального управления в этом случае следует, что последовательность управлений сходится с заданной точностью к оптимальному по быстродействию управлению. В случае векторного управления, если оптимальное управление не единственно, то

последовательность управлений сходится к одному из оптимальных управлений.

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Так как  $\Delta z^{s+1} = \sigma z^s$ , то имеем адекватное достаточное условие сходимости вычислительного процесса

$$\|\sigma z^s\| < \|\Delta z^s\|, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.11)$$

т.е. норма ошибки (погрешности) вычисления должна быть меньше нормы истинного (точного) значения отклонения.

**Следствие 2.** Радиус сходимости по отклонениям  $\Delta z$  с квадратичной скоростью сходимости равен

$$R_{\text{сх}} = \|\Delta z_*\|. \quad (7.12)$$

**7.2. Глобальная сходимость вычислительного метода.** Итак, вычислено оптимальное по быстродействию управление  $u^{(i)}(t)$ ,  $t \in [t_i, t_k^{(i)}]$ , переводящее линейную систему (2.5) с возмущением  $F_{i-1}$  из точки  $x'_m(t_i)$  в начало координат  $x'_m(t_k^{(i)}) = 0$ . Необходимо найти оптимальное управление  $u^{(i)}(t)$ ,  $t \in [t_i, t_k^{(i)} + \Delta t_k^{(i)}]$ , переводящее линейную систему (2.5) с другим возмущением  $F_i$  из другой начальной точки  $x(t_i)$  в начало координат  $x'_m(t_k^{(i)} + \Delta t_k^{(i)}) = 0$ .

Возьмем некоторую точку  $x^{(1)} = x'_m(t_i) + \rho_1(x(t_i) - x'_m(t_i))$ ,  $0 < \rho_1 < 1$ , лежащую *вблизи* точки  $x'_m(t_i)$  на отрезке прямой, соединяющем точку  $x'_m(t_i)$  с точкой  $x(t_i)$ , для которой необходимо найти оптимальное управление. В этой промежуточной точке  $x^{(1)}$  на линейную систему (2.5) действует промежуточное возмущение  $F^{(1)} = F_{i-1} + \rho_1(F_i - F_{i-1})$ . Так как точка  $x^{(1)}$  выбрана *вблизи* точки  $x'_m(t_i)$  и приращение возмущения достаточно мало (что достигается выбором параметра  $\rho_1$ ), то мало значение  $\rho_1 \Delta x$  в уравнении (6.2) и, следовательно, малы отклонения  $\Delta \hat{\psi}(t_i)$ ,  $\Delta t_k^{(i)}$  (т.е.  $\Delta z^\circ$ ), получаемые из решения уравнения (6.2). Следовательно, выбором  $\rho_1$  обеспечивается условие  $\|\Delta z^\circ\| < \|\Delta z_*\|$  и достигается локальная сходимость. В результате через несколько итераций находится оптимальное по быстродействию управление, переводящее линейную систему (2.5) из промежуточной точки с промежуточным возмущением в начало координат. Затем берем следующую промежуточную точку  $x^{(2)} = x^{(1)} + \rho_2(x(t_i) - x^{(1)})$ ,  $0 < \rho_2 < 1$ , лежащую *вблизи* точки  $x^{(1)}$  на отрезке прямой, соединяющем точки  $x^{(1)}$  и  $x(t_i)$ . Берем новое промежуточное возмущение  $F^{(2)} = F^{(1)} + \rho_2(F_i - F^{(1)})$  и находим оптимальное по быстродействию управление, переводящее линейную систему (2.5) из второй промежуточной точки с вторым промежуточным возмущением в начало координат и т.д.

Так последовательно продвигаясь по отрезку прямой, соединяющему точки  $x'_m(t_i)$  и  $x(t_i)$ , находим оптимальное по быстродействию управление, переводящее линейную систему (2.5) с возмущением  $F_i$  из точки  $x(t_i)$ . Это вычисленное оптимальное управление в момент  $t_{i+1} = t_i + h_i$  подается на объект (2.1). Такое продвижение возможно, если *любая* точка на отрезке прямой, соединяющей точки  $x'_m(t_i)$  и  $x(t_i)$ , принадлежит области управляемости. Для линейной системы область управляемости  $V$  является выпуклой, если выпукла область

управления  $U$ . При ограничениях (2.2) область управления выпукла и, следовательно, выпукла область управляемости. Точки  $x_m(t_i)$  и  $x(t_i)$  по определению принадлежат области управляемости (см. (2.1) и (2.3)). Следовательно, любая точка на отрезке прямой, соединяющем  $x_m(t_i)$  с  $x(t_i)$ , принадлежит области управляемости. В результате для любой точки области управляемости находится оптимальное по быстродействию управление и, следовательно, вычислительный метод обладает глобальной сходимостью.

#### 8. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ

Если число моментов переключений по всем компонентам вектора управления больше  $n - 1$ , то пройденные моменты переключений ( $\nu_j^p \leq t_i$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - q_j}$ ) исключаются из рассмотрения, а оставшиеся – перенумеровываются. Если число оставшихся переключений  $\sum_{j=1}^m q_j = n - 1$  и в процессе вычисления оптимального управления на некотором интервале  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  в момент  $t_* \in [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  должно по расчетам произойти теперь первое переключение  $\beta$  компоненты, т.е.  $\nu_\beta^1 = t_*$ , то в момент  $t_*$  переключаем  $\beta$  компоненту вектора управления. Проверяем в момент  $t_\alpha$  корректность переключения управления в момент  $t_*$ , так как на интервале  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  проводились вычисления и уточнения моментов переключений и конечного момента. Возможны три случая: 1)  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha) = 0$ ; 2)  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha) > 0$ ; 3)  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha) < 0$ .

Если  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha) = 0$ , то изображающая точка принадлежит  $(n - 1)$ -мерному многообразию переключений  $\sigma^{(n-1)}$ . Это множество точек пространства  $X$ , из которого переход в начало координат линейной системы при  $F \equiv 0$  достигается за  $n - 1$  интервалов постоянства оптимального управления.

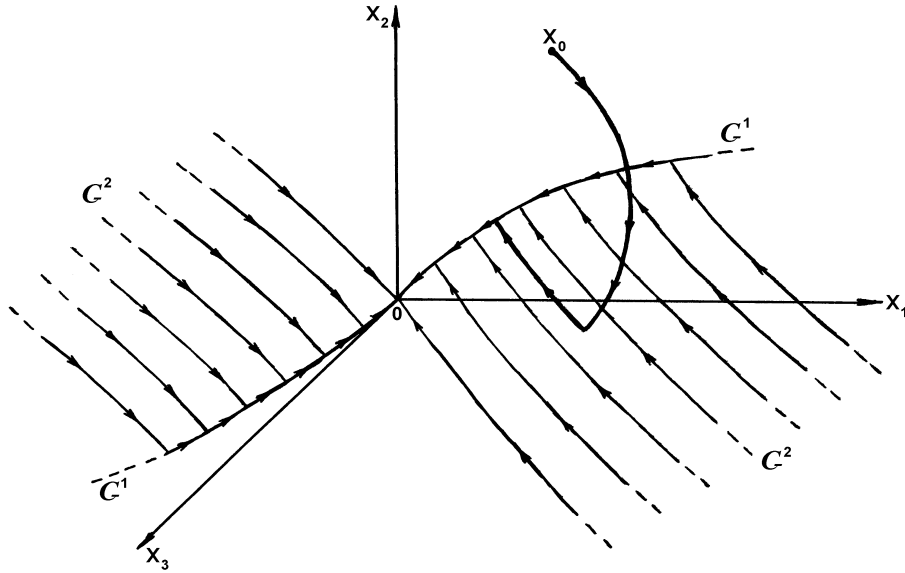


Рис. 6

Если  $F \equiv 0$ , то изображающая точка линейной системы попав на многообразии  $\sigma^{(n-1)}$  последовательно движется вначале по  $(n-1)$ -мерному многообразию  $\sigma^{(n-1)}$ , затем достигнув второго момента после переключения управления движется по многообразию  $\sigma^{(n-2)}$  и т.д. и, наконец, по  $\sigma^{(1)}$ .

Это линия переключения, достигнув которой управление переключается последний раз и дальнейшее движение по линии переключения в начало координат происходит уже без переключений. На рис. 6 показан фрагмент многообразий переключений и фазовая траектория движения системы без возмущений.

Однако при наличии возмущения движение по многообразиям переключений невозможно. Если  $F \neq 0$ , то характер движения *принципиально* иной. Действие возмущения на систему при ее попадании на  $(n-1)$ -мерное многообразие  $\sigma^{(n-1)}$  приводит к отклонению от многообразия и  $\Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha}) \leq 0$ .

Если  $\Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha}) > 0$ , то это означает, что изображающая точка под действием возмущения  $F_{\alpha}$  отклонилась в прежнее подпространство  $Y_1$  пространства  $X$  (которое многообразие  $\sigma^{(n-1)}$  разделяет на два подпространства  $Y_1$  и  $Y_2$ ), т.е. переключение было произведено преждевременно и следует вернуться к прежней структуре управления. В момент  $t = t_{\alpha}$  подаем на систему (2.1) в течение времени  $[t_{\alpha}, t_{\alpha} + \Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha})]$  управление прежнего знака, которое было до переключения в момент  $t_*$ , и переключаем управление в момент  $t_{\alpha} + \Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha})$  :

$$u_{\beta}(t) = \begin{cases} u_{\beta}(t_{\alpha-1}), & t \in [t_{\alpha}, t_{\alpha} + \Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha})], \\ -u_{\beta}(t_{\alpha-1}), & t \in [t_{\alpha} + \Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha}), t_{\alpha+1}]. \end{cases}$$

Возникает скользящий режим, показанный на рис. 7.

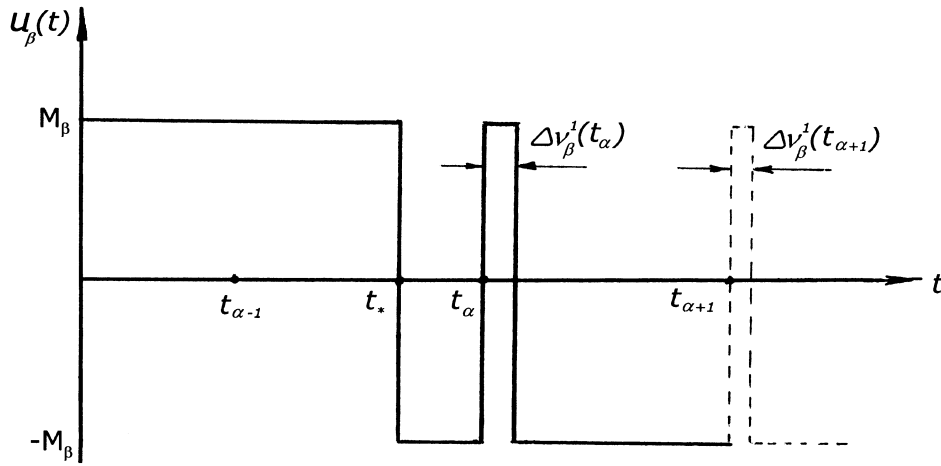


Рис. 7

Если  $\Delta\nu_{\beta}^1(t_{\alpha}) < 0$ , то это означает, что момент переключения следует сдвинуть влево по оси времени от момента  $t_{\alpha}$ , что физически не реализуемо. Переключение произведено с запаздыванием. Фазовая траектория пересекла многообразие  $\sigma^{(n-1)}$  и изображающая точка перешла в подпространство  $Y_2 \subset X$ , из которого возможен перевод системы в начало координат оптимальным управлением с  $n$  интервалами постоянства. В случае скалярного управления

пристраиваем на правом конце управления короткий интервал длительности  $\Delta\nu^1(t_\alpha)$  соответствующей полярности. Полагаем момент  $t_k^{(\alpha)}$  последним моментом переключения управления, а момент  $(t_k^{(\alpha)} + \Delta\nu^1(t_\alpha))$  – новым конечным моментом и переобозначаем моменты переключений. Имеем  $n$  интервалов знакопостоянства управления. На рис. 8 показано изменение структуры оптимального управления.

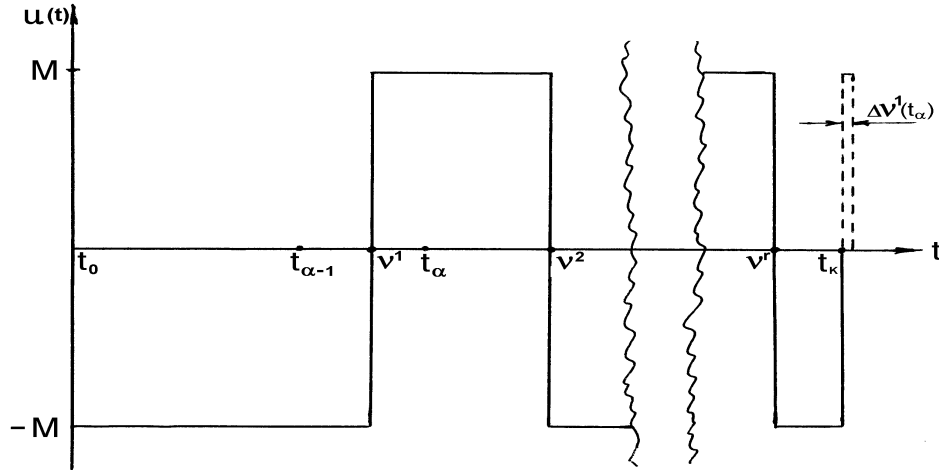


Рис. 8

В случае векторного управления определяем последовательность переключений компонент (учитывая и ранее исключенные переключения). Компоненты вектора оптимального управления в силу вращения вектора сопряженной системы циклически переключаются по вершинам параллелепипеда  $U$  (2.2), являющегося областью управления. Определяем компоненту, имеющую последний момент переключения. Пристраиваем на правом конце следующей (по порядку переключений) компоненте вектора управления короткий интервал знакопостоянства длительности  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha)$ .

Таким образом, информация о том, в каком подпространстве пространства  $X$ , разделенном многообразием  $\sigma^{(n-1)}$ , находится изображающая точка содержится в знаке отклонения  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha)$ , а информация о величине отклонения от многообразия  $\sigma^{(n-1)}$  – в величине  $|\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha)|$ . Если  $|\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha)|$  уменьшается, то изображающая точка приближается к многообразию переключений  $\sigma^{(n-1)}$ . Если  $|\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha)|$  увеличивается, то изображающая точка удаляется от многообразия  $\sigma^{(n-1)}$ . В любом случае при  $\Delta\nu_\beta^1(t_\alpha) \leq 0$  изображающая точка находится в пространстве, из которого перевод системы в начало координат возможен только за  $n$  интервалов знакопостоянства оптимального управления.

При переходе к измененной структуре оптимального управления информация о положении изображающей точки относительно многообразия переключений  $\sigma^{(n-1)}$  содержится в длительности последнего (пристроенного) интервала

знакопостоянства (через один шаг вычислений, когда уточнена его длительность). Если изображающая точка удаляется от многообразия  $\sigma^{(n-1)}$ , то длительность последнего интервала увеличивается. Если приближается к многообразию  $\sigma^{(n-1)}$  (что возможно в силу произвольного характера неизвестного возмущения  $F$ ), то длительность последнего интервала уменьшается и становится равной нулю при попадании изображающей точки на многообразие  $\sigma^{(n-1)}$ . Если фазовая траектория пересекает многообразие  $\sigma^{(n-1)}$  (т.е.  $t_k < \nu^{n-1}$ ), то изображающая точка возвращается в прежнее подпространство  $Y_1$  пространства  $X$  и структура оптимального управления должна принять первоначальный вид.

Итак, изображающая точка под действием оптимального управления и возмущения  $F$  движется в окрестности многообразия  $\sigma^{(n-1)}$ . Приближение к многообразию  $\sigma^{(n-2)}$  характеризуется *сближением* текущего момента времени одновременно уже с двумя моментами переключений, к  $\sigma^{(n-3)}$  – одновременно с тремя моментами переключений управления и т.д. Происходит *сближение* моментов переключений и *сжатие* времени перевода при приближении изображающей точки к началу координат, но сохраняются  $n$  интервалов знакопостоянства оптимального управления.

Важно отметить, что при переходе к измененной структуре оптимального управления решение сопряженной системы претерпевает разрыв первого рода в момент  $t = t_\alpha$ , т.е. по начальным условиям. Разрывность решения сопряженной системы, частое обращение при синтезе к процедуре изменения структуры оптимального управления, возникновение скользящего режима делают невозможным применение известных методов вычисления программного оптимального управления и потребовали разработки нового метода.

Следует подчеркнуть, что наличие разрывов решения сопряженной системы не входит в противоречие с условием Вейерштрасса-Эрдмана о непрерывности решения сопряженной системы, так как ранее рассматривались системы без возмущений. Сопряженная система действительно не претерпевает разрывов и непрерывна, если  $F \equiv 0$ .

Важно также отметить, что несмотря на приближенное задание моментов переключений и конечного момента при переходе к новой структуре управления сохраняется оптимальность управления. Действительно, при синтезе оптимального управления важно лишь знать точно управление в каждый текущий момент времени, а конечный момент и моменты переключений многократно изменяются при движении системы с возмущением. Оптимальное управление в каждый текущий момент известно точно. Достоинством рассматриваемого метода последовательного синтеза является наличие дополнительно информации о структуре оптимального управления, числе и расположении моментов переключений, времени перевода системы в требуемое конечное состояние.

Выше было отмечено, что одной из причин запаздывания в переключении управления и перехода к новой структуре оптимального управления является действие на систему возмущения. Другой причиной запаздывания в переключении управления и перехода к новой структуре оптимального управления является нарушение ограничения (2.6). Если (2.6) выполняется, то структура оптимального управления и время перевода в начало координат совпадают со

структурой и временем перевода программного оптимального по быстродействию управления в задаче линейного быстродействия с фиксированным левым концом. Если ограничение (2.6) нарушается, т.е. время ( $h$ ), затраченное на вычисление оптимального управления, больше времени до момента первого переключения управления, то переходим к новой структуре управления, отличной от программного оптимального управления. Увеличивается время перевода системы в начало координат, но это неизбежная плата за нарушения ограничения (2.6). Работоспособность алгоритма управления не нарушается и достигается перевод системы в требуемое конечное состояние даже при нарушении ограничения (2.6). Если увеличить быстродействие вычислительного устройства (т.е. уменьшить  $h$ ), то можно избежать нарушения ограничения (2.6). Поэтому исходную задачу можно трактовать так: найти допустимое управление, переводящее при сопровождении фазовой траектории движения системы (2.1) в требуемое конечное состояние за минимально возможное время при заданной мощности вычислительного устройства.

### 9. ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Выпишем по шагам итерационный алгоритм вычисления оптимального управления.

**Шаг 1.** Полагаем  $c_0 = k/2$  и находим минимальное значение  $c$ , при котором выполняются неравенства (4.15). Выделяем подмножество  $Y_c$  и соответствующие ему весовые коэффициенты  $\hat{N}_{ij}^{p,c}$ , время перевода  $T_c$ , моменты переключений  $\nu_j^{p,c}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ , начальное условие сопряженной системы  $\psi(t_0)$  и значения интегральных выражений. Формируем по формуле (4.16) финитное управление для заданного начального условия  $x(t_0)$ . Находим по формуле (3.9) опорную последовательность, а по (3.10) – опорный интервал. Определяем по формуле (3.12) оптимальное управление  $u^0(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$  и подаем его на объект (2.1). Переходим к Шагу 2.

**Шаг 2.** Решаем систему линейных алгебраических уравнений (4.7) и находим отклонения  $\Delta\hat{\psi}(t_0)$  и  $\Delta t_k$ . По формуле (4.6) вычисляем отклонения моментов переключений  $\Delta\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  и проверяем выполнение условия (4.8). Если условие (4.8) выполняется, то находим новые значения  $t_k^{(1)}$ ,  $\nu_j^{p,1}$ ,  $\hat{\psi}^{(1)}(t_0)$  по формуле (4.10) при  $\xi = 1$ . Если (4.8) не выполняется, то вычисляем по формуле (4.9) регулирующий параметр  $\xi$  и с ним находим из (4.10) новые значения искомых параметров. Переходим к Шагу 3.

**Шаг 3.** Интегрируем матричное дифференциальное уравнение (3.3) на интервалах перемещения моментов переключений  $\Delta\nu_j^p$  и конечного момента  $\Delta t_k$  и запоминаем интегральные выражения. Если  $\|x_m(t_k)\| > \varepsilon$ , то решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.8) и находим для новых моментов переключений и конечного момента новые значения весовых коэффициентов  $\hat{N}_{ij}^p$ . Формируем по формуле (3.6) новое финитное управление и переходим к Шагу 2. Если  $\|x_m(t_k)\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  задано ( $\varepsilon \ll 1$ ), то процесс вычислений на Шаге 3 заканчивается. Найдено оптимальное управление для линейной системы без возмущения (2.3). Переходим к Шагу 4.

Если на интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  по расчету должно произойти переключение  $\beta$  компоненты вектора управления, то переключаем управление. Если  $\Delta\nu_\beta^1(t_{i+1}) < 0$ , то возникает скользящий режим. Если  $\Delta\nu_\beta^1(t_{i+1}) > 0$ ,



то переходим к измененной структуре оптимального управления, переобозначаем моменты переключений и продолжаем процесс сопровождения фазовой траектории движения объекта.

**Шаг 4.** Измеряем значение  $x(t_1)$  и вычисляем  $x_m(t_1)$ . Определяем из (5.4) среднее значение возмущения  $F_1$  на интервале  $t \in [t_0, t_1]$ . Определяем из (4.6)

$\Delta \nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ . Проверяем выполнение условия (4.8). Если (4.8) выполняется, то многократно последовательно решаем систему (5.13) и уточняем моменты переключений  $\nu_j^p$ , конечный момент  $t_k$  и начальное условие  $\hat{\psi}(t_1)$ . Интегрируем матричное дифференциальное уравнение (3.3) на интервалах перемещения моментов переключений  $\Delta \nu_j^p$  и конечного момента  $\Delta t_k^{(1)}$  и запоминаем интегральные выражения. Если  $\|x'_m(t_k^{(1)})\| > \varepsilon$ , то снова решаем систему линейных алгебраических уравнений (5.13) и уточняем начальное условие  $\hat{\psi}(t_1)$ , конечный момент  $t_k$  и моменты переключений  $\nu_j^p$ . Если  $\|x'_m(t_k^{(1)})\| \leq \varepsilon$ , то процесс вычислений на Шаге 4 заканчивается. Найдено оптимальное управление для линейной системы с возмущением и переходим к сопровождению фазовой траектории движения объекта (2.1). Переходим к Шагу 6. Если (4.8) не выполняется, то переходим к Шагу 5.

**Шаг 5.** Если (4.8) не выполняется, то из соотношения (5.14) выбираем регулирующий параметр  $\rho_1$  и решаем систему линейных алгебраических уравнений (6.2) при  $\alpha = 1$  и  $i = 1$ , полагая  $F_0 = 0$ . Находим  $\Delta \hat{\psi}(t_1)$  и  $\Delta \bar{t}_k^{(1)}$ . По формуле (6.4) вычисляем параметр  $\xi_1$  и по формулам (6.5) находим уточненные значения  $t_k^1$ ,  $\nu_j^{p,1}(t_1)$ ,  $\hat{\psi}^1(t_1)$ . По формуле (6.6) находим уточненную точку  $x^{(1)}$ , а по формуле (6.7) - соответствующее этой точке возмущение  $F^{(1)}$ . Найденные на Шаге 5 значения принимаем в качестве начального приближения в итерационной процедуре поиска оптимального управления, переводящего систему (2.5) с возмущением  $F^{(1)}$  из точки  $x^{(1)}$  в начало координат. Переходим к Шагу 6.

**Шаг 6.** Решаем систему линейных алгебраических уравнений (6.8) и находим  $\Delta \hat{\psi}^1(t_1)$  и  $\Delta t_k^1$ . По формуле (4.6) вычисляем  $\Delta \nu_j^{p,1}(t_1)$ . Интегрируем матричное дифференциальное уравнение (3.3) на найденных интервалах перемещения моментов переключений  $\Delta \nu_j^{p,1}(t_1)$  и конечного момента времени  $\Delta t_k^1$ . Вычисляем  $x'_m(t_k^1)$  - решение уравнения (6.9). Снова решаем (6.8) с уточненными моментами переключений управления и конечным моментом. Итерационный процесс вычислений на Шаге 6 заканчивается, если  $\|x'_m(t_k^s)\| \leq \varepsilon$ . Найдено оптимальное управление, переводящее систему (2.5) с промежуточным возмущением  $F^{(1)}$  из промежуточной точки  $x^{(1)}$  в начало координат. Переходим к Шагу 7, увеличивая на единицу  $\alpha$ .

**Шаг 7.** Решаем систему линейных алгебраических уравнений (6.2) при  $\alpha = 2$ , сразу полагая  $\rho_2 = \xi_1 \rho_1$ . Находим  $\Delta \hat{\psi}(t_i)$  и  $\Delta \bar{t}_k^{(1)}$ . По формуле (6.4) вычисляем параметр  $\xi_2$  и по формулам (6.5) находим уточненные значения  $t_k^2$ ,  $\nu_j^{p,2}(t_i)$ ,  $\hat{\psi}^{(2)}(t_i)$ . По формуле (6.6) находим уточненную точку  $x^{(2)}$ , а по формуле (6.7) соответствующее этой точке возмущение  $F^{(2)}$ . Если  $\text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(1)}) = \text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(2)})$ , то точка  $x(t_i)$  еще не достигнута. Переходим к Шагу 6 и решаем (6.8) с найденными значениями параметров. Если  $\text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(1)}) \neq \text{sign}(x_1(t_i) - x_1^{(2)})$ , то точка  $x(t_i)$  достигнута. Полагаем  $\xi_2 = 1/\rho_2$  и по формулам (6.5) находим уточненные значения  $t_k^2$ ,  $\nu_j^{p,2}(t_i)$

,  $\hat{\psi}^{(2)}(t_i)$ , с которыми решаем (6.8) при  $F = F_1$  и  $x'_m(t_i) = x(t_i)$ . Переходим к Шагу 4 и увеличиваем значение  $i$  на единицу.

#### 10. ПЕРЕВОД ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В СОСТОЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В связи с широким применением оптимального управления в технике, экономике, биологии, экологии и многих других областях представляет теоретический и практический интерес следующая задача: найти конечное фазовое состояние, в которое переводится система (2.1) при одновременном действии неизвестного ограниченного возмущения  $F$  и оптимального управления  $u^\circ(t)$ , если оптимальное управление вычисляется без учета возмущения  $F$ . Оптимальное управление стремится перевести фазовую траекторию движения системы в начало координат, а возмущение  $F$  противодействует этому переводу. В результате фазовое состояние системы переходит в некоторое состояние динамического равновесия, в котором оно может находиться сколь угодно долго. Исследуемая задача является одной из актуальных задач теории динамического равновесия [ 25 ].

**Задача 5.** *Найти конечное фазовое состояние  $x_*$ , в которое переводится фазовое состояние системы (2.1) при одновременном действии на объект неизвестного ограниченного возмущения  $F$  и оптимального по быстрдействию управления  $u^\circ(t)$ , которое вычисляется без учета возмущения  $F$ .*

**Замечание 1.** Если рассматривается традиционная линейная задача нахождения программного оптимального по быстрдействию управления и  $F$  известно [ 26 ], [ 27 ], то итерационные методы нахождения оптимального по быстрдействию управления, переводящего фазовое состояние линейной системы из допустимого начального состояния в требуемое конечное состояние, адекватны по сложности задаче с  $F \equiv 0$ .

Рассмотрим вначале случай, когда  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$  и  $F = \text{const}$ .

**10.1. Линейная автономная система.** Рассмотрим линейную автономную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu^\circ + F, \quad x(0) = x_*. \quad (10.1)$$

Для линейной системы справедлив принцип суперпозиции. Движение системы (10.1) можно рассматривать как суперпозицию движений двух систем

$$\dot{x}^{(1)} = Ax^{(1)} + Bu^\circ, \quad x^{(1)}(0) = x_*, \quad (10.2)$$

$$\dot{x}^{(2)} = Ax^{(2)} + F, \quad x^{(2)}(0) = 0, \quad (10.3)$$

где  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ .

Фазовое состояние системы (10.2) оптимальным управлением  $u^\circ(t)$  переводится из начального состояния  $x^{(1)}(0) = x_*$  в нулевое конечное состояние  $x^{(1)}(t_k) = 0$  за время  $T_{opt} = t_k$ . Допустим, что  $T_{opt} = T_*$ . Фазовое состояние системы (10.3) за это время  $t = T_*$  перейдет в некоторое состояние

$$x^{(2)}(T_*) = \int_0^{T_*} \Phi(T_*, \tau) F d\tau. \quad (10.4)$$

Предположим, что  $x^{(2)}(T_*) = x_*$ . Нетрудно видеть, что в этом случае фазовая траектория системы (10.1) начинает движение из точки  $x_*$  и через время  $t = T_*$  снова приходит в точку  $x_*$ . Действительно, оптимальное управление  $u^\circ(t)$  переводит фазовое состояние системы (10.2) из положения  $x^{(1)}(0) = x_*$  в нулевое конечное состояние, а возмущение  $F$  за это же время переводит фазовое состояние системы (10.3) из нулевого начального состояния в положение  $x_*$ . Фазовая траектория движения  $x(t)$  представляет замкнутую кривую, начинающуюся в точке  $x_*$  и заканчивающуюся в этой же точке. Назовем эту точку *точкой динамического равновесия*.

**Определение 1.** *Точкой динамического равновесия  $x_*$  называется точка фазового пространства  $X$ , в которую переходит фазовая траектория движения линейной динамической системы (10.1) при одновременном действии возмущения  $F$  и оптимального по быстродействию управления  $u_0(t)$ , вычисляемого периодически с периодом равным  $T_*$  для текущих дискретных значений фазовых координат. Если  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$  и  $F = \text{const}$ , то имеем стационарную точку динамического равновесия.*

Таким образом, перейдя в стационарную точку динамического равновесия фазовая траектория движения линейной системы совершает незатухающие периодические движения (устойчивый предельный цикл), период которых равен времени вычисления оптимального управления. В этом состоянии система может находиться сколь угодно долго.

**Определение 2.** *Стационарным состоянием динамического равновесия называется замкнутая циклическая (периодическая) фазовая траектория движения линейной динамической системы (10.1) при одновременном действии возмущения и периодически вычисляемого оптимального по быстродействию управления  $u_0(t)$ , начинающаяся из точки динамического равновесия  $x_*$  и проходящая через время  $t = T_*$  в точку динамического равновесия. Состояние динамического равновесия является стационарным, если  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$  и  $F = \text{const}$ .*

Рассмотрим теперь движение системы (10.1) в двух других оставшихся случаях: 1)  $T_{opt} < T_*$ ; 2)  $T_{opt} > T_*$ .

I. Если  $T_{opt} < T_*$ , то фазовое состояние системы (10.2) переводится в нулевое конечное состояние за меньшее время и затем оптимальное управление "выключается", т.е. на интервале  $t \in [T_{opt}, T_*]$  имеем  $u_0(t) \equiv 0$ . Действительно, на вычисление нового оптимального управления необходимо затратить время  $T_*$  и раньше управление не может действовать на систему. За время  $t = T_{opt}$  фазовая траектория движения системы (10.3) перейдет в некоторую точку  $x^{(2)}(T_{opt}) = x_s$ :

$$x^{(2)}(T_{opt}) = x_s = \int_0^{T_{opt}} \Phi(T_{opt}, \tau) F d\tau, \quad (10.5)$$

Таким образом, за время  $t = T_{opt}$  фазовая траектория движения системы (10.1) перейдет из точки  $x(0) = x_*$  в точку  $x(T_{opt}) = x_s$  (10.5) и затем по траектории

$$x(t) = x_s + \int_{T_{opt}}^t \Phi(t, \tau) F d\tau, \quad t \in [T_{opt}, T_*], \quad (10.6)$$

перейдет в точку  $x(T_*) = x_*$ . Назовем фазовую траекторию

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) F d\tau, \quad t \in [0, T_*] \quad (10.7)$$

траекторией возмущенного движения.

**Определение 3.** Траекторией возмущенного движения называется фазовая траектория (10.7) движения линейной динамической системы (10.1) при  $u^\circ(t) \equiv 0$ , выходящая в момент  $t = 0$  из начала координат.

Итак, фазовая траектория  $x(t)$  системы (10.1) в начальный момент  $t = 0$  выходит из точки  $x(0) = x_*$  и на интервале  $t \in [0, T_{opt}]$  представляет суперпозицию движений

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_* + \int_0^t \Phi(t, \tau) B u^\circ(\tau) d\tau + \int_0^t \Phi(t, \tau) F d\tau, \quad t \in [0, T_{opt}]. \quad (10.8)$$

В момент  $t = T_{opt}$  фазовая траектория системы (10.1) приходит в точку  $x_s$ , лежащую на траектории возмущенного движения, и далее на интервале  $[T_{opt}, T_*]$  движение происходит при  $u^\circ(t) \equiv 0$  по траектории возмущенного движения до точки  $x_*$ .

Таким образом, фазовая траектория системы совершает незатухающие периодические движения, период которых равен  $T_*$ . Стационарная точка динамического равновесия определяется выражением

$$x_* = \int_0^{T_*} \Phi(T_*, \tau) F d\tau. \quad (10.9)$$

II. Если  $T_{opt} > T_*$ , то вычислительный процесс нахождения стационарной точки динамического равновесия иной. Фазовая траектория системы (10.2) при оптимальном по быстродействию управлению движется по многообразиям переключений [6]. На последнем интервале знакопостоянства оптимального управления движение происходит по линии переключения, т.е. по одномерному многообразию. Ему предшествует движение по гиперповерхности переключений, т.е. двумерному многообразию и т.д. На линии переключения происходит переключение знака управления и далее фазовая траектория движется в начало координат. Если время  $T_*$ , затрачиваемое на вычисление оптимального управления, меньше времени  $T_{opt}$  оптимального перевода фазового состояния системы в нулевое конечное состояние, то это означает, что в момент  $t = T_*$  фазовая траектория не успевает достигнуть начала координат. Предположим, что  $T_* \rightarrow 0$  (предельный случай). Это очень важный случай синтеза оптимального управления, когда оптимальное управление формируется как функция фазовых координат  $u^\circ(x)$  без затраты времени на вычисления. Координаты предельной стационарной точки динамического равновесия находятся из условия неподвижности фазового состояния системы (10.1)

$$A x_* + B u^\circ(T_*) + F = 0. \quad (10.10)$$

Если  $0 < T_* < T_{opt}$ , то стационарная точка динамического равновесия находится в окрестности предельной стационарной точки и вычисляется следующим образом. Произвольно выбираем начальное условие  $x_0^{(1)}$  в окрестности

предельной стационарной точки. Для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0^{(1)} \quad (10.11)$$

находим оптимальное по быстродействию управление  $u_{(1)}^\circ(t)$ , переводящее фазовое состояние системы (10.11) из положения  $x(0) = x_0^{(1)}$  в нулевое конечное состояние. Интегрируем на интервале  $t \in [0, T_*]$  дифференциальное уравнение (10.1) с начальным условием  $x(0) = x_0^{(1)}$  и найденным оптимальным по быстродействию управлением  $u_{(1)}^\circ(t)$ . Получаем  $x(T_*) = x_0^{(2)}$ . Принимаем это значение за новое начальное условие, вычисляем оптимальное по быстродействию управление  $u_{(2)}^\circ(t)$ , переводящее фазовую траекторию движения системы (10.11) из этой начальной точки в начало координат. Интегрируем на время  $t = T_*$  дифференциальное уравнение с возмущением (10.1) и с новым начальным условием  $x_0^{(2)}$  и находим  $x(T_*) = x_0^{(3)}$  и т.д. Процесс вычислений заканчивается, если  $\|x_0^{(s+1)} - x_0^{(s)}\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  задано и  $\varepsilon \ll 1$ . Оптимальное управление стремится перевести фазовое состояние системы в нулевое состояние, а возмущение препятствует этому переводу. В результате фазовая траектория движения системы под действием управления и возмущения приходит в некоторую точку  $x_*$ , из которой совершает незатухающие периодические движения. В этом состоянии динамического равновесия фазовое состояние системы может находиться сколь угодно долго.

**Замечание 2.** Начальное условие  $x_0^{(1)}$  может выбираться не обязательно в окрестности предельной стационарной точки динамического равновесия. Необходимо, чтобы  $x_0^{(1)} \in V$ . Выбор начального условия в окрестности предельной стационарной точки уменьшает количество необходимых итераций для вычисления  $x_*$ .

**10.2. Линейная неавтономная система.** Для линейной неавтономной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^\circ + F(t), \quad x(0) = x_* \quad (10.12)$$

принцип суперпозиции также справедлив и справедливы все приведенные выше соотношения. Только в этом случае фазовое состояние системы переходит в нестационарное состояние динамического равновесия, имеющее нестационарную точку  $x_* = x_*(t)$  динамического равновесия.

В результате доказана

**Теорема 3.** *Фазовая траектория движения линейной системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u^\circ + F(t)$  при одновременном действии неизвестного возмущения  $F(t)$  и оптимального управления  $u^\circ(t)$ , вычисляемого за время  $T_*$  для текущих периодически обновляемых через время  $T_*$  значений фазовых координат, приходит в точку динамического равновесия  $x_*$  и совершает незатухающие периодические движения. Фазовая траектория движения линейной системы выходит из точки динамического равновесия  $x_*$  и возвращается в точку динамического равновесия (устойчивый предельный цикл). Период колебаний равен  $T_*$ . Фазовые координаты точки динамического равновесия  $x_*$  удовлетворяют уравнению*

$$[\Phi(T_*, 0) - I]x_* + \int_0^{T_*} \Phi(T_*, \tau)B(\tau)u^\circ(\tau)d\tau + \int_0^{T_*} \Phi(T_*, \tau)F(\tau)d\tau = 0. \quad (10.13)$$

**Замечание 3.** Если  $F = F(x)$  и  $F(x) = 0$  при  $x = 0$ , то для такой нелинейной системы возможен перевод оптимальным управлением фазового состояния системы в нулевое конечное состояние.

**Замечание 4.** При действии неизвестного возмущения точка динамического равновесия характеризует достижимую точность перевода фазового состояния системы в заданное конечное состояние.

**10.3 Примеры.** Проиллюстрируем изложенный метод нахождения стационарной точки динамического равновесия на примере системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= bu + F, \quad |u| \leq M, \quad |F| \leq F^*. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Под действием только одного постоянного возмущения (при  $u(t) \equiv 0$ ) за время  $t = T_*$  фазовая траектория системы (10.14) приходит в точку  $x(T_*) = (\frac{1}{2}FT_*^2; FT_*)$ . Время оптимального по быстродействию перевода фазовой траектории движения системы (10.14) (при  $F \equiv 0$ ) из этой точки  $x(T_*)$  в начало координат  $x(T_{opt}) = 0$  равно

$$T_{opt} = T_* \left\{ \left| \frac{F}{bM} \right| + \left[ 2 \left| \frac{F}{bM} \right| \left( 1 + \left| \frac{F}{bM} \right| \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (10.15)$$

Из (10.15) непосредственно следует, что возможен или нет перевод фазового состояния системы в нулевое конечное состояние за время, не превышающее  $T_*$ , не зависит от самого значения  $T_*$ . Если  $\left| \frac{F}{bM} \right| \leq \sqrt{5} - 2$ , то  $T_{opt} \leq T_*$ . Если  $1 \geq \left| \frac{F}{bM} \right| > \sqrt{5} - 2$ , то  $T_{opt} \geq T_*$ . Существует также предельно допустимое возмущение  $F^*$  при  $\left| \frac{F}{bM} \right| = 1$ . В этом случае предельный цикл вырождается в точку на оси  $x_1$  с координатами  $x_*^o = (T_*^2 F^* \text{sign} F; 0)$ .

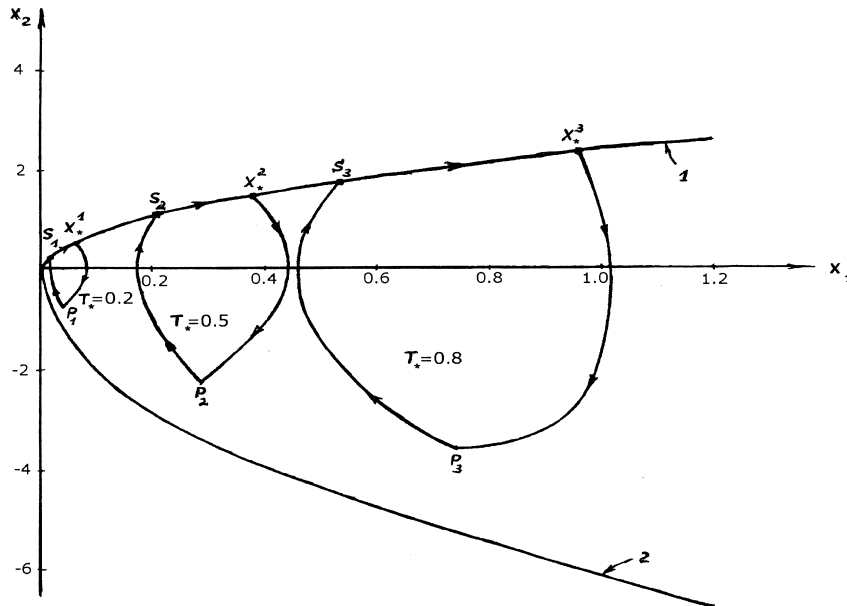


Рис. 9

На рис. 9 приведены фазовые траектории движения (предельные циклы) и стационарные точки динамического равновесия системы (10.14) при  $F = 3$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ .

В этом случае  $\frac{F}{bM} = 0,15$  и, следовательно,  $T_{opt} < T_*$ . Стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  (при  $T_* = 0,2$ ),  $x_*^2$  (при  $T_* = 0,5$ ) и  $x_*^3$  (при  $T_* = 0,8$ ) лежат на траектории возмущенного движения (кривая 1) и имеют координаты  $x_* = (\frac{1}{2}FT_*^2; FT_*)$ . На рис. 3  $S_1x_*^1, S_2x_*^2, S_3x_*^3$  — отрезки фазовых траекторий предельных циклов (принадлежащих траектории возмущенного движения), на которых  $u(t) \equiv 0$ ;  $P_1, P_2, P_3$  — точки переключения управления с  $u = -M$  на  $u = +M$  на предельных циклах. Кривая 2 — линия переключения управления.

На рис. 10 приведены предельные циклы для различных значений времени вычисления  $T_*$  при  $F = 5$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ .

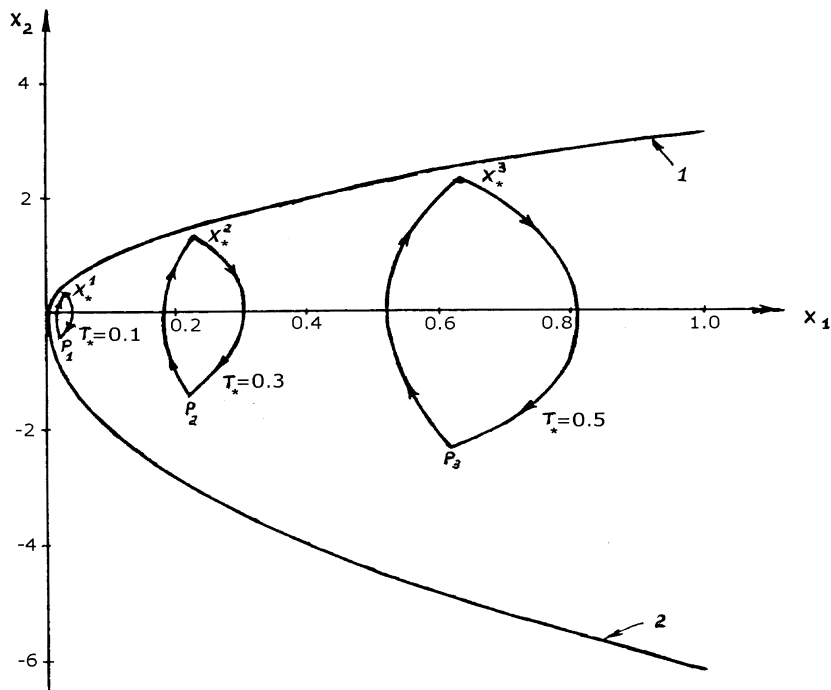


Рис. 10

В этом случае  $\frac{F}{bM} = 0,25$  и, следовательно,  $T_{opt} > T_*$ . Стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  (при  $T_* = 0,1$ ),  $x_*^2$  (при  $T_* = 0,3$ ),  $x_*^3$  (при  $T_* = 0,5$ ) уже не лежат на траектории возмущенного движения (кривая 1);  $P_1, P_2, P_3$  — точки переключения управления. Кривая 2 — линия переключения управления.

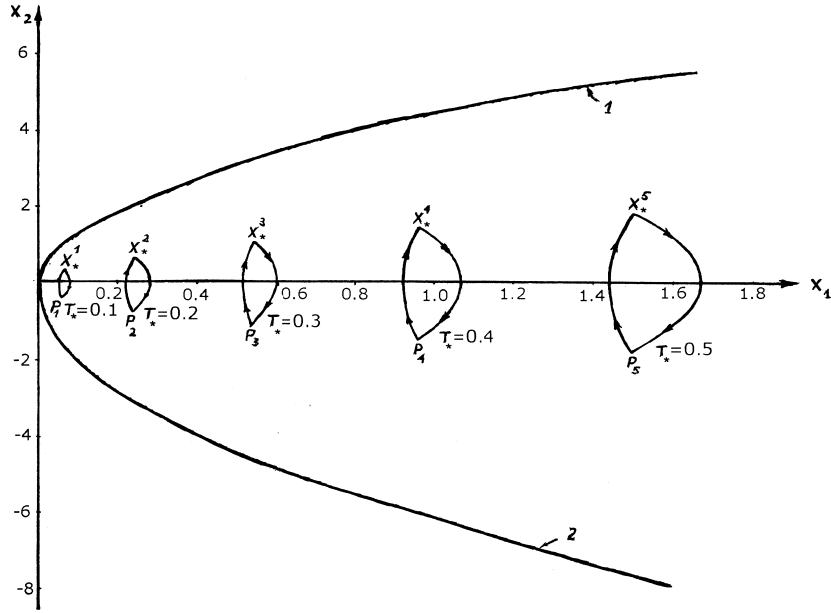


Рис. 11

Рис. 11 иллюстрирует изменение предельных циклов при увеличении возмущения  $F$ . Принято  $F = 10$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ . Отношение  $\frac{F}{bM} = 0,5$  и по-прежнему  $T_{opt} > T_*$ .

Стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  (при  $T_* = 0.1$ ),  $x_*^2$  (при  $T_* = 0.2$ ),  $x_*^3$  (при  $T_* = 0.3$ ),  $x_*^4$  (при  $T_* = 0.4$ ),  $x_*^5$  (при  $T_* = 0.5$ ) расположены уже существенно ниже траектории возмущенного движения (кривая 1) и смещаются вправо по оси  $x_1$ . Сами предельные циклы уменьшаются. Увеличение возмущения приводит к уменьшению предельных циклов и увеличению отклонения от начала координат точки динамического равновесия по оси  $x_1$ . Предельный цикл при  $F = |bM| = 20$  вырождается для каждого  $T_*$  в точку на оси  $x_1$  с координатами  $x_* = (bMT_*^2, 0)$ . Имеем  $x_*^1 = (0, 2; 0)$  при  $T_* = 0.1$ ,  $x_*^2 = (0, 8; 0)$  при  $T_* = 0.2$ ,  $x_*^3 = (1, 8; 0)$  при  $T_* = 0.3$ ,  $x_*^4 = (3, 2; 0)$  при  $T_* = 0.4$ .

Рассмотрим предельные циклы при другой структуре возмущения для той же системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + F, & |F| &\leq F^*, \\ \dot{x}_2 &= bu, & |u| &\leq M. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Фазовая траектория движения системы (10.16) при действии только одного возмущения  $F$  за время  $T_*$  приходит в точку  $x(T_*) = (FT_*, 0)$ . Время оптимального по быстродействию перевода фазового состояния системы (10.16) (при  $F \equiv 0$ ) из этого состояния в нулевое конечное  $x(T_{opt}) = 0$  равно

$$T_{opt} = 2\sqrt{\frac{|F|T_*}{|b|M}}. \quad (10.17)$$



Из (10.17) следует, что существует такое граничное  $T_* = T_r$ , где  $T_r = 4 \frac{|F|}{|b|M}$ , для которого  $T_{opt} = T_*$ . Если  $T_* \geq T_r$ , то стационарная точка динамического равновесия находится на оси  $x_1$ , которая является траекторией возмущенного движения, и имеет координаты  $x_* = (FT_*, 0)$ . Если  $T_* < T_r$ , то стационарная точка динамического равновесия не принадлежит оси  $x_1$ , а приближается к линии переключения. В предельном случае при  $T_* = 0$  стационарная точка динамического равновесия находится из условия  $\dot{x} = 0$ , лежит на линии переключения и имеет координаты  $x_*^o = (\frac{1}{2} \cdot \frac{F|F|}{|b|M}, -F)$ . Следует отметить, что при  $T_* \rightarrow 0$  частота переключений оптимального управления, принимающего предельные значения  $\pm M$ , стремится к бесконечности. При этом интервалы знакопостоянства управления равны и стремятся к нулю.

На рис. 12 показаны предельные циклы для различных  $T_*$  при  $F = 3$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ .

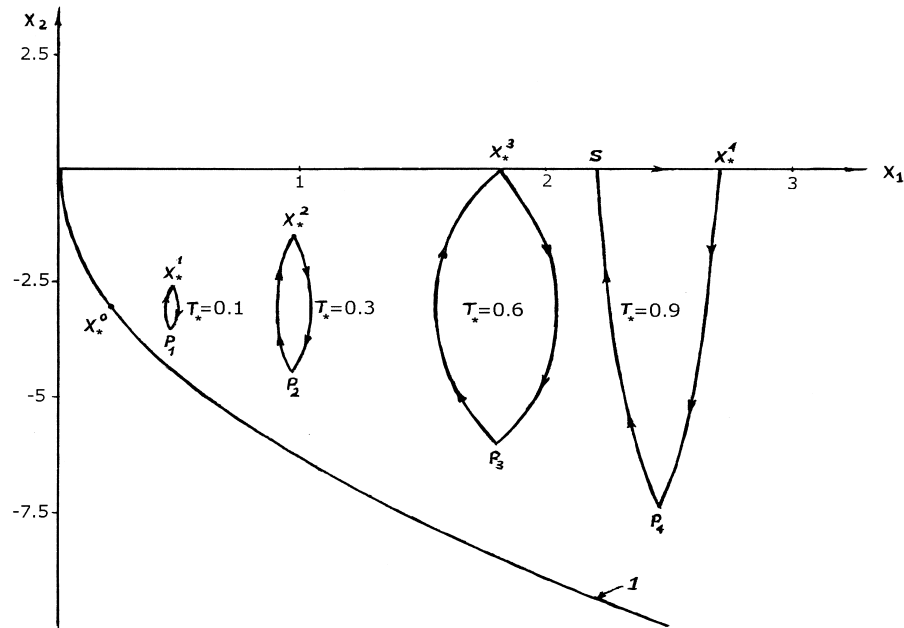


Рис. 12

Граничное значение  $T_r = 0.6$ . Стационарная точка динамического равновесия для  $T_* = 0.6$  находится на оси  $x_1$  и имеет координаты  $x_*^3 = (2.8; 0)$ . Показаны предельные циклы и стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  для  $T_* = 0.1$ ,  $x_*^2$  для  $T_* = 0.3$ ,  $x_*^3$  для  $T_* = 0.6$ ,  $x_*^4$  для  $T_* = 0.9$ . Отрезок  $Sx_*^4$  — часть фазовой траектории предельного цикла, на которой  $u(t) \equiv 0$ . Траектория возмущенного движения совпадает с осью  $x_1$ , а отрезок  $Sx_*^4$  — часть траектории возмущенного движения.  $P_1 \div P_4$  — точки переключения управления на соответствующих циклах. Кривая 1 — линия переключения управления;  $x_*^o = (0.225; -3)$  — предельная стационарная точка динамического равновесия при  $T_* = 0$ .

Для системы четвертого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + F, \\ \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + bu, \quad |u| \leq M, \end{aligned} \quad (10.18)$$

в табл.1 приведены значения фазовых координат предельного цикла для  $T_* = 0.3$  и  $F = 3$ . Приняты следующие значения параметров:  $a_{41} = -2.9684$ ;  $a_{42} = -5.84$ ;  $a_{43} = -6.33$ ;  $a_{44} = -3.4$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ . В момент  $t = 0, 22201$  происходит переключение управления.

Т а б л и ц а 1.

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$	$u(t)$
0, 00	0, 2016200	-0, 0018698	-0, 0217082	-1, 7603975	-5
0, 03	0, 2015592	-0, 0020269	0, 0091553	-2, 1759362	-5
0, 06	0, 2015058	-0.0014397	0.0280935	-2.5556779	-5
0, 09	0, 2014769	-0, 0004500	0, 0361575	-2, 9011340	-5
0, 12	0, 2014797	0, 0006310	0, 0343533	-3, 2138018	-5
0, 15	0, 2015128	0, 0015220	0, 0236424	-3, 4951618	-5
0, 18	0, 2015666	0, 0019697	0, 0049421	-3, 7466756	-5
0, 21	0, 2016243	0, 0017474	-0, 0208739	-3, 9697834	-5
0, 24	0, 2016629	0, 0006926	-0, 0466350	-3, 4682019	+5
0, 27	0, 2016616	-0, 0007788	-0, 0469749	-2, 5696826	+5
0, 30	0, 2016200	-0, 0018698	-0, 0217082	-1, 7603975	+5

В табл.2 приведены координаты  $x_{i*}$ ,  $i = \overline{1, 4}$  стационарных точек динамического равновесия для ряда значений  $F$  и  $T_*$

Т а б л и ц а 2.

$F$	$T_*$	$x_{1*}$	$x_{2*}$	$x_{3*}$	$x_{4*}$
1	0	0	0	0	-1
	0.1	0.0031306	-0.0000994	-0.0010359	-0.5102221
	0.3	0.0255793	-0.0027348	-0.0029272	0.4857461
	0.5	0.0763609	-0.0612952	0.1272822	2.8705691
2	0	0	0	0	-3
	0.1	0.0440349	-0.0000603	-0.0029305	-2.6164007
	0.3	0.2016200	-0.0018698	-0.0217082	-1.7603975
	0.5	0.4438678	-0.0098097	-0.0432418	-0.7860957
3	0	0	0	0	-5
	0.1	0.1586488	-0.0000121	-0.0021418	-4.8341573
	0.3	0.5645831	-0.0006333	-0.0218558	-4.3025557
	0.5	1.0900176	-0.0049910	-0.0609266	-3.4477394

Таким образом, фазовое состояние линейной динамической системы при одновременном действии неизвестного возмущения и оптимального по быстродействию управления, вычисляемого в процессе сопровождения фазовой

траектории движения системы, переходит в состояние динамического равновесия. Если система автономна и возмущение постоянно, то фазовое состояние системы переводится в стационарное состояние динамического равновесия. Это состояние характеризуется тем, что фазовая траектория движения системы приходит в стационарную точку динамического равновесия и из этой точки совершает незатухающие периодические движения (устойчивый предельный цикл). Период колебаний равен времени, затрачиваемому на вычисление оптимального управления. Если возмущение переменное или система неавтономна, то фазовое состояние системы переходит в нестационарное состояние динамического равновесия, которое имеет подвижную (нестационарную) точку динамического равновесия. Расположение точки динамического равновесия в фазовом пространстве и форма предельного цикла зависят от структуры и величины возмущения, времени вычисления оптимального управления и параметров управляемой системы. Если время вычисления оптимального управления стремится к нулю, то предельный цикл стягивается в точку. Существует предельно допустимое возмущение  $F^*$ , при котором предельный цикл вырождается в точку. При действии неизвестного возмущения точка динамического равновесия характеризует достижимую точность перевода фазовой траектории движения системы в окрестность начала координат. Вычисление величины неизвестного возмущения в процессе движения и его учет (в задаче последовательного синтеза оптимального по быстродействию управления при неполной информации) позволяет в случае постоянного возмущения перевести фазовую траекторию движения системы в начало координат, а в случае переменного возмущения уменьшить величину отклонения фазовой траектории от начала координат. Приведенный метод позволяет оценить достижимую точность перевода.

## 11. ОЦЕНКА ТРУДОЕМКОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕТОДА

Трудоёмкость любого метода принято выражать суммарными затратами времени на вычисления. Основные вычислительные затраты любого метода нахождения оптимального управления вызваны интегрированием систем дифференциальных уравнений. Затраты времени на другие операции, в частности, на решение систем линейных алгебраических уравнений значительно меньше. Поэтому трудоёмкость любого метода нахождения оптимального управления принято выражать через число решений задач Коши. Однако в предлагаемом методе нет необходимости в интегрировании систем дифференциальных уравнений на каждой итерации на интервале  $t \in [t_0^s, t_k^s]$ . Достаточно один раз провести интегрирование на интервале  $t \in [t_0^o, t_k^o]$ , запомнить значения интегральных выражений в моменты переключений управления и в конечный момент времени и затем проводить интегрирование лишь на интервалах  $\Delta t_j^{p,s}, \Delta t_k^s$ , на которые изменяются моменты переключений и конечный момент на каждой итерации. Разбиение гиперплоскостями области начальных условий на подобласти со своими значениями моментов переключений, времени перевода и весовых коэффициентов позволяет проинтегрировать *предварительно* до начала процесса управления систему дифференциальных уравнений и запомнить интегральные выражения. Предварительные вычисления не входят в оценку трудоёмкости вычислительного метода, так как для оптимального управления в реальном времени важны лишь те вычислительные операции,

которые производятся в процессе движения системы. В результате суммарное время интегрирования определяется выражением

$$T_* = \sum_{s=1}^N \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j^s-1} |\Delta \nu_j^{p,s}| + |\Delta t_k^s| \right]. \quad (11.1)$$

**Определение.** Трудоемкость ( $R$ ) вычислительного метода – это число интегрирований системы из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка на время оптимального процесса управления  $T_{opt} = t_k^{opt} - t_0$ .

В предлагаемом методе вычисления оптимального управления решения как прямой, так и сопряженной систем линейных дифференциальных уравнений выражаются через фундаментальную матрицу  $\Phi(t, t_0)$ . Трудоемкость рассматриваемого метода равна

$$R = n \frac{T_*}{T_{opt}}. \quad (11.2)$$

и линейно растет с ростом порядка ( $n$ ) управляемого объекта.

**Замечание 1.** Вычислительная трудоемкость метода определяется суммарным перемещением моментов переключений и конечного момента и не зависит от числа перемещений, т.е. *не зависит от числа итераций*. Более того, чем меньше величина предельно допустимого перемещения (4.8) (т.е. чем меньше  $\gamma$ ), тем более монотонно сходится вычислительный процесс и, следовательно, тем меньше величина суммарного перемещения  $T_*$ . В качестве нижней оценки затрат времени на вычисления можно принять

$$T_* \geq \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} |\nu_j^p - \nu_j^{p,0}| + |t_k - t_k^0|. \quad (11.3)$$

В результате, улучшая условия сходимости, одновременно уменьшаем  $T_*$ . Независимость трудоемкости от числа итераций упрощает выбор настраиваемых параметров  $\gamma$  и  $\rho$ .

**Замечание 2.** Следует, однако, учитывать, что с увеличением числа итераций увеличиваются затраты времени на другие операции, в частности, на решение систем линейных алгебраических уравнений, которые широко применяются в рассматриваемом методе.

## 12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный способ построения кусочно-постоянного финитного управления отличается простотой реализации. Для его формирования достаточно умножить начальные условия на некоторые весовые коэффициенты и суммировать составляющие. Весовые коэффициенты вычисляются предварительно до начала процесса управления. Простота финитного управления делает возможным его реализацию в режиме реального времени даже для быстродействующих объектов. Финитное управление переводит линейную систему за фиксированное время из любого начального состояния в начало координат, совпадает по интегральному действию на систему с искомым оптимальным по быстродействию управлением, что позволяет определить оптимальное управление в начальный момент времени, подать его на объект и приступить к вычислению моментов переключений управления и времени окончания процесса. Разбиение

области начальных условий гиперплоскостями на подобласти со своими значениями весовых коэффициентов, моментов переключений и времени перевода позволяет получить хорошее начальное приближение к искомому оптимальному управлению и значительно уменьшить вычислительные затраты на его нахождение. Разбиение на подобласти осуществляется предварительно до начала процесса управления, а процедура выделения подобласти для заданного начального условия осуществляется в реальном времени и заключается в проверке простых неравенств. Итерационный процесс вычисления оптимального управления сводится к последовательности решений систем линейных алгебраических уравнений и интегрированию матричного дифференциального уравнения на интервалах перемещения моментов переключений и конечного момента. Достоинством рассматриваемого метода последовательного синтеза в отличие от традиционного синтеза является наличие дополнительной информации о структуре оптимального управления, числе и расположении моментов переключений, времени перевода системы в требуемое конечное состояние.

При наличии возмущений движение по многообразиям переключений невозможно. Информация о положении изображающей точки относительно  $(n - 1)$ -мерного многообразия переключений управления содержится в знаке отклонения, а информация о величине отклонения от многообразия – в величине отклонения первого момента переключения. При приближении изображающей точки к началу координат происходит сближение моментов переключений и "сжатие" времени перевода, но сохраняются  $n$  интервалов знакопостоянства оптимального управления. Изображающая точка движется в окрестности  $(n - 1)$ -мерного многообразия переключений, при пересечении которого сопряженная система претерпевает разрыв первого рода. Разрывность решения сопряженной системы, частое обращение к процедуре изменения структуры оптимального управления, возникновение скользящего режима делают невозможным применение при последовательном синтезе известных в литературе методов вычисления программного оптимального управления и потребовали разработки нового метода. Наличие разрывов решения сопряженной системы не входит в противоречие с условием Вейерштрасса-Эрдмана о непрерывности решения сопряженной системы, так как это условие справедливо для систем без возмущений.

Задачи оптимального управления рассматриваются при наличии различных ограничений, что приводит к различным структурам оптимальных управлений. Вычисление оптимального управления в реальном времени требует введения нового класса ограничений – ограничения на время вычисления управления. Его нарушение приводит к структуре оптимального управления, отличной от программного оптимального управления в задаче линейного быстрогодействия с фиксированным левым концом. Однако работоспособность алгоритма не нарушается и достигается перевод системы в требуемое конечное состояние. При синтезе управление формируется как функция фазовых координат, т. е.  $u_{sint} = u(x)$ . При программном управлении оно реализуется как функция времени, т. е.  $u_{pr} = u(t)$ . В случае последовательного синтеза управление формируется как функция текущих дискретных значений фазовых координат  $x(t_i)$  так и времени  $t$ , т. е.  $u_{p.s} = u(x(t_i), t)$ . Если время вычисления оптимального управления стремиться к нулю, то  $u_{p.s}$  стремиться к  $u_{sint}$ .

Полученные простые и конструктивные условия изменения структуры оптимального управления, нахождения на многообразии переключений и возникновения скользящего режима позволяют сопровождать фазовую траекторию движения объекта, на который действуют неизвестные возмущения. Фазовое состояние системы при одновременном действии неизвестного возмущения и оптимального управления в случае неучета возмущения в алгоритме управления переводится в состояние динамического равновесия. Точка динамического равновесия характеризует достижимую точность перевода. Вычисление неизвестного возмущения и его учет в алгоритме управления позволяет в случае постоянного или известного возмущения перевести фазовую траекторию объекта в начало координат, а в случае переменного возмущения уменьшить величину отклонения фазовой траектории от начала координат. Приведенный метод позволяет оценить достижимую точность перевода.

Вычислительная трудоемкость метода практически не зависит от числа итераций, что упрощает выбор настраиваемых параметров и линейно растет с ростом порядка управляемой системы. В случае скалярного управления условие полной управляемости адекватно условию общности положения, что при рассматриваемых параллелепипедных ограничениях на управления гарантирует единственность оптимального управления. В случае векторного управления возможна неединственность и последовательность финитных управлений сходится к одному из оптимальных управлений. Доказана локальная сходимость с квадратичной скоростью и глобальная сходимость последовательности финитных управлений к оптимальному по быстродействию управлению.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, Москва, 1976.
- [2] В.М. Александров, *Последовательный синтез оптимального по быстродействию управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **39**: 9 (1999), 1464–1478.
- [3] В.М. Александров, *Сходимость метода последовательного синтеза оптимального по быстродействию управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **39**: 10 (1999), 1650–1661.
- [4] В.М. Александров, *Итерационный метод вычисления в реальном времени оптимального по быстродействию управления*, Сибирский журнал вычислительной математики, **10**: 1 (2007), 1–28.
- [5] В.М. Александров, *Последовательный синтез оптимального по быстродействию управления в реальном времени*, Автоматика и телемеханика, **8** (2008), 3–24.
- [6] В.М. Александров, *Последовательный синтез оптимального по быстродействию управления линейными системами с возмущениями*, Сибирский журнал вычислительной математики, **11**: 3 (2008), 251–270.
- [7] Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова, *Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени*, Известия РАН. Техническая кибернетика, **4** (1992), 3–19.
- [8] Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, *Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **40**: 6 (2000), 838–859.
- [9] Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, *Оптимальное управление в режиме реального времени*, Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 г.). Пленарные доклады. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. (2003), 20–47.
- [10] Р.П. Федоренко, *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, Москва, 1978.

- [11] В.В. Дикусар, А.А. Милютин, *Качественные и численные методы в принципе максимума*, Наука, Москва, 1989.
- [12] В.А. Срочко, *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, Москва, 2000.
- [13] Н.Е. Кирич, *К решению общей задачи линейного быстрогодействия*, Автоматика и телемеханика, **1** (1964), 16–22.
- [14] Б.Н. Пшеничный, Л.А. Соболенко, *Ускоренный метод решения задачи линейного быстрогодействия*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **8**: 6 (1968), 1343–1351.
- [15] А.Я. Дубовицкий, В.А. Рубцов, *Линейные быстрогодействия*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **10**: 1 (1970), 216–223.
- [16] Е. Дюркович, *Численный метод решения линейных задач быстрогодействия с оценкой точности*, Доклады Академии Наук. **265**: 4 (1982), 793–797.
- [17] Ю.Н. Киселев, *Быстросходящиеся алгоритмы для линейного оптимального быстрогодействия*, Кибернетика, **62**: 6 (1990), 47–57.
- [18] Г.В. Шевченко, *Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстрогодействия*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **42**: 8 (2002), 1184–1196.
- [19] R.E.Hartl, S.P. Sethi, R.G.Vickson, *A survey of the maximum principle for optimal control problems with state constraints*, SIAM Review, **37** (1995), 181–218.
- [20] В.М. Александров, *Численный метод решения задачи линейного быстрогодействия*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **38**: 6 (1998), 918–931.
- [21] В.М. Александров, *Приближенное решение задачи линейного быстрогодействия*, Автоматика и телемеханика, **12** (1998), 3–13.
- [22] В.М. Александров, *Решение задач оптимального управления на основе метода квазиоптимального управления*, Труды Института математики СО АН СССР. Модели и методы оптимизации, Наука, Новосибирск, **10** (1988), 18–54.
- [23] В.М. Александров, *Приближенное решение задач оптимального управления*, Проблемы кибернетики, Наука, Москва, **41** (1994), 143–146.
- [24] Ф.Л. Черноусько, *Оценивание фазовых координат. Метод эллипсоидов*, Наука, Москва, (1994).
- [25] Д. Нэш, *Бескоалиционные игры*, В сб.: Матричные игры / Под ред. Н.Н. Воробьева, Физматгиз, Москва, (1961).
- [26] А.А. Белолипецкий, *Численный метод решения линейной задачи оптимального управления сведением ее к задаче Коши*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **17**: 6 (1977), 1380–1386.
- [27] Ю.Н. Киселев, *Быстро сходящиеся алгоритмы для линейного оптимального быстрогодействия*, Кибернетика, **62**: 6 (1990), 47–57.

Владимир Михайлович Александров  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. академика Коптюга 4,  
630090, Новосибирск, Россия  
E-mail address: vladalex@math.nsc.ru