S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

ТРУДЫ ПЕРВОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ "ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ" ЧАСТЬ I

Под редакцией С. И. Кабанихина и М. А. Шишленина

2010

Содержание

В. Г. Романов
Устойчивость в обратных задачах для гиперболических уравнений С.4

Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим
Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики С.11

В. П. Голубятников
Реконструкция невыпуклых объектов по прямолинейным и круговым проекциям С.62

Д. С. Аниконов, М. М. Лаврентьев
Условно-корректные задачи радиационной томографии С.73

Е. Ю. Деревцов
Некоторые задачи нескалярной томографии С.81

А. Ф. Воронин, А. Е. Ковтанюк, М. М. Лаврентьев
Краевая задача Римана в исследовании корректности линейных и нелинейных задач математической физики С.112

М. А. Шишленин
Прямой метод решения обратной задачи акустики С.123

В. М. Гордиенко
О корректности смешанной задачи для волнового уравнения С.130

И. Е. Светов
Восстановление соленоидальных 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их продольным лучевым преобразованиям С.139

Э. П. Шурина, М. И. Эпов, О. В. Нечаев
Устойчивые вычислительные схемы моделирования трехмерных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики С.150

А. В. Баев
Вычислительные алгоритмы для оптимальных методов решения линейных обратных задач: применение оптимального восстановления С.163

Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм
О решении задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости с помощью интегрального оператора Коши С.173

А. В. Пененко
О решении обратной коэффициентной задачи теплопроводности методом проекции градиента С.178

С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин
Акустическое зондирование методами линеаризации и обращением волнового поля С.199

В. И. Ерохин, В. В. Волков
Построение модельных приближенных систем линейных алгебраических уравнений с известными тихоновскими решениями ... С.207

Ю. М. Волчков
Построение на основе нескольких аппроксимаций искомых функций численных схем решения прямых и обратных задач о распространения волн в неоднородных средах С.218

Г. В. Дятлов
Задачи светорассеяния в сканирующей проточной цитометрии С.238

А. П. Полякова
О получении аналитических выражений для образов B-сплайнов при преобразовании Радона и их использовании в задачах скалярной томографии С.248

В. А. Чеверда, В. И. Костин
r-псевдообратный для компактного оператора С.258

В. Г. Чередниченко
Аппроксимация рациональными функциями, решение уравнений С.283

И. С. Вахитов
Обратная задача восстановления старшего коэффициента в уравнении конвекции-диффузии-реакции С.290

В. Г. Романов, С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин
Исследование математической модели электромагнитного зонда в осесимметричной скважине С.307

Г. М. Курамшина
Обратные задачи колебательной спектроскопии С.322

А. Г. Ягола
Некорректные задачи с априорной информацией С.343

С. И. Кабанихин, А. Н. Черемисин, М. А. Шишленин
Задача определения обводненности и дебита в вертикальной скважине С.362

С. И. Кабанихин
Обратные и некорректные задачи (о первой международной молодежной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач") С.380

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.4–С.10 (2010)

УДК 517.958
MSC 35R30

УСТОЙЧИВОСТЬ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Г. РОМАНОВ

Abstract. Methods for investigations of a stability of inverse problems for hyperbolic differential equations are presented. These methods are demonstrated for some one-dimensional and multidimensional problems.

Keywords: inverse problems, Cauchy problem, stability estimates.

1. Введение

Ниже рассматриваются методы получения оценок устойчивости решений обратных задач для гиперболических уравнений. Эти оценки устойчивости важны как сами по себе, так как характеризуют степень устойчивости решения задач, так и для построении численных алгоритмов решения обратных задач. В вычислительном отношении довольно часто решение обратной задачи удобно трактовать как минимум некоторого функционала невязки. Если для рассматриваемой задачи построена оценка устойчивости решений в терминах норм некоторых гильбертовых пространств, то удобно в качестве такого функционала взять квадрат нормы (соответствующий правой части в оценке устойчивости) невязки между решением прямой задачи и данными обратной задачи. Такой функционал позволяет достаточно просто контролировать точность решения обратной задачи в процессе ее решения.

Romanov V.G., Stability in inverse problem for hyperbolic equations.

© 2010 Романов В.Г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00312) и Сибирского отделения РАН (совместный проект СО РАН и ДВО РАН – 2009 – № 93).

Поступила 21 декабря 2009 г.

2. **Одномерные обратные задачи**

Пусть функция $u(x,t)$, удовлетворяет соотношениям

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u|_{t<0} = 0, \quad u|_{x=0} = \delta(t) + f(t)\theta_0(t). \tag{2}$$

Здесь $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$. В предположении, что $q \in \mathbf{C}[0,\infty)$, $f \in \mathbf{C}^1[0,\infty)$, рассмотрим задачу об определении коэффициента $q(x)$ по следующей информации о решении задачи (1), (2):

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad t \in (0,T], \quad T > 0. \tag{3}$$

В дальнейшем речь будет идти только об устойчивости решения этой задачи. При этом необходимо выбрать некоторое ограниченное множество решений, т.е. множество $Q = \{q(x)\}$, для которого и будет справедлива построенная оценка устойчивости. В качестве такого множества возьмем

$$Q = \{q(x) \in \mathbf{C}[0,T/2], \|q\|_{\mathbf{C}[0,T/2]} \leq q_0\}, \quad q_0 > 0.$$

Предположим также, что $f(t) \in F$, $F = \{f(t) \in \mathbf{C}^1[0,T], \|f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} \leq f_0\}$. Пусть $D = \{(x,t) |\, 0 \leq x \leq T/2, x \leq t \leq T - x\}$.

Решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$u(x,t) = \delta(t-x) + \bar{u}(x,t)\theta_0(t-x), \quad \|\bar{u}\|_{\mathbf{C}^1(D)} \leq u_0, \tag{4}$$

в котором $u_0 = u_0(q_0, f_0)$.

На характеристике $t = x$ функция $\bar{u}(x,t)$ связана с искомым коэффициентом некоторым соотношением. Чтобы его найти, достаточно функцию $u(x,t)$ представить в виде

$$u(x,t) = \delta(t-x) + \theta_0(t-x)[\alpha_0(x) + (t-x)\alpha_1(x) + \ldots]$$

и подставить ее в равенство (1). При этом коэффициент при $\delta(t-x)$ в получающемся равенстве дает соотношение для определения $\alpha_0(x) = \bar{u}(x,x) = u(x,x+0)$. Это соотношение имеет вид

$$2\frac{d\alpha_0(x)}{dx} = 2(u_t + u_x)_{t=x} = -q(x). \tag{5}$$

Перейдем к построению оценки. Пусть $q_k \in Q$, $f_k \in F$, $k = 1,2$. Обозначим соответствующие им решения задачи (1), (2) через $u_k(x,t)$, а следы их производных по x на отрезке $(0,T]$ оси $x = 0$ через g_k. Введем разности

$$q_1 - q_2 = \tilde{q}, \quad u_1 - u_2 = \tilde{u}, \quad f_1 - f_2 = \tilde{f}, \quad g_1 - g_2 = \tilde{g}.$$

Тогда

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + q_1(x)\tilde{u} + \tilde{q}(x)u_2(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{6}$$

$$\tilde{u}|_{x=0} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{u}_x|_{x=0} = \tilde{g}(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\tilde{q}(x) = -2(\tilde{u}_t + \tilde{u}_x)_{t=x}, \quad x \in [0,T/2]. \tag{8}$$

Обращая в (6) волновой оператор с помощью данных Коши на оси $x = 0$ и вычисляя затем $(\tilde{u}_t + \tilde{u}_x)_{t=x}$, получаем в области D замкнутую систему равенств

для функций $\tilde{u}$, $\tilde{q}$. Она имеет вид

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{f}(t-x) + \tilde{f}(t+x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} \tilde{g}(\tau)\,d\tau\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta(x,t)} [q_1(\xi)\tilde{u}(\xi,\tau) + \tilde{q}(\xi)u_2(\xi,\tau)]\,d\xi d\tau, \tag{9}$$

$$\tilde{q}(x) = -2\Big\{\tilde{f}'(2x) + \tilde{g}(2x)$$

$$+\int\limits_0^x [q_1(\xi)\tilde{u}(\xi,2x-\xi) + \tilde{q}(\xi)u_2(\xi,2x-\xi)]\,d\xi\Big\}. \tag{10}$$

Здесь

$$\Delta(x,t) = \{(\xi,\tau)|\, 0 \le \xi \le x, t-x+\xi \le \tau \le t+x-\xi\}.$$

Введем

$$z(x) = \max(|\tilde{q}(x)|, \max_{t\in[x,T-x]} |\tilde{u}(x,t)|).$$

Тогда из (9), (10) находим, что

$$z(x) \le C\Big(\|\tilde{f}\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} + \|\tilde{g}\|_{\mathbf{C}[0,T]} + \int\limits_0^x z(\xi)\,d\xi\Big), \quad x \in [0, T/2],$$

с некоторой постоянной $C = C(q_0, u_0)$. Отсюда

$$|\tilde{q}(x)| \le z(x) \le C_1\Big(\|\tilde{f}\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} + \|\tilde{g}\|_{\mathbf{C}[0,T]}\Big), \quad x \in [0, T/2].$$

Следовательно,

$$\|\tilde{q}\|_{\mathbf{C}[0,T/2]} \le C_1\Big(\|\tilde{f}\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} + \|\tilde{g}\|_{\mathbf{C}[0,T]}\Big).$$

2.1. **Обратные задачи, в основе которых лежат аналогичные построения.** Это, прежде всего, задачи об определении параметров слоистых сред для уравнений второго порядка, системы уравнений электродинамики, упругости, электроупругости и т.д. В этом случае обычно рассматривается уравнение для полупространства $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x_1 > 0\}$, в котором коэффициенты зависят от переменной x_1, а информация о решении прямой задачи задается на всей границе полупространства. Использование техники преобразования Фурье по всем пространственным переменным, кроме x_1, сводит эти задачи к рассмотренной выше. Появление при этом параметра преобразования Фурье λ (в этом случае $q = q(x,\lambda)$) позволяет найти несколько коэффициентов, характеризующих среду (см. [1], [2], [3]).

Подобным же образом могут быть исследованы линеаризованные многомерные обратные задачи, об определении слабой неоднородности (см. [1]). Рассмотрим, например, соотношения

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)u = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

$$u|_{t<0} = 0, \quad u|_{x_1=0} = \delta(\bar{x} - \bar{x}^0, t), \tag{12}$$

$$u_{x_1}|_{x_1=0} = g(\bar{x}, t, \bar{x}^0). \tag{13}$$

Здесь $\bar{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{x}^0 = (x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $\bar{x}^0$ — переменный параметр задачи, $g(\bar{x}, t)$ — заданная функция (след нормальной производной решения задачи (11), (12)). Если коэффициент q представим в виде $q = q_0(x_1) + q_1(x)$, в котором supp $q_1(x) \subset \mathbb{R}^n_+$, и $|q_1(x)| << |q_0(x_1)|$, то можно провести линеаризацию в уравнении (11). Применение преобразования Фурье по $\bar{x}$, $\bar{x}^0$ сводит задачу об определении преобразования Фурье по $\bar{x}$ функции $q_1(x)$ к уже рассмотренной. Остается оценить саму функцию по найденному ее образу Фурье. На этом пути получается логарифмическая оценка устойчивости.

3. **Лучевые постановки обратных задач**

Пусть $u(x, t, y)$ — решение прямой задачи

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)u = \delta(x - y, t),\ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u|_{t<0} = 0, \tag{14}$$

зависящее от параметра $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее, supp $q(x) \subset \Omega$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $y \in \partial\Omega$ — произвольная точка границы Ω. Рассмотрим задачу: найти $q(x)$ по следующей информации о решении задачи (14):

$$u = f(x, t, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

в предположении, что $T \geq \mathrm{diam}\Omega$.

Структура решения задачи (14) такова:

$$\begin{aligned} u(x, t, y) \quad = \quad & \frac{1}{4\pi|x - y|}\,\delta(t - |x - y|) \\ & +\theta_0(t - |x - y|)[\alpha_0(x, y) + (t - |x - y|)\alpha_1(x, y) + \ldots]. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение для построения функции $\alpha_0(x, y)$ имеет вид:

$$2\nabla\alpha_0 \cdot \nabla|x - y| + q(x)(4\pi|x - y|)^{-1} = 0, \quad \alpha_0|_{x=y} = 0. \tag{17}$$

Отсюда, для $(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$, находим

$$\alpha_0(x, y) = f(x, t, y)|_{t=|x-y|+0} = -\frac{1}{8\pi|x - y|} \int\limits_{\Gamma(x,y)} q(\xi)d\xi. \tag{18}$$

В этой формуле $\Gamma(x, y)$ — прямая, соединяющая точки x и y.

Таким образом, обратная задача сводится к решению задачи лучевой томографии: построению функции $q(x)$ по заданным от нее интегралы по всем прямым $\Gamma(x, y)$, соединяющим любую пару точек x и y границы области Ω:

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} q(\xi)d\xi = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega. \tag{19}$$

Для плоского сечения Σ области Ω, точки x, y на $\partial\Sigma$ можно характеризовать длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки на $\partial\Sigma$. Пусть $x = x(s_1)$, $y = y(s_2)$ и

$$\int\limits_{\Gamma(x(s_1),y(s_2))} q(\xi)d\xi = g(x(s_1), y(s_2)) \equiv \hat{g}(s_1, s_2). \tag{20}$$

Тогда имеет место оценка устойчивости (см. [4])

$$\int\limits_{\Sigma} q^2(\xi)d\xi \leq \frac{1}{2\pi}\Big| \int\limits_{\partial\Sigma\times\partial\Sigma} \hat{g}_{s_1}\hat{g}_{s_2}ds_1ds_2\Big|. \tag{21}$$

В основе доказательства оценки (21) лежат следующие соотношения (ниже принимается , что выпуклое сечение Σ лежит в плоскости переменных x_1, x_2)

$$\int\limits_{\Gamma(x(s_1),x)} q(\xi)d\xi = v(s_1,x), \quad x\in\Sigma; \qquad v(s_1,y(s_2)) = \hat{g}(s_1,s_2),$$
$$\nabla v\cdot\nu = q(x), \quad \nu = \nabla|x-x(s_1)| = (\cos\theta,\sin\theta),$$
$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\nabla v\cdot\nu) = 0,$$

и тождество

$$\begin{aligned} 2(\nabla v\cdot\nu_\theta)\frac{\partial}{\partial s_1}(\nabla v\cdot\nu) \quad\equiv\quad & \frac{\partial}{\partial s_1}[(\nabla v\cdot\nu)(\nabla v\cdot\nu_\theta)] + \frac{\partial}{\partial x_1}[v_{s_1}v_{x_2}] \\ & -\frac{\partial}{\partial x_2}[v_{s_1}v_{x_1}] + |\nabla v|^2\frac{\partial\theta}{\partial s_1}, \end{aligned}$$

в котором $\nu_\theta = (-\sin\theta,\cos\theta)$. Интегрирование этого тождества по x_1, x_2 по области Σ и по s_2 вдоль $\partial\Sigma$, с учетом неравенств $|q(x)|\le|\nabla v|$, $\frac{\partial\theta}{\partial s_1} > 0$, и приводит к оценке (21).

Если в уравнении (14) выражение $u_{tt}-\Delta u$ заменить на более общее

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j},$$

в котором $(a_{ij}) = A$ — положительно определенная матрица, то обратная задача об определении коэффициента $q(x)$ по данным (15) приводится к задаче интегральной геометрии вида (19), в которой $\Gamma(x,y)$ — геодезические римановой метрики

$$d\tau^2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)dx_idx_j, \quad (b_{ij}) = B = A^{-1}.$$

Подобные задачи возникают также при исследовании обратных задач для уравнений переноса излучения, систем уравнений электродинамики и упругости. Методы исследования подобных задач изложены в книгах [1], [5], [6], [7].

4. **Многомерные динамические обратные задачи**

Пусть $u(x,t)$ — решение начально-краевой задачи

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)u = 0,\ (x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}, \tag{22}$$
$$u|_{t<0} = 0, \quad u|_{x_1=0} = \delta(t). \tag{23}$$

Пусть $d>0$, $T>2d$, $\operatorname{supp} q(x)\subset\Omega$ и $\Omega\subset B(x^0,d/2)$, $x^0=(d/2,0,\dots,0)$, $B(x^0,d/2) = \{x|\,|x-x^0|\le d/2\}$, $D = \{(x,t)|\,x\in\Omega,\ t\in[x_1,T-x_1]\}$, $S = \{(x,t)|\,x\in\partial\Omega,\ t\in[x_1,T-x_1]\}$, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Рассмотрим обратную задачу: найти $q(x)$ по следующей информации о решении задачи (22), (23):

$$u = f(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x,t), \quad (x,t)\in S. \tag{24}$$

Структура решения задачи (22), (23) для гладких коэффициентов $q(x)$ такова:

$$u(x,t) = \delta(t-x_1) + \theta_0(t-x_1)[\alpha_0(x) + (t-x_1)\alpha_1(x) + \dots]. \tag{25}$$

При этом

$$2\frac{\partial \alpha_0(x)}{\partial x_1} + q(x) = 0, \tag{26}$$

Следовательно,

$$q(x) = -2(u_t + u_{x_1})_{t=x_1+0}. \tag{27}$$

Введем два множества

$$Q = \{q(x) |\, \|q\|_{\mathbf{C}(\Omega)} \le q_0\}, \quad \mathcal{U} = \{u(x,t) |\, \|u\|_{\mathbf{C}(D)} \le u_0\}.$$

Пусть $q_k(x) \in Q$, $u_k(x,t) \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2$. Обозначим отвечающие $q_k(x)$ данные (24) через $f_k(x,t)$, $g_k(x,t)$, соответственно. Введем разности

$$q_1 - q_2 = \tilde{q}, \quad u_1 - u_2 = \tilde{u}, \quad f_1 - f_2 = \tilde{f}, \quad g_1 - g_2 = \tilde{g}.$$

Тогда

$$\tilde{u}_{tt} - \Delta\tilde{u} + q_1(x)\tilde{u} + \tilde{q}(x)u_2(x,t) = 0,\ (x,t) \in D, \tag{28}$$

$$\tilde{u}|_S = \tilde{f}(x,t), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\Big|_S = \tilde{g}(x,t), \tag{29}$$

$$\tilde{q}(x) = -2(\tilde{u}_t + \tilde{u}_{x_1})_{t=x_1+0}. \tag{30}$$

В основе получения оценки обратной задачи лежит априорная оценка решения некорректной задачи Коши:

$$\tilde{u}_{tt} - \Delta\tilde{u} + q_1(x)\tilde{u} = F(x,t),\ (x,t) \in D, \tag{31}$$

$$\tilde{u}|_S = \tilde{f}(x,t), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\Big|_S = \tilde{g}(x,t). \tag{32}$$

Эта оценка имеет вид:

$$\|\tilde{u}\|^2_{H^1(D)} + \|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)} \le C(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(S)} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(S)} + \|F\|^2_{L^2(D)}). \tag{33}$$

Здесь $\Sigma_1 = \{(x,t) |\, x \in \Omega, t = x_1\}$, $\Sigma_2 = \{(x,t) |\, x \in \Omega, t = T - x_1\}$.

Заметим, что оценки вида (33), в которых присутствуют H^1-нормы решений на характеристических поверхностях Σ_1 и Σ_2, ограничивающих D, получены для общих гиперболических уравнений второго порядка (см. [8]-[10]).

Использование оценки (33) при $F(x,t) = -\tilde{q}(x)u_2(x,t)$ приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 4\|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Sigma_1)} \\ &\le C(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(S)} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(S)} + u_0^2 T\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{34}$$

Если $q_0 << 1$, то $u_0 << 1$, и из неравенства (34) следует оценка решения обратной задачи

$$\|\tilde{q}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(\|\tilde{f}\|^2_{H^1(S)} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(S)}). \tag{35}$$

Таким образом, оценка (35) получается только для слабо неоднородных сред. В общем случае, это открытая проблема.

Использование подобной техники позволяет получить оценки решений обратных задач об определении коэффициентов уравнений второго порядка и систем уравнений упругости и электродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В.Г. Романов, *Обратные задачи для уравнений математической физики*, М.: Наука, 1984.
[2] М.И. Белишев, А.С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн*, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1999.
[3] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск, Сибирское научное изд-во, 2008.
[4] Р.Г. Мухометов, *Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия*, ДАН СССР, **232** (1977), 32–35.
[5] В.Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, М.: Научный мир, 2005.
[6] В.А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Наука, Новосибирск, 1993.
[7] Л.Н. Пестов, *Вопросы корректности задач лучевой томографии*, Новосибирск, Сибирское научное изд-во, 2003.
[8] В.Г. Романов, *Оценка устойчивости решения задачи об определении коэффициентов диэлектрической проницаемости и проводимости*, Доклады АН, **400**:5 (2005), 612–617.
[9] В.Г. Романов, *Оценки решения одного дифференциального неравенства*, Сибирский матем. журн., **47**:3 (2006), 626–635.
[10] V.G. Romanov, *Stability estimates in inverse problems for hyperbolic equations*, Milan J. Math., **74** (2006), 357–385.

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.11–С.61 (2010)

УДК 517.9
MSC 35R30

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ю.Е. АНИКОНОВ, М.В. НЕЩАДИМ

Abstract. We obtain new presentations for solutions and coefficients of some equations of mathematical physics. These presentations are applied for investigations of some multidimensional inverse problems.

Keywords: inverse problems of mathematical physics, analytical methods of solution.

Введение

Представление решений и коэффициентов дифференциальных уравнений достаточно широко представлено в математической литературе. К этому направлению относится построение функционально-инвариантных решений гиперболических уравнений [1], аналитические представления решений и коэффициентов параболических уравнений [2], представление решения и коэффициента уравнения Штурма-Лиувилля с применением в обратных задачах теории

Anikonov, Yu.E., Neshchadim, M.V., On analytical methods in the theory of inverse problems of mathematical physics.

© 2010 Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В.

Работа Ю.Е. Аниконова выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-01-00422а), Междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований (проект №81), ОМН РАН (проект №1.3.8).

Работа М.В. Нещадима выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта (проект №93), гранта Министерства образования (проект ЗН-24.10).

Поступила 17 декабря 2009 г.

рассеяния, построение гармонических и других потенциалов для вычисления решений (скорости) и коэффициентов (давления) системы уравнений газовой динамики и другие.

В случае функционально-инвариантных решений, если $v(x,y,t)$ — решение функционального уравнения (мы ограничимся более простым результатом)

$$t - vx + \sqrt{\frac{1}{c^2} - v^2} + p(v) = 0,$$

где $p(v)$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция, $c > 0$ — произвольная постоянная, то любая дифференцируемая функция вида $w = f(v(x,y,t))$ является решением волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Заметим, что функция $v(x,y,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{|\nabla v|^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

В работе А. Н. Колмогорова "Об аналитических методах в теории вероятностей"приведены формулы для решения $w(x,t)$ и коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a(t)x + b(t))\frac{\partial w}{\partial x} - a(t)w,$$

$$w = \frac{\exp(-(x-P)^2/Q)}{R},$$

связь между $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ и $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ дается соотношениями

$$P = \int_0^t b(\eta)\exp\left(\int_\eta^t a(z)dz\right)d\eta,\ Q = 4\int_0^t c(\eta)\exp\left(2\int_\eta^t a(z)dz\right)d\eta,\ R = \sqrt{\pi Q}.$$

В работе С.А.Габова и А.Г.Свешникова [3] исследование уравнений движения стратифицированной жидкости (система уравнений 1.1 этой работы) редуцировано к исследованию уравнения (уравнение 1.7), которое при условии несжимаемости жидкости имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_3 - \beta^2)w + \omega_2^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} - \alpha^2\beta^2 w = 0.$$

Авторы называют это уравнение основной математической моделью для теоретического исследования линейных внутренних волн во вращающемся океане (стр. 112). Основополагающее свойство редукции состоит в том, что коэффициент (давление) и решение (скорость) системы 1.1 выражаются через функцию $w(x_1,x_2,x_3,t)$ явно формулами (теорема 1), что и составляет метод исследования.

Отметим также, что представления решений дифференциальных уравнений в виде $w = F(V(x,t))$, где $F(y)$ периодическая функция, а $V(x,t)$ — фазовая

функция, широко используется при изучении нелинейных уравнений [4]. Также отметим построение точных решений нелинейных систем эллиптических уравнений в виде

$$w_j(x) = F_j(v(x)), \;\; j = 1, ..., m,$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $v(x)$ — произвольная гармоническая функция, а вектор $F(s) = (F_1, ..., F_m)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [5]).

В книге [6] для решения $w(x, y, t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q(y)w$$

получена формула

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(y, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где функция $\varphi(y, \lambda)$: $-\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + q(y)\varphi = \lambda\varphi$. И эта формула использована для решения обратной задачи — нахождения коэффициента $q(y)$.

В настоящей работе приводятся новые представления решений и коэффициентов уравнений математической физики, которые фактически являются дифференциально-алгебраическими тождествами. Полученные представления частично использованы при изучении многомерных обратных задач. Данная тематика является дальнейшим продолжением целенаправленных и систематических исследований авторов [7-13, 17].

Фиксируем обозначения, которые мы используем на протяжении всей работы:

1) D — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$;

2) Если $U = U(x)$ — гладкая функция от переменных $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $\nabla U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \right)$ — вектор-градиент функции U, $|\nabla U| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \left(\dfrac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2}$ — его модуль, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$ — оператор Лапласа.

1. Представления решений и коэффициентов гиперболических уравнений

В настоящем разделе приводятся представления решений и коэффициентов гиперболических уравнений второго порядка. В этой связи и с учетом возможных приложений сделаем ряд замечаний относительно вида гиперболических уравнений. В книге В.С.Владимирова [14] уравнение колебаний представлено гиперболическим уравнением

$$\rho(x, t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p(x, t)\nabla w) - q(x, t)w + F(x, t). \tag{1.1}$$

Здесь "коэффициенты $\rho(x,t)$, $p(x,t)$, $q(x,t)$ определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член выражает интенсивность внешнего возмущения"(см. [14]).

Заметим, что если иметь в виду конкретные приложения, то с учетом размерности и других физических фактов первоначально нужно исходить именно из уравнения (1.1), а последующие преобразования или допущения (скажем, деление на $\rho(x,t) > 0$ или замену переменных) делать весьма осторожно; например, если $\rho(x,t)$ неизвестна априори, то при делении на $\rho(x,t)$ в (1.1) получим неизвестные коэффициенты p/ρ, q/ρ и F/ρ независимо от того были p, q и F ранее известны или нет.

И вообще, возникает весьма не праздный вопрос теории и приложений обратных задач — что в уравнении (1.1) можно считать фиксированным, а что искомым?

Приведем еще одно уравнение, связанное с проблемами акустики, известное как уравнение Блохинцева [15]

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2\Delta w + (\nabla P_0, \nabla w) + \frac{dw}{dt}(\overline{V}, \nabla \ln c^2).$$

Здесь $w(x,t)$ — потенциал скорости звуковых колебаний, $P_0(x,t)$ — потенциал давления потока, $\overline{V}(x,t)$ — скорость течения потока, $c(x,t)$ — скорость звука, производные $\dfrac{dw}{dt}$, $\dfrac{d^2w}{dt^2}$ вычисляются по формулам

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\overline{V}, \nabla w) \equiv \psi(x,t), \quad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\overline{V}, \nabla \psi).$$

Если $\overline{V} = 0$, то $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, и уравнение приобретает вид гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\Delta w + (\nabla P_0, \nabla w).$$

Отсюда ясно, что если среда не известна, то скорость c и давление P_0 также не известны.

Следует также отметить, что в книге М.А.Лаврентьева и Б.В.Шабата [16] акустическим уравнением в рамках теории мелкой воды названо уравнение вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right), \tag{1.2}$$

где $h(x,y)$ — глубина бассейна, g — сила тяжести, $w(x,y,t)$ — высота слоя жидкости. При этом скорость распространения волн равна $\sqrt{gh(x,y)}$. В проблемах, связанных с цунами, в уравнение (1.2) добавляется слагаемое-функция внешнего воздействия $F(x,y,t)$ (функция источника), так что уравнение (1.2) становится неоднородным

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) + F(x,y,t).$$

В данной работе мы пытаемся учесть упомянутые факты относительно вида уравнений и искомых коэффициентов.

Лемма 1.1. *Пусть $V(x)$, $F(y)$, $G(y)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in D$, $y \in \mathbb{R}$ — произвольные дважды дифференцируемые функции, B, C — постоянные, причем*

$\nabla V \neq 0$, $B - CV(x) \neq 0$. *Тогда функции* $w(x,t)$, $k(x)$, $A^i(x)$, $i = 1, ..., n$, *определенные формулами*

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)} \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x)) \right), \tag{1.3}$$

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2}, \tag{1.4}$$

$$A^i(x) = A_0^i(x) - \frac{1}{|\nabla V(x)|^2} \left(\frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(x) \triangle w + \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial w}{\partial x_i}, \tag{1.6}$$

где $A_0^i(x)$, $i = 1, ..., n$ — *некоторые функции такие, что*

$$\sum_{i=1}^{n} A_0^i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (1.6) в виде

$$w(x,t) = \varphi(V(x)) \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x)) \right).$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varphi(V) \left(F^{''} + G^{''} \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \varphi^{'}(V) (F + G) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \varphi(V) \left(F^{'} - G^{'} \right) \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial {x_i}^2} = \left\{ \varphi^{'}(V) (F + G) + \varphi(V) \left(F^{'} - G^{'} \right) \right\} \frac{\partial^2 V}{\partial {x_i}^2} +$$

$$+ \left\{ \varphi^{''}(V) (F + G) + 2\varphi^{'}(V) \left(F^{'} - G^{'} \right) + \varphi(V) \left(F^{''} + G^{''} \right) \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2.$$

Подставляя эти соотношения в (1.6), получим равенство

$$\varphi(V) \left(F^{''} + G^{''} \right) = k(x) \left\{ \varphi(V) |\nabla V|^2 \left(F^{''} + G^{''} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(2\varphi^{'} |\nabla V|^2 + \varphi \triangle V \right) \left(F^{'} - G^{'} \right) + \left(\varphi^{''} |\nabla V|^2 + \varphi^{'} \triangle V \right) (F + G) \right\} +$$

$$+ \left\{ \varphi^{'}(V) (F + G) + \varphi(V) \left(F^{'} - G^{'} \right) \right\} \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

При выполнении равенств

$$k |\nabla V|^2 = 1,$$

$$k \left(2\varphi^{'} |\nabla V|^2 + \varphi \triangle V \right) + \varphi \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \tag{1.7}$$

$$k \left(\varphi^{''} |\nabla V|^2 + \varphi^{'} \triangle V \right) + \varphi^{'} \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \tag{1.8}$$

функции $F(y)$ и $G(y)$ можно взять произвольными.

Из (1.7) и (1.8) легко следует, что

$$2{\varphi^{'}}^2 = \varphi \varphi^{''}.$$

Отсюда

$$\varphi(z) = \frac{1}{B - Cz}$$

где B, C — произвольные константы неравные нулю одновременно. В силу этого (1.7) и (1.8) сводятся к одному равенству

$$2C\varphi + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2} + \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \tag{1.9}$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что функции

$$A^i_*(x) = -\frac{1}{|\nabla V(x)|^2}\left(\frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i}, \;\; i = 1, ..., n,$$

удовлетворяют (1.9). Поэтому функции $A^i(x)$ в (1.6) можно взять в виде

$$A^i(x) = A^i_*(x) + A^i_0(x),$$

где $A^i_0(x)$, $i = 1, ..., n$ некоторые функции такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} A^i_0 \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если*

$$\frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2} = 0,$$

то уравнение (1.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2}\triangle w.$$

Замечание 1. Пусть выполнены условия леммы 1.1 и пусть $A^i_0(x) = 0$, $i = 1, ..., n$. Тогда имеет место тождество

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2}\triangle w - \frac{1}{|\nabla V(x)|^2}\left(\frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

где

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)}\left(F(t + V(x)) + G(t - V(x))\right).$$

Замечание 2. К решению $w(x,t)$ можно добавлять $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение уравнения с теми же коэффициентами, то есть

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)}\left(F(t + V(x)) + G(t - V(x))\right) + \widetilde{w}(x,t).$$

Такая процедура часто необходимо для удовлетворения начально-краевых условий и в §5 мы существенно используем это.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия леммы 1.1 и пусть функция $V(x)$ является решением уравнения*

$$\triangle V(x) + \frac{2C}{B - CV(x)}|\nabla V(x)|^2 - \frac{2}{|\nabla V(x)|^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = 0. \qquad (1.10)$$

Тогда функция

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)}\left(F(t + V(x)) + G(t - V(x))\right),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right), \qquad (1.11)$$

где

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2}. \qquad (1.12)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{B - CV(x)}\left(F'' + G''\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{C}{(B - CV(x))^2}(F + G)\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{B - CV(x)}\left(F' - G'\right)\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial {x_i}^2} = \left\{\frac{C}{(B - CV(x))^2}(F + G) + \frac{1}{B - CV(x)}\left(F' - G'\right)\right\}\frac{\partial^2 V}{\partial {x_i}^2} + \left\{\frac{2C^2}{(B - CV(x))^3}(F + G) + \frac{2C}{(B - CV(x))^2}\left(F' - G'\right) + \frac{1}{B - CV(x)}\left(F'' + G''\right)\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2.$$

Подставляя полученные соотношения в (1.11), можно написать

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{C}{(B - CV(x))^2}(F + G) + \frac{1}{B - CV(x)}\left(F' - G'\right)\right) \times \left(\triangle V(x) + \frac{2C}{B - CV(x)}|\nabla V(x)|^2 - \frac{2}{|\nabla V(x)|^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}\right).$$

По условию второй сомножитель равен нулю.

Лемма доказана.

Система уравнений (1.10), (1.11) и равенство (1.12) определяют класс решений $(w, k(x))$ обратной задачи для уравнения (1.11). Разумеется при этом — конкретизация функции $V(x)$ может быть обусловлена наличием или получением краевых условий для уравнения (1.10). Это замечание касается и других приводимых здесь уравнений на коэффициенты.

Замечание 3. При $n = 1$ уравнение (1.10) принимает вид

$$\frac{2C}{B - CV(x)}(V^{'}(x))^2 = V^{''}$$

и интегрируется в явном виде:

$$V = \frac{1}{C}\left(B - \sqrt[3]{Ax + D}\right),$$

где A, D — произвольные константы.

Лемма 1.3. *Пусть $V(x,t)$, $F(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, где $\alpha \le t \le \beta$, $x \in D$ и $y \in \mathbb{R}$, причем $|\nabla V| \neq 0$. Тогда имеет место тождество*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

для $w(x,t) = F(V(x,t))$.

Доказательство. В силу представления $w(x,t) = F(V(x,t))$, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + F''\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 F'',$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = F'\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial {x_i}^2} = F'\frac{\partial^2 V}{\partial {x_i}^2} + F''\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} =$$

$$= F'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + F''\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 F'' -$$

$$-\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - \left(F''|\nabla V|^2 + F'\Delta V\right) -$$

$$-F'\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2,$$

то $w(x,t) = F(V(x,t))$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2.$$

При этом, если $\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 = const$, то $V(x,t)$ — функционально-инвариантное решение.

Лемма 1.4. *Пусть $V(x,t)$, $F(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, где $\alpha \le t \le \beta$, $x \in D$ и $y \in \mathbb{R}$, причем $|\nabla V| \neq 0$. Если функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right),$$

то $w(x,t) = F(V(x,t))$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x_i}\right).$$

Доказательство. В силу леммы 1.3 и предположения на функцию V имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{|\nabla V|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

В силу представления $w(x,t) = F(V(x,t))$, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + F'\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x_i}\right).$$

Лемма доказана.

Пусть дифференциальный оператор L определен формулой

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t), \tag{1.13}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ — достаточно гладкие функции от (x,t). Справедлива (см. также [8, 17]) следующая лемма.

Лемма 1.5. *Если функции $\varphi(x,t) \neq 0$ и $\psi(x,t)$ являются решением нелинейной системы уравнений*

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = L\varphi, \quad \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = L\psi, \tag{1.14}$$

где

$$\frac{1}{\lambda^2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right) \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right)^2, \tag{1.15}$$

то для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$, функция

$$w(x,t) = \varphi F\left(\frac{\psi}{\varphi}\right), \tag{1.16}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Lw. \tag{1.17}$$

Доказательство. В силу определения (1.16) функции $w(x,t)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}F + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\psi\right)F' + \frac{1}{\varphi^3}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\psi\right)^2 F'',$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}F + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\psi\right)F',$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}F + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\psi\right)F' +$$

$$+\frac{1}{\varphi^3}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\psi\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi\right)F''.$$

Подставим найденные производные в уравнение (1.17) и соберем коэффициенты при F, F', F'':

$$F\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - L\varphi\right) +$$

$$+F'\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - L\psi + c\psi - \frac{\psi}{\varphi}\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - L\varphi + c\varphi\right)\right) +$$

$$+\frac{F''}{\varphi^3}\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\psi\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\psi\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi\right)\right) = 0.$$

Коэффициенты при F, F' обращаются в нуль в силу (1.14), а коэффициент при F'' — в силу (1.15).

Лемма доказана.

Следствие. *Если коэффициенты a_{ij}, b_i, c оператора L не зависят от переменной t, то система уравнений (1.14) имеет решения*

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x) + t\varphi_1(x), \quad \psi(x,t) = \psi_0(x) + t\psi_1(x),$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ — произвольные решения уравнения $L\varphi_k = 0$, $L\psi_k = 0$, $k = 0, 1$. При этом, если $\psi_1(x) = 0$, $\psi_0(x) = \varphi_1(x) \neq 0$, $\varphi_0(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\lambda^2(x)}$ не зависит от переменной t и имеют место формулы

$$\frac{1}{\lambda^2(x)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\varphi_0\right)\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}\varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}\varphi_0\right)/\varphi_1^2(x),$$

$$w(x,t) = (\varphi_0 + t\varphi_1)F\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0 + t\varphi_1}\right) + (\varphi_0 - t\varphi_1)G\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0 - t\varphi_1}\right),$$

где $F(z)$, $G(z)$, $z \in \mathbb{R}$, — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Подчеркнем еще раз — в силу уравнений $L\varphi_k = 0$, $L\psi_k = 0$, $k = 0, 1$, конкретизация коэффициента $\lambda(x)$ может быть обусловлена наличием или получением краевых данных для $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$.

Пример. При $n = 1$, $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$ для решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = x^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

имеет место формула

$$w(x,t) = (1+xt)F\left(\frac{x}{1+xt}\right) + (1-xt)G\left(\frac{x}{1-xt}\right),$$

где $F(z), G(z), z \in \mathbb{R}$, — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Это решение для данного уравнения найдено операторным методом в книге [18 стр. 51-53].

2. Представления решений и коэффициентов параболических уравнений

В этом разделе идет речь о представлениях решений и коэффициентов параболических уравнений второго порядка. Приведем сначала примеры.

Уравнение диффузии, согласно [14], представлено параболическим уравнением

$$\rho(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(p(x,t)\nabla w) - q(x,t)w + F(x,t). \tag{2.1}$$

При этом уравнение теплопроводности имеет вид

$$c(x,t)\rho(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x,t)\nabla w) + F(x,t), \tag{2.2}$$

где w — температура, ρ — плотность, c — теплоемкость, k — теплопроводность, F — функция источника.

С учетом переноса, параболическое уравнение диффузии представлено в работе [19]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = V_1\frac{\partial w}{\partial x} + V_2\frac{\partial w}{\partial y} + V_3\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + F(x,y,z,t). \tag{2.3}$$

Интересная интерпретация решения и коэффициентов параболического уравнения приведена в работе [20]. Так для уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x,y)\nabla w) - q(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \tag{2.4}$$

решение $w(x,y,t)$ и $k(x,y)$, $q(x,y)$ интерпретируются следующим образом: $w(x,y,t)$ — цена товара, $k(x,y)$ — коэффициент товаропроводности, $q(x,y)$ — разность спроса и предложения.

Замечания относительно гиперболических уравнений, которые были сделаны в §1, разумеется, сохраняются и для параболических уравнений, и мы пытаемся это также учитывать.

Лемма 2.1. *Пусть заданы*

1) $V(x,t)$ — *произвольная дважды дифференцируемая функция,* $x \in D$, $t \in \mathbb{R}$, *причем* $\nabla V \neq 0$;

2) *постоянные* B, C, *такие, что* $B - CV(x,t) \neq 0$;

3) $F(y,t)$ — *произвольное решение уравнения*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \ \ y \in \mathbb{R}.$$

Тогда функции $w(x,t)$, $k(x,t)$, $A^i(x,t)$, $i = 1, ..., n$ *определенные формулами*

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x,t)} F(V(x,t),t), \tag{2.5}$$

$$k(x,t) = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}, \tag{2.6}$$

$$A^i(x,t) = A_0^i(x,t) - \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\left(\frac{2C}{B - CV(x,t)} + \frac{\triangle V(x,t)}{|\nabla V(x,t)|^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{2.7}$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k(x,t)\triangle w + \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial w}{\partial x_i}, \tag{2.8}$$

где $A_0^i(x,t)$, $i = 1, ..., n$ — *некоторые функции такие, что*

$$\sum_{i=1}^{n} A_0^i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (2.8) в виде

$$w(x,t) = \varphi(V(x,t))F(V(x,t),t),$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция одного аргумента $z \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial t} + \varphi \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \varphi^{'} F \frac{\partial V}{\partial x_i} + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial {x_i}^2} = \left\{\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right\}\frac{\partial^2 V}{\partial {x_i}^2} + \left\{\varphi^{''} F + 2\varphi^{'}\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2.$$

Подставим полученные соотношения в (2.5). Получим

$$\left(\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial t} + \varphi \frac{\partial F}{\partial t} = k\left(\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Delta V +$$

$$+k\left(\varphi^{''} F + 2\varphi^{'}\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)|\nabla V|^2 + \left(\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Положим

$$k(x,t) = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2},$$

и воспользуемся тем, что функция $F(y,t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Тогда

$$\left(\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\varphi^{'} F + \varphi \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} +$$

$$+\varphi^{''}F + 2\varphi^{'}\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\varphi^{'}F + \varphi\frac{\partial F}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{n} A^i\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Это соотношение верно, если выполнены равенства

$$\varphi^{'}\frac{\Delta V}{|\nabla V|^2} + \varphi^{''} + \varphi^{'}\sum_{i=1}^{n} A^i\frac{\partial V}{\partial x_i} = \varphi^{'}\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{2.9}$$

$$\varphi\frac{\Delta V}{|\nabla V|^2} + 2\varphi^{'} + \varphi\sum_{i=1}^{n} A^i\frac{\partial V}{\partial x_i} = \varphi\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Домножая (2.9) на φ, (2.10) на $\varphi^{'}$ и вычитая из первого второе имеем

$$2\varphi^{'2} = \varphi\varphi^{''}.$$

Отсюда видно, что

$$\varphi(z) = \frac{1}{B - Cz}$$

где B, C — произвольные константы не равные нулю одновременно. Поэтому равенства (2.9), (2.10) эквивалентны одному

$$\frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} + \frac{2C}{B - CV} + \sum_{i=1}^{n} A^i\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что функции

$$A^i_*(x,t) = -\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{2C}{B - CV} + \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$i = 1, ..., n$ удовлетворяют (2.11). Поэтому

$$A^i(x,t) = A^i_*(x,t) + A^i_0(x,t),$$

где $A^i_0(x,t)$, $i = 1, ..., n$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{n} A^i_0\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 2.1 и пусть* $A^i_0(x,t) = 0$, $i = 1, ..., n$. *Тогда имеет место тождество*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\Delta w -$$

$$-\frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2}\left(\frac{2C}{B - CV(x,t)} + \frac{\Delta V}{|\nabla V(x,t)|^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

где

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x,t)}F(V(x,t),t).$$

Пример. Если в тождестве следствия 1 взять $n = 1$,

$$F(y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{4t}\right),$$

$B = 1$, $C = 0$, $V(x,t) = a(t)x + b(t)$, где $a(t)$, $b(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $a(t) \neq 0$, то получаются соотношения похожие на формулы Колмогорова, а именно

$$w(x,t) = F(V(x,t),t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-P(t))^2}{Q(t)}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A(t)x + B(t))\frac{\partial w}{\partial x},$$

где $Q(t) = 4ta^2(t)$, $P(t) = \dfrac{b(t)-y_0}{a(t)}$, $C(t) = \dfrac{1}{a^2(t)}$, $A(t) = \dfrac{a'(t)}{a(t)}$, $B(t) = \dfrac{b'(t)}{a(t)}$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1 и пусть функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{2C}{B-CV} + \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Тогда функция

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x,t)} F(V(x,t),t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla V(x,t)|^2} \triangle w.$$

При $n = 1$ уравнение на функцию V принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2.$$

Если определить функции $T(t)$ и $X(x)$ равенствами

$$T(t) = \pm\left(C_1 - 2\alpha C t\right)^{1/2},$$

$$\int \exp\left(\frac{\alpha}{2X^2}\right) dX = C_2 x + C_3,$$

где α, C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, то функция

$$V = \frac{B}{C} - \frac{1}{CT(t)X(x)}$$

является решением этого уравнения.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1 и пусть функция $V(x,t)$ является решением уравнения*

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} + \frac{2C}{B-CV} - \frac{2}{|\nabla V|^4} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j}. \tag{2.12}$$

Тогда функция $w(x,t)$, определенная формулой (2.5)

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x,t)} F(V(x,t),t),$$

удовлетворяет уравнению в дивергентной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right), \tag{2.13}$$

где

$$k(x,t)=\frac{1}{|\nabla V|^2}.$$

Доказательство. Воспользуемся результатом леммы 2.1. Положим

$$A^i=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\nabla V|^2},\ i=1,...,n.$$

Тогда

$$A_0^i=\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{2C}{B-CV}+\frac{\triangle V}{|\nabla V|^2}-\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i}-\frac{2}{|\nabla V|^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j}.$$

Подставляя A_0^i в соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}A_0^i\frac{\partial V}{\partial x_i}=0,$$

получаем условие (2.12) на функцию $V(x,t)$.

Лемма доказана.

При $n=1$ уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2=\frac{2C}{B-CV(x)}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Если определить функции $T(t)$ и $X(x)$ равенствами

$$T(t)=\pm\left(6\alpha C^2t+C_1\right)^{3/2},$$

$$\int\exp\left(\frac{3\alpha}{2}X^{2/3}\right)dX=C_2x+C_3,$$

где α, C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, то функция

$$V=\frac{1}{C}\left(B-\sqrt[3]{T(t)X(x)}\right)$$

является решением этого уравнения.

Для систем нелинейных уравнений, оказывается, имеет место

Лемма 2.3. *Пусть*

1) $y\in\mathbb{R}$, $t_0\le t\le t_1$, $x=(x_1,...,x_n)\in D$, $z=(z_1,...,z_m)\in\mathbb{R}^m$;

2) $\varphi=\varphi(x,t)$, $\psi=\psi(x,t)\neq 0$ — *дважды непрерывно дифференцируемые функции;*

3) $F(y,t)=(F_1,...,F_m)$, $a(y,z)=(a_1,...,a_m)$ — *дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции.*

Тогда, если выполнены соотношения

$$\beta\frac{\partial F}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=a(y,F(y,t))$$

$$\beta\left|\nabla\rho\right|^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\alpha\Delta\varphi=0,\ \ \beta\left|\nabla\rho\right|^2\frac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha\Delta\psi=0,\ \ \rho=\varphi/\psi,$$

для некоторых (вообще говоря, комплекснозначных) постоянных α, β, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, *то вектор-функция* $w(x,t) = \psi(x,t)F(\rho(x,t),t)$ *является решением системы нелинейных дифференциальных уравнений*

$$\beta \left|\nabla\rho\right|^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha\Delta w = \psi \left|\nabla\rho\right|^2 a(\rho, w/\psi).$$

Доказательство. В силу представления $w(x,t) = \psi(x,t)F(\rho(x,t),t)$, $\rho = \varphi(x,t)/\psi(x,t)$, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t}F + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \psi\frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\Delta w = \Delta\psi F + (\Delta\varphi - \rho\Delta\psi)\frac{\partial F}{\partial y} + \psi\left|\nabla\rho\right|^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Следовательно,

$$\beta \left|\nabla\rho\right|^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha\Delta w - \psi\left|\nabla\rho\right|^2 a =$$

$$= \beta\left|\nabla\rho\right|^2\left[\frac{\partial \psi}{\partial t}F + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \psi\frac{\partial F}{\partial t}\right] +$$

$$+\alpha\left[\left|\nabla\psi\right|^2 F + (\Delta\varphi - \rho\Delta\psi)\frac{\partial F}{\partial y} + \psi\left|\nabla\rho\right|^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] - \psi\left|\nabla\rho\right|^2 a = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть дифференциальный оператор L определен формулой (1.13)

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t),$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ — достаточно гладкие функции от (x,t). Тогда для параболического уравнения

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial t} = Lw,$$

имеет место следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть функции* $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ *являются решением нелинейной системы уравнений*

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L\varphi, \quad \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi, \tag{2.14}$$

где

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right), \tag{2.15}$$

а $F(y,t)$ — *любое решение параболического уравнения*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Тогда функция

$$w(x,t) = \varphi F\left(\frac{\psi}{\varphi}, t\right), \tag{2.16}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial t} = Lw. \tag{2.17}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.5.

Следствие. *Если коэффициенты a_{ij}, b_i, с оператора L не зависят от переменной t, то решением нелинейной системы (2.14) являются функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ такие, что $L\varphi = 0$, $L\psi = 0$. При этом, если $\varphi(x) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$, то имеют место формулы*

$$\frac{1}{\lambda^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right),$$

$$w(x,t) = \varphi F\left(\frac{\psi}{\varphi}, t\right),$$

и поэтому поиск коэффициента $\lambda(x)$ может быть обусловлен краевыми данными для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

3. Обобщенное преобразование Хопфа-Коула

Преобразование Хопфа-Коула, как хорошо известно [21], состоит в том, что если $F(x,t) \neq 0$ — решение параболического уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

то функция

$$w(x,t) = -2\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}/F(x,t)$$

является решением нелинейного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

В данном разделе приводятся обобщения этого результата, включая размерность по x и произвол выбора параболического уравнения.

Рассмотрим более общее параболическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + R\left(F, \frac{\partial F}{\partial y}\right), \tag{3.1}$$

где $R(p,q)$ — некоторая фиксированная достаточно гладкая функция. Пусть $\varphi(p,q)$ — некоторая достаточно гладкая функция и функции $R(p,q)$ и $\varphi(p,q)$ удовлетворяют нелинейному дифференциальному соотношению второго порядка

$$q^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\right] =$$

$$= R\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 - q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial R}{\partial p}\right). \tag{3.2}$$

В частности, если $R(p,q)=0$, то

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-2\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}=0.$$

Решением этого уравнения является, например, функция $\varphi(p,q)=-2q/p$. Другие решения приведены ниже (см. замечание 2).

Пусть $V(x,t)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция, $x=(x_1,...,x_n)\in D$, $t\geq 0$, причем $\nabla V\neq 0$. Определим функции $w(x,t)$, $k(x,t)$, $\alpha(x,t)$, $P(x,t)$, полагая

$$w(x,t)=\varphi\left(F(y,t),\frac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}, \tag{3.3}$$

$$k(x,t)=|\nabla V(x,t)|^2, \tag{3.4}$$

$$\alpha(x,t)=\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t}-\dfrac{\Delta V}{|\nabla V|^2}}{\dfrac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t),\dfrac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}} \tag{3.5}$$

$$P(x,t)=\frac{\partial R}{\partial q}+q\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-2\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2}-\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}},\ \text{если}\ \frac{\partial\varphi}{\partial q}\neq 0 \tag{3.6}$$

и

$$P(x,t)=\frac{R}{q}-q\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right),\ \text{если}\ \frac{\partial\varphi}{\partial q}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}\neq 0, \tag{3.6$'$}$$

при $p=F(V(x,t),t)$, $q=\dfrac{\partial F(V(x,t),t)}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=V(x,t)}$.

Справедлива

Лемма 3.1. *Функции $w(x,t)$, $k(x,t)$, $\alpha(x,t)$, $P(x,t)$, определенные формулами (3.3)–(3.6), удовлетворяют уравнению*

$$k\frac{\partial w}{\partial t}=\Delta w+\alpha|\nabla w|^2+P\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу представления (3.3) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial t}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial {x_i}^2}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial {x_i}^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2,$$

$$|\nabla w|^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2|\nabla V|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)|\nabla V|^2,$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\Delta V+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)|\nabla V|^2.$$

Подставим найденные представления в (3.7). Получим

$$k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial t}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\Delta V+ \tag{3.8}$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)|\nabla V|^2+$$

$$+\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2|\nabla V|^2+P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)|\nabla V|^2.$$

Положим

$$k(x,t)=|\nabla V(x,t)|^2,$$

и воспользуемся соотношением (3.1)

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+R\left(F,\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

и его дифференциальным следствием

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y}=\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}+\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Равенство (3.8) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}R+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\frac{\partial V}{\partial t}=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}+ \tag{3.9}$$

$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2+$$

$$+\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2+P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right).$$

Пусть

$$\alpha(x,t)=\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t}-\dfrac{\Delta V}{|\nabla V|^2}}{\dfrac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t),\dfrac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}}.$$

Тогда равенство (3.9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}R+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 +$$
$$+P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right).$$

Если предположить, что

$$P = A\left(F, \frac{\partial F}{\partial y}\right) + B\left(F, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

где $A(p,q)$, $B(p,q)$ — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}R + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 +$$
$$+A\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y} + A\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + B\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + B\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях производной $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, получим систему равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}R + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial R}{\partial p}q = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}q^2 + A\frac{\partial\varphi}{\partial p}q,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial R}{\partial q} = 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}q + A\frac{\partial\varphi}{\partial q} + B\frac{\partial\varphi}{\partial p}q,$$
$$0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} + B\frac{\partial\varphi}{\partial q}.$$

Если $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} \neq 0$, то при

$$B = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$A = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2\frac{\partial R}{\partial q} - 2q\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + q\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\right)$$

остается одно соотношение, связывающее функции R и φ:

$$R\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial R}{\partial p}\right) =$$
$$= q^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\right].$$

Если $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} \neq 0$, то при

$$B = 0,\ A = \frac{R}{q} - q\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)$$

имеем тождества.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия леммы 3.1 и пусть функция* $V(x,t)$ *является решением уравнения*

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2},$$

тогда функция

$$w(x,t) = \varphi\left(F(y,t), \frac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)},$$

удовлетворяет уравнению

$$k\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + P\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

где коэффициенты $k(x,t)$ и $P(x,t)$ *определены формулами (3.4), (3.6) или (3.6').*

Доказательство непосредственно следует из утверждения леммы 3.1.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия леммы 3.1 и пусть функция* $V(x,t)$ *является решением уравнения*

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2} - \frac{2}{|\nabla V|^4}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}. \tag{3.10}$$

Тогда функция

$$w(x,t) = \varphi\left(F(y,t), \frac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)},$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \frac{P}{|\nabla V|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{3.11}$$

где коэффициент $P(x,t)$ *определен формулами (3.6) или (3.6').*

Доказательство. Уравнение (3.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2} + \frac{|\nabla w|^2}{|\nabla V|^2}\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\Delta V}{|\nabla V|^2}}{\dfrac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t), \dfrac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}} + \frac{P}{|\nabla V|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Преобразуем его следующим образом

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\right) +$$

$$+\frac{|\nabla w|^2}{|\nabla V|^2}\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\Delta V}{|\nabla V|^2}}{\dfrac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t), \dfrac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}} + \frac{P}{|\nabla V|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Если воспользуемся соотношением (3.10), то

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\right) -$$

$$-\frac{|\nabla w|^2}{|\nabla V|^2}\frac{\dfrac{2}{|\nabla V|^4}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}}{\dfrac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t),\dfrac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}}+\frac{P}{|\nabla V|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Остается показать, что второе и третье слагаемые в правой части последнего равенства взаимно уничтожаются. Для этого достаточно воспользоваться равенствами

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t),\frac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$|\nabla w|^2=\left(\frac{d}{dy}\varphi\left(F(y,t),\frac{\partial F(y,t)}{\partial y}\right)_{y=V(x,t)}\right)^2|\nabla V|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\right)=-\frac{2}{|\nabla V|^4}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $R=0$, $\varphi=-2q/p$, $F(y,t)$ — произвольное решение уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

и пусть функция $V(x,t)$ удовлетворяет соотношению (3.10). Тогда функция

$$w(x,t)=-2\left(\frac{\partial F(y,t)}{\partial y}/F(y,t)\right)_{y=V(x,t)}$$

удовлетворяет обобщенному уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)-\frac{w}{|\nabla V|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i},\tag{3.12}$$

которое при $n=1$, $V=x$ имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Замечание 2. Если $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\neq 0$, то уравнение (3.2) один раз интегрируется и получается соотношение

$$R\frac{\partial\varphi}{\partial q}=q\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\lambda(\varphi),$$

где $\lambda(z)$ — произвольная гладкая функция одной переменной. Например, при $R=0$ получаем, что функция φ определяется функциональными соотношениями

$$\varphi=\zeta(H),\ \ \theta(H)=q+Hp,$$

где $\zeta(z)$, $\theta(z)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции переменной $z \in \mathbb{R}$. При этом, если $\theta = 0$, то коэффициенты P и α уравнения (3.7) находятся по формулам

$$P(x,t) = \frac{2q}{p} + \frac{\zeta''}{p^2\zeta'}\left(q^2 - p\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \quad \alpha(x,t) = \frac{p^2}{\zeta'}\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\Delta V}{|\nabla V|^2}}{p\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - q^2}$$

при $p = F(V(x,t),t)$, $q = \dfrac{\partial F(V(x,t),t)}{\partial y}$, $y = V(x,t)$.

Явные формулы для функции H, функции $\varphi(p,q)$ и коэффициентов P и α уравнения (3.7) получаются также при $\theta(z) = \dfrac{az^2+bz+c}{dz+e}$, где a, b, c, d, e некоторые константы, $pd - a \neq 0$. В этом случае

$$H(p,q) = \frac{b-(pe+qd) \pm \sqrt{(pe+qd-b)^2 - 4(pd-a)(qe-c)}}{2(pd-a)},$$

$$\varphi(p,q) = \zeta(H(p,q)),$$

где $P(x,t)$, $\alpha(x,t)$ определяются в соответствии с соотношениями (3.5), (3.6).

4. Преобразование дифференциальных уравнений при наличии начально-краевых условий

В задачах идентификации предпочтительно для решений динамических систем иметь явные формулы, содержащие параметры, которые и нужно конкретизировать [22]. Для многомерных обратных задач также желательно иметь иметь формулы, представления решений и коэффициентов дифференциальных уравнений, которые содержали бы достаточно широкий произвол в виде функций одного или многих переменных с целью дальнейшей их конкретизации. Фактически первые параграфы данной работы содержат именно такого рода материал.

Заметим также, что дальнейшее расширение полученных формул возможно, в частности, путем одновременного преобразования координат и решений [10, 12].

Здесь даны общие схемы подобных преобразований с учетом начально-краевых условий.

Лемма 4.1. *Пусть заданы*

1) *область $D \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\gamma = \partial D$, ν — единичный вектор нормали границы γ;*

2) *вектор-функция $v(x)$, осуществляющая диффеоморфное отображение области D на свой образ $v(D) \subset \mathbb{R}^n$;*

3) *матричнозначная функция $u(x) = (u_{ij}(x))$, $i,j = 1,...,m$, $m \geq 1$, $x \in D$, имеющая обратную $u^{-1}(x)$ (в смысле умножения матриц);*

4) *вектор-функция $G(z)$, $z = (z_1,...,z_m)$, осуществляющая диффеоморфное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ на себя;*

5) *некоторая вектор-функция $w_0(x) = (w_{01}(x),...,w_{0m}(x))$.*

Предположим, что вектор-функция $F(y,t) = (F_1, ..., F_m)$ *является решением эволюционного уравнения*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L(F), \;\; y \in D \subset \mathbb{R}^n, \;\; t \geq 0,$$

и удовлетворяет начальному условию

$$F|_{t=0} = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y))), \;\; y \in D.$$

Здесь L *— некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор.*

Тогда неявное решение $w(x,t)$ *уравнения*

$$G(w(x,t)) = u(x)F(v(x),t) \tag{4.1}$$

удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B_G(w)$$

и начальному условию

$$w|_{t=0} = w_0(x), \;\; x \in D,$$

где оператор B_G *определяется формулой*

$$B_G(w) = \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^{-1} u(x)L(u^{-1}(x)G(w))$$

($\frac{\partial G}{\partial w}$ *— матрица Якоби отображения* $G(w)$*). При этом, если*

$$\begin{aligned} w|_\gamma = \alpha(s,t), \;\; \frac{\partial w}{\partial \nu}|_\gamma = \beta(s,t), \\ u|_\gamma = 1, \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\gamma = 0, \\ v|_\gamma = x, \;\; \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\gamma = \nu, \end{aligned} \tag{4.2}$$

то

$$F|_\gamma = G(\alpha(s,t)), \;\; \frac{\partial F}{\partial \nu}|_\gamma = \frac{\partial G}{\partial \alpha}\beta(s,t).$$

Доказательство. Проверим, что функция $w(x,t)$, определенная равенством (4.1), удовлетворяет начальному условию. При $t = 0$ соотношение (4.1) дает

$$G(w|_{t=0}) = u(x)F(v(x),0) = u(x)u^{-1}(v^{-1}(v(x)))G(w_0(v^{-1}(v(x))))$$

или

$$G(w|_{t=0}) = G(w_0(x)).$$

Из обратимости отображения G следует, что

$$w|_{t=0} = w_0(x), \text{ при } x \in D.$$

Пусть выполнены соотношения (4.2). Тогда

$$G(w|_\gamma) = u|_\gamma F(v|_\gamma, t).$$

Следовательно,

$$F|_\gamma = G(\alpha(s,t)), \;\; s \in \gamma.$$

Дифференцируя (4.2) по нормали ν границы γ, получаем

$$\frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \nu}|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\gamma F(V|_\gamma, t) + u|_\gamma \frac{\partial F(V(x),t)}{\partial \nu}|_\gamma.$$

Следовательно, с учетом (4.2),

$$\frac{\partial F}{\partial \nu}|_\gamma = \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha}\beta(s,t), \text{ при } s \in \gamma.$$

Лемма доказана.

Заметим, что если $G(z) = z$, то краевые данные $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$ для $w(x,t)$ и $F(y,t)$ совпадают, что важно для применений и кроме того, если к оператору B_G предъявляются дополнительные требования самосопряженности в главной части или обращения в нуль коэффициентов при младших производных, то на $u(x)$ и $y = v(x)$ возникают дифференциальные уравнения (см. пример 1).

В качестве первого примера приведем преобразованную формулу Пуассона, содержащую значительный произвол, который можно использовать в обратных и других задачах.

Пример 1. Пусть $m = 1$ в лемме 4.1 и функция $F(y,t)$ — решение параболического уравнения $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \Delta F$. Тогда имеют место формулы

$$\begin{gathered}
\widetilde{u}(y) = \frac{1}{u(V^{-1}(y))}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \\
a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_i^{-1}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}\bigg|_{y=V(x)}, \\
a_j(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)}\left[\sum_{k=1}^{n} 2\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k} + \widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1}\right]\bigg|_{y=V(x)}, \qquad (4.3) \\
a(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)}\Delta\widetilde{u}\bigg|_{y=V(x)}, \\
w(x,t) = G^{-1}\left(\frac{u(x)}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{G(w_0(V^{-1}(V(x)+2\xi\sqrt{t})))}{u(V^{-1}(V(x)+2\xi\sqrt{t}))}\,e^{-\xi^2}d\xi\right), \\
\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j}\,\frac{G''(w)}{G'(w)} + \\
+ \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j} + a(x)\frac{G(w)}{G'(w)}, \\
w\Big|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{gathered}$$

При $u(x) = 1$, $G(z) = z$, $V(x) = x$, разумеется, получается формула Пуассона. Обращаем внимание на интересные на наш взгляд сочетания прямых и обратных отображений в формуле для решения $w(x,t)$.

Замечание. Если априори известно, что $a_j(x) = 0$, $a(x) = 0$, то на отображение $V(x)$ и функцию $u(x)$ в соответствии с (4.3) возникают дифференциальные соотношения

$$\Delta\widetilde{u}(y) = 0, \;\; \widetilde{u}(y) = \frac{1}{u(V^{-1}(y))}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}+\widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1}=0,\ \ j=1,...,n,$$

$$a_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_i^{-1}}{\partial y_k}\,\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}\bigg|_{y=V(x)},$$

что может быть использовано для вычисления коэффициентов $a_{ij}(x)$ в конкретных обратных задачах, возможно с использованием соотношений (4.2).

Для эволюционных уравнений второго порядка по переменной t имеет место

Лемма 4.2. *Пусть заданы*

1) *область $D\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\gamma=\partial D$, ν — единичный вектор нормали границы γ;*

2) *вектор-функция $v(x)$, осуществляющая диффеоморфное отображение области D на свой образ $v(D)\subset\mathbb{R}^n$;*

3) *матричнозначная функция $u(x)=(u_{ij}(x))$, $i,j=1,...,m$, $m\geq 1$, $x\in D$, имеющая обратную $u^{-1}(x)$ (в смысле умножения матриц);*

4) *вектор-функция $G(z)$, $z=(z_1,...,z_m)$, осуществляющая диффеоморфное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ на себя;*

5) *некоторые вектор-функции $w_k(x)=(w_{k1}(x),...,w_{km}(x))$, $k=0,1$.*

Предположим, что вектор-функция $F(y,t)=(F_1,...,F_m)$ является решением эволюционного уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=L(F),\ \ y\in D\subset\mathbb{R}^n,\ \ t\geq 0,$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$F|_{t=0}=u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y))),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{t=0}=u^{-1}(v^{-1}(y))\frac{\partial G}{\partial w}(w_0(v^{-1}(y)))w_1(v^{-1}(y)),\ \ y\in D.$$

Здесь L — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор.

Тогда неявное решение $w(x,t)$ уравнения

$$G(w(x,t))=u(x)F(v(x),t)$$

удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=B_G(w),\ \ x\in D\subset\mathbb{R}^n,\ \ t\geq 0,$$

и начальным условиям

$$w|_{t=0}=w_0(x),\ \ \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=w_1(x),\ \ x\in D,$$

где оператор B_G определяется формулой

$$B_G(w)=\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^{-1}\left(u(x)L(u^{-1}(x)G(w))-d_w^2G(w)\left\langle\frac{\partial w}{\partial t}\right\rangle\right),\ \ x\in D\subset\mathbb{R}^n,\ \ t>0.$$

($d_w^2G(w)\left\langle\dfrac{\partial w}{\partial t}\right\rangle$ — *второй дифференциал функции $G(w)$, вычисленный на векторе* $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.)

При этом, если

$$w|_\gamma = \alpha(s,t),\ \ \frac{\partial w}{\partial \nu}|_\gamma = \beta(s,t),$$
$$u|_\gamma = 1,\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\gamma = 0,$$
$$v|_\gamma = x,\ \ \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\gamma = \nu,$$

то

$$F|_\gamma = G(\alpha(s,t)),\ \ \frac{\partial F}{\partial \nu}|_\gamma = \frac{\partial G}{\partial \alpha}\beta(s,t).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.

Замечание. Пусть выполнены условия леммы 4.1 или 4.2 и пусть $G(z) = z$. Тогда краевые условия для w и F одинаковы и равны α и β соответственно, что важно для приложений.

Пример 2. Пусть $m = 1$ в лемме 4.2 и функция $F(y,t)$ — решение волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F$. Тогда функция $w(x,t)$, определенная формулой

$$w(x,t) = G^{-1}\left(\frac{u(x)}{4\pi}\int\limits_{|y|=1}\frac{G(w_0(V^{-1}(V(x)+ty)))}{u(V^{-1}(V(x)+ty))}\,ds_y\right.$$
$$\left.+t\int\limits_{|y|=1}\frac{G'(w_0(V^{-1}(V(x)+ty)))w_1(V^{-1}(V(x)+ty))}{u(V^{-1}(V(x)+ty))}\,ds_y\right),$$

удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_j}$$
$$+\frac{G''(w)}{G'(w)}\left[\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] + a(x)\frac{G(w)}{G'(w)}$$

и данным Коши

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ определены соотношениями (4.3).

При $u(x) = 1$, $G(z) = z$, $V(x) = x$ получается формула Кирхгофа.

Интересный пример общей вышеприведенной схемы леммы 4.1 получается при использовании формулы для решения задачи Коши параболического уравнения с переменными коэффициентами.

Пример 3. Следуя [23], рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_\mu F,$$

где $F = F(y,t)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, Δ_μ — дифференциальный оператор второго порядка, определенный формулой

$$\Delta_\mu = \frac{1-|y|^2}{4}\left((1-|y|^2)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - 2\mu\sum_{j=1}^{n} y_j\frac{\partial}{\partial y_j} + \mu(2-n-\mu)\right).$$

Здесь $|y|^2 = y_1^2 + ... + y_n^2$. Если $\mu = 2-n$, то Δ_{2-n} — оператор Лапласа-Бельтрами, связанный с метрикой $\dfrac{4|dy|^2}{(1-|y|^2)^2}$, где $|dy|^2 = dy_1^2 + ... + dy_n^2$.

Напомним, что гипергеометрическая функция Гаусса определяется формулой

$${}_2F_1(a,b,c,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k s^k}{(c)_k k!},$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$, $k \geq 1$. Определим функции

$$\Phi_\lambda(y) = (1-|y|^2)^{\frac{1-\mu+i\lambda}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{n-1+i\lambda}{2}, \frac{1-i\lambda}{2}, \frac{n}{2}, |y|^2\right),$$

$$C(\lambda) = \frac{2^{1-\mu-i\lambda}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(i\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)},$$

$$C_{n,\mu} = \begin{cases} 1, \text{ если } n \in (2-n, 0), \\ \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{2-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)}, \end{cases}$$

$$p(t,q) = C_{n,\mu}\int_0^\infty \exp\left(-t\frac{(1-\mu)^2+\lambda^2}{4}\right)\Phi_\lambda(q)\,|C(\lambda)|^{-2}\,d\lambda.$$

Тогда функция

$$F(y,t) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, y-z)F_0(z)dz,$$

оказывается, является решением уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_\mu F$$

и удовлетворяет начальному условию

$$F|_{t=0} = F_0(y).$$

В соответствии с леммой 4.1, если функцию $F_0(y)$ взять в виде $F_0(y) = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y)))$, то функция $w(x,t)$, определенная соотношением

$$G(w(x,t)) = u(x)F(v(x),t),$$

является решением преобразованного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B_G(w)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$w|_{t=0} = w_0(x).$$

Полученный произвол $G(y)$, $u(x)$, $v(x)$ можно использовать в различных, в том числе и обратных, задачах.

5. Многомерные обратные задачи

В предыдущих разделах выписаны многочисленные представления решений и коэффициентов многомерных дифференциальных уравнений второго порядка. Как уже отмечалось, эти представления являются фактически дифференциально-алгебраическими тождествами и, по нашему мнению, они могут и должны найти приложение в теории и конкретных практических задачах.

В данном разделе предпринята попытка применения части найденных представлений решений и коэффициентов (мы это еще раз подчеркиваем) к многомерным обратным задачам.

Предлагаются и обсуждаются формальные схемы построения решений ряда многомерных обратных задач, основанные на упомянутых представлениях и классических вопросах теории собственных функций и собственных значений, разделения переменных и других.

В нелинейных обратных задачах накладываются существенные ограничения на след решения на границе рассматриваемой области (остальные начально-краевые условия допустимо-произвольны). Фактически эти ограничения на след решения определяют поиск решения обратных задач и устанавливают дальнейшие взаимосвязи.

Начнем с общей схемы построения формальных (см. [14] стр. 467) решений линейных многомерных обратных задач для эволюционных уравнений первого и второго порядка по временной переменной. Аналогичные схемы построения решений будут приведены ниже и в нелинейных обратных задачах.

Сначала рассматривается многомерная линейная обратная задача для эволюционного уравнения первого порядка по переменной t: найти две функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, если

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial t} = Aw + f(t)\lambda(x), \tag{5.1}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in D, \tag{5.2}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0, \tag{5.3}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0. \tag{5.4}$$

Здесь A — линейный дифференциальный эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D, $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ — производная по нормали границы ∂D области D, функция $f(t) \neq 0$ и непрерывна, α — постоянная, непрерывно дифференцируемые функции $w_0(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ — известны.

Теорема 5.1. *Пусть $\widetilde{w}(x,t)$ — решение начально-краевой задачи:*

$$\alpha \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = A\widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x), \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \varphi(s,t),$$

а числа μ_k и функции $u_k(x)$ суть собственные числа и собственные функции задачи на собственные значения:

$$Au_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если функция $\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \dfrac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu}$, $s \in \partial D$, *представляется в виде формального ряда*

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp,$$

где a_k — *некоторые постоянные, то искомые функции* $w(x,t)$, $\lambda(x)$ *обратной задачи* (5.1)–(5.4) *представляются в виде формальных рядов*

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp + \widetilde{w}(x,t),$$

$$\lambda(x) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x).$$

Доказательство теоремы осуществляется непосредственной проверкой. При этом построение искомых функций $w(x,t)$, $\lambda(x)$ обратной задачи состоит в следующем

I. Решение первой краевой задачи (поиск функции $\widetilde{w}(x,t)$).

II. Нахождение собственных чисел и собственных функций оператора A (поиск μ_k и $u_k(x)$).

III. Построение функции $\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \left.\dfrac{\partial \widetilde{w}(x,t)}{\partial \nu}\right|_{x=s\in\partial D}$.

IV. Вычисление постоянных a_k, $k = 1, 2, \ldots$, из разложения функции $\widetilde{\psi}(s,t)$:

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp,$$

что связано с полнотой системы функций $\frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\frac{\mu_k}{\alpha}(t-p)} dp$.

V. Нахождение функций $w(x,t)$, $\lambda(x)$ в соответствии с теоремой 1.

В случае эволюционного уравнения второго порядка по переменной t рассмотрим (при аналогичных ограничениях) следующую многомерную обратную задачу: найти $w(x,t)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, если

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Aw + f(t)\lambda(x), \tag{5.5}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in D, \tag{5.6}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0, \tag{5.7}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t). \tag{5.8}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть* $\widetilde{w}(x,t)$ — *решение начально-краевой задачи*:

$$\alpha \frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2} = A\widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \varphi(s,t),$$

а числа μ_k и функции $u_k(x)$ суть собственные числа и собственные функции задачи на собственные значения:

$$Au_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Если функция $\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \dfrac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu}$, *представляется в виде формального ряда*

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int_0^t f(p) \sin \sqrt{\frac{\mu_k}{\alpha}}(t-p)dp,$$

где a_k — некоторые постоянные, то искомые функции $w(x,t)$, $\lambda(x)$ обратной задачи (5.5)–(5.8) *представляются в виде формальных рядов*

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int_0^t f(p) \sin \sqrt{\frac{\mu_k}{\alpha}}(t-p)dp + \widetilde{w}(x,t),$$

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\alpha \mu_k} u_k(x).$$

Схема исследования обратной задачи такая же, как и в предыдущей теореме.

Замечание. Если $f(t) = \delta(t)$ — дельта-функция Дирака, то разложения функций $\widetilde{\psi}(s,t)$ имеют (соответственно рассмотренным обратным задачам) вид

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} e^{-\frac{\mu_k}{\alpha} t},$$

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \sin\left(t\sqrt{\frac{\mu_k}{\alpha}}\right),$$

и таким образом основная проблема полноты систем функций $\dfrac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} e^{-\frac{\mu_k}{\alpha} t}$ и $\dfrac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \sin\left(t\sqrt{\dfrac{\mu_k}{\alpha}}\right)$, определяется собственными функциями и собственными числами оператора A.

Перейдем теперь к нелинейным обратным задачам.

Если $A = \Delta$ и краевые условия имеют специальный вид, то можно определять кроме функции $\lambda(x)$ и коэффициент $k(x)$. А именно, рассмотрим обратную задачу для параболического уравнения: найти три функции $w(x,t)$, $k(x)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k(x)\Delta w + f(t)\lambda(x), \tag{5.9}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \tag{5.10}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in D, \tag{5.11}$$

непрерывно-дифференцируемые функции $f(t) \neq 0$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$, $w_0(x)$ известны, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D.

Теорема 5.3. *Пусть функция $\varphi(s,t)$ обратной задачи* (5.9)–(5.11) *имеет специальное аналитическое представление*

$$\varphi(s,t) = F(v_0(s),t) + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $F(y,t) \neq 0$ — некоторое решение параболического уравнения $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, $v_0(s) \neq 0$ — непрерывная функция, $\widetilde{\varphi}(s,t)$ — фиксированная дифференцируемая добавка, возможно равная нулю, и пусть $v(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, — гармоническая функция такая, что $v|_{\partial D} = v_0(s)$, причем $|\nabla v| \neq 0$. Если $\widetilde{w}(x,t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}\Delta \widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x) - F(v(x),0), \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \widetilde{\varphi}(s,t),$$

а $u_k(x)$, μ_k — собственные функции и собственные числа задачи на собственные значения

$$\frac{1}{|\nabla v(x)|^2}\Delta u_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1,2,...$$

и последовательность чисел a_k, $k = 1,2,...$, определена разложением

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) e^{-\mu_k (t-p)} dp = \psi(s,t) - \frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial F(v_0(s),t)}{\partial y}\frac{\partial v(s)}{\partial \nu},$$

то имеют место формулы

$$w(x,t) = F(v(x),t) + \widetilde{w}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int\limits_0^t f(p) e^{-\mu_k (t-p)} dp,$$

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}, \quad \lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x).$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Таким образом, как и в линейных задачах, построение решения нелинейной обратной задачи связано с классическими проблемами теории дифференциальных уравнений. При этом, решение $w(x,t)$ представляется в виде суммы трех функций: $F(V(x),t)$, $\widetilde{w}(x,t)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int\limits_0^t f(p) e^{-\mu_k (t-p)} dp$, каждая из которых несет определенную смысловую нагрузку. Первая функция $F(V(x),t)$ определяет коэффициент $k(x)$, вторая функция $\widetilde{w}(x,t)$ ответственна за произвол в граничных и начальных условиях, а третья функция определяет функцию источника. В дальнейшем такая ситуация будет повторяться с различными вариациями. Разумеется основным вопросом здесь является возможность и обоснованность представления краевого условия $\varphi(s,t)$ в виде $F(v_0(s),t) + \widetilde{\varphi}(s,t)$. Этой проблеме и этим вопросам мы надеемся посвятить отдельные исследования. Заметим только, что, например, функции $F(y,t)$ и $v_0(s)$ можно находить из вариационного принципа $\min\|\varphi(s,t) - F(v_0(s),t)\|$, где $\|\ \|$ — некоторая норма.

Рассмотрим теперь обратную задачу для гиперболического уравнения: найти три функции $w(x,t)$, $k(x)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(x)\Delta w + f(t)\lambda(x), \tag{5.12}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \tag{5.13}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in D. \tag{5.14}$$

Непрерывно дифференцируемые функции $f(t)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$, $w_0(x)$, $w_1(x)$ известны, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть функция $\varphi(s,t)$ обратной задачи* (5.12)–(5.14) *имеет специальное аналитическое представление*

$$\varphi(s,t) = F(t + v_0(s)) + G(t - v_0(s)) + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $F(y) \neq 0$, $G(y) \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, $v_0(s) \neq 0$ — дифференцируемые функции, $\widetilde{\varphi}(s,t)$ — фиксированная дифференцируемая добавка, возможно, равная нулю, и пусть $v(x)$ — гармоническая функция, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, такая, что $v|_{\partial D} = v_0(s)$, причем $|\nabla v| \neq 0$. Пусть $\widetilde{w}(x,t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2} = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}\Delta \widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \widetilde{\varphi}(s,t),$$

$$\widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x) - F(v(x)) - G(-(v(x))), \quad \left.\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x) - F'(v(x)) - G'(-(v(x))),$$

а $u_k(x)$, μ_k — собственные функции и собственные числа задачи на собственные значения

$$\frac{1}{|\nabla v(x)|^2}\Delta u_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, ...$$

и последовательность чисел a_k, $k = 1, 2, ...$, определена формальным разложением

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int_0^t f(p)\sin(\sqrt{\mu_k}(t-p))dp =$$

$$= \psi(s,t) - \frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu} - \left(F'(t + v_0(s)) - G'(t - v_0(s))\right)\frac{\partial v(s)}{\partial \nu}.$$

Тогда имеют место формулы

$$w(x,t) = F(t+v(x)) + G(t-v(x)) + \widetilde{w}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int_0^t f(p)\sin(\sqrt{\mu_k}(t-p))dp,$$

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}, \quad \lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\mu_k} u_k(x).$$

Доказательство теоремы 5.4 осуществляется так же, как и доказательство теоремы 5.3 — непосредственной проверкой.

Для параболического уравнения более общего вида и более сложного представления следа решения рассмотрим обратную задачу поиска трех "квазиодномерных"коэффициентов и правой части, а именно:

Найти решение $w(x,t)$, коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$ и $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие, что

$$\rho(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x)\nabla w) + \mu(x)w + \lambda(x)f(t), \;\; x \in D, \;\; t > 0, \tag{5.15}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \;\; x \in D, \tag{5.16}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \;\; \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \;\; s \in \partial D, \;\; t > 0, \tag{5.17}$$

где гладкие функции $w_0(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ известны, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D.

С применением теоремы 4 работы [12] формулируется

Теорема 5.5. *Пусть функция $\varphi(s,t)$ обратной задачи* (5.15)–(5.17) *имеет специальное представление*

$$\varphi(s,t) = \int\limits_0^\infty \left(Q(p)F_1(V_0(s),p) + R(p)F_2(V_0(s),p)\right) e^{-pt}dp + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $Q(p)$, $R(p)$ — достаточно быстро убывающие на бесконечности функции (например, финитные), $V_0(s)$ —непрерывная функция, $\widetilde{\varphi}(s,t)$ — фиксированная дифференцируемая добавка, возможно равная нулю, $F_1(z,p)$, $F_2(z,p)$ — фундаментальная система решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$F^{''}(z) + b(z)F^{'}(z) + (pa(z) + c(z))F(z) = 0,$$

так, что имеют место формулы

$$a(z) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}F_2 - \dfrac{\partial F_2}{\partial z}F_1}\right),$$

$$b(z) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial z}F_1\right),$$

$$c(z) = \frac{\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}F_2 - \dfrac{\partial F_2}{\partial z}F_1} - p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}F_2 - \dfrac{\partial F_2}{\partial z}F_1}\right),$$

при этом $a(z) > 0$. Пусть, далее, $V(x)$ — гармоническая в области D функция, такая, что $V|_{\partial D} = V_0(s)$, причем $\nabla V \neq 0$.

Положим

$$\rho(x) = a(V(x))|\nabla V|^2 \exp\left(\int\limits_0^{V(x)} b(z)dz\right),$$

$$k(x) = \exp\left(\int\limits_0^{V(x)} b(z)dz\right), \tag{5.18}$$

$$\mu(x) = c(V(x))|\nabla V|^2 \exp\left(\int\limits_0^{V(x)} b(z)dz\right)$$

и пусть $u_k(x)$, μ_k, $k = 1, 2, ...,$ — *собственные функции и собственные значения оператора*

$$A = \frac{1}{\rho(x)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{\mu(x)}{\rho(x)},$$

$$Au_k + \mu_k u_k = 0, \;\; u_k|_{\partial D} = 0,$$

а $\widetilde{w}(x,t)$ — *решение первой краевой задачи*

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} = A\widetilde{w},$$

$$\widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x) - \int\limits_0^{\infty} \left(Q(p)F_1(V(x),p) + R(p)F_2(V(x),p)\right) dp,$$

$$\widetilde{w}|_{\partial D} = \widetilde{\varphi}(s,t),$$

и постоянные a_k *определены из условия*

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \frac{\partial V(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^{\infty} \left(Q(p)\frac{\partial F_1(V_0(s),p)}{\partial z} + R(p)\frac{\partial F_2(V_0(s),p)}{\partial z}\right) e^{-pt}dp - \frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^{t} b(p)e^{-\mu_k(t-p)}dp.$$

Тогда коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$ *определены равенствами* (5.18), *и имеют место формулы,*

$$w(x,t) = \int\limits_0^{\infty} \left(Q(p)F_1(V(x),p) + R(p)F_2(V(x),p)\right) e^{-pt}dp +$$

$$+\widetilde{w}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int\limits_0^{t} b(p)e^{-\mu_k(t-p)}dp,$$

$$\lambda(x) = \rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x).$$

Для гиперболического уравнения, аналогичного уравнению (5.15), также можно рассмотреть обратную задачу поиска трех "квази-одномерных"коэффициентов и правой части, а именно:

Найти решение $w(x,t)$, коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$ и $\lambda(x)$ такие, что

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div}(k(x)\nabla w) + \mu(x)w + \lambda(x)f(t), \;\; x \in D, \;\; t > 0,$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in D,$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t > 0,$$

где гладкие функции $w_0(x)$, $w_1(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ известны, D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D.

Аналогично теореме 5.5 может быть сформулирована теорема существования решения этой обратной задачи.

Ограничимся двумя примерами.

Пример 1. Следу $\varphi(s,t)$ решения $w(x,t)$ на границе ∂D

$$\varphi(s,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(Q(\omega)\exp(i\omega\sqrt[3]{u_0(s)})(i\omega\sqrt[3]{u_0(s)} - 1) +$$

$$+ R(\omega)\exp(-i\omega\sqrt[3]{u_0(s)})(i\omega\sqrt[3]{u_0(s)} + 1)\Big)\, e^{i\omega t} d\omega + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

$u_0(s) > 0$, $s \in \partial D$, соответствует уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + \lambda(x) f(t),$$

при этом

$$\rho(x) = \frac{1}{9}(u(x))^{-4/3}|\nabla u|^2,$$

где $u(x)$ — гармоническая функция такая, что $u|_{\partial D} = u_0(s)$, $s \in \partial D$.

Таким образом, в данном случае поиск коэффициента $\rho(x)$ сведен к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Остальные функции определяются по схеме, аналогичной схеме теоремы 5.5.

Пример 2. Следу $\varphi(s,t)$ решения $w(x,t)$ на границе ∂D

$$\varphi(s,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(Q(\omega)(u_0(s))^{\frac{1-m}{2}} J_\alpha\left(\frac{2\omega}{2-m}(u_0(s))^{\frac{2-m}{2}}\right) +\right.$$

$$\left. + R(\omega)(u_0(s))^{\frac{1-m}{2}} I_\alpha\left(\frac{2\omega}{2-m}(u_0(s))^{\frac{2-m}{2}}\right)\right) e^{i\omega t} d\omega + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

$u_0(s) > 0$, $s \in \partial D$, $1 \le m < 2$, J_α, I_α — функции Бесселя первого и второго рода, $\alpha = \left|\frac{m-1}{2-m}\right|$, соответствует уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div}(k(x)\nabla w) + \lambda(x) f(t),$$

при этом

$$\rho(x) = |\nabla u|^2, \quad k(x) = u^m(x).$$

где $u(x)$ — гармоническая функция такая, что $u|_{\partial D} = u_0(s)$, $s \in \partial D$.

Последующие замечания примера 1 справедливы и здесь.

Для общего гиперболического уравнения второго порядка рассмотрим такую обратную задачу:

Найти функции $w(x,t)$, $\rho(x)>0$, $\lambda(x)$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, такие, что

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}+a(x)w+\lambda(x)f(t), \tag{5.19}$$

$$w|_{t=0}=w_0(x),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=w_1(x),\quad x\in D, \tag{5.20}$$

$$w|_{\partial D}=\varphi(s,t),\quad \left.\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu}\right|_{\partial D}=\psi(s,t),\quad s\in\partial D,\quad t>0. \tag{5.21}$$

Непрерывно дифференцируемые коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_j(x)$, $a(x)$ фиксированы, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\alpha_0|\xi|^2$, $\alpha_0>0$, известные функции $f(t)\neq 0$, $w_0(x)$, $w_1(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ также достаточное число раз дифференцируемы. Как и выше, область $D\subset\mathbb{R}^n$ предполагается с гладкой границей ∂D.

Обозначим

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+a(x).$$

С использованием результата леммы 1.5, формулируется

Теорема 5.6. *Пусть функция $\varphi(s,t)$ обратной задачи* (5.19)–(5.21) *представляется в виде*

$$\varphi(s,t)=(\varphi_0(s)+t\varphi_1(s))\,F\left(\frac{\varphi_1(s)}{\varphi_0(s)+t\varphi_1(s)}\right)+$$
$$+(\varphi_0(s)-t\varphi_1(s))\,G\left(\frac{\varphi_1(s)}{\varphi_0(s)-t\varphi_1(s)}\right)+\widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $F(z)$, $G(z)$ — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(s)\neq 0$, $\varphi_1(s)\neq 0$, $\varphi_0(s)+t\varphi_1(s)\neq 0$, $\varphi_0(s)-t\varphi_1(s)\neq 0$, $\widetilde{\varphi}(s,t)$ — фиксированная добавка, возможно равная нулю, и пусть $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ — решения задачи Дирихле

$$L\varphi_0(x)=0,\quad \varphi_0|_{\partial D}=\varphi_0(s),$$
$$L\varphi_1(x)=0,\quad \varphi_1|_{\partial D}=\varphi_1(s).$$

Положим

$$\rho(x)=\frac{1}{\varphi_1^2(x)}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_i}\varphi_1(x)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_i}\varphi_0(x)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_j}\varphi_1(x)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_j}\varphi_0(x)\right)$$

и пусть функция $\widetilde{w}(x,t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\rho(x)\frac{\partial^2\widetilde{w}}{\partial t^2}=L\widetilde{w},$$
$$\widetilde{w}|_{\partial D}=\widetilde{\varphi}(s,t),\quad s\in\partial D,\quad t>0.$$
$$\widetilde{w}|_{t=0}=w_0(x)-\varphi_0(x)F\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right)-\varphi_0(x)G\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right),$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=w_1(x)-\varphi_1(x)F\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right)-\varphi_1(x)G\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right)+$$

$$+\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_0(x)}F'\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right)-\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_0(x)}G'\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right),$$

а $u_k(x)$, μ_k — *собственные функции и собственные значения оператора* $\dfrac{1}{\rho(x)}L$:

$$\frac{1}{\rho(x)}Lu_k(x)+\mu_k u_k(x)=0,\ \ u_k|_{\partial D}=0,$$

и числа b_k *определены из разложения*

$$\widetilde{\psi}(s,t)=\psi(s,t)-\frac{\partial\widetilde{w}(s,t)}{\partial\nu}-\frac{\partial\widetilde{\widetilde{w}}(s,t)}{\partial\nu}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\partial u_k(s)}{\partial\nu}\int\limits_0^t f(p)\sin\sqrt{\mu_k}(t-p)dp,$$

где

$$\widetilde{\widetilde{w}}(x,t)=(\varphi_0(x)+t\varphi_1(x))\,F\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)}\right)+$$

$$+(\varphi_0(x)-t\varphi_1(x))\,G\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)-t\varphi_1(x)}\right).$$

Тогда для обратной задачи (5.19)–(5.21) *имеют место формулы*

$$w(x,t)=\widetilde{w}(x,t)+\widetilde{\widetilde{w}}(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k u_k(x)\int\limits_0^t f(p)\sin\sqrt{\mu_k}(t-p)dp,$$

$$\rho(x)=\frac{1}{\varphi_1^2(x)}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_i}\varphi_1(x)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_i}\varphi_0(x)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_j}\varphi_1(x)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_j}\varphi_0(x)\right),$$

$$\lambda(x)=\rho(x)\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sqrt{\mu_k}u_k(x).$$

В работах [12, 13] получены формулы для решений $\widetilde{F}(z,t)$ и коэффициентов $A(z)$, $C(z)$ уравнений

$$\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(A(z)\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial z}\right)+C(z)\widetilde{F},\tag{5.22}$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial t^2}=A(z)\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial z^2}+C(z)\widetilde{F},\tag{5.23}$$

которые содержат произвольные функции. Например, для уравнения (5.23)

$$\widetilde{F}(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{V'(z)}}\left[\alpha\left(t+V(z)\right)+\alpha\left(t-V(z)\right)+\int\limits_{t-V(z)}^{t+V(z)}\beta(p)dp\right],$$

$$A(z)=\frac{1}{V'^2(z)},\ \ C(z)=\frac{2V'''V'-3V''^2}{4V'^4(z)},\tag{5.24}$$

где $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $V(z)$, $V'(z)\neq 0$, — достаточно гладкие функции.

Иллюстрацией применения таких формул является многомерная обратная задача:

Найти функции $w(x,t)$, $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, такие, что

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(x)\Delta w + \mu(x)w + \lambda(x)f(t), \tag{5.25}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in D, \tag{5.26}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0, \tag{5.27}$$

где известные функции $f(t) \neq 0$, $w_0(x)$, $w_1(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ достаточное число раз дифференцируемы. Как и выше, область $D \subset \mathbb{R}^n$ предполагается с гладкой границей ∂D.

Теорема 5.7. *Пусть функция $\varphi(s,t)$ обратной задачи* (5.25)–(5.27) *представляется в виде*

$$\varphi(s,t) = \frac{1}{2\sqrt{V'(u_0(s))}}\left[\alpha\left(t + V(u_0(s))\right) + \alpha\left(t - V(u_0(s))\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int\limits_{t-V(u_0(s))}^{t+V(u_0(s))} \beta(p)dp\right] + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $V(z)$, $V'(z) \neq 0$, $y, z \in \mathbb{R}$, $u_0(s) \neq 0$ — некоторые трижды непрерывно дифференцируемые функции, $\widetilde{\varphi}(s,t)$ — фиксированная добавка, возможно равная нулю, и пусть $u(x)$ — гармоническая функция, $x \in D$, такая, что $u|_{\partial D} = u_0(s)$, причем $|\nabla u| \neq 0$.

По функциям $V(z)$, $u(x)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ определим функции

$$A(z) = \frac{1}{V'^2(z)}, \quad C(z) = \frac{2V'''V' - 3V''^2}{4V'^4(z)},$$

$$\widetilde{\widetilde{w}}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{V'(u(x))}}\left[\alpha\left(t + V(u(x))\right) + \alpha\left(t - V(u(x))\right) + \int\limits_{t-V(u(x))}^{t+V(u(x))} \beta(p)dp\right],$$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= |\nabla u|^2, \\ k(x) &= A(u(x)), \\ \mu(x) &= C(u(x))|\nabla u|^2, \end{aligned} \tag{5.28}$$

где $A(z)$, $C(z)$ определены формулами (5.24).

Пусть $\widetilde{w}(x,t)$ есть решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2} = \widetilde{L}\widetilde{w}, \text{ где } \widetilde{L} = \frac{1}{\rho(x)}\left(k(x)\Delta + \mu(x)\right),$$

$$\widetilde{w}|_{\partial D} = \widetilde{\varphi}(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t > 0,$$

$$\widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x) - \widetilde{\widetilde{w}}|_{t=0},$$

$$\left.\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x) - \left.\frac{\partial \widetilde{\widetilde{w}}}{\partial t}\right|_{t=0},$$

а $u_k(x)$, μ_k — собственные функции и собственные значения оператора $\widetilde{L}$:

$$\widetilde{L}u_k(x) + \mu_k u_k(x) = 0, \;\; u_k|_{\partial D} = 0,$$

и числа b_k определены из разложения

$$\widetilde{\psi}(s,t) = \psi(s,t) - \frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial \widetilde{\widetilde{w}}(s,t)}{\partial \nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\partial \widetilde{u}_k(s)}{\partial \nu} \int\limits_0^t f(p) \sin \sqrt{\mu_k}(t-p)dp.$$

Тогда формулы (5.28) *для коэффициентов $\rho(x)$, $k(x)$, $\mu(x)$ и формальные ряды*

$$w(x,t) = \widetilde{w}(x,t) + \widetilde{\widetilde{w}}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(x) \int\limits_0^t f(p) \sin \sqrt{\mu_k}(t-p)dp,$$

$$\lambda(x) = \rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\mu_k} u_k(x),$$

дают решение обратной задачи (5.25)–(5.27).

В начале параграфа 2 приведена необычная экономическая интерпретация решения и коэффициентов параболического уравнения (2.4). Существенно используя независимость коэффициентов и функции источника от времени в параболическом уравнении можно провести небольшое дополнительное исследование линейной обратной задачи, что и делается ниже.

Лемма 5.1. *Пусть функция $w(x,t)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \le t \le \beta$, является решением параболического уравнения*

$$\rho(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \lambda(x) \tag{5.29}$$

с коэффициентами $k(x)$, $\rho(x)$ и правой частью $\lambda(x)$ не зависящими от переменной t. Тогда имеет место тождество

$$\rho(x)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(k(x)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(x)w\right). \tag{5.30}$$

Доказательство. Домножим уравнение (5.29) на $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ и воспользуемся тождествами

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(k(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2\right), \;\; i = 1, ..., n.$$

Следствие 1 (единственность). *Пусть заданы $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, и*

$$w|_{\partial D} = 0, \;\; w|_{t=\alpha} = w|_{t=\beta} = 0. \tag{5.31}$$

Тогда $\lambda(x) = 0$, $w(x,t) = 0$, $x \in D$, $\alpha \le t \le \beta$.

Доказательство. Интегрируя тождество (5.30), с учетом данных (5.31), получаем

$$\int\limits_D \int\limits_\alpha^\beta \rho(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt = 0.$$

Отсюда, в силу того, что $\rho(x) > 0$, получаем $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$. Так как $w|_{t=\alpha} = 0$, то $w = 0$. Из (5.29) следует, что $\lambda(x) = 0$.

Следствие доказано.

Следствие 2 (формула для коэффициента λ). *Если $w|_{\partial D} = \varphi(s)$, $s \in \partial D$, то есть функция $\varphi(s)$ не зависит от переменной t и $w|_{t=\alpha} = w|_{t=\beta} = w_0(x)$, то имеет место следующая формула для коэффициента $\lambda(x)$*

$$\lambda(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\right).$$

Доказательство. Из (5.30) интегрированием получается равенство

$$\int\limits_D \int\limits_\alpha^\beta \rho(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt = 0.$$

Отсюда, в силу того, что $\rho(x) > 0$, получаем $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$, то есть решение $w(x,t)$, оказывается, не зависит от переменной t. Подставляя в (5.29) значение $t = \alpha$ (или β), получаем формулу

$$\lambda(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\right).$$

В заключении раздела сделаем общее замечание, если иметь в виду действительно практические приложения рассматриваемых в данном разделе многомерных обратных задач, то нужно учитывать важное обстоятельство — реальные краевые условия $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ часто известны не на всей, а лишь на части границы ∂D области D. В этом по нашему мнению заключается практическая суть и некорректность этих задач.

Что же делать в данном случае?

Можно, например, используя специальные аналитические представления краевых данных $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ продолжать их на всю границу ∂D с дальнейшим применением вышеприведенных схем изучения. Некорректность при этом может проявляться при продолжении и непосредственно быть связанной с задачей Коши (не Дирихле, как выше) для эллиптических уравнений, в частности, с задачей Коши для уравнения Лапласа. Этим замечанием мы и ограничимся здесь, в надежде рассмотреть круг таких проблем позднее.

6. Одномерные обратные задачи

В данном разделе излагаются способы получения алгоритмов и формул для решений ряда одномерных обратных задач математической физики. В первых

двух теоремах этого раздела приводятся обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения третьего порядка с данными Коши, фактически устанавливающие связи рассматриваемых здесь обратных задач с обратными задачами теории рассеяния. Такой подход представляется нам оригинальным.

Дальнейшие исследования этого раздела связаны с формулами для решений ряда одномерных обратных задач поиска решения и двух взаимосвязанных коэффициентов. При этом следует подчеркнуть, что формулы получаются лишь тогда, когда ищутся два коэффициента. Таковы факты и с ними нужно считаться.

Начнем изложение с установления упомянутых связей уравнений третьего порядка с обратными задачами теории рассеяния.

В книге В.А. Юрко [24] показано, что обратные задачи теории рассеяния тесно связаны с обратными задачами для гиперболических уравнений, например, такой:

Найти функции $F(y,t)$, $q(y) = q(-y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, если выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + q(y)F, \tag{6.1}$$

$$F|_{y=0} = \theta(t), \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \tag{6.2}$$

$$F|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(y). \tag{6.3}$$

Обратная задача (6.1)–(6.3) связана с обратной задачей теории рассеяния и алгоритм ее решения состоит в следующем (см. [24, стр. 193]).

1. Строится функция $\Phi(y,t) = \frac{1}{2}(a(t+y) + a(t-y))$, где $a(t) = \theta'(t)$.

2. Находится функция $G(y,t)$ из уравнения Гельфанда-Левитана

$$G(y,t) + \Phi(y,t) + \int_0^y G(y,\tau)\Phi(t,\tau)d\tau = 0.$$

3. Вычисляется $q(y)$ по формуле

$$q(y) = 2\frac{d}{dy}G(y,y).$$

4. Определяется $F(y,t)$ соотношением

$$F(y,t) = \frac{1}{2}(\theta(t+y) + \theta(t-y)) + \frac{1}{2}\int_{-y}^{y} \theta(t-\tau)G(y,\tau)d\tau.$$

Учитывая вышесказанное, рассмотрим обратную задачу для дивергентного уравнения:

Найти функции $w(x,t)$, $A(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, если выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{6.4}$$

$$w|_{x=0} = \theta(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{6.5}$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x), \tag{6.6}$$

где $\theta(t)$ — некоторая бесконечно-дифференцируемая функция при $t \geq 0$, $\theta^{'}(0) = 0$, $\theta(+0) = 1$. Оказывается, имеет место

Теорема 6.1. *Решение обратной задачи* (6.4)–(6.6) *дается следующими формулами*

$$A(x) = \frac{1}{V^{'2}(x)}, \quad w(x,t) = \sqrt{V^{'}(x)}F(V(x),t),$$

где функция $V(x)$ — решение задачи Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$V^{'''} = 2q(V)V^{'3} + \frac{5(V^{''})^2}{2V^{'}},$$

$$V(0) = 0, \quad V^{'}(0) = 1, \quad V^{''}(0) = 0,$$

а функции $F(y,t)$, $q(y) = q(-y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, являются решением обратной задачи (6.1)–(6.3) и определены соотношениями 1-4.

Доказательство. Сначала приведем формулы преобразования для решений и коэффициентов уравнений второго порядка. В самом общем виде формулы выписаны в работе [10], а нам они понадобятся в следующем варианте.

Пусть функция $F = F(y,t)$, $y,\ t \in \mathbf{R}$, является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \widetilde{\alpha}(y)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \widetilde{\beta}(y)\frac{\partial F}{\partial y} + \widetilde{\sigma}(y)F, \tag{6.7}$$

Введем функцию $w = w(x,t)$ равенством

$$w = U(x)F(V(x),t), \tag{6.8}$$

где $U = U(x)$, $V = V(x)$ некоторые достаточно гладкие функции от переменной x. Тогда как показано в работе [10], функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial w}{\partial x} + C(x)w, \tag{6.9}$$

где коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ определены формулами

$$A(x) = \frac{\widetilde{\alpha}(V)}{V^{'2}}, \tag{6.10}$$

$$B(x) = \frac{\widetilde{\beta}(V)UV^{'2} - \widetilde{\alpha}(V)\left(2U^{'}V^{'} + UV^{''}\right)}{UV^{'3}}, \tag{6.11}$$

$$C(x) = \frac{\widetilde{\sigma}(V)U^2V^{'3} - \widetilde{\beta}(V)UU^{'}V^{'2} + \widetilde{\alpha}(V)\left(2U^{'2}V^{'} + UU^{'}V^{''} - UU^{''}V^{'}\right)}{U^2V^{'3}}. \tag{6.12}$$

(Все функции предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз.)

Пусть $F(y,t)$, $q(y)$ — решение обратной задачи (6.1)–(6.3). Положим $w(x,t) = U(x)F(V(x),t)$ и потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$B(x) = A^{'}(x), \quad C(x) = 0,$$

соответствующие уравнению (6.4), и выполнялось соответствие начально-краевой информации (6.2), (6.3) и (6.5), (6.6).

Так как $\widetilde{\alpha} = 1$, $\widetilde{\beta} = 0$, $\widetilde{\sigma} = q$, $B(x) = A^{'}(x)$, $C(x) = 0$, то получаются соотношения

$$U(x) = \sqrt{V^{'}(x)}, \;\; A(x) = \frac{1}{V^{'2}},$$

$$V^{'''} = 2q(V)V^{'3} + \frac{5(V^{''})^2}{2V^{'}}.$$

При этом, из согласования данных (6.2), (6.3) и (6.5), (6.6) следует, что функции $U(x)$, $V(x)$ удовлетворяют условиям

$$U(0) = 1, \;\; U^{'}(0) = 0, \;\; V(0) = 0, \;\; V^{'}(0) = 1. \tag{6.13}$$

Далее из представления для функции $U(x) = \sqrt{V^{'}(x)}$, находим соотношение $V^{''}(0) = 0$. Поэтому функция $V(x)$ однозначно находится как решение задачи Коши

$$V^{'''} = 2q(V)V^{'3} + \frac{5(V^{''})^2}{2V^{'}}.$$

$$V(0) = 0, \;\; V^{'}(0) = 1, \;\; V^{''}(0) = 0.$$

Следовательно, и функция $U(x) = \sqrt{V^{'}(x)}$ однозначно определена.

Теорема доказана.

Таким образом алгоритм решения обратной задачи (6.4)–(6.6) состоит в следующем:

1. По данным обратной задачи определяются данные для уравнения (6.1)
2. Решается обратная задача (6.1)–(6.3) по алгоритму 1–4.
3. По функции $q(y)$ обратной задачи (6.1)–(6.3) строится уравнение третьего порядка с данными Коши.
4. После решения задачи Коши функции $w(x,t)$ и $A(x)$ вычисляются по формулам.

Рассмотрим другую обратную задачу:

Найти функции $w(x,t)$, $A(x)$, $t \geq 0$, $x <\in \mathbb{R}$, такие, что выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{6.14}$$

$$w|_{x=0} = \theta(t), \;\; \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{6.15}$$

$$w|_{t=0} = 0, \;\; \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x), \tag{6.16}$$

где $\theta(t)$, $t \geq 0$, — некоторая бесконечно-дифференцируемая функция, $\theta^{'}(0) = 0$, $\theta(+0) = 1$.

В отличие от оператора уравнения (6.4) оператор $A(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ несамосопряжен.

Теорема 6.2. *Решение обратной задачи* (6.14)–(6.16) *дается следующими формулами*

$$A(x) = \frac{1}{V'^2(x)}, \;\; w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V'(x)}} F(V(x),t),$$

где функция $V(x)$ *— решение задачи Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка*

$$V''' = \frac{3(V'')^2}{2V'} - 2q(V)V'^3,$$

$$V(0) = 0, \;\; V'(0) = 1, \;\; V''(0) = 0,$$

а функции $F(y,t)$ *и* $q(y) = q(-y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, *являются решением обратной задачи* (6.1)–(6.3) *и определены соотношениями 1-4.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1. Отличие состоит лишь в том, что в случае (6.14) и при $B(x) = 0$, $C(x) = 0$ и получаются иные соотношения для $U(x)$ и $V(x)$, а именно,

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{V'(x)}}, \;\; V''' = \frac{3(V'')^2}{2V'} - 2q(V)V'^3,$$

что и приводит к новому дифференциальному уравнению третьего порядка и, соответственно, к другим формулам для решения обратной задачи.

Далее рассматриваются обратные задачи для гиперболических и параболических уравнений поиска решений и двух зависимых коэффициентов. Оказывается, в этом случае, конструктивно строятся решения и два взаимосвязанных коэффициента рассматриваемых обратных задач. Как будет ясно из дальнейшего, коэффициенты определяются разными формулами, но одной функцией, что по нашему мнению весьма любопытно.

Сначала рассматривается обратная задача для дивергентного уравнения:

Найти функции $w(x,t)$, $A(x)$, $C(x)$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + C(x)w, \tag{6.17}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \tag{6.18}$$

$$w|_{x=0} = \alpha(t), \;\; \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t), \tag{6.19}$$

где $w_0(x) > 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $w_0(0) = \alpha(0)$, $w_0'(0) = \beta(0)$ заданные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, $0 \leq x < \infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 6.3. *Имеют место формулы*

$$w(x,t) = \sqrt{V'(x)}\left[\frac{\alpha(t+V(x)) + \alpha(t-V(x))}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{t-V(x)}^{t+V(x)} \beta(p)dp\right],$$

$$A(x) = \frac{1}{V'^2}, \;\; C(x) = \frac{5(V'')^2 - 2V'''V'}{4(V')^4},$$

где

$$V(x) = \varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x w_0^2(p)dp\right),$$

$y = \varphi^{-1}(z)$ — *обратная функция к*

$$z = \varphi(y) = \int\limits_0^y \left[\frac{\alpha(p)+\alpha(-p)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-p}^{p}\beta(\zeta)d\zeta\right]^2 dp, \;\; y \geq 0.$$

Доказательство. Функция

$$F(y,t) = \frac{\alpha(t+y)+\alpha(t-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{t-y}^{t+y}\beta(p)dp$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

и данным Коши

$$F|_{y=0} = \alpha(t), \;\; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = \beta(t).$$

Поэтому функция

$$w(x,t) = U(x)F(V(x),t),$$

где $U(x), V(x)$ — произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции удовлетворяет уравнению (6.17) при условиях, что $\widetilde{\alpha} = 1$, $\widetilde{\beta} = 0$, $\widetilde{\sigma} = 0$, $B(x) = A^{'}(x)$. Эти условия приводят к соотношениям

$$U(x) = \sqrt{V'(x)}, \;\; A(x) = \frac{1}{V'^2}, \;\; C(x) = \frac{5(V^{''})^2 - 2V^{'''}V^{'}}{4(V')^4}.$$

Остается найти функцию $V(x)$ такую, что $V(0) = 0$, $V^{'}(0) = 1$, $V^{''}(0) = 0$. В силу равенства

$$w_0^2(x) = U^2(x)F^2(V(x),0) = V^{'}(x)F^2(V(x),0)$$

имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для $V(x)$

$$V^{'}(x) = \frac{w_0^2(x)}{F^2(V(x),0)}. \tag{6.20}$$

Легко видеть, что функция

$$V(x) = \varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x w_0^2(p)dp\right),$$

где $y = \varphi^{-1}(z)$ — обратная функция к строго монотонной функции

$$z = \varphi(y) = \int\limits_0^y \left[\frac{\alpha(p)+\alpha(-p)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-p}^{p}\beta(\zeta)d\zeta\right]^2 dp, \;\; y \geq 0,$$

удовлетворяет уравнению (6.20) и данным $V(0) = 0$, $V'(0) = 1$, $V''(0) = 0$. В силу этого функция

$$w(x,t) = \sqrt{V'(x)}F(V(x),t)$$

удовлетворяет граничным условиям

$$w|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t).$$

Теорема доказана.

Замечание. Как было отмечено, найденные коэффициенты $A(x)$, $C(x)$ не являются произвольными, так как они определяются одной функцией $V(x)$.

Аналогично предыдущей рассмотрим обратную задачу поиска функций $w(x,t)$, $A(x)$, $C(x)$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C(x)w$$

с начально-краевыми условиями

$$w|_{t=0} = w_0(x),$$

$$w|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t),$$

где $w_0(x) > 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $w_0(0) = \alpha(0)$, $w_0'(0) = \beta(0)$ заданные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, $0 \le x < \infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Имеет место

Теорема 6.4. *Имеют место формулы*

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V'(x)}}\left[\frac{\alpha(t+V(x)) + \alpha(t-V(x))}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{t-V(x)}^{t+V(x)} \beta(p)dp\right],$$

$$A(x) = \frac{1}{V'^2}, \quad C(x) = \frac{2V'''V' - 3(V'')^2}{4(V')^4},$$

где

$$V(x) = \varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x \frac{dp}{w_0^2(p)}\right),$$

$y = \varphi^{-1}(z)$ — *обратная функция к*

$$z = \varphi(y) = \int\limits_0^y \frac{dp}{\left[\frac{\alpha(p)+\alpha(-p)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-p}^{p}\beta(\zeta)d\zeta\right]^2}, \quad y \ge 0.$$

Доказательство данной теоремы аналогично предыдущей, но так как в данном случае $B(x) = 0$, то получаются другие соотношения:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{V'(x)}}, \quad A(x) = \frac{1}{V'^2}, \quad C(x) = \frac{2V'''V' - 3(V'')^2}{4(V')^4},$$

$$z=\varphi(y)=\int\limits_0^y \frac{dp}{\left[\frac{\alpha(p)+\alpha(-p)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{-p}^{p}\beta(\zeta)d\zeta\right]^2},\ \ V(x)=\varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x \frac{dp}{w_0^2(p)}\right).$$

Для параболических уравнений явные формулы для решений обратных задач получаются с точностью до решения задачи Коши

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial F}{\partial t},$$

$$F|_{y=0}=\alpha(t),\ \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0}=\beta(t).$$

Так обратная задача для параболического самосопряженного уравнения состоит в поиске функций $w(x,t)$, $A(x)$, $C(x)$ таких, что

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+C(x)w,$$

$$w|_{t=0}=w_0(x),$$

$$w|_{x=0}=\alpha(t),\ \ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=\beta(t),$$

где $w_0(x)>0$, $\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$, $w_0(0)=\alpha(0)$, $w_0^{'}(0)=\beta(0)$ заданные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, $0\le x<\infty$, $t\in\mathbb{R}$.

Имеет место

Теорема 6.5. *Пусть $F(y,t)$ — решение задачи Коши по переменной y*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial F}{\partial t},\ \ F|_{y=0}=\alpha(t),\ \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0}=\beta(t)$$

и $\varphi(y)=\int\limits_0^y F_0^2(p)dp$, $F_0(p)=F(p,0)$. Имеют место формулы

$$w(x,t)=\sqrt{V'(x)}F(V(x),t),$$

$$A(x)=\frac{1}{V'^2},\ \ C(x)=\frac{5(V'')^2-2V'''V'}{4(V')^4},$$

где

$$V(x)=\varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x w_0^2(p)dp\right).$$

Для несамосопряженного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t}=A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C(x)w$$

с начально-краевыми условиями

$$w|_{t=0}=w_0(x),$$

$$w|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t),$$

где $w_0(x) > 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $w_0(0) = \alpha(0)$, $w_0'(0) = \beta(0)$ заданные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, $0 \le x < \infty$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место

Теорема 6.6. *Пусть $F(y,t)$ — решение задачи Коши по переменной y*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad F|_{y=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = \beta(t)$$

и $\varphi(y) = \int\limits_0^y \dfrac{dp}{F_0^2(p)}$, где $F_0(p) = F(p,0)$. Тогда имеют место формулы

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V'(x)}} F(V(x),t),$$

$$A(x) = \frac{1}{V'^2}, \quad C(x) = \frac{2V'''V' - 3(V'')^2}{4(V')^4},$$

где

$$V(x) = \varphi^{-1}\left(\int\limits_0^x \frac{dp}{w_0^2(p)}\right).$$

В заключение работы ограничимся одним примером одномерной обратной задачи поиска решения и двух взаимосвязанных, определяемых одной функцией, коэффициентов уравнения акустики:

Найти функции $w(x,t)$, $a(x)$, $b(x)$ такие, что

1) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $x \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $w|_{x=0} = \alpha(t)$, $\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t)$, $t \in \mathbb{R}$;

3) $w|_{t=0} = w_0(x)$, $x \ge 0$

и функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $w_0(x)$ известны.

Теорема 6.7. *Пусть $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $w_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции и такие, что $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$, $w_0(0) = 0$, $w_0'(0) = 1$. Тогда в окрестности начала координат имеют место формулы*

$$w(x,t) = \frac{1}{1 - V(x)} \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x))\right),$$

$$a(x) = \frac{1}{(V')^2}, \quad b(x) = -\frac{1}{V'}\left(\frac{1}{1-V} + \frac{V''}{(V')^2}\right),$$

где

$$F(y) = \frac{\alpha(y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^y (\beta(p) - \alpha(p))dp, \quad G(y) = \frac{\alpha(y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^y (\beta(p) - \alpha(p))dp,$$

$$V(x) = \psi^{-1}(w_0(x)), \quad \psi(y) = \frac{1}{1-y}\left(F(y) + G(-y)\right).$$

Доказательство. В силу утверждения леммы 1.1 данной работы функция

$$w(x,t) = \frac{1}{1-V(x)}\left(F(t+V(x)) + G(t-V(x))\right)$$

является решением уравнения 1) с коэффициентами

$$a(x) = \frac{1}{(V')^2},\ \ b(x) = -\frac{1}{V'}\left(\frac{1}{1-V} + \frac{V''}{(V')^2}\right),$$

где $F(y)$, $G(y)$, $V(z)$ — произвольные функции. Остается проверить, что выполняются условия 2), 3).

Сначала найдем $V(0)$. Так как $F(0) = G(0) = 0$, то $\psi(0) = 0$. Из соотношения $\psi(V(x)) = w_0(x)$ и того что $w_0(0) = 0$ получаем $V(0) = 0$.

Затем найдем $V'(0)$. Продифференцируем равенство

$$\frac{1}{1-V(x)}\left(F(V(x)) + G(-V(x))\right) = w_0(x)$$

и подставим $x = 0$. Получим

$$V'(0)\beta(0) = w_0'(0).$$

Следовательно, так как $\beta(0) = 1 w_0'(0) = 1$, $V'(0) = 1$.

Проверим, что выполняются условия 2), 3). Действительно,

$$w|_{x=0} = F(t) + G(t) = \alpha(t),$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(\frac{V'}{(1-V)^2}\left(F(V) + G(-V)\right) + \frac{V'}{1-V}\left(F'(V) - G'(-V)\right)\right)_{x=0} =$$

$$= F(t) + G(t) + F'(t) - G'(t) = \alpha(t) + \beta(t) - \alpha(t) = \beta(t),$$

$$w|_{t=0} = \frac{1}{1-V(x)}\left(F(V(x)) + G(-V(x))\right) = w_0(x).$$

Теорема доказана.

Другие сходные результаты по одномерным обратным задачам поиска трех связанных коэффициентов можно найти в работе [13].

Список литературы

[1] С.Л. Соболев , *Функционально-инвариантные решения волнового уравнения*, Труды физ.-мат. инст. им. Стеклова В.А., **5** (1934), 259–264.

[2] А.Н. Колмогоров, *Об аналитических методах в теории вероятностей*, Успехи мат. наук, **5** (1938), 5–41.

[3] С.А. Габов,А.Г. Свешников, *Задачи динамики стратифицированных жидкостей*, М.:Наука, 1986.

[4] *Нелинейные волны*, Москва: Мир, 1977.

[5] А.В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, М.:Наука, 1982.

[6] М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г. Яхно, *Одномерные обратные задачи математической физики*, Новосибирск: Наука, 1982.

[7] Ю.Е. Аниконов, *Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений*, Новосибирск: Наука, 1978.

[8] Yu.E. Anikonov, *Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems*, VSP, Utrecht, 1997.

[9] Ю.Е. Аниконов, *К теории конструктивного исследования обратных задач для эволюционных уравнений*, Препринт **143**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2004.

[10] Ю.Е. Аниконов, Н.Б. Аюпова, *Формулы для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка и обратные задачи*, Препринт **165**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2005.

[11] Ю.Е. Аниконов, *Конструктивные методы исследования обратных задач для эволюционных уравнений*, Сибирский журнал индустриальной математики,**11**:2 (2008), 3–20.
[12] Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим, *Аналитические представления решений ряда обратных задач математической физики*, Препринт **N 218**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2009.
[13] Ю.Е. Аниконов, Ю.В. Кривцов, М.В. Нещадим, *Нелинейные задачи теории управления*, Препринт **227**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2009.
[14] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М.:Наука, 1981.
[15] Д.И. Блохинцев, *Акустика неоднородной движущейся среды*, Москва. ОГИЗ. Гостехиздат, 1964.
[16] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, М.:Наука, 1977.
[17] Ю.Е. Аниконов, С.Г. Пятков, *О некоторых представлениях решений обратных задач для уравнений второго порядка*, Межвузовский сборник научных трудов "Неклассические уравнения математической физики", Новосибирск (1993), 108–111.
[18] В.П. Маслов, *Операторные методы*, М.:Наука,1973.
[19] Г.И. Марчук, *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*, Математическое моделирование. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.:Наука (1989), 238–254.
[20] А.С. Малков, Г.Г. Малинецкий, Д.С. Чернавский, *Моделирование развития аграрных обществ с позиции нелинейной динамики*, Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. М.:Наука (2007), 134–148.
[21] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Москва, Мир, 1987.
[22] Л. Льюнг, *Идентификация систем. Теория для пользователя*, М.: Наука, 1991.
[23] Congweu Liu, Lizhong Peng, *Generalized Helgason-Fourier transforms associated to variants of the Laplace-Beltrami operators on the unit ball in* $\mathbb{R}^n$, Indiana University Math. Journal, **58**:3 (2009), 1457–1491.
[24] В.А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Юрий Евгеньевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anikon@math.nsc.ru

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.62–С.72 (2010)

УДК 514.17
MSC 52A20

РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕВЫПУКЛЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ И КРУГОВЫМ ПРОЕКЦИЯМ

В.П.Голубятников

Abstract.

Описаны некоторые неклассические задачи геометрической томографии. Ряд известных результатов о реконструкции выпуклых тел по их проекциям переносится на случаи невыпуклых тел, а также и других многомерных объектов. Наряду с ортогональными проекциями таких объектов рассмотрены также и их круговые проекции — проекции вдоль дуг окружностей. Изучены некоторые расширения класса выпуклых тел с использованием вместо опорных гиперплоскостей опорных двугранных углов, опорных шаров или цилиндров больших радиусов.

Keywords: выпуклость, ε-выпуклость, геометрическая томография, видимые контуры

1. Введение

В этом кратком обзоре мы опишем некоторые неклассические задачи геометрической томографии, в которых ряд известных результатов о реконструкции выпуклых тел по их проекциям переносится на случаи невыпуклых тел, а

В.П.Голубятников, Реконструкция невыпуклых объектов по прямолинейным и круговым проекциям.

© 2010 Golubyatnikov V.P.

Работа поддержана грантом 09-01-00070 РФФИ, и программой АВЦП "Развитие научного потенциала Высшей школы", проект № 2.1.1/3707.

Поступила 22 сентября 2009 г.

также и других многомерных объектов. Наряду с ортогональными проекциями таких объектов мы будем рассматривать также и их круговые проекции — проекции вдоль дуг окружностей.

Одна из целей таких исследований связана в частности с тем, что при изучении распространения волновых фронтов с помощью лучевого метода приходится учитывать тот факт, что области пространства, в которые эти лучи не попадают, тоже оказывают влияние на волновые поля. Наибольшее влияние на эти поля оказывают те области, которые ближе к границе соответствующей выпуклой оболочки, см, например, [3], [8].

Основные вопросы, которыми мы занимаемся в наших рассмотрениях, имеют почти алгебраическую формулировку:

ВОПРОС 1. О единственности. «Пусть у двух компактных тел $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ ортогональные проекции на любую гиперплоскость (или на любую плоскость фиксированной размерности $k > 1$) эквивалентны относительно преобразований из некоторой группы G аффинных преобразований плоскости. Будут ли эти тела V_1 и V_2 эквивалентными относительно какого-либо аффинного преобразования объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$?»

ВОПРОС 2. Об устойчивости. «Пусть $\varepsilon > 0$ и у двух тел $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ ортогональные проекции на любую гиперплоскость (или на любую плоскость фиксированной размерности $k > 1$) эквивалентны относительно некоторой группы G аффинных преобразований плоскости с точностью до εd. Будут ли эти тела V_1, V_2 эквивалентными относительно какого-либо аффинного преобразования объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$ с точностью до $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, d)$?»

Здесь d — максимальный из диаметров этих двух тел.

Близость тел мы измеряем стандартной метрикой Хаусдорфа

$$d(X,Y) = \max\{\sup_x\{d(x,Y); x \in X\}, \sup_y\{d(y,X); y \in Y\}\},$$

с помощью которой во множестве всех компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ вводится метрика и соответствующая топология. Метрика Хаусдорфа естественным образом порождает трансляционное расстояние $d_t(X,Y) = \inf\limits_{p\in\mathbb{R}^n}\{d(X+p,Y)\}$ между множествами $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ и расстояние $d_G(X,Y) = \inf\limits_{g\in G}\{d(g(X),Y)\}$ между множествами относительно произвольной группы G преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Групповые свойства задач геометрической томографии для выпуклых и обозримых тел

а). Как легко видеть, два негомеоморфных друг другу невыпуклых тела могут иметь попарно гомеоморфные проекции на любую (гипер)плоскость.

Например, пусть тело Q_1 получено из куба $-1 \le x, y, z \le +1$ вырезанием двух пересекающихся цилиндров $x^2 + y^2 \le 1/9$ и $x^2 + z^2 \le 1/9$, а тело Q_2 получено из этого же куба вырезанием двух непересекающихся цилиндров $(x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/9$ и $(x + 1/2)^2 + z^2 \le 1/9$. Можно проверить, что построенные невыпуклые тела Q_1 и Q_2 негомеоморфны друг другу, но, как легко видеть, для каждой плоскости $P \subset \mathbb{R}^3$ проекции этих двух тел на плоскость P гомеоморфны.

Поэтому для групп преобразований более сложных, чем аффинные или проективные, указанные вопросы 1 и 2 следует формулировать иным образом.

b). Случай, когда группа G является группой параллельных переносов, а тела V_1 и V_2 выпуклы, хорошо известен:

ЛЕММА ЗЮССА. ([1]). *Пусть ортогональные проекции двух выпуклых тел $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, на любую гиперплоскость, эквивалентны относительно группы параллельных переносов. Тогда эти тела совмещаются в $\mathbb{R}^n$ параллельным переносом.*

Лемма легко переносится на случай проектирования тел V_1 и V_2 на плоскости любых размерностей k при $2 \leq k \leq n-1$ и на случаи "более экономных"наборов проекционных данных. Условие $k > 1$ здесь существенно, поскольку нетривиальные тела постоянной ширины $2w$ при ортогональном проектировании на любую прямую дают отрезок длины $2w$, так же, как и шар радиуса w.

ТЕОРЕМА 1. (Х.Грёмер, [14]). *Пусть $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ — два выпуклых компактных тела и $\varepsilon \geq 0$. Если для любого единичного вектора $\omega \in S^{n-1}$ проекции этих тел $M(\omega)$, $N(\omega)$ на гиперплоскость $P(\omega)$ с единичной нормалью ω параллельны с точностью до ε: $d_t(M(\omega), N(\omega)) \leq \varepsilon$, то $d_t(M, N) \leq (1 + 2\sqrt{2})\varepsilon$.*

Подобная оценка была получена Грёмером и для проекций на k-мерные плоскости, $2 \leq k < n$, и для выпуклых тел, у которых ортогональные проекции на любую гиперплоскость гомотетичны с точностью до $\varepsilon \geq 0$. Как заметил Грёмер, в этой оценке коэффициент $1+2\sqrt{2}$ по-видимому не является наилучшим.

Энциклопедический обзор широкого круга подобных задач, относящихся к томографическому просвечиванию однородных выпуклых и звёздных тел, содержится в монографии [7].

c). Обозначим через $SI(k)$ группу сохраняющих ориентацию изометрических преобразований k-мерной плоскости, а через $SC(k)$ — группу сохраняющих ориентацию преобразований подобия на k-мерной плоскости.

ТЕОРЕМА 2. ([10]). *Пусть ортогональные проекции выпуклых тел $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, на любую двумерную плоскость, эквивалентны относительно группы $SI(2)$ (или относительно группы $SC(2)$) и не имеют симметрий относительно группы $SO(2)$, то есть относительно вращений. Тогда эти тела совмещаются в $\mathbb{R}^n$ либо параллельным переносом, либо центральной симметрией (соответственно — либо параллельным переносом, либо гомотетией).*

Условие отсутствия симметрий относительно вращений выглядит здесь несколько искусственно, но в случае группы $SC(2)$ оно оказывается необходимым, поскольку существуют примеры аффинно неэквивалентных пар выпуклых центрально-симметричных тел в $\mathbb{R}^3$, у которых проекции на любую двумерную плоскость подобны, см. например [7]. Насколько это условие асимметричности проекций необходимо в случае группы $SI(2)$, автору неизвестно. Для выпуклых тел с гладкими границами это условие удаётся немного ослабить. Именно, здесь достаточно требовать асимметричности проекций, которые являются фигурами постоянной ширины.

ТЕОРЕМА 3. ([10]). *Пусть у выпуклых тел* $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, *количество максимумов функции ширины конечно, и их проекции на любую трёхмерную плоскость эквивалентны относительно группы* $SI(3)$ *(или относительно группы* $SC(3)$ *) и не имеют симметрий относительно группы* $SO(3)$. *Тогда эти тела совмещаются в* $\mathbb{R}^n$ *параллельным переносом (соответственно — либо параллельным переносом, либо гомотетией с положительным коэффициентом).*

Следует отметить, что в пространстве всех компактных выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ тела, имеющие конечное число максимумов функции ширины, а также тела, у которых проекции на двумерные или на трёхмерные плоскости не имеют симметрий относительно соответствующих групп преобразований, образуют открытые всюду плотные множества.

Теорема Грёмера об устойчивости [14] также допускает некоторое распространение на группы преобразований, более общие, чем группа параллельных переносов. В частности имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. ([10]). *Пусть* $V_1 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *компактное выпуклое тело, у которого проекции на любую двумерную плоскость не имеют* $SO(2)$*-симметрий и не являются фигурами постоянной ширины. Обозначим через* ε_0 *такое положительное число, что в* ε_0*-окрестности границы проекции тела* V_1 *на любую двумерную плоскость не содержатся замкнутых кривых, имеющих* $SO(2)$*-симметрий.*

Тогда существует ε_1, $(\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0)$ *такое, что если* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *и проекция компактного выпуклого тела* $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ *на любую двумерную плоскость* $d_{SI(2)}\varepsilon$*-близка к соответствующей проекции тела* V_1, *то эти тела* V_1 *и* V_2 *либо параллельны, либо центрально-симметричны друг другу с точностью до* $3d(1+2\sqrt{2})^{n-2}\varepsilon^{1/3}$.

Как и в теореме Грёмера, эта оценка, по-видимому, не является точной.

d). Описанные выше результаты переносятся и на широкие классы невыпуклых тел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Компактное тело* $W \subset \mathbb{R}^n$ *(или в комплексном пространстве* $\mathbb{C}^n$*) назовём* k**-обозримым**, *если каждая* $(k-m)$*-мерная плоскость, не пересекающаяся с* W, *содержится в некоторой* k*-мерной плоскости, также не пересекающейся с* W. *Здесь* $0 < m \leq k < n$.

Компактное тело $W \subset \mathbb{R}^n$ *(или в комплексном пространстве* $\mathbb{C}^n$*) назовём* k**-выпуклым**, *если каждая точка* $x \notin W$ *содержится в некоторой* k*-мерной плоскости, не пересекающейся с* W.

Теорема 2 справедлива также и для $(n-2)$-обозримых тел в $\mathbb{R}^n$, а теорема 3 — для $(n-3)$-обозримых тел в $\mathbb{R}^n$. Соответствующие утверждения имеют место и для комплексных евклидовых пространств. В этом случае в качестве групп преобразований выбираются группы $U(k)$, $SU(k)$ и т.п. Коэффициенты гомотетии в таких рассмотрениях вообще говоря комплексны. Аналогичные утверждения можно формулировать и для класса k-выпуклых тел в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, см. [10]. Отметим, что k-выпуклые тела естественным образом появляются во многих геометрических задачах комплексного анализа, см., например, [22].

Для обозримых тел аналогов теоремы Грёмера об устойчивости не существует. Нетрудно построить пример обозримого тела W такого, что его расстояние

от единичного шара $B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ с центром в начале координат сколь угодно близко к единице, а расстояния между проекциями тел W и $B(0,1)$ на любую плоскость сколь угодно малы. В таком примере тело W расположено в малой окрестности границы шара $B(0,1)$. Однако, некоторые результаты о такой устойчивости могут быть получены для более узкого, чем класс обозримых тел, класса α-топорных компактных тел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ([10]) *Пусть* $\alpha \in (0,\pi]$. *Компактное тело* $W \subset \mathbb{R}^n$ *назовём* α**-топорным**, *если каждая точки* $x \notin W$ *содержится во внутренности некоторого двугранного угла, не пересекающегося с* W.

При $\alpha = \pi$ класс α-топорных компактных тел совпадает с классом выпуклых компактных тел.

Следующее наблюдение принадлежит Ю.Е.Аниконову.

Поскольку семейство α-топорных компактов, содержащихся в шаре, компактно, из общей теории условно-корректных задач следует, что для достаточно малого ε найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon,\alpha)$, что если у двух α-топорных компактов проекции на любую плоскость δ-близки, то и сами эти компакты ε-близки в объемлющем пространстве.

3. Томография тонких пленок

В дальнейшем под томографической проекцией измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ в направлении ω будем называть функцию, сопоставляющую каждой прямой $l = \{x = x_0 + t\cdot\omega\}$ меру пересечения $l \cap A$, то есть интеграл от характеристической функции множества A по прямой l.

В интегральной геометрии и в классической томографии в качестве проекционных данных обычно используются интегралы от неизвестных функций (вектор-функций, тензорных полей и т.п.) по таким прямым, лучам или по другим многообразиям из некоторого фиксированного класса.

При томографическом проецировании тонкой плёнки толщины ε для прямых, пересекающих её трансверсально, мера пересечения имеет порядок ε, а прямые, касающиеся этой плёнки, пересекаются с ней по множеству, имеющему меру порядка $\sqrt{\varepsilon}$ или больше, и потому дают на проекции очень заметный образ. Это явление можно наблюдать при проектировании на экран с помощью "оверхеда"согнутого листа прозрачной плёнки.

Пусть $M^{n-1} = M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая компактная гиперповерхность, $P(\omega)$ — гиперплоскость, перпендикулярная единичному вектору ω, и $\pi_\omega : M \to P(\omega)$ — отображение проектирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. **Видимым контуром** *гладкой гиперповерхности* $M \subset \mathbb{R}^n$ *на гиперплоскости* $P(\omega)$ *назовём множество* $C(M,\omega)$ *таких точек* y *этой плоскости, для которых прямая* $x = y + t\omega$ *касается поверхности* M *в некоторой точке.*

Определим также особенность $\Sigma(\omega)$ проектирования π_ω как множество таких точек поверхности M, в которых матрица Якоби $J(\omega)$ этого отображения π_ω вырождается. Аналогично определяются видимые контуры на плоскостях произвольных размерностей в $\mathbb{R}^n$.

На языке теории особенностей гладких отображений (см., например, [2]) видимый контур поверхности M можно определить и так: $C(M,\omega) = \pi_\omega(\Sigma(\omega))$.

Легко проверить, что видимым контуром выпуклой гладкой гиперповерхности M на плоскости $P(\omega)$ является граница ортогональной проекции M на плоскость $P(\omega)$. У невыпуклой гиперповерхности комбинаторное строение видимого контура может оказаться довольно сложным даже в случае пространств небольших размерностей. Например, при $n = 3$ видимый контур гладкой поверхности может оказаться кусочно гладкой кривой, у которой гладкость нарушается в точках возврата. Как было отмечено в [16], по этой комбинаторной структуре можно определять эйлерову характеристику проектируемой поверхности. Коллекция некоторых неочевидных примеров представлена в [16], см. также [2], [10].

ТЕОРЕМА 5. ([10]). *Пусть $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ — гладкие компактные замкнутые поверхности, и пусть для каждой плоскости $P(\omega)$ видимые контуры $C(M_1, \omega)$, $C(M_2, \omega)$ эквивалентны относительно группы $SI(2)$ (или относительно группы $SC(2)$), и выпуклые оболочки этих контуров не имеют симметрий относительно группы $SO(2)$. Тогда эти поверхности совмещаются в $\mathbb{R}^3$ либо параллельным переносом, либо центральной симметрией (соответственно — либо параллельным переносом, либо гомотетией).*

Эта теорема допускает естественное обобщение и на многомерные пространства. В теоремах 2 и 5 допускаются гомотетии с отрицательными коэффициентами.

4. Расширения класса выпуклых тел. Множества положительной достижимости

Фиксируем малое положительное $\varepsilon > 0$. Используя вместо опорных гиперплоскостей опорные шары радиусов $1/\varepsilon$, мы строим серию естественных расширений класса компактных выпуклых тел. Такие же расширения можно конструировать с помощью цилиндров больших радиусов и других аналогичных тел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. ([11, 12]). *Компактное тело $K \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу K_1^ε, если каждая точка на границе тела K принадлежит некоторому внешнему опорному шару тела K, который имеет радиус $1/\varepsilon$.*

Компактное тело $K \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу K_2^ε, если каждая точка $x \notin K$ принадлежит некоторому шару радиуса $1/\varepsilon$, не пересекающемуся с внутренностью тела K.

Компактное тело $K \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу K_3^ε, если каждый опорный к K шар радиуса $r < 1/\varepsilon$ лежит внутри внешнего опорного к K шара радиуса $1/\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 6. ([11]). *Имеют место* **строгие** *включения $K_3^\varepsilon \subset K_2^\varepsilon \subset K_1^\varepsilon$.*

В случае, когда $\varepsilon = 0$, т.е., когда вместо шаров рассматриваются полупространства, второй и третий классы совпадают с классом выпуклых тел. Для сокращения изложения мы будем называть тела из всех трёх классов ε-выпуклыми.

Несложный пример тела $W \in K_2^\varepsilon \setminus K_3^\varepsilon$ в неодносвязном случае можно построить, вырезав из цилиндра $\{x^2 = y^2 \leq 9; 0 \leq z \leq 0,1\}$ его пересечение с шаром $B(C, 1/\varepsilon)$ радиуса $1/\varepsilon$ и центром в точке $C = (0; 0; \sqrt{1/\varepsilon^2 - 4})$. Как легко видеть, полученное «кольцо Сатурна» является телом класса K_2^ε, но если такой «Сатурн» имеет радиус 1,9 и центр в начале координат, то от своего

кольца он никакой сферой радиуса $1/\varepsilon$ не отделяется, и значит, построенное тело W классу K_3^ε не принадлежит.

Сдвинув шар $B(C,1/\varepsilon)$ в любом горизонтальном направлении на расстояние 1,1, мы получим аналогичный пример тела из $K_2^\varepsilon \setminus K_3^\varepsilon$ гомеоморфного шару.

Можно проверить, что класс K_3^ε совпадает с описанным Федерером в [6] классом множеств положительной достижимости $1/\varepsilon$:

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ имеет положительную достижимость $r>0$, если для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$, удаленной от M не более, чем на r, в M существует единственная точка ближайшая к x.

Классы k-выпуклых и k-обозримых тел также допускают подобные расширения, см. [12].

Как отмечено в [21], множества положительной достижимости по своим геометрическим и аналитическим свойствам занимают промежуточное положение между телами с гладкими границами и многогранниками. Например, для множеств положительной достижимости можно выписывать формулы объёмов трубок, см. [19]. Очевидным образом любое выпуклое множество принадлежит классу K_3^ε, а невыпуклые многогранники этому классу не принадлежат.

5. Реконструкция многомерных объектов по круговым проекциям

Будем называть $(n-k)$**-мерной плоскостью с выколотой точкой** всякую $(n-k)$-мерную плоскость $P(C) \subset \mathbb{R}^n$, в которой выделена какая-либо её точка $C \in P(C)$. Через $P^\perp(C)$ будем обозначать k-мерную плоскость с выколотой точкой C, ортогональную к $P(C)$. Пусть $S^{n-1}(C,r)$ — сфера радиуса $r>0$ с центром в C и $S^{n-k-1}(P(C),r) = S^{n-1}(C,r) \cap P(C)$ — сфера с тем же радиусом и центром. Для каждой точки $x \notin P^\perp(C)$ обозначим через $S^\perp(P(C),x)$, проходящую через x большую k-мерную сферу в сфере $S^{n-1}(C,|Cx|)$, ортогональную к большой сфере $S^{n-k-1}(P(C),|Cx|)$, и через $R(V)$ — радиус наименьшего шара $B \subset \mathbb{R}^n$, который содержит тело V.

Для $(n-k)$-мерной плоскости $P(C)$ с выколотой точкой определим **круговую проекцию** $f_{P(C)} : \mathbb{R}^n \setminus P^\perp(C) \to P(C) \setminus C$ следующим образом:

Для каждой точки $x \notin P^\perp(C)$ пусть $f_{P(C)}(x)$ — это ближайшая к x точка сферы $S^{n-k-1}(P(C),|Cx|) \subset P(C)$.

Для двумерной плоскости $P(C) \subset \mathbb{R}^3$ обозначим через $Rot_3(C)$ группу всех вращений $\mathbb{R}^3$ вокруг прямой, перпендикулярной $P(C)$ и проходящей через выколотую точку C. Пусть $d_{rC}(V_1,V_2) = \inf\limits_{\varphi \in Rot_3(C)} \{d(\varphi(V_1),V_2);\}$.

Будем обозначать через $\mathbf{E_1}(V_1,V_2)$ и $\mathbf{E_2}(V_1,V_2)$ достаточно плотные наборы гиперплоскостей $P(C,\omega)$ с выколотыми точками C и единичными нормалями ω, удаленными от компактных ε-выпуклых тел V_1 и V_2 на подходящие расстояния.

Именно, пусть $\mathbf{E_1}(V_1,V_2)$ состоит из таких гиперплоскостей $P(C,\omega)$, что множество Ω_1 всех единичных нормалей к этим гиперплоскостям пересекается с любой большой $(n-2)$-мерной сферой в S^{n-1}, и либо $d(C,V_1) < 2/\varepsilon$ и $P(C,\omega)$ пересекается с V_2, либо $d(C,V_2) < 2/\varepsilon$ и $P(C,\omega)$ пересекается с V_1.

Множество $\mathbf{E_2}(V_1,V_2)$ и соответствующее множество единичных нормалей Ω_2 определяются аналогичным образом, см. [11].

ТЕОРЕМА 7. ([11]). *Пусть компактные тела $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ принадлежат классу K_2^ε и $d(V_1,V_2) < 1/\varepsilon$. Если для всех гиперплоскостей $P(C) \in \mathbf{E_1}(V_1,V_2)$*

соответствующие круговые проекции тел V_1 *и* V_2 *совпадают, то и сами эти тела совпадают.*

Итак, для класса K_2^ε ответ на вопрос о единственности при указанных условиях оказывается положительным. Для изучения вопроса об устойчивости нам понадобилось рассматривать более узкий класс компактных тел K_3^ε.

ТЕОРЕМА 8. ([11]). *Пусть компактные тела* $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ *принадлежат классу* K_3^ε *и* $d(V_1, V_2) < 1/(2\varepsilon)$. *Предположим также, что* $R(V_1) < 1/(3\varepsilon)$. *Тогда если для всех гиперплоскостей* $P(C) \in \mathbf{E_2}(V_1, V_2)$ *расстояния между круговыми проекциями тел* V_1 *и* V_2 *в трансляционной метрике* d_t *не превосходят* ε, *то* $d_t(V_1, V_2) < 2(\sqrt{2R(V_1)} + \sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon}$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для тел $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ и метрики d_{rC}, см. [11]. Для ортогональных проекций выпуклых тел подобные оценки были получены в [14], [15].

6. Некоторые задачи геометрической томографии с неполными наборами данных

Задачи восстановления многомерных объектов по неполным наборам проекционных данных, подобные тем, которые мы описали в предыдущих двух теоремах, особенно актуальны в компьютерной томографии, см., например, [4], [20].

Как хорошо известно, для восстановления финитной регулярной функции двух и более переменных по томографическим проекциям необходимо иметь в распоряжении бесконечное количество направлений таких проекций. Для любого конечного набора $l_1, \ldots, l_k$ направлений можно построить примеры ненулевых финитных функций с нулевыми интегралами вдоль любой прямой, параллельной любому из перечисленных направлений, см. [17].

Однако, если заранее известно, что таким интегральным преобразованием восстанавливается характеристическая функция выпуклого множества, то ситуация значительно упрощается. Отметим, что томографическая проекция $F(x)$ выпуклого множества V в направлении оси Oy несложным образом связана со штейнеровской симметризацией $S_x(V)$ этого множества относительно оси Ox, именно, если обозначить через $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$, границу этой симметризации, то прямо по определению $2f(x) = F(x)$, см., например, [5]. Аналогично связаны штейнеровские симметризации выпуклых множеств и их соответствующие томографические проекции для любого направления.

ТЕОРЕМА 9. ([7]). *Характеристическая функция выпуклого множества в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *однозначно определяется томографическими проекциями, сделанными вдоль любых четырёх компланарных направлений, которые аффинно неэквивалентны никакому подмножеству направлений сторон какого-либо правильного плоского многоугольника.*

Как показано в [7], указанное условие аффинной неэквивалентности является здесь необходимым. В [9] было установлено, что выпуклый многогранник однозначно определяется почти любой парой своих томографических проекций. Г.Г.Лоренц ([18]) установил необходимые и достаточные условия восстановимости измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ по двум его томографическим проекциям.

Пусть $\chi(x,y)$ — характеристическая функция измеримого множества A и

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x,y)\mathrm{d}\,y,\quad G(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x,y)\mathrm{d}\,x \tag{1}$$

томографические проекции множества A на оси Ox и Oy. Ввиду аффинности постановки задачи, достаточно ограничиться рассмотрением только такой пары проекций. Согласно принципу Кавальери, **одним** из необходимых условий такой восстановимости является равенство $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}G(y)\mathrm{d}y$. Сформулируем полученные в [18] условия существования и единственности решения задачи о восстановлении множества по его проекциям.

Назовём **невозрастающей перестановкой** неотрицательной функции $F(x)$ такую монотонно убывающую функцию $f(x)$ с носителем на положительной полуоси Ox, что для любого неотрицательного α множество всех таких x, для которых $\alpha\le f(x)$, и множество всех таких x, для которых $\alpha\le F(x)$, имеют одинаковую меру. Аналогичным образом определяется и невозрастающая перестановка $g(y)$ неотрицательной функции $G(y)$.

ТЕОРЕМА 10. ([18]). *Пусть функции $F(x)$ и $G(y)$ неотрицательны, интегрируемы и определены при всех вещественных x и y. Для того чтобы существовало измеримое множество $A\in\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условиям (1), необходимо и достаточно чтобы перестановки этих функций удовлетворяли следующим неравенствам:*

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\le\int_0^x g^{-1}(u)\mathrm{d}u,\quad\forall x>0;\qquad\int_0^y g(u)\mathrm{d}u\le\int_0^y f^{-1}(u)\mathrm{d}u,\quad\forall y>0.$$

ТЕОРЕМА 11. ([18]). *Множество A восстанавливается по условиям (1) однозначно (по модулю множества нулевой меры) тогда и только тогда, когда перестановки $y=f(x)$ и $x=g(y)$ проекционных данных $F(x)$ и $G(y)$ являются обратными друг другу функциями:*

$$f(x)=g^{-1}(x);\qquad g(y)=f^{-1}(y). \tag{2}$$

Можно проверить, что условия (2) эквивалентны тому, что штейнеровские симметризации множества A относительно координатных осей коммутируют: $S_x(S_y(A))=S_y(S_x(A))$. Другая эквивалентная формулировка условий (2) состоит в том, что такое множество A должно быть представимо в виде объединения семейства параллелограммов со сторонами, параллельными осям Ox и Oy, см. [7].

Очевидным образом если множество A выпукло, то его томографические проекции $F(x)$ и $G(y)$ также выпуклы. Невозрастающая перестановка выпуклой функции также выпукла. Займёмся обратной задачей: следует ли из выпуклости функций $F(x)$ и $G(y)$ выпуклость самого множества A?

Рассмотрим для простоты изложения случай, когда выпуклая неотрицательная функция $y=F(x)$ достигает своего максимума в одной точке: $F(x_0)=b$, а выпуклая функция $x=G(y)$ имеет единственный максимум в точке $y=y_0$, $G(y_0)=a$. Случай неединственных максимумов этих выпуклых функций рассматривается аналогично. Обозначим через $F_-^{-1}(y)$ функцию, обратную к $F(x)$ на отрезке $[0,x_0]$, а через $F_+^{-1}(y)$ функцию, обратную к $F(x)$ на отрезке $[x_0,a]$. Через $G_-^{-1}(x)$ и $G_+^{-1}(x)$ будем обозначать функции, обратные к $G(y)$ на отрезках $[0,y_0]$ и $[y_0,b]$ соответственно.

ТЕОРЕМА 12. ([13]). *Если функции* $F(x)$ *и* $G(y)$ *выпуклы, и для них выполняются условия (2), а функции*

$G_+^{-1}(F_+^{-1}(F(x))-x)$, $0 < x < x_0$ *и* $G_+^{-1}(x-F_-^{-1}(F(x)))$, $x_0 < x < a$ *вогнуты, и функции*

$G_-^{-1}(F_+^{-1}(F(x))-x)$, $0 < x < x_0$ *и* $G_-^{-1}(x-F_-^{-1}(F(x)))$, $x_0 < x < a$ *выпуклы, то однозначно определяемое по этим проекционным данным множество* A *также выпукло.*

Как показано в [13], последние условия на композиции функций являются здесь необходимыми. В монографии [7] приводятся примеры невыпуклых (и даже неодносвязных) множеств с выпуклыми томографическими проекциями вдоль любого наперёд заданного конечного набора направлений. Для каждого из этих примеров условия (1) не выполнены.

Отметим, что условия теоремы 12 позволяют построить алгоритм восстановления выпуклого множества A и допускают обобщения на случай пространств большей размерности, чем 2.

References

[1] А.Д. Александров, *К теории смешанных объёмов выпуклых тел*, Математический сборник, **2**:6 (1937), 1205–1234.

[2] В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-заде, *Особенности гладких отображений*, М.:Наука. 1982.

[3] В.И. Арнольд, *Волновые фронты и топология кривых*, М.:Фазис, 2002.

[4] N.B. Ayupova, V.P. Golubyatnikov, *Multidimensional cone-beam tomography algorithm*, Journ. of three dimensional images 3D Forum, Japan, **14**:2 (2000), 88–93.

[5] В. Бляшке, *Круг и шар*, М.: Наука, 1967.

[6] H. Federer, *Curvature measures*, Transactions of American Math. Society, **93**:3 (1959), 418–491.

[7] R.J. Gardner, *Geometric Tomography*, 2-d edition, Cambridge University Press, 2006.

[8] В. Гийемин, С. Стернберг, *Геометрические асимптотики*, М.:Мир, 1981.

[9] В.П. Голубятников, *О томографии многогранников*, Вопросы корректности обратных задач математической физики (1982), Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 75–76.

[10] V.P. Golubyatnikov, *Uniqueness Questions in Reconstruction of Multidimensional Objects from Tomography-Type Projection Data*, VSP BV, The Netherlands, 2000.

[11] V.P. Golubyatnikov, V.Yu. Rovenskii, *Some extensions of the class of convex bodies*, 2008.

[12] В.П. Голубятников, В.Ю. Ровенский, *Некоторые обобщения класса k-выпуклых тел*, Сибирский математ. журнал, **50**:5 (2009), 1037–1049.

[13] V.P. Golubyatnikov, *On convexity of a planar domain with a pair of concave tomography projections*, SibAM, **19**:2 (2009), 85–90.

[14] H. Groemer, *Stability theorems for projections of convex sets*, Israel J. Math. **60**:2 (1987), 177-–190.

[15] H. Groemer, *On the determination of convex bodies by translates of their projections*, Geometriae Dedicata, **66** (1997), 265-–279.

[16] A. Haefliger, *Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan*, Ann. Inst. Fourier, **10** (1960), 47–60.

[17] М.М. Лаврентьев, Е.Ю. Деревцов, В.А. Шарафутдинов, *Об определении оптического тела, находящегося в однородной среде, по его изображениям*, ДАН СССР, **266**:4 (1981), 799–802.

[18] G. G. Lorentz, *A problem of plane measure*, Amer. Journ. of Mathematics, **71** (1949), 417–426.

[19] J.-M. Morvan, *Generalized Cirvatures*, Springer, 2008.

[20] F. Natterer, F. Wübbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*, SIAM monographs on mathematical modeling and computations, Philadelphia, 2001.

[21] C. Thäle, *50 years sets with positive reach — A survey*, Surveys in Mathematics and its Applications, *3* (2008), 123–165.
[22] С.В. Знаменский, *Томография в пространствах аналитических функционалов*, ДАН СССР, **312**:5 (1990), 1037–1040.

Владимир Петрович Голубятников
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: glbtn@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.73–С.80 (2010)

УДК 517.958
MSC 13A99

УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Д.С. АНИКОНОВ, М.М. ЛАВРЕНТЬЕВ

Abstract. We discuss general conception for investigation of ill-posed problems and illustrate it by research some problems of radiation tomography which can be reduced to certain problems of integral geometry and singular integral equations.

Keywords: inverse problems, tomography, integral geometry, singular integral, unknown boundary.

1. Введение

В данной статье мы обсуждаем некоторые аспекты концепции исследования условно-корректных задач, которые позже иллюстрируются на примере исследования задач радиационной томографии. Последние оказываются родственными некоторым проблемам интегральной геометрии и сингулярных уравнений.

2. Концепция А.Н. Тихонова для исследования условно-корректных задач математической физики

Для понимания концепции исследований условно-корректных задач полезно обратиться к общим принципам математического моделирования физических явлений. Напомним, что математическое моделирование, состоит из описания

Anikonov, D.S., Lavrentiev, M.M. Ill-posed problems of radiation tomography.
© 2010 Аниконов Д.С., Лаврентьев М.М.
Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№93-2009) и грантом РФФИ (проект №10-01-00384).

Поступила 12 февраля 2010 г.

явления и его анализа для последующего применения на практике. При этом считается желательным максимально возможное обоснование теоретических выводов, хотя всегда остается некоторый пробел между теорией и практикой.

Примерно до середины 20 столетия перечень исследуемых вопросов в основном состоял из исследования существования решения задачи, его единственности и устойчивости. Понятно значение каждого из этих направлений. Существование означает непротиворечивость исходных данных, единственность - информационную достаточность, а устойчивость обеспечивает возможность приближенных вычислений. Однако позже, возникла необходимость дополнительного анализа этой, казалось бы ясной, концепции исследований. Причина состояла в появлении нового класса весьма актуальных проблем, названных обратными задачами для уравнений математической физики, для которых теоремы существования и устойчивости не могли иметь традиционных форм. Точнее говоря, во многих примерах обратных задач множества исходных данных не совпадали с классическими пространствами, а решение оказывалось неустойчивым в привычных метриках. В связи с возникшими трудностями А.Н. Тихонов сформулировал новую концепцию исследования подобных проблем, получивших название условно-корректных задач [1]. Им предложено оставить исследование единственности в прежней форме, а вместо традиционного существования и устойчивости строить регуляризации возникающих уравнений, в которых для приближенно известных данных искать приближенное и устойчивое решение.

При этом декларировался отказ от доказательств классических теорем существования для точных значений данных. Несмотря на то, что этой концепцией пользуются уже давно многие специалисты в различных странах мира, по нашему мнению, и сейчас полезно рассмотреть эти вопросы подробнее. Одной из причин этого является использование даже и специалистами не совсем понятных формулировок в подходе А.Н. Тихонова типа "существование рассматриваемой задачи предполагается априори"и "решение рассматриваемой задачи неустойчиво". Действительно, непонятно как можно предполагать существование решения задачи без его анализа и для всех ли метрик решение неустойчиво или только для некоторых.

Для уточнения концепции А.Н. Тихонова используем следующую операторную форму, подходящую для многих обратных задач

$$Az = u,\ z \in Z,\ u \in U, \tag{1}$$

где Z, U - заданные непустые метрические пространства, A - заданный оператор, и по известному элементу u требуется найти решение z.

Прежде всего, приведем следующие, очевидные теоремы существования и устойчивости решения уравнения [2].

Теорема существования. *Обозначим $U_0 = AZ$. Тогда для всякого элемента $u \in U_0$ существует $z \in Z$ такое, что $Az = u$.*

Теорема устойчивости. *Если оператор A- взаимно однозначный, то решение уравнения (1) устойчиво в новой метрике пространства Z: $\rho_n(z_1, z_2) = \rho_U(A(z_1), A(z_2))$, где справа используется метрика пространства U.*

Ясно, что эти теоремы имеют тавтологический характер, однако они помогают понять, некоторые аспекты обсуждаемых вопросов. Именно, становится

ясно, что всякая терема существования есть описание образа соответствующего оператора или его подмножества, и приведенное здесь описание множества U_0 логически допустимо. Заметим, что в конкретных задачах непустота множества U_0 обычно легко проверяется, если не увлекаться введением произвольных ограничений на исходные и определяемые данные. Разумеется полезность приведенной теоремы существования сомнительна для математического моделирования. Как показывают многие примеры обратных задач, проверка принадлежности известных данных множеству U_0 вряд ли возможна при таком его определении. Особенно это касается приближенных значений исходной информации.

Приведенная теорема устойчивости помогает осознать, что при наличии единственности факт устойчивости зависит от определения метрики. В частности, эта теорема указывает на некорректность часто используемого высказывания: "решение рассматриваемой задачи неустойчиво". Другое дело, что для практики столь экзотическая метрика пространства Z вряд ли может быть полезной.

Резюмируя приведенные соображения, скажем, что концепция А.Н. Тихонова состоит в отказе от невыполнимых или бесполезных для практики направлений исследований и замене их на те аналоги классических направлений, которые, во-первых, возможны, а во-вторых, повышают доверие потребителей математической продукции к теоретическим построениям.

В заключении этого раздела приведем и обсудим теоретический результат, нередко некорректно используемый в обратных задачах.

Теорема о компакте *Если компактное множество M содержится в Z, оператор A- непрерывный и взаимно-однозначный, то оператор A^{-1} непрерывен на множестве AM .*

Ясно, что эта теорема гарантирует устойчивость решения уравнения (1), если его правые части принадлежат множеству AM. Исходя из этого, некоторые авторы считают вопрос об устойчивости решенным, если выбранное множество корректности M компактно, например, конечномерно и ограничено. Однако при этом игнорируется тот факт, что множества AM, как правило, довольно экзотичны и, в частности, нет никаких оснований считать, что приближенно известные данные могут принадлежать таким множествам [1]. Вероятно приведенная здесь теорема о компакте имеет теоретическое значение, но ее непосредственное применение в условно-корректных задачах выглядит необоснованным.

В следующем пункте будут приведены примеры исследований, выполненных в соответствии с изложенной общей концепцией, которая дополняется предложенным автором принципом поиска части неизвестной информации.

Его суть состоит в следующем.

Пусть используется подробная математическая модель процесса, по возможности без упрощений и без априорных данных. Соответственно получаются сложные математические соотношения, содержащие несколько неизвестных функций. Предлагается находить только часть неизвестных величин, используя способы разделения сложного математического выражения и выделения из них сравнительно простых составных частей для их последующего анализа. Подходящие способы могут основываться на уже имеющихся

свойствах изучаемых соотношений или могут быть созданы за счет дополнительных, но реалистических ограничений. После нахождения части неизвестных величин оставшиеся неизвестные характеристики можно попытаться найти позже или никогда, если соответствующая задача оказывается слишком сложной

Некоторые варианты реализаций указанного принципа содержатся в работах [2-8].

3. Задачи радиационной томографии

Рассмотрим следующее стационарное уравнение переноса.

$$(\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,E)) + \mu(r,E) f(r,\omega,E) = \int_{E_1}^{E_2} \int_{\Omega} k(r,\omega,\omega',E,E') f(r,\omega',E') d\omega' dE' + J(r,\omega,E), \tag{2}$$

где r принадлежит ограниченной выпуклой области G в R^3, $\Omega = \{\omega : \omega \in R^3, |\omega| = 1\}$, E — числовая переменная, $E \in [E_1, E_2]$. Функция $f(r,\omega,E)$ означает плотность потока частиц в точке r, движущихся в направлении ω и имеющих энергию E. Коэффициенты μ, k, J характеризуют среду G, в которой происходит процесс переноса радиации и соответственно называются: коэффициент ослабления, индикатриса рассеяния и плотность внутренних источников.

Для произвольной точки $r \in G$ и направления ω определим функцию $d(r,\omega)$ равную расстоянию от точки r до границы области G в направлении ω и зададим граничные условия:

$$f(\xi,\omega,E) = h(\xi,\omega,E), \;\; \xi = r - d(r,-\omega)\omega, \tag{3}$$

$$f(\eta,\omega,E) = H(\eta,\omega,E), \;\; \eta = r + d(r,\omega)\omega, \tag{4}$$

где $h(\xi,\omega,E)$ означает плотность входящего излучения, а $H(\eta,\omega,E)$ плотность выходящего излучения.

Среда G предполагается составленной из различных материалов, что математически формулируется следующим образом. Имеется конечное число непересекающихся подобластей G_i, $i = 1, ..., p$, $G_i \subset G$ таких, что $G_0 = \bigcup G_i$, $\overline{G_0} = \overline{G}$. Множество G_0 предполагается обобщенно выпуклым, т. е. любая прямая $\{r + t\omega, t \in R^1\}$, $r \in G_0$, $\omega \in \Omega$ пересекает границу множества G_0 в конечном числе точек. Коэффициенты уравнения (2) предполагаются непрерывными по r в каждой подобласти G_i, а их границах они могут иметь разрывы первого рода.

Рассмотрим общую проблему томографии.

Общая задача томографии. *Из уравнения переноса и краевых условий определить внутреннее строение среды G, если задана плотность излучения на границе этой среды, т. е. функции $h(\xi,\omega,E)$, $H(\eta,\omega,E)$.*

В дальнейшем эта общая постановка уточняется. Например, можно рассматривать задачу определения только одного коэффициента ослабления μ при неизвестных всех остальных, что соответствует принципу, изложенному в конце предыдущего пункта. Для исследования этой задачи рассмотрим следующее соотношение, являющиеся следствием уравнения (2) и краевых условий (3), (4)

$$H(\eta,\omega,E) = h(\xi,\omega,E) \exp(-\int_0^{d(\eta,-\omega)} \mu(\eta - t\omega, E) dt) \tag{5}$$

$$+\int_0^{d(\eta,-\omega)} \exp(-\int_0^t \mu(\eta-\nu\omega,E)d\nu)(N(\eta-t\omega,\omega,E)+J(\eta-t\omega,\omega,E))dt,$$

где интеграл столкновений N есть интегральное слагаемое в правой части уравнения переноса.

Как доказано в [2], если потребовать наличия внешнего источника, разрывного по направлениям, то из достаточно сложного выражения в правой части последнего равенства можно выделить сравнительно простое первое слагаемое, содержащее только одну неизвестную функцию μ. Именно, пусть скачок $[h(\xi,\omega_0,E)] \neq 0$ для горизонтальных направлений $\omega_0 = (\omega_1,\omega_2,0) \in \Omega$. Тогда верна следующая формула

$$\int_0^{d(\eta,-\omega_0)} \mu(\eta-t\omega_0,E)dt = \ln\frac{[H(\eta,\omega_0,E)]}{[h(\xi,\omega_0,E)]}. \tag{6}$$

Из последней формулы легко следует теорема единственности определения коэффициента ослабления при незначительных ограничениях на параметры задачи.

Теперь рассмотрим моноэнергетический случай уравнения переноса, когда переменная E отсутствует. Тогда уравнение переноса и краевые условия имеют вид

$$(\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega)) + \mu(r)f(r,\omega) = \int_\Omega k(r,\omega,\omega')f(r,\omega')d\omega' + J(r,\omega), \tag{7}$$

$$f(\xi,\omega) = h(\xi,\omega),\ \ \xi = r - d(r,-\omega)\omega, \tag{8}$$

$$f(\eta,\omega) = H(\eta,\omega),\ \ \eta = r + d(r,\omega)\omega, \tag{9}$$

где все функции имеют прежний смысл, но при фиксированной энергетической переменной E.

Для такого более простого случая поставлена и исследована следующая задача о неизвестной границе для уравнения переноса.

Задача томографии. *Из уравнения переноса (7) и краевых условий (8), (9)найти поверхность ∂G_0, являющейся границей множества G_0, если задана только функция $H(\eta,\omega)$.*

Нетрудно понять, что рассматривается одна из возможных постановок задачи томографии, поскольку задается плотность выходящего излучения, а ищется граница между различными материалами внутри неизвестной среды G, что является существенным показателем ее структуры.

Для исследования поставленной задачи рассмотрим следующую функцию, названную индикатором неоднородности

$$Ind(r) = |\nabla\int_\Omega H(r+d(r,\omega)\omega,\omega)d\omega|. \tag{10}$$

При довольно общих ограничениях в [5] доказана следующая теорема.

Теорема об индикаторе. *Для $r \in G_0$, $Ind(r) \longrightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $r \longrightarrow z$, $z \in \partial G_0$, если мера видимости отлична от нуля, т. е.*

$$m(z,\omega) = [\mu(z)f(z,\omega)] - [\int_\Omega k(z,\omega,\omega')f(z,\omega')d\omega'] \neq 0,$$

где, как и раньше, квадратные скобки означают величину скачка.

Из этого свойства легко следует теорема единственности задачи томографии. Кроме того, простота формулы (10) позволяет построить соответствующий устойчивый алгоритм. В работе [2] приведены результаты большого количества численных экспериментов, подтверждающих работоспособность такого метода.

4. Задача интегральной геометрии и сингулярное интегральное уравнение

Результаты, указанные в предыдущем пункте, позволили найти подход к аналогичным проблемам более общего характера. Так, в частности, была исследована следующая задача интегральной геометрии в $n-$мерном пространстве.

Рассматривается функция $q(r,y,\omega)$, принадлежащая классам $C^{(1,\alpha)}(G\times G_i\times\Omega),\ i=1,...,p$. Отметим, что введенное ограничение позволяет функции $q(r,y,\omega)$ иметь ненулевые разрывы первого рода по переменной y при $y=z,\ z\in\partial G_0$, которые традиционно обозначаются посредством квадратных скобок, т. е. $[q(r,z,\omega)]$.

Специальная задача интегральной геометрии. *Из уравнения*

$$\int_{d(r,-\omega)}^{d(r,\omega)} q(r,r-t\omega,\omega)dt=H(r,\omega) \tag{11}$$

найти поверхность ∂G_0, если задана функция $H(r,\omega),\ (r,\omega)\in G_0\times\Omega$.

Доказана следующая теорема [6,7].

Теорема единственности. *Если $[q(r,z,\omega)]\neq 0$ для всех $z\in\partial G_0$, ∂G_0 есть кусочно гладкая поверхность класса C^2, то задача интегральной геометрии о неизвестной границе имеет не более одного решения.*

Отметим, что в уравнении (11) неизвестная подынтегральная функция $q(r,y,\omega)$ зависит от $3n-1$ независимых переменных, в то время как данные задачи, т. е. функция $H(r,\omega),\ (r,\omega)\in G_0\times\Omega$ зависит только от $2n-1$ переменных. Естественно, что в таких условиях найти полностью функцию $q(r,y,\omega)$ не представляется возможным. Именно поэтому ставится задача нахождения только части неизвестной информации — т. е. поверхности ∂G_0.

Другим направлением развития указанного подхода явилось исследование задачи о неизвестной границе для недоопределенного сингулярного уравнения первого рода.

Пусть $g(r,y,\omega)\in C^{1,\alpha)}(G\times G_i\times\Omega),\ i=1,...,p$, ∂G_0 есть кусочно гладкая поверхность класса C^2 и выполняется условие

$$\int_\Omega g(r,r,\omega)d\omega=0,\ r\in G_0.$$

Задача типа Стефана для сингулярного уравнения. *Из уравнения*

$$\int_G \frac{g(r,y,s)}{|y-r|^n}dy=U(r),\ r\in G_0,\ s=\frac{y-r}{|y-r|} \tag{12}$$

найти поверхность ∂G_0 если известна только функция $U(r)$.

Пусть точка $z\in\partial G_j\bigcap\partial G_l,\ 1\le j,l\le p$; $g_j(z,z,\omega),\ g_j(z,z,\omega)$ — предельные значения функции $g(r,y,\omega)$ при $r=z,\ y\to z$ относительно множеств G_j и G_l соответственно и $n_j(z)$ — внутренняя нормаль к поверхности ∂G_j в точке z .

Обозначим

$$f_{j,l}(z) = \int_{\Omega^+(z)} g_j(z,z,\omega)d\omega + \int_{\Omega^-(z)} g_l(z,z,\omega)d\omega,$$

$$\Omega^+(z) = \{\omega : \omega \in \Omega,\ (\omega, n_j(z)\} > 0,$$

$$\Omega^-(z) = \{\omega : \omega \in \Omega,\ (\omega, n_j(z)) < 0.$$

Имеет место следующее утверждение [8].

Теорема единственности для уравнения (12). *Если* $f_{j,l}(z) \neq 0,\ z \in \partial G_0$, *то задача типа Стефана для сингулярного интегрального уравнения имеет не более одного решения.*

Замечание. Условие $f_{j,l}(z) \neq 0,\ z \in \partial G_0$ является всего лишь достаточным, но его нельзя просто отбросить. Так, например, при всюду непрерывной функции $g(r, y, \omega)$, когда это условие не выполняется, отсутствует и сам предмет поиска, т. е. поверхность ∂G_0, и задача теряет смысл. Еще отметим, что условие $f_{j,l}(z) \neq 0,\ z \in \partial G_0$, повидимому, будет выполняться в широком классе случаев. По крайней мере, его отрицание есть равенство, указывающее на наличие специальной связи между параметрами эадачи.

В заключение отметим, что представленные в этой статье результаты, в основном посвящены вопросам единственности решений. Вместе с тем, имеются и другие направления исследований. Так, например, получен ряд результатов, позволяющих построить и тестировать численные алгоритмы на основе регуляризаций рассмотренных уравнений [2]. Тем самым можно указать на соответствие изложенного материала общей концепции исследований условно-корректных задач А.Н. Тихонова. Также показано, что изложенные результаты могут служить иллюстрацией авторского принципа нахождения части неизвестной информации, приведенного в первом пункте статьи.

Список литературы

[1] А.Н.Тихонов, *Методы решений некорректных задач*, Наука, Москва, 1979.

[2] Д.С. Аниконов, А.Е. Ковтанюк, И.В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос,Москва, 2002.

[3] Д.С. Аниконов, *Обратная задача об определении тела для уравнения переноса*, Дифференциальные уравнения,**12**:1 (1976), 567–570.

[4] Д.С. Аниконов, *Задача типа Стефана для уравнения переноса*, Доклады АН СССР, **338**:1 (1994), 25–28.

[5] Anikonov D.S., *Integro-differential indicator of non-homogeneity in a tomography problem*, J. Inv. and Ill-posed problems, **7**:1 (1999), 17–59.

[6] Anikonov D.S., *A Special Problem of Integral Geometry*, Doklady Mathematics, **76**:1 (2007), 483–485.

[7] М.М. Лаврентьев, *Математические задачи томографии и гиперболические отображения,* Сибирский математический журнал, **42**:5 (2001), 1094–1105.

[8] Д.С. Аниконов, *Задача о неизвестной границе для сингулярного интегрального уравнения*, ДАН, **431**:4 (2010), 439–442.

Дмитрий Сергеевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anik@math.nsc.ru

Михаил Михайлович Лаврентьев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gelios@math.nsc.ru

S ©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.81–С.111 (2010)

УДК 517.9, 519.6
MSC 44A30

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕСКАЛЯРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Е. Ю. ДЕРЕВЦОВ

Abstract. Certain problems of scalar, vector and tensor tomography are considered in the paper. Main tools and results of scalar tomography are formulated and connected with the similar in area of tomography for tensor fields. Definitions and properties of differential and integral operators as well as different types of ray transforms for tensor fields are described. The inversion formulas are developed starting from scalar case to the tensor case. Results of few numerical simulations for reconstruction of tensor fields by its ray transforms are presented.

Keywords: tomography problem, vector field, tensor field, Radon transform, ray transform, decomposition theorem, back projection operator, inversion formulas, tensor analysis, numerical methods.

1. Введение

Бурное развитие томографических методов исследований во второй половине XX века было обусловлено двумя важными обстоятельствами. Во-первых, это изобретение методов измерений сигналов, позволяющих с высокой степенью точности считать, что сигнал распространяется вдоль прямой линии. Во-вторых, массовое появление и использование быстродействующих ЭВМ дало возможность обрабатывать большие объемы информации. Отметим и еще одно существенное обстоятельство: математические основы томографии были заложены еще в начале века в работах П. Функа [1] и И. Радона [2]. Решая чисто математические задачи, они получили формулы обращения для плоского

Derevtsov, E.Yu., Certain problems of non-scalar tomography.

© 2010 Деревцов Е.Ю.

Работа частично поддержана ОМН РАН (проект 2009–1.3.8), СО РАН (интеграционный проект 2009–81, совместный проект СО РАН и УрО РАН 2009–14).

Поступила 10 марта 2010 г.

и пространственного случаев, а также случая сферы S^2. Суть формул обращения заключается в указании способа, которым можно найти неизвестную функцию, заданную на плоскости, в пространстве или на единичной сфере в R^3, по известным интегралам от нее, вычисленным вдоль всех прямых на плоскости, по всем плоскостям в R^3, вдоль всех больших кругов сферы $\mathbb{S}^2$, соответственно.

Выделим основные черты и особенности томографических методов. Наиболее характерная черта таких исследований состоит в том, что способы измерений не разрушают объект. Так, в трансмиссионной томографии используется активное зондирующее излучение (физическое поле), взаимодействующее со средой и измеряемое после прохождения объекта. Измерения же в эмиссионной томографии осуществляются с использованием собственных источников излучения. Второй особенностью неразрушающих методов является обоснованно предполагаемый способ взаимодействия поля со средой. Именно, информация о среде "накапливается" вдоль луча и регистрируется на выходе; в подавляющем большинстве моделей используется исключительно лучевое приближение. Заметим, что в качестве зондирующего излучения используются как электромагнитные поля с различным спектром, так и поля другой физической природы. Иными словами, наряду с рентгеновское излучением, электромагнитными полями в оптическом, инфракрасном и радио- диапазонах, используется ультразвуковые источники излучения, упругие волны в сплошной среде, и др. Еще одной неотъемлемой чертой томографии является многократное проведение однотипных измерений. Этим достигается цель получения достаточного для приемлемого решения задачи объема данных. Недостаточность данных ведет к большому произволу в решении, а неточности в измерениях ведут к еще большей неопределенности. Здесь может помочь лишь априорная информация об объекте.

Кратко упомянем основные математические средства, на которых основаны приближенные методы и алгоритмы томографии. Наиболее привлекательны, с математической точки зрения, формулы обращения. При этом не следует считать, что основанные на них алгоритмы обладают абсолютным преимуществом по сравнению с другими. Широкое распространение получили алгебраические методы, в которых на первом этапе задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, а на втором эта система решается, как правило итерационными методами. Ряд алгоритмов томографии основан на Фурье-анализе и так называемой теореме о центральном сечении, связывающей преобразования Фурье и Радона. Интересны алгоритмы, в которых учитывается априорная информация как о самом объекте, так и в форме "законов сохранения" (соотношения Асгейрссона, моменты и т.п.). Эти алгоритмы также носят итерационный характер. Наконец, применимы и хорошо известные вариационные подходы типа метода наименьших квадратов или, с привлечением функционального анализа, сингулярного разложения соответствующих томографических операторов.

Наряду с интенсивным развитием численных методов и алгоритмов решения задач томографии, ставящих своей целью восстановление тех или иных функций, описывающих внутренние свойства объекта, в 70–90 гг. прошлого столетия появились и первые работы [3]–[9], в которых были приведены практические постановки, связанные с восстановлением векторных характеристик сред по

известным данным томографического типа. В настоящее время направление в томографии, ориентированное на исследования векторных или тензорных характеристик сред неразрушающими методами, интенсивно развивается. И прежде всего благодаря тому, что области приложений томографических методов исследований нескалярных свойств объектов очень широки. Это исследование потоков жидкости или газа, физический эксперимент и астрофизика, изучение анизотропных свойств промышленных материалов и земных пород, конечно же медицинские и биологические приложения, и многое другое.

Настоящая работа хотя и носит обзорный характер, не претендует на всеобъемлющее освещение затрагиваемых проблем. Поэтому хотелось бы уточнить смысл терминов, входящих в заголовок статьи. Под термином "задачи" понимаются наиболее распространенные и простые математические модели, их возможности, а также относящиеся к ним основные математические средства и результаты. Как правило, мы рассматриваем задачи томографии, поставленные в ограниченной области D плоскости; чаще всего это единичный круг B. Термин "нескалярная" в сочетании с "томографией" подразумевает, что исследуемые характеристики объектов и сред описываются векторными или тензорными величинами.

Подавляющее большинство моделей легко допускают включение в себя явления рефракции. Это делается путем задания в области римановой метрики $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, которая (т.е. компоненты $g_{ij}(x)$) предполагается известной. При этом необходимой платой за большую общность является усложнение, зачастую довольно серьезное, математического аппарата. Кроме того, теряется значительная часть методов решения, основанных на формулах обращения и разработанных в предположении прямолинейного характера распространения лучей в исследуемом объекте. Тем не менее, усложнение модели оправданно, так как явление рефракции очень существенно в ряде задач, например при рассмотрении распространения сигналов в Земле. Строго говоря, эффект рефракции, которым в подавляющем большинстве моделей пренебрегают, обязательно присутствует в любой неоднородной среде. А только такие среды и интересны в томографических исследованиях. Следует также отметить, что в моделях, построенных на основе практических постановок, мы не можем считать риманову метрику известной. Явление рефракции самым непосредственным образом связано с неизвестными характеристиками среды, которые мы хотим определить, поэтому в общей постановке необходимо одновременно определить характеристики среды и найти лучи, вдоль которых происходит распространение сигнала. Таким образом, задача нелинейна и с трудом поддается исследованию. Стандартный способ ее решения — метод линеаризации, который, в частности, и приводит к постановке, в которой риманова метрика считается известной.

Как уже отмечалось, включение в модель рефракции приводит к усложнению математического аппарата, но при этом принципиально картина взаимодействия сигнала со средой не меняется. Явление же рассеяния, принимаемое во внимание, приводит к принципиальному усложнению модели, поэтому ее адекватное описание, как правило, осуществляется на языке интегро-дифференциальных кинетических уравнений, с учетом понятий и аппарата статистической физики. Математические модели с включенным в них явлением рассеяния в настоящей работе не рассматриваются.

В заключение вводной части приведем наиболее распространенные постановки, приводящие к задачам векторной томографии, попутно отметив обзорную работу [10], содержащую ряд основных положений и результатов векторной томографии.

1.1. **Течения жидкости или газа.** Для наглядности мы ограничиваемся двумерной постановкой, см. [8], [9]. Пусть D — ограниченная выпуклая область двумерного потока жидкости или газа с границей ∂D. Отметим, что ∂D может не быть "физической" границей, а определяться областью исследования, на границе которой расположены источники и приемники. Поток определяется векторным полем скоростей $w(x)$, $x = (x_1, x_2) \in D$. Рассматривается задача реконструкции векторного поля $w(x)$ по измерениям времен пробега акустического сигнала через область течения. Пусть $c(x)$ — скорость звука в D. Предполагается, что $|w| \ll c$, а изменения c достаточно малы в D, так что распространение сигнала можно считать прямолинейным. Тогда, полагая η единичным касательным вектором акустического луча L_{PQ}, время пробега сигнала от источника, расположенного в точке P, до приемника в точке Q есть

$$t_{PQ} = \int\limits_{L_{PQ}} \frac{dl}{c + \langle w, \eta \rangle}, \quad t_{QP} = \int\limits_{L_{QP}} \frac{dl}{c - \langle w, \eta \rangle},$$

где время t_{QP}, очевидно, вычислено с учетом замены направляющего вектора η прямой L_{PQ} на $-\eta$. Суммируя,

$$t_{PQ} + t_{QP} \approx 2 \int\limits_{L_{PQ}} \frac{dl}{c(x)},$$

получаем задачу традиционной (скалярной) томографии по определению скорости звука $c(x)$ в среде.

Вычитая,

$$t_{PQ} - t_{QP} \approx -2 \int\limits_{L_{PQ}} \frac{\langle w(x), \eta \rangle}{c^2(x)} dl = \int\limits_{L_{PQ}} \langle \widetilde{w}(x), \eta \rangle dl,$$

где $\widetilde{w}(x) = \dfrac{-2w(x)}{c^2(x)}$, получаем задачу *векторной томографии* определения скорости потока $w(x)$ жидкости или газа по известному (правый член в формуле) *продольному лучевому преобразованию* векторного поля $\widetilde{w}$.

Таким образом, информации о временах пробега достаточно не только для восстановления скалярной функции $c(x)$, соответствующей скорости звука в среде, но и для реконструкции векторного поля $\widetilde{w}$, связанного с полем скоростей потока жидкости или газа. Заметим, что обратная пропорциональность $\widetilde{w}$ квадрату скорости $c^2(x)$ звука и естественное предположение $|w| \ll c$ предъявляют повышенные требования к точности измерений.

1.2. **Измерение температуры в газах на основе Шлирен-эффекта.** Рассматривается задача измерения температуры в газах с использованием дистанционных измерений [5], [9]. По принципу Ферма, распространение световых лучей в неоднородной среде с показателем преломления $n = n(x)$, $x \in D \subset R^3$,

слабо меняющимся по сравнению с длиной волны, описывается уравнением

$$\frac{d}{ds}(n\,\eta) = \nabla n,$$

где ds — дифференциал длины дуги вдоль светового луча. Касательный вектор η к световому лучу, прошедшему расстояние l в среде, есть, поэтому

$$\eta = \frac{1}{n}\int_0^l \nabla n\, ds + \frac{n_0}{n}\eta_0,$$

а вектор η_0 задает начальное направление светового луча и n_0 — показатель преломления при $s = 0$. Оптическое устройство Шлирена преобразует разности направлений распространения в интенсивность отклонений,

$$I = \frac{k}{n}\int_0^l \langle \theta, (\nabla n \times \eta_0)\rangle ds.$$

Единичный вектор θ вместе с константой k описывает чувствительность устройства в зависимости от направления. Если вектор θ перпендикулярен плоскости томографических измерений, и $\theta \times \eta_0 = \xi$, где через ξ обозначен единичный вектор нормали к лучу в плоскости исследований, то

$$I = \frac{k}{n}\int_0^l \langle w, \xi\rangle ds,$$

где $w = \nabla n$. Последнее уравнение показывает, что компонента $\langle \nabla n, \xi\rangle$ потенциального поля ∇n перпендикулярна к направлению распространения наблюдаемого оптического излучения. Таким образом, сформулирована задача векторной томографии по определению потенциального векторного поля w по *поперечному лучевому преобразованию*. Ее решение дает как потенциальное поле ∇n, так и показатель преломления n. В газах коэффициент преломления зависит от плотности, а в случае постоянного давления это и зависимость от температуры, поэтому она оценивается по восстановленному n.

1.3. **Доплеровская томография.** Одним из физических эффектов, на основе которого можно определить векторные характеристики среды, является эффект Доплера. Ставится задача найти поле скоростей $v = v(x,t)$ в области D, заполненной жидкой или газообразной средой, по результатам измерений вне этой области.

Данная задача имеет важные приложения. Так, в физическом эксперименте на основе этого эффекта можно найти функцию распределение молекул по скоростям, если известны данные доплеровской спектроскопии, полученные при просвечивании ансамбля молекул лазерным излучением [11], [12]. В работе [13] и других исследовалась задача восстановления векторного поля средних скоростей ионов в плазме. В гидрометеорологии [14] ставится задача нахождения распределения скоростей больших воздушных масс. В гемодинамике необходимо найти поле скоростей крови в сосудах пациента с помощью акустических доплеровских измерений [15] – [17].

В качестве зондирующего сигнала в задаче доплеровской томографии применяются сфокусированные ультразвуковые пучки или лазерные источники. Взаимодействие физического поля с движущимися частицами среды приводит

к появлению отраженных волн, частота которых ω отличается от частоты ω_0 падающей волны на величину

$$\delta\omega = \frac{2c\omega_0 v_\eta}{c^2 - v_\eta^2}, \tag{1}$$

где c —скорость падающей волны, v_η — проекция скорости частицы, на которой волна отражается, на направление луча. В предположении, которое выполняется практически всегда, $|v| \ll c$, получаем $\delta\omega \approx 2\omega_0 v_\eta/c$ хорошее приближение доплеровского смещения, которое регистрируется приемной аппаратурой и является исходными данными для задачи доплеровской томографии.

Остановимся кратко на простейшей физической модели рассматриваемой задачи [18]. Для определения поля скоростей ансамбля частиц (молекул, ионов, и т.п.), движущихся в некоторой области с разными скоростями и в разных направлениях, производятся непрерывные по времени измерения для всех возможных направлений зондирующей волны. Для фиксированного направления можно построить зависимость частоты $\omega(\tau) = \omega_0 + \delta\omega(\tau)$ принимаемого сигнала от расстояния τ, измеряемого вдоль луча от приемника. Интегрируя принимаемый сигнал по всему лучу L, получим функцию времени

$$\sigma(t) = \int_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 + \delta\omega(\tau))t}\, d\tau.$$

При определенных условиях эту функцию можно обратить и найти зависимость $\tau = \tau(\omega - \omega_0)$ от частоты. Тогда, переходя к интегрированию по частоте, имеем

$$\sigma(t) = \int_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tau'_\omega\, d\omega,$$

где через τ' обозначено дифференцирование параметра луча L по частоте ω. Продолжая подынтегральную функцию нулем вне области D, мы видим, что $\sigma(t)$ представляет собой преобразование Фурье функции τ'_ω. Осуществляя обратное преобразование Фурье известной из эксперимента функции $\sigma(t)$, находим τ'_ω и, далее, поле v_η с использованием формулы для доплеровского смещения $\delta\omega$.

Предлагаемый путь решения задачи на практике почти не реализуем, так как обусловлен многими ограничениями, связанными с идеей замены зависимости от параметра луча зависимостью от частоты. Трудности возникают и на пути использования формулы (1). В результате эта идея до последнего времени так и не обрела убедительной практической реализации, которая была бы осуществлена с достаточной точностью.

Намного чаще в исследованиях в качестве данных используется интегральный момент 1-го порядка,

$$\mu(s') = \int_L v_\eta\, d\tau = \int_L \langle v\,,\, d\tau\rangle,$$

который, очевидно, является продольным лучевым преобразованием векторного поля v.

Замечание 1.1. Пусть $w(x) = \big(w_1(x), w_2(x)\big)$ — векторное поле, заданное в ограниченной области D плоскости R^2. В настоящее время не существует способов измерения величин

$$(\mathbf{R}_1 w)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(s\xi + t\xi^\perp)dt,$$

$$(\mathbf{R}_2 w)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(s\xi + t\xi^{\perp})dt,$$

$s\xi + t\xi^{\perp} = \big(s\cos\alpha - t\sin\alpha, s\sin\alpha + t\cos\alpha\big) \in L_{\xi,s}$. Иначе векторная томография полностью бы свелась к классической задаче восстановления функции по ее известному преобразованию Радона. Правда, если принять возможность реализации такого способа измерений, мы видим, что для восстановления поля w необходимы независимые данные о каждой из двух компонент поля. Если же в нашем распоряжении имеется лишь одно из них, то возможно восстановление только одной компоненты векторного поля.

2. Задачи скалярной томографии

Пусть функция $\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2)$, задана в B. Для простоты положим $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(B)$. Напомним определение *преобразования Радона* $\mathbf{R}\varphi$ функции φ,

$$(\mathbf{R}\varphi)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\xi^{\perp})dt, \tag{2}$$

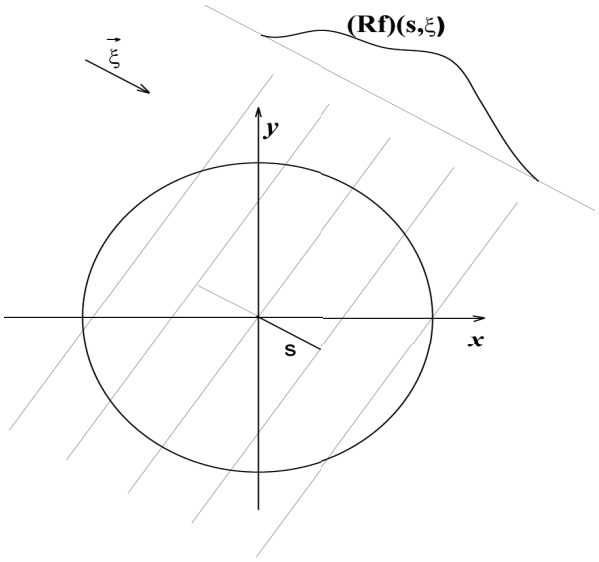


Рис. 1. Преобразование Радона (схематически). Параллельная схема наблюдений.

которое задается ее интегралами по прямым $L_{\xi,s} = \{x \in R^2 \mid \xi^1 x_1 + \xi^2 x_2 = s\}$ и отображает пространство $C_0^{\infty}(B)$ в $C_0^{\infty}(Z)$, где $Z = \partial B \times R = \{(\xi, s) \,|\, \xi \in \partial B, s \in R\}$ — цилиндр. Оговоримся, что если речь идет о функциях, определенных в Z, то их ограниченность или убывание на бесконечности понимается по второму аргументу.

Замечание 2.1. В дальнейшем нам иногда будет удобно, особенно если мы применяем преобразование Фурье, использовать пространства основных функций $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(R^2)$, и пространства Шварца $\mathcal{S}(B)$, $\mathcal{S}'(B)$, $\mathcal{S}(Z)$. Некоторые результаты наиболее естественно формулируются в рамках L_2-пространств и пространств Соболева H^l, $l = 0, 1, 2, \ldots$, функций или тензорных полей, заданных в R^n, B, Z.

Здесь и далее приняты обозначения $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha) \in \partial B$ для нормали к прямой $L_{\xi,s}$, и $\xi^\perp \equiv \eta = (\eta^1, \eta^2) = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ для направляющего вектора. Через B обозначен единичный круг с центром в начале координат, через ∂B единичная окружность. Заметим, что имеет место связь $s = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $t = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ и, если $(x, y) \in B$, то функция $(\mathbf{R}\varphi)(\xi, s)$ финитна по s, $-1 < s < 1$. Развертка цилиндра Z, вложенного в R^3, таким образом, есть прямоугольник $2\pi \times [-1, 1] \subset R^2$. Поэтому, когда удобно, мы будем говорить о (первом) аргументе $\xi \in \partial B$ функции $g(\xi, s)$, либо фиксировать в качестве первого аргумента соответствующий угол α, и писать $g(\alpha, s)$.

Замечание 2.2. В двумерном случае *лучевое преобразование* $(\mathbf{P}\varphi)(\eta, s)$ отличается лишь способом параметризации прямой. Именно, выбором направляющего вектора η в качестве первой переменной лучевого преобразования $\mathbf{P}\varphi$. Если размерность пространства более 2, то преобразования Радона и лучевое отличаются кардинально. Именно, в первом случае интегрирование ведется по гиперплоскостям, а во втором — по прямым.

Одно из определений преобразования Радона использует δ-функцию Дирака, сосредоточенную на прямой, вдоль которой ведется интегрирование,

$$\breve{\varphi}(\xi, s) \equiv (\mathbf{R}\varphi)(\xi, s) = \int_{R^2} \varphi(x)\delta(s - \langle \xi, x\rangle)\, dx. \tag{3}$$

Этот прием, хотя и за счет потери геометрической наглядности, позволяет вместо интеграла вдоль прямой $L_{\xi,s}$ использовать интеграл по всей плоскости, что технически упрощает доказательства ряда результатов и позволяет воспользоваться хорошо известными свойствами δ-функции.

Например, следующие свойства преобразования Радона очень просто устанавливаются именно таким способом [19]. Полагаем, что $x, a \in R^2$, $\xi \in \mathbb{S}^1$, а A есть матрица размера 2×2. Предполагается, что $f \in \mathcal{D}(R^2)$. Напомним, что $\mathcal{D}(R^2)$ — так называемое *пространство основных функций*, т.е. финитных бесконечно дифференцируемых в R^2 функций f, $\operatorname{supp} f \subset R^2$.

1) Функция $\breve{f}(\xi, s)$ является *однородной степени* -1 функцией своих аргументов,

$$\breve{f}(t\xi, ts) = |t|^{-1}\breve{f}(\xi, s).$$

2) Функция $\breve{f}(\xi, s)$ является *четной* по совокупности переменных ξ, s,

$$\breve{f}(-\xi, -s) = \breve{f}(\xi, s).$$

3) Пусть в R^2 произведена линейная замена базиса $y = Ax$, $\det A \neq 0$, тогда

$$\mathbf{R}\left(f(Ax)\right) = |\det A^{-1}|\breve{f}\left((A^{-1})^T\xi, s\right);$$

в частности, для $t \in R$, $A = tE$ (E — единичная матрица), $t \neq 0$,

$$\mathbf{R}\left(f(tx)\right) = \frac{1}{t^2}\breve{f}\left(\frac{\xi}{t}, s\right) = \frac{1}{|t|}\breve{f}\left(\xi, ts\right);$$

если матрица A ортогональна, $A^{-1} = A^T$, $|\det A| = 1$, то

$$\mathbf{R}\left(f(Ax)\right) = \breve{f}\left(A\xi, s\right).$$

4) (сдвиг преобразования Радона) Пусть в R^2 произведена замена начала координат, $y = x - a$, тогда

$$\mathbf{R}\,(f(x-a)) = \breve{f}(\xi, s - \langle \xi, a\rangle).$$

Убедимся в справедливости перечисленных свойств.

1) Используя определение преобразования Радона (3), получим

$$\breve{f}(t\xi, ts) = \int f(x)\delta(ts - \langle t\xi, x\rangle)\,dx = \int f(x)\delta\big(t(s - \langle \xi, x\rangle)\big)\,dx = |t|^{-1}\breve{f}(\xi, s).$$

Мы воспользовались свойством δ-функции $\delta(tx) = |t|^{-1}\delta x$.

2) Полагая $t = -1$ и используя только что доказанное свойство однородности, получим $\breve{f}((-1)\xi, (-1)s) = |-1|^{-1}\breve{f}(\xi, s)$.

3) Так как $y = Ax$ и $\Delta A \neq 0$, то $x = A^{-1}y$ и $dx = |A^{-1}|dy$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\big(f(Ax)\big) &= \int_{R^2} f(Ax)\delta(s - \langle \xi, x\rangle)\,dx = |\Delta A^{-1}| \int_{R^2} f(y)\delta(s - \langle \xi, A^{-1}y\rangle)\,dy \\ &= |\Delta A^{-1}| \int_{R^2} f(y)\delta(s - \langle \big(A^{-1}\big)^T\xi, y\rangle)\,dy = |\Delta A^{-1}|\breve{f}\left(\big(A^{-1}\big)^T\xi, s\right).\end{aligned}$$

Перечисленные в формулировке данного свойства частные случае сразу следуют из общей формулы. В случае матрицы $A = tE$ вторая форма записи следует из свойства однородности 1). Если же A ортогональна, то $A^{-1} = A^T$ и $|\Delta A| = 1$, поэтому $\mathbf{R}\big(f(Ax)\big) = \breve{f}(A\xi, s)$. В этом случае можно говорить о том, что *преобразование Радона перестановочно с вращениями.*

4) Полагая $(a_1, a_2) = a$ и используя замену переменных $y = x - a$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\big(f(x-a)\big) &= \int_{R^2} f(x-a)\delta(s - \langle \xi, x\rangle)\,dx \\ &= \int_{R^2} f(y)\delta(s - \langle \xi, a\rangle - \langle \xi, y\rangle)\,dy = \breve{f}(\xi, s - \langle \xi, a\rangle).\end{aligned}$$

Данное свойство, в словесной формулировке, можно охарактеризовать как *преобразование Радона перестановочно со сдвигами.*

Использование оператора обратной проекции и преобразования Фурье позволяет очень просто получить так называемую *формулу обращения.* Формулы обращения дают возможность определить искомую функцию по ее известному преобразованию Радона (или лучевому), и, как правило, используют оператор обратной проекции, который либо входит в формулу обращения непосредственно, либо в той или иной завуалированной форме. Пусть $g(\xi, s) \in C_0^\infty(Z)$, $g(\xi, s) = (\mathbf{R}\varphi)(\xi, s)$ для некоторой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$.

Оператор обратной проекции,

$$f(x) = (\mathbf{R}^{\#}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathbf{R}\varphi)(\xi(\alpha), x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha)\,d\alpha, \tag{4}$$

являющийся усреднением значений преобразования Радона (примененного к функции φ) вычисленного вдоль всех прямых, проходящих через точку x, позволяет "вернуться" из пространства функций, зависящих от переменных ξ, s, в

пространство функций, зависящих от исходных переменных x_1, x_2. Подставляя выражение (2) в (4), имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\xi^{\perp})\, dt \right) d\alpha.$$

Производя замену переменной $y = s\xi + t\xi^{\perp}$, разбивая внутренний интеграл на два, в пределах от $-\infty$ до 0, и от 0 до ∞, и замечая, что $t\, dt\, d\alpha = dy_1\, dy_2 \equiv dy$, а $t = |x - y|$, получим представление

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{|x - y|}\, dy \tag{5}$$

для обратной проекции $f(x)$ в виде свертки, $f = \varphi * |x|^{-1}$. Применяя к обеим частям преобразование Фурье и используя теорему о свертке, приходим к соотношению $F[f] \equiv \widehat{f} = \widehat{\varphi} \cdot h$, где $\widehat{\varphi} \equiv F[\varphi]$, $h = \left(|x|^{-1}\right)\widehat{\ }$, откуда $\widehat{\varphi} = \widehat{f}\,/\,h$. Применяя к полученному выражению обратное преобразование Фурье, приходим к простейшей формуле обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(y)}{h(y)}\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\langle x, y\rangle}\, dy. \tag{6}$$

Алгоритм, основанный на (6), очень прост. Исходя из известного преобразования Радона $g(\xi, s) = \mathbf{R}\varphi$ функции φ, вычисляется его обратная проекция $f(x) = (\mathbf{R}^{\#} g)$, а затем ее двумерное преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$. Далее вычисляем преобразование Фурье $h(y)$ функции $|x|^{-1}$ и находим отношение $\widehat{f}\,/\,h$. Наконец, применяя двумерное обратное преобразование Фурье к полученному выражению, получаем искомую функцию φ. Вычисление обратной проекции сводится к однократному интегрированию в пределах от 0 до 2π, и здесь в нашем распоряжении многочисленные квадратурные формулы. Преобразование Фурье, как прямое, так и обратное, заменяется дискретным, а наличие его быстрого варианта (БПФ) существенно уменьшает время расчетов.

Казалось бы, описанный алгоритм, из-за его простоты, должен бы получить широкое распространение, но это не так. Его применение ограничено случаями, когда нужно быстро получить грубую качественную картину, особенно не заботясь о точности вычислений. Можно его применять и для сравнительного исследования эффективности и точностных характеристик различных алгоритмов восстановления. И он редко применяется тогда, когда необходимо определить объект, по томографическим данным, с необходимой точностью.

Основные причины такого положения обусловлены двумя обстоятельствами. Первое состоит в том, что обратная проекция $f(x) = (\mathbf{R}^{\#} g)$, где $g(\xi, s) = \mathbf{R}\varphi$ для $\varphi \in \mathcal{D}(R^2)$ или $\varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi > 0)$, медленно убывает на бесконечности. Вообще говоря, $f \in \mathcal{S}'$, т.е. является элементом медленно растущих на бесконечности функций и, в частности, $f \notin L_2(R^2)$. Ниже мы убедимся в этом на основе общего представления оператора обратной проекции, а также увидим это на простом примере. С поведением f на бесконечности связано и второе обстоятельство. Именно, дискретное преобразование Фурье, в отличие от непрерывного, предполагает “замену” как исходной функции, так и ее образа, некоторыми периодическими. При этом такая аппроксимация тем хуже, чем медленнее убывание преобразуемой функции на бесконечности.

С привлечением терминологии теории псевдодифференциальных операторов формулу обращения можно записать в следующем виде,

$$\varphi(x) = (-\Delta)^{1/2} f(x) = \big((-\Delta)^{1/2}(\mathbf{R}^{\#} g)\big)(x), \tag{7}$$

для $g(\xi, s) = \mathbf{R}\varphi$. Таким образом, (7) представляет собой композицию оператора обратной проекции и нелокального псевдодифференциального оператора $(-\Delta)^{1/2}$ с символом $|y|$.

Совершенно иной подход использовался при выводе формулы обращения самим И. Радоном. Он использовал интегральное уравнение Абеля и его обращение; оператор усреднения функции $\varphi(x)$ по окружностям; усреднение $(\mathbf{R}\varphi)(\alpha, s)$ по прямым, равноотстоящим от начала координат; свойства перестановочности преобразования Радона со сдвигами и вращениями (свойства 3 и 4). Наиболее известны, особенно в работах прикладного характера, формулы обращения в следующих формах,

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{R}\varphi)'_p(\alpha, p + x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha)}{p} dp\, d\alpha, \tag{8}$$

где интеграл по p понимается в смысле главного значения по Коши. Интегрирование по частям внутреннего интеграла приводит к другим разновидностям формул обращения. Так, в одной из них можно использовать вторую производную $(\mathbf{R}\varphi)''_{pp}$,

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{R}\varphi)''_{pp}(\alpha, p + x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha) \ln|p| dp\, d\alpha, \tag{9}$$

но при этом ослабляется особенность, а во второй используется само преобразование Радона $\mathbf{R}\varphi$,

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{R}\varphi)(\alpha, p + x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha)}{p^2} dp\, d\alpha, \tag{10}$$

но при этом в знаменателе подынтегрального выражения появляется величина p^2 (вместо p в формуле (8)).

В алгоритмах восстановления функции f по ее известному преобразованию Радона можно пользоваться любой из формул обращения (8)–(10), в зависимости от априорной информации об f; наличия, уровня и характера неточностей в данных $\mathbf{R}f$; хорошего качества математических инструментов численного дифференцирования, сглаживания и "борьбы" с особенностями различных порядков.

Замечание 2.3. Забегая вперед отметим, что варианты (8), (9) формул обращения можно напрямую использовать для восстановления потенциалов векторных и симметричных 2-тензорных полей, соответственно. При этом производные по s от преобразований Радона соответствующих потенциалов заменяются продольными либо поперечными лучевыми преобразованиями векторных или тензорных полей.

2.1. **Произвольная размерность пространства.** Наиболее простое напрашивающееся обобщение постановки задачи томографии состоит в изменении размерности пространства. Она предполагается произвольной, $R^2 \to R^n$, $n \geq 2$. Заметим, что это обобщение носит чисто методологический характер, так как

Радон получил формулы обращения, в ранее цитированной работе, и в двумерном, и в трехмерном случаях. Ниже приводятся определения томографических интегральных преобразований, а также формулы их обращения, пригодные для пространств произвольной размерности. С практической точки зрения в первую очередь интересны размерности $n = 2, 3$.

Пусть в евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$, задана декартова прямоугольная система координат, через B обозначен шар единичного радиуса с центром в начале координат, ∂B — его граница. Для единичной сферы в R^n используется и обозначение $\mathbb{S}^{n-1}$. Следуя [20], введем также обозначение для следующих множеств: $\xi^\perp$ для подпространства $\{y \in R^n \mid \langle \xi, y\rangle = 0\}$, ортогонального вектору $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{S}^{n-1}$; Z для цилиндра $\mathbb{S}^{n-1} \times R \subset R^{n+1}$; T для касательного расслоения сферы $\mathbb{S}^{n-1} \times \xi^\perp = \{(\xi, x) \mid \xi \in \mathbb{S}^{n-1}, \langle x, \xi\rangle = 0\} \subset R^{2n}$; $\mathbb{S}R^n$ для сферического расслоения $\{(x, \xi) \mid x \in R^n, \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$. Определения преобразования Радона, лучевого и веерного преобразований приведем, для определенности, для функций из пространства Шварца $\mathcal{S}(R^n)$.

Преобразование Радона $\mathbf{R}$ (n-мерное) осуществляет отображение функции $\varphi(x)$ в множество ее интегралов $(\mathbf{R}\varphi)(\xi, s)$ по гиперплоскостям в R^n, $\mathbf{R} : \mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(Z)$,

$$(\mathbf{R}\varphi)(\xi, s) = \int\limits_{\langle \xi, x\rangle = s} \varphi(x)dx = \int\limits_{\xi^\perp} \varphi(s\xi + y)dy; \tag{11}$$

гиперплоскость определяется нормальным вектором ξ и отстоит от начала координат на расстояние s (с учетом знака). Заметим, что количество переменных функции $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ совпадает с количеством независимых переменных функции $g(\xi, s) = (\mathbf{R}\varphi)(\xi, s)$, полученной в результате применения оператора Радона. Именно, $n = (n - 1) + 1$. Задача обращения преобразования Радона, таким образом, не является переопределенной.

Оператор обратной проекции (для преобразования Радона) обобщается естественным образом, $\mathbf{R}^\# : \mathcal{S}(Z) \to \mathcal{S}'(R^n)$,

$$(\mathbf{R}^\# g)(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} g(\xi, \langle x, \xi\rangle)\, d\xi, \tag{12}$$

где $g(\xi, s) \in \mathcal{S}(Z)$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в R^n.

Лучевое преобразование $\mathbf{P}$ отображает функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}(R^n)$ во множество ее интегралов вдоль всех прямых из R^n, $\mathbf{P} : \mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(T)$,

$$(\mathbf{P}\varphi)(\xi, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t\xi)dt; \tag{13}$$

прямая проходит через точку $x \in R^n$ в направлении вектора $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$. Следует отметить, что, в то время как число переменных функции φ есть n, число независимых переменных функции $(\mathbf{P}\varphi)(\xi, x)$ иное и равно $(n - 1) + (n - 1)$. Как видим, $n < 2n-2$ при $n \geq 3$, и задача обращения лучевого преобразования переопределена. Очевидно, при $n = 2$ задача не является переопределенной.

Оператор обратной проекции (для лучевого преобразования) $\mathbf{P}^{\#} : \mathcal{S}(T) \to \mathcal{S}'(R^n)$, выглядит следующим образом,

$$(\mathbf{R}^{\#} g)(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} g(\xi, E_\xi x)\, d\xi, \tag{14}$$

где $g(\xi, y) \in \mathcal{S}(T)$, E_ξ — оператор ортогональной проекции на подпространство $\xi^\perp$.

Веерное преобразование, $\mathbf{D} : \mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{S}R^n)$,

$$(\mathbf{D}\varphi)(a, \eta) = \int\limits_0^\infty \varphi(a + t\eta) dt \tag{15}$$

представляет собой интеграл от функции $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$ по лучу с началом в точке $a \in R^n$ и направляющим вектором $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Важную роль в томографических исследованиях играют *проекционные теоремы*, связывающие преобразование Фурье искомой функции с преобразованиями Фурье ее преобразования Радона (лучевого преобразования). Действует соглашение, в соответствии с которым преобразование Фурье осуществляется по второй переменной s для $(\mathbf{R}\varphi)(\xi, s)$ (по второй группе переменных $y \in \xi^\perp$ для $(\mathbf{P}\varphi)(\xi, y)$). Приведем формулировки.

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$. Тогда

$$(\mathbf{R}_\xi \varphi)\widehat{\ }(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{\varphi}(\sigma\xi), \quad \sigma \in R,$$

$$(\mathbf{P}_\xi \varphi)\widehat{\ }(y) = (2\pi)^{1/2} \widehat{\varphi}(y), \quad y \in \xi^\perp,$$

где введены обозначения $(\mathbf{R}_\xi\varphi)(s) = (\mathbf{R}\varphi)(\xi, s)$, $s \in R$; $(\mathbf{P}_\xi\varphi)(y) = (\mathbf{P}\varphi)(\xi, y)$, $y \in \xi^\perp$. Обозначение $\widehat{f}$ означает образ преобразования Фурье, примененного к функции f.

Большое значение имеют и явные формулы для композиции оператора Радона и лучевого преобразования и их операторов обратной проекции. Так, для $f \in \mathcal{S}(R^n)$ справедливы соотношения

$$\mathbf{R}^{\#}\mathbf{R}\varphi = \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{|\mathbb{S}^{n-1}|} |x|^{-1} * \varphi, \qquad \mathbf{P}^{\#}\mathbf{P}\varphi = \frac{2}{|\mathbb{S}^{n-1}|} |x|^{1-n} * \varphi.$$

Очевидно, эти формулы дают полное представление о характере поведения функций $(\mathbf{R}^{\#}\mathbf{R}\varphi)(x)$ и $(\mathbf{P}^{\#}\mathbf{P}\varphi)(x)$ при $x \to \infty$ и в нуле, в зависимости от класса функций, которому принадлежит $\varphi(x)$.

Как для преобразования Радона, так и для лучевого имеется целое семейство формул обращения [20] и множество основанных на них алгоритмов (при $n = 2, 3$). Указанное семейство формул использует *потенциал Рисса*, который, при $\alpha < n$, определяется с помощью преобразования Фурье,

$$(\mathcal{I}^\alpha \varphi)\widehat{\ }(y) = |y|^{-\alpha} \widehat{\varphi}(y).$$

Когда оператор $\mathcal{I}^\alpha$ применяется к функциям, определенным на Z (или T), он действует по второй переменной (второй группе переменных). Если $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$, то $(\mathcal{I}^\alpha\varphi)\widehat{\ } \in L_1(R^n)$, поэтому $\mathcal{I}^{-\alpha}(\mathcal{I}^\alpha\varphi) = \varphi$

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$. Тогда для любого $\alpha < n$

$$\varphi = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathcal{I}^{-\alpha} \mathbf{R}^{\#} \mathcal{I}^{\alpha-n+1} g, \quad g = \mathbf{R}\varphi. \tag{16}$$

$$\varphi = \frac{1}{|S^{n-2}|}(2\pi)^{-1}\mathcal{I}^{-\alpha}\mathbf{P}^{\#}\mathcal{I}^{\alpha-1}g, \quad g = \mathbf{P}\varphi. \tag{17}$$

Наиболее известен частный случай формул обращения (16) для преобразования Радона при $\alpha = 0$. При этом формулы различны для пространств нечетных и четных размерностей. Приведем их. Если $g = \mathbf{R}\varphi$, то

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{|\xi|=1} \frac{\partial^{n-1} g(\xi, s)}{\partial s^{n-1}}\Big|_{s=\langle \xi, x\rangle} d\xi$$

для нечетных n, $d\xi$ — элемент объема сферы $|\xi| = 1$ в R^n;

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{n-1} g(\xi, s)}{\partial s^{n-1}}\Big|_{s=\langle \xi, x\rangle + p} p^{-1}\, dp\, d\xi$$

при четных n. Напомним, что интеграл по p понимается в смысле главного значения.

Полагая $\alpha = n - 1$ в (16), получим

$$\varphi = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathcal{I}^{1-n}\mathbf{R}^{\#}g, \quad g = \mathbf{P}\varphi.$$

При нечетном $n = 2l + 1$ оператор $\mathcal{I}^{1-n}$ представляет собой обычный дифференциальный оператор, $\mathcal{I}^{1-n} = \big(-\Delta\big)^l$, в частности при $n = 3$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\Delta_x \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi, \langle x, \xi\rangle)\, d\xi.$$

На этой же формуле, при $n = 2$, основан известный алгоритм ρ-фильтрации обратной проекции.

3. Векторная томография

Введем класс функций, с помощью которых можно описать разрывные векторные и тензорные поля, а также поля с разрывами в производных. Из физических соображений естественно предполагать, что речь идет только о разрывах 1-го рода. Для простоты положим, что носитель соответствующих разрывов совпадает с ∂B. Множество симметричных m-тензорных полей с носителем в $\overline{B}$ будем обозначать $S^m(B)$. В частности, $S^1(B)$ — это множество векторных полей с носителем в $\overline{B}$. Очевидно, всякое векторное поле симметрично.

Пусть функция $\varphi(x)$ класса C^k определена в R^2, причем она обращается в 0 на множестве $R^2 \setminus B$, а ее носитель совпадет с замыканием B, $\operatorname{supp}\varphi = \overline{B}$. В точках $x \in R^2 \setminus \partial B$ функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема. В точках $x \in \partial B$ она непрерывно дифференцируема до k-го порядка включительно. Иными словами, в точках $x \in \partial B$ все частные производные $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^j \partial x_2^{l-j}}$, $l = 0, \ldots, k$, $j \le l$, до порядка k включительно, непрерывны и обращаются в 0, а производные порядка $k{+}1$ терпят разрыв 1-го рода. Будем говорить, что функция φ является *потенциалом гладкости* C^k, или C^k*-потенциалом* в R^2.

Существует два типа лучевых преобразований, действующих на векторные поля, заданные на плоскости.

Продольное лучевое преобразование векторного поля $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$, $(x_1, x_2) \in B$, $s \in [-1, 1]$, $\eta \in \partial B$,

$$(\mathbf{P}v)(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \big\langle \eta, v(s\xi + t\eta)\big\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta^1 v_1 + \eta^2 v_2) dt. \tag{18}$$

Поперечное лучевое преобразование векторного поля $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, $x \in B$, $s \in [-1, 1], \xi \in \partial B$, определяется аналогично,

$$(\mathbf{P}^{\perp}u)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, u(s\xi + t\eta) \rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi^1 u_1 + \xi^2 u_2) dt. \tag{19}$$

Здесь $\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — нормальный вектор прямой, $\eta = \xi^{\perp} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ — направляющий вектор прямой, вдоль которой осуществляется интегрирование.

Наряду с известными операторами градиента и дивергенции $\mathrm{d} : C^k(B) \to C^{k-1}(S^1(B))$, $\delta : C^k(S^1(B)) \to C^{k-1}(B)$,

$$\mathrm{d}\varphi = \big((\mathrm{d}\varphi)_1, (\mathrm{d}\varphi)_2\big) = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big), \quad (\delta u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

определим операторы $\mathrm{d}^{\perp} : C^k(B) \to C^{k-1}(S^1(B))$, $\delta^{\perp} : C^k(S^1(B)) \to C^{k-1}(B)$

$$\mathrm{d}^{\perp}\varphi = \big((\mathrm{d}^{\perp}\varphi)_1, (\mathrm{d}^{\perp}\varphi)_2\big) = \Big(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big), \quad \big(\delta^{\perp}u\big) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Напомним, что векторное поле $u \in C^k(S^1(B))$ *потенциально*, если существует функция $\varphi \in C^{k+1}(B)$ (потенциал), такая что $u = \mathrm{d}\varphi$. Поле $v \in C^k(S^1(B))$ *соленоидально*, если $\delta v = 0$, $\delta v \in C^{k-1}(B)$. Векторное поле $\mathrm{d}h \in C^k(S^1(B))$ *гармоническое*, если h — гармоническая в B функция.

Разложение векторного поля на потенциальную и соленоидальную части занимает важное место в векторном и тензорном анализе, и в частности в векторной томографии. Это разложение, без уточнения краевых (или на бесконечности) свойств векторных полей, неединственно и связано с именем Гельмгольца. Более детальное, уже единственное, разложение поля на три части, приведенное, например, в [21]–[23], носит название *теоремы Гельмгольца-Ходжа*. Сформулируем этот результат.

Для любого векторного поля $w \in H^1(S^1(B))$ имеет место единственное разложение

$$w = v + \mathrm{d}h + \mathrm{d}\psi, \quad \delta v = 0, \quad \psi\,|_{\partial B} = 0, \quad \langle v, \nu\rangle\,|_{\partial B} = 0, \tag{20}$$

где $\mathrm{d}\psi$ — потенциальное векторное поле, v — соленоидальное векторное поле, а $\mathrm{d}h$ — гармоническое векторное поле; ν — вектор внешней к границе ∂B нормали, $v \in H^1(S^1(B))$, $\psi \in H^2(B)$.

Ведем обозначение $w^s = v + \mathrm{d}h$. Очевидно, это поле соленоидально (h — гармоническая функция), и, таким образом, (20) можно переписать в виде

$$w = w^s + \mathrm{d}\psi, \quad \delta\, w^s = 0, \quad \psi\,|_{\partial B} = 0. \tag{21}$$

Объединяя $\mathrm{d}h$ и $\mathrm{d}\psi$, $u = \mathrm{d}h + \mathrm{d}\psi = \mathrm{d}(h + \psi) = \mathrm{d}\widetilde{\psi}$, получим еще одну модификацию разложения (20),

$$w = v + \mathrm{d}\widetilde{\psi}, \quad \delta\, v = 0, \quad \langle v, \nu\rangle\,|_{\partial B} = 0. \tag{22}$$

Дальнейшие свойства и формулы обращения, для простоты, будут сформулированы для более узкого класса векторных полей из $C^k(B)$. Пусть $v \in C^k(S^1(B))$ — соленоидальное, $u \in C^k(S^1(B))$ — потенциальное векторное поле, k целое, $k \geq -1$. Тогда справедливы следующие свойства:

1) существуют φ, $\psi \in C^{k+1}(B)$, такие что $v = \mathrm{d}^{\perp}\varphi$, $u = \mathrm{d}\psi$;

2) если φ, $\psi \in C^{k+1}(B)$, $k \geq 1$, то $\delta(\,\mathrm{d}^{\perp}\varphi) = 0$, $\delta^{\perp}(\,\mathrm{d}\psi) = 0$;
3) $(\mathbf{P}u)(\xi^{\perp}, s) = 0, \quad (\mathbf{P}^{\perp}v)(\xi, s) = 0$;
4) поперечное лучевое преобразование поля $u \in C^k(S^1(B))$, $u = \mathrm{d}\psi$, $\psi \in C^{k+1}(B)$, связано с преобразованием Радона его потенциала ψ соотношением

$$\big(\mathbf{P}^{\perp}u\big)(\xi, s) = \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{R}\psi(\xi, s);$$

5) продольное лучевое преобразование поля $v \in C^k(S^1(B))$, $v = \mathrm{d}^{\perp}\varphi$, $\varphi \in C^{k+1}(B)$, связано с преобразованием Радона его потенциала φ соотношением

$$\big(\mathbf{P}v\big)(\xi^{\perp}, s) = \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{R}\varphi(\xi, s);$$

6) если $\varphi = \psi$, $\varphi, \psi \in C^k(B)$, $k \geq 0$, $u = \mathrm{d}\varphi$, $v = \mathrm{d}^{\perp}\varphi$ то $\langle u\,,\, v\rangle = 0$. Кроме того,

$$\big(\mathbf{P}^{\perp}u\big)(\xi, s) = \big(\mathbf{P}v\big)(\xi^{\perp}, s) = \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{R}\varphi(\xi, s).$$

Доказательства приведенных утверждений просты и состоят в непосредственной проверке. Подчеркнем, что сами векторные поля могут на ∂B быть и разрывными, при том что их потенциалы непрерывны в R^2.

Ограничиваясь классом $C^k(B)$ потенциалов и учитывая свойства 1, 2 получим для разложения (20) следующий вариант

$$w = \mathrm{d}^{\perp}\varphi + \mathrm{d}\psi, \quad \psi\,|_{\partial B} = 0, \quad \varphi\,|_{\partial B} = 0, \tag{23}$$

в котором отсутствует гармоническое векторное поле.

Предположим, что даны как продольное (18), так и поперечное (19) лучевые преобразования векторного поля w, которые можно записать в форме системы уравнений,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}w &= \eta^1\big(\mathbf{R}w_1\big) + \eta^2\big(\mathbf{R}w_2\big) = -\sin\alpha\big(\mathbf{R}w_1\big) + \cos\alpha\big(\mathbf{R}w_2\big) \\ \mathbf{P}^{\perp}w &= \xi^1\big(\mathbf{R}w_1\big) + \xi^2\big(\mathbf{R}w_2\big) = \cos\alpha\big(\mathbf{R}w_1\big) + \sin\alpha\big(\mathbf{R}w_2\big), \end{aligned} \tag{24}$$

относительно неизвестных $\big(\mathbf{R}w_1\big)$, $\big(\mathbf{R}w_2\big)$. Разрешая эту систему, получим выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}w_1 &= \eta^1\big(\mathbf{P}w\big) + \eta^2\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big) = -\sin\alpha\big(\mathbf{P}w\big) + \cos\alpha\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big) \\ \mathbf{R}w_2 &= \xi^1\big(\mathbf{P}w\big) + \xi^2\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big) = \cos\alpha\big(\mathbf{P}w\big) + \sin\alpha\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big). \end{aligned} \tag{25}$$

для преобразований Радона $\mathbf{R}w_1$, $\mathbf{R}w_2$ компонент неизвестного векторного поля w в зависимости от известных лучевых преобразований $\mathbf{P}w$ и $\mathbf{P}^{\perp}w$. Применяя к обеим частям полученных выражений любую из многочисленных формул обращения, получим компоненты w_1, w_2 искомого поля.

На практике, как уже упоминалось, зачастую известно лишь одно лучевое преобразование: либо продольное, либо поперечное. Пусть известно продольное лучевое преобразование векторного поля w класса $C^k(S^1(B))$,

$$\mathbf{P}w = \eta^1\big(\mathbf{R}w_1\big) + \eta^2\big(\mathbf{R}w_2\big) = -\sin\alpha\big(\mathbf{R}w_1\big) + \cos\alpha\big(\mathbf{R}w_2\big). \tag{26}$$

Прежде всего заметим, что в силу разложения (23) и свойства 3 $\big(\mathbf{P}(\,\mathrm{d}\psi)\big) = 0$. Поэтому $\mathbf{P}w = \mathbf{P}v$, где $v = \mathrm{d}^{\perp}\varphi$. Следовательно, речь может идти о восстановлении лишь соленоидальной части поля $v = (v_1, v_2)$. Но в силу свойства 3

соленоидальное поле v принадлежит ядру поперечного лучевого преобразования, $\mathbf{P}^{\perp}v = 0$, т.е. $0 = \mathbf{P}^{\perp}v = \cos\alpha\big(\mathbf{R}v_1\big) + \sin\alpha\big(\mathbf{R}v_2\big)$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{R}v_1 = \eta^1\mathbf{P}w \equiv -\sin\alpha\mathbf{P}w, \quad \mathbf{R}v_2 = \eta^2\mathbf{P}w \equiv \cos\alpha\mathbf{P}w.$$

Вновь мы можем воспользоваться всеми известными формулами обращения.

Анализируя формулы обращения, приходим к определению оператора обратной проекции $\mathbf{P}^{\#}_{1tf}$, примененного к продольному лучевому преобразованию $g(\eta(\alpha), s(x,\alpha)) = (\mathbf{P}w)(\eta, s)$ векторного поля w. Результатом действия этого оператора является соленоидальное (что проверяется непосредственно) векторное поле μ, каково бы ни было поле w,

$$\mu(x) = \mathbf{P}^{\#}_{1tf}\big((\mathbf{P}w)(\eta(\alpha), s(x,\alpha))\big)(x),$$

с компонентами

$$\mu_j(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \eta^j(\mathbf{P}v)(\eta(\alpha), s(x,\alpha))d\alpha, \quad j = 1,2.$$

Исходя из известного поперечного лучевого преобразования $\mathbf{P}^{\perp}w$ поля w и проводя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что по $\mathbf{P}^{\perp}w$ может быть восстановлена лишь потенциальная часть $u = \mathrm{d}\psi$ поля w. Так как потенциальные поля $u = \mathrm{d}\psi$, $\psi\,|_{\partial B} = 0$ принадлежат ядру продольного лучевого преобразования, то $\mathbf{P}u = 0$, и

$$\mathbf{R}u_1 = \xi^1\mathbf{P}^{\perp}w \equiv \cos\alpha\mathbf{P}^{\perp}w, \quad \mathbf{R}u_2 = \xi^2\mathbf{P}^{\perp}w \equiv \sin\alpha\mathbf{P}^{\perp}w.$$

Оператор обратной проекции, примененный к поперечному лучевому преобразованию $h(\xi(\alpha), s(x,\alpha)) = (\mathbf{P}^{\perp}w)(\xi, s)$ поля w дает потенциальное векторное поле λ, $\delta^{\perp}\lambda = 0$,

$$\lambda(x) = \big(\mathbf{P}^{\perp}\big)^{\#}_{1tf}\big((\mathbf{P}^{\perp}u)(\xi(\alpha), s(x,\alpha))\big)(x)$$

с компонентами

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \xi^j(\mathbf{P}^{\perp}w)(\xi(\alpha), s(x,\alpha))d\alpha, \quad j = 1,2.$$

В терминах векторных полей μ, λ можно записать простые варианты формул обращения,

$$v = (-\Delta)^{1/2}\mu, \quad u = (-\Delta)^{1/2}\lambda,$$

где v — соленоидальная часть векторного поля w, а u — потенциальная часть поля w, которые, по форме, вполне аналогичны формулам обращения для функции.

Используя свойства 3–6 векторных полей и их потенциалов, можно получить другие формулы обращения, восстанавливающие потенциал векторного поля по его известному продольному или поперечному лучевому преобразованию. После восстановления потенциала уже легко построить соответствующие части поля, соленоидальную или потенциальную. Искомое векторное поле восстанавливается целиком, если известны одновременно как продольное, так и поперечное его лучевые преобразования. Приведем формулы обращения для потенциала φ соленоидальной части v поля w, которые, по-существу, повторяют формулы (8), (9),

$$\varphi(x_1,x_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{P}w)(\alpha, p + x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha)}{p}dp\,d\alpha, \tag{27}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{P}w)'_p(\alpha, p + x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha) \ln(p) dp\, d\alpha. \tag{28}$$

На основе восстановленного потенциала φ строится соленоидальное поле $v = \mathrm{d}^{\perp}\varphi$. Для этого необходимо численно продифференцировать потенциал φ и, тем самым, найти приближенные значения компонент $v_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $v_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ поля v.

Замечание 3.1. Формулы обращения в векторной томографии приобретают описанные выше простые формы лишь в предположении, что отсутствует гармоническое векторное поле $\mathrm{d}h$, h — гармоническая функция. Его наличие усложняет ситуацию и заставляет более тщательно строить как формулы обращения, так и саму процедуру восстановления соответствующих частей поля или векторного поля целиком, в зависимости от данных, которыми являются продольное и (или) поперечное лучевое преобразование. Тем не менее, непреодолимых сложностей здесь не возникает.

4. Задачи тензорной томографии

Остановимся кратко на задаче интегральной геометрии, так как именно она лежит в основе более общих томографических постановок, как в плане обобщения объекта исследований, так и в плане введения новых интегральных операторов, образы которых служат исходными данными в задачах нескалярной томографии, поставленных в том числе и на римановом многообразии.

Термин "интегральная геометрия" используется для определенного класса обратных задач, понимаемых в широком смысле, и тесно связан с геометрическими объектами в n-мерном пространстве. Постановки задач интегральной геометрии и их исследования до поры до времени осуществлялись в теоретическом плане, имея фрагментарные и редкие практические применения. Мощным стимулом для развития новых постановок интегральной геометрии явились геофизические исследования внутренней структуры Земли с помощью естественных (землетрясения) и искусственных источников упругих и электромагнитных волн [24]. С появлением и быстрым становлением томографии как самостоятельной естественнонаучной и практической дисциплины интегральная геометрия получила "второе дыхание", а ее результаты оказались востребованы во многих областях, связанных с исследованиями неразрушающими дистанционными методами. Большой вклад в становление и развитие интегральной геометрии в XX веке внесла научная школа во главе с М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым (см., например, [25], [26]).

Задача *интегральной геометрии* в наиболее общей "классической" постановке [25], состоит в определении неизвестной функции $u(x)$, $x \in R^n$, по известным интегралам

$$\int\limits_{\mathcal{M}(\lambda)} u(x) d\sigma = v(\lambda) \tag{29}$$

по многообразиям, зависящим от параметра $\lambda \in R^k$, из некоторого семейства $\{\mathcal{M}(\lambda)\}$. Полное математическое исследование задачи предполагает ответы на перечисленные ниже существенные вопросы.

Единственность. При каких условиях задание функции $v(\lambda)$ однозначно определяет $u(x)$? Большая часть теоретических исследований и результатов в этой области отвечают именно на этот вопрос.

Существование. Каковы необходимые и достаточные условия принадлежности $v(\lambda)$ классу функций, представимых в форме интегралов (29)? Вопрос существования решения, как правило, более сложен. К счастью, в задачах, возникающих в связи с практическими постановками, имеется априорная информация о существовании решения, на том простом основании, что у исследователя имеются данные, в которых, в той или иной форме, "зашифрована" искомая величина (решение).

Метод решения. Как найти функцию u по известной v? Классический ответ на этот вопрос предполагает получение u в виде явных формул (формул обращения). В связи с развитием ЭВМ широкое распространение получил другой подход, а именно приближенное решение задач интегральной геометрии, с использованием как универсальных средств теории приближений, так и специальных методов, разрабатываемых с учетом специфики тех или иных задач интегральной геометрии.

Устойчивость. Каким образом ведет себя решение u в зависимости от ошибок, внесенных в данные v? Задачи интегральной геометрии с полными данными, как правило, слабо некорректны. Существуют важные постановки с неполными данными, обладающими сильной некорректностью той же степени, что и хорошо известная задача аналитического продолжения. В качестве примера приведем обратную кинематическую задачу сейсмики, а также задачу томографии с ограниченными углами обзора. Несмотря на пессимизм, преобладающий среди исследователей относительно перспектив этих задач, продолжаются попытки разработать эффективные и устойчивые численные методы их решения.

4.1. **Лучевые преобразования тензорных полей.** Хорошо известно, что распространение электромагнитных и упругих волн в анизотропной среде сопровождается явлением поляризации. В приближении геометрической оптики поведение эллипса поляризации описывается системой дифференциальных уравнений, связывающей свойства среды и значения электромагнитного поля, распространяющегося вдоль луча [27]. Таким образом, задача определения свойств среды по степени поляризации падающей волны и волны, прошедшей через среду, носит томографический характер (информация накапливается вдоль луча). Если же поляризационные измерения проведены в достаточном объеме, то мы имеем дело с *задачей поляризационной томографии.* Эта задача имеет приложения в фотоупругости [28], диагностике плазмы, волоконной оптике и др. Еще раз отметим, что характер взаимодействия поля с лучом при этом носит совершенно иной характер, по сравнению с рассматриваемым нами ранее поперечным лучевым преобразованием на плоскости. Существенно, что размерность пространства, в котором определяется "новое" преобразование, не может быть менее 3-х.

Мы вновь видим, что изменяется объект исследования. Вместо скалярной величины требуется восстановить векторное (электромагнитное) или тензорное поле. Можно говорить о тензорах деформации или напряжений, тензоре электромагнитного поля. Усложнение же объекта приводит не только к обобщению преобразования Радона, продольного и поперечного лучевых преобразования, но и к появлению новых типов преобразований. Прежде всего, это продольное

лучевое преобразование симметричного m-тензорного поля. Его можно определить не только в n-мерном пространстве (с евклидовой метрикой), но и на римановом многообразии. Преобразование Радона функции также обобщается на симметричные m-тензорные поля, зависящие от n переменных. Можно ему придать смысл и в случае риманова многообразия, но при этом оно должно содержать подходящее семейство (аналогичное по мощности и свойствам многообразию гиперплоскостей в R^n) $(n-1)$-мерных вполне геодезических подмногообразий. Такое интегральное преобразование можно назвать *нормальным преобразованием Радона. Укороченное поперечное лучевое преобразование* представляет собой упрощенную версию поперечного лучевого преобразования и имеет прямое отношение к фотоупругости. Можно говорить и о поляризационной томографии (в узком смысле). В этой задаче достаточно измерений разности фаз у падающей и прошедшей волны, что намного проще, нежели измерить сами фазы на "входе" и "выходе". *Смешанное (продольно-поперечное) лучевое преобразование* возникает на пути применения лучевого метода для изотропной упругой среды [29], описываемой системой уравнений динамической упругости, и, далее, при переходе к квазиизотропной среде, в монографии [30]. В этой же монографии произведено глубокое обобщение упомянутых лучевых преобразований на случай симметричных m-тензорных полей, заданных на римановом многообразии.

В качестве примера приведем задачу *интегральной геометрии тензорных полей*, состоящую в определении симметричного m-тензорного поля $w = w_{i_1\dots i_m}(x)$, $x \in M$, заданного на римановом многообразии M, $\dim M = n$, если известны его интегралы (т.е. продольное лучевое преобразование) вида

$$\int\limits_{\gamma_{x,\xi}} w_{i_1\dots i_m}\big(\gamma_{x,\xi}(t)\big)\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t)\dots\dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)dt = (\mathbf{P}u)(x,\xi) \tag{30}$$

вдоль геодезических γ заданной римановой метрики ($x \in \partial M$, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$), $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. С одной стороны, этой постановкой обобщается "классическая" задача интегральной геометрии, так как требуется восстановить тензорное поле, а не функцию. С другой стороны, сужается и конкретизируется многообразие поверхностей, интегралы по которым известны. Именно, это одномерные многообразия, которые являются геодезическими некоторой заданной римановой метрики. Цель состоит в определении симметричного тензорного поля $w_{i_1\dots i_m}$ по известным интегралам (30). Оказывается, как и для векторного случая и евклидовой метрики, по этим данным можно найти лишь соленоидальную часть w^s поля w.

4.2. **Лучевые преобразования тензорного поля на плоскости.** Ограничимся рассмотрением лучевых преобразований в двумерном случае. Напомним, что множество симметричных m-тензорных полей с носителем в круге $\overline{B}$ обозначается через $S^m(B)$; m-тензорное поле *симметрично*, если его компоненты инвариантны относительно перестановок индексов; если рассматривается разрывное тензорное поле, то носитель разрывов совпадает с ∂B.

Ограничимся рассмотрением двух типов лучевых преобразований, действующих на симметричные m-тензорные поля. Напомним, что по повторяющимся вверху и внизу индексам подразумевается суммирование от 1 до 2.

Продольное лучевое преобразование симметричного m-тензорного поля $v(x) = (v_{i_1,\dots,i_m})$, $x \in B$, $s \in [-1,1]$, $\eta \in \partial B$, задается формулой

$$(\mathbf{P}v)(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \big\langle \eta^m, v(s\xi + t\eta) \big\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^{i_1} \dots \eta^{i_m} v_{i_1,\dots,i_m} dt.$$

Поперечное лучевое преобразование симметричного m-тензорного поля $u(x) = (u_{i_1,\dots,i_m})$, $x \in B$, $s \in [-1,1]$, $\xi \in \partial B$, определяется аналогично,

$$(\mathbf{P}^{\perp}u)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \big\langle \xi^m, u(s\xi + t\eta) \big\rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_m} u_{i_1,\dots,i_m} dt.$$

Здесь сохранены прежние обозначения для нормального $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и направляющего $\eta = (\eta^1, \eta^2) = \xi^{\perp} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ векторов прямой, вдоль которой производится интегрирование.

Оператор *продольного m-углового момента*, действуя на функцию $g(\eta(\alpha), s)$ по правилу

$$\mu_{i_1,\dots,i_m}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^{i_1} \dots \eta^{i_m} g\big(\eta(\alpha), s(x_1, x_2, \alpha)\big) d\alpha, \tag{31}$$

$s(x_1, x_2, \alpha) = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$, дает симметричное m-тензорное поле $\mu(x)$, определенное всюду в R^2. Если при этом функция $g(\eta(\alpha), s)$ является образом, под действием продольного лучевого преобразования, симметричного m-тензорного поля, то соотношение (31) задает *оператор обратной проекции по отношению к продольному лучевому преобразованию*. Непосредственная проверка позволяет установить, что полученное в результате m-тензорное поле соленоидально.

Оператор *поперечного m-углового момента*, действуя на функцию $g(\xi(\alpha), s)$ по правилу

$$\lambda_{i_1,\dots,i_m}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_m} g\big(\xi(\alpha), s(x_1, x_2, \alpha)\big) d\alpha, \tag{32}$$

дает симметричное m-тензорное поле $\lambda(x)$, определенное всюду в R^2. Если при этом функция $g(\xi(\alpha), s)$ является образом, под действием поперечного лучевого преобразования, симметричного m-тензорного поля, то соотношение (32) задает *оператор обратной проекции по отношению к поперечному лучевому преобразованию*.

Далее мы ограничиваемся некоторыми результатами и формулами обращения, относящимися к симметричным 2-тензорным полям. В этом случае продольное лучевое преобразование поля $w = (w_{ij})$ принимает вид

$$(\mathbf{P}w)(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^i \eta^j w_{ij}(s\xi + t\eta) dt, \tag{33}$$

а поперечное преобразование вид

$$(\mathbf{P}^{\perp}w)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i \xi^j w_{ij}(s\xi + t\eta) dt. \tag{34}$$

Будем рассматривать лишь потенциальные поля вида $v = (v_{ij}) = (\,\mathrm{d}^2\psi)_{ij}$, $v_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}$, соленоидальные поля вида $u = (u_{ij}) = ((\,\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi)_{ij}$, где $u_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_2}$, $u_{12} = u_{21} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$, $u_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_1}$, а также их суммы вида $w = \mathrm{d}^2\psi + (\,\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi$.

Потенциалы ψ, φ выбираются из класса $C^k(B)$, $k > 0$. Тогда $\mathrm{d}^2 : C^k(B) \to C^{k-2}(S^2(B))$, $(\mathrm{d}^\perp)^2 : C^k(B) \to C^{k-2}(S^2(B))$, и для w имеет место

$$w = \mathrm{d}^2\psi + (\mathrm{d}^\perp)^2\varphi, \quad \psi\,|_{\partial B} = 0, \quad \varphi\,|_{\partial B} = 0, \quad \mathrm{d}\psi\,|_{\partial B} = 0, \quad \mathrm{d}^\perp\varphi\,|_{\partial B} = 0. \tag{35}$$

Операторы δ и $\delta^\perp$, действующие на 2-тензорное поле w, в данном конкретном случае определим покомпонентно,

$$(\delta w)_k = \frac{\partial w_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{k2}}{\partial x_2}, \quad \big(\delta^\perp w\big)_k = -\frac{\partial w_{k1}}{\partial x_2} + \frac{\partial w_{k2}}{\partial x_1}, \quad k = 1, 2,$$

$\delta : C^k(S^2(B)) \to C^{k-1}(S^1(B))$, $\delta^\perp : C^k(S^2(B)) \to C^{k-1}(S^1(B))$, $k \geq 0$.

Пусть $v \in C^k(S^2(B))$ — соленоидальное, $u \in C^k(S^2(B))$ — потенциальное симметричное 2-тензорное поле, $v = (v_{ij})$, $u = (u_{ij})$, k целое, $k \geq 0$. Тогда справедливы следующие свойства:

1) если φ, $\psi \in C^{k+2}(B)$, $k \geq 1$, то $\delta((\mathrm{d}^\perp)^2\varphi) = 0$, $\delta^\perp(\mathrm{d}^2\psi) = 0$;
2) $(\mathbf{P}u)(\xi^\perp, s) = 0, \quad (\mathbf{P}^\perp v)(\xi, s) = 0$;
3) поперечное лучевое преобразование поля $u \in C^k(S^2(B))$, $u = \mathrm{d}^2\psi$, $\psi \in C^{k+2}(B)$, связано с преобразованием Радона его потенциала ψ соотношением

$$\big(\mathbf{P}^\perp u\big)(\xi, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathbf{R}\psi(\xi, s);$$

4) продольное лучевое преобразование поля $v \in C^k(S^2(B))$, $v = (\mathrm{d}^\perp)^2\varphi$, $\varphi \in C^{k+2}(B)$, связано с преобразованием Радона его потенциала φ соотношением

$$\big(\mathbf{P}v\big)(\xi^\perp, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathbf{R}\varphi(\xi, s);$$

5) если $\varphi = \psi$, $\varphi, \psi \in C^k(B)$, $k \geq 1$, $u = \mathrm{d}^2\varphi$, $v = (\mathrm{d}^\perp)^2\varphi$ то $\langle u\,,\, v\rangle = 0$. Кроме того,

$$\big(\mathbf{P}^\perp u\big)(\xi, s) = \big(\mathbf{P}v\big)(\xi^\perp, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathbf{R}\varphi(\xi, s).$$

Доказательства приведенных утверждений просты и состоят в непосредственной проверке. Подчеркнем, что сами 2-тензорные поля могут на ∂B быть и разрывными, при том что их потенциалы и их первые производные непрерывны в R^2.

Приведем некоторые формулы обращения для симметричного 2-тензорного поля.

Прежде всего, используя свойства 2–5 симметричных 2-тензорных полей и их потенциалов, приведем формулу обращения, восстанавливающую потенциал поля w по его известному продольному или поперечному лучевому преобразованию. После восстановления потенциала путем двукратного дифференцирования строятся соответствующие части поля, соленоидальная или потенциальная. Как и для векторных полей, формула обращения для потенциала φ, по-существу, повторяет формулу (9),

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\widetilde{\mathbf{P}}w)(\alpha, p + x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha)\ln|p|dp\,d\alpha, \tag{36}$$

где $\widetilde{\mathbf{P}}w$ — продольное (33) или поперечное (34) лучевое преобразование симметричного 2-тензорного поля вида (35). На основе восстановленного потенциала φ

строится либо соленоидальная часть $v = (\,\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi$ поля w, если в качестве исходных данных выступало продольное лучевое преобразование поля w, либо потенциальная часть $u = \mathrm{d}^2\varphi$ поля w, если было известно его поперечное лучевое преобразование. Далее необходимо дважды численно продифференцировать полученное приближение для потенциала и, тем самым, найти приближенные значения компонент соответствующих частей поля. Приведем простые формулы обращения, которые дают уже компоненты поля. Пусть, по-прежнему, w — симметричное 2-тензорное поле вида (35), $w = (w_{ij})$. Предположим, что даны как продольное (33), так и поперечное (34) лучевые преобразования поля w. Следует отметить, что простые соображения (24), (25), приводящие к аналогичным формулам обращения для компонент векторного поля, здесь не годятся. Тем не менее, можно показать, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}w_{11} = \sin^2\alpha\big(\mathbf{P}w\big) + \cos^2\alpha\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big)\\
&\mathbf{R}w_{12} = -\sin\alpha\cos\alpha\big(\mathbf{P}w\big) + \sin\alpha\cos\alpha\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big)\\
&\mathbf{R}w_{22} = \cos^2\alpha\big(\mathbf{P}w\big) + \sin^2\alpha\big(\mathbf{P}^{\perp}w\big).
\end{aligned} \tag{37}$$

для преобразований Радона $\mathbf{R}w_{11}$, $\mathbf{R}w_{12}$, $\mathbf{R}w_{22}$ компонент поля w в зависимости от известных лучевых преобразований $\mathbf{P}w$ и $\mathbf{P}^{\perp}w$. Применяя к обеим частям полученных выражений любую из многочисленных формул обращения, получим соответствующие компоненты искомого поля.

Если известно лишь продольное лучевое преобразование симметричного 2-тензорного поля w класса $C^k(S^2(B))$, то возможно восстановление только соленоидальной части $v = (\,\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi$ поля w. Для этого нужно воспользоваться соотношениями

$$\mathbf{R}v_{11} = \sin^2\alpha\mathbf{P}w, \quad \mathbf{R}v_{12} = -\sin\alpha\cos\alpha\mathbf{P}w, \quad \mathbf{R}v_{22} = \cos^2\alpha\mathbf{P}w.$$

Если же известно лишь поперечное лучевое преобразование поля w класса $C^k(S^2(B))$, то возможно восстановление только потенциальной части $u = \mathrm{d}^2\psi$ поля w, компоненты которой можно найти исходя из соотношений

$$\mathbf{R}u_{11} = \cos^2\alpha\mathbf{P}^{\perp}w, \quad \mathbf{R}u_{12} = \sin\alpha\cos\alpha\mathbf{P}^{\perp}w, \quad \mathbf{R}u_{22} = \sin^2\alpha\mathbf{P}^{\perp}w.$$

Вновь мы можем воспользоваться всеми формулами обращения, пригодными для определения функций.

Наконец, приведем формулы обращения в операторном виде. Ограничимся продольным лучевым преобразование, тогда восстанавливается соленоидальная часть поля w. Итак, известно

$$g(\eta, s) = \mathbf{P}w = \int_{-\infty}^{\infty} w_{ij}(s\xi + t\eta)\eta^i\eta^j\,dt.$$

Симметричное 2-тензорное поле

$$\mu(x) = \mathbf{P}^{\#}_{2tf}\big(g(\eta, s)\big)(x),$$

являющееся результатом действия оператора обратной проекции, обладает компонентами

$$\mu_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta^i\,\eta^j\,(\mathbf{P}w)(\eta, s)d\alpha, \quad i, j = 1, 2,$$

$\eta = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, $s = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha$, и соленоидально. Формулы обращения

$$v_{11} = (-\Delta)^{1/2}\,\mu_{11}, \quad v_{12} = (-\Delta)^{1/2}\mu_{12}, \quad v_{22} = (-\Delta)^{1/2}\mu_{22},$$

дают соленоидальную часть v поля w. Для поперечного лучевого преобразования поля w формулы обращения аналогичны; они дают потенциальную часть u поля w.

5. Численные методы и результаты

Как уже отмечалось во Введении, для решения задач томографии используются многочисленные хорошо разработанные и опробованные приближенные методы и алгоритмы. Выше мы убедились в том, что большая часть из них применима не только в задачах скалярной, но также и в векторной и тензорной томографии. С сожалением следует отметить, что все они, за редким исключением, применимы в условиях предположения о прямолинейном характере распространения лучей в среде. Если же в математическую модель среды включено явление рефракции, то перечень пригодных математических средств становится очень бедным. Кратко остановимся на методе наименьших квадратов, который в силу своей универсальности применим для решения задач, где исходные данные получены интегрированием вдоль кривых заданного семейства. Именно, вдоль геодезических римановой метрики. Метод наименьших квадратов (МНК) хорошо известен, поэтому мы, прежде всего, обратим внимание на особенности его использования в задачах векторной и тензорной томографии.

Пусть H, K — (сепарабельные) гильбертовы пространства, $A : H \to K$ линейный ограниченный оператор, A инъективен, но в задачах томографии, как правило, не сюръективен. В частности, и по этой причине, задача обращения линейного оператора носит некорректный характер.

Задача состоит в определении приближенного решения $f_\delta \in H$ операторного уравнения

$$Af = g_\delta, \quad \|g_\delta - g\|_K \le \delta, \ \text{где} \ g = Af.$$

по приближенно заданному g_δ.

Схема алгоритма, основанного на МНК, выглядит следующим образом.

1. В пространстве H выбирается базис
$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \dots, \ \varphi_n, \ \dots$$
2. Находится, в явном виде или приближенно, последовательность элементов
$$\psi_1 = A\varphi_1, \ \psi_2 = A\varphi_2, \ \dots, \ \psi_n = A\varphi_n, \ \dots,$$
которая линейно независима, но не полна (оператор не сюръективен) в K.
3. Для фиксированного n полагается $g_{\delta n} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \psi_k$.
4. Находятся коэффициенты $c_k^{(n)}$, доставляющие минимум норме
$$\|g_\delta - g_{\delta n}\|_K \to \min,$$
5. Линейность оператора A и способ построения последовательности $\{\psi_j\}$ дают соотношение
$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \psi_k = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} A\varphi_k = A\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \varphi_k \Big) = Af_{\delta n},$$
в котором $f_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \varphi_k$ — приближенное решение поставленной задачи.

Как обычно, важен вопрос сходимости аппроксимации $f_{\delta n}$ к точному решению f, $\|f - f_{\delta n}\|_H \to 0$ при $\delta \to 0$, $n \to \infty$. Ответ на него зависит, в частности, и от выбора пары пространств H, K. Чаще всего говорят о пространствах L_2, реже выбирают соболевские пространства.

В задаче тензорной томографии в качестве пространства H можно выбирать пространства $L_2(S^m(B))$, $H^k(S^m(B))$, $m = 0, 1, 2$. Пространство K — это пространства $L_2(T)$, $H^k(T)$, $T = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. В качестве оператора A, о котором шла речь в общей схеме МНК, выступают следующие интегральные преобразования: 1) преобразование Радона, $\mathbf{R}f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\eta)dt$; 2) экспоненциальное лучевое преобразование, $\big(\mathbf{P}^{\varepsilon} f\big)(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\xi + t\eta) \exp\big\{ - \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(s\xi + \tau\eta)d\tau\big\}dt$, которое соответствует измерениям в задаче эмиссионной томографии; 3) продольные и поперечные лучевые преобразования m-тензорных полей, $(\mathbf{P}v)(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \big\langle \eta^m, v(s\xi + t\eta)\big\rangle dt$, $(\mathbf{P}^{\perp}u)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \big\langle \xi^m, u(s\xi + t\eta)\big\rangle dt$, где, как обычно, ξ — нормальный, η — направляющий векторы. Подчеркнем, что все эти операторы обобщены на случай римановой области; интегрирование тогда ведется вдоль геодезических заданной римановой метрики.

Базисами $\{\varphi_j\}$ в H выступают: 1) нелокальные базисы скалярных, соленоидальных и потенциальных векторных и симметричных 2-тензорных полей, построенные на основе многочленов и ортогональных многочленов; 2) локальные базисы скалярных, соленоидальных и потенциальных векторных и симметричных 2-тензорных полей, построенные на основе B-сплайнов (степеней от 0 до 5).

Соответственно, образы базисов $\{\psi_j\} = \{A\varphi_j\}$ таковы: 1) в случае евклидовой метрики найдены аналитически для элементов базисов, построенных на основе ортогональных многочленов, B-сплайнов; 2) во всех остальных случаях, в том числе и в случае римановой метрики, находятся путем численного интегрирования.

Выбор оптимальной размерности n конечномерного аппроксимирующего пространства производится по обычным рекомендациям. Если в паре пространств H, K задача некорректна, и найдено соответствие $\delta = \delta(n)$, то n_0 выбирается вблизи минимума. Зачастую размерность n приходится выбирать эмпирически, так как эта величина зависит от нескольких факторов вычислительного характера, и в частности от независимых дискретизаций, необходимых на разных стадиях решения задачи.

Задача минимизации нормы $\|g_\delta - g_{\delta n}\|_K \to \min$, $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \psi_k$, приводит к хорошо известной системе линейных уравнений с матрицей Грама, элементами которой служат скалярные произведения в пространстве K. Решение соответствующей системы линейных уравнений, осуществляется разными методами, в частности, путем приведения к треугольному виду, методом Холецкого, методом сопряженных градиентов и другими.

Наиболее трудоемкими, требующими большой точности и больших затрат времени, в алгоритме на основе МНК являются, во-первых, вычисление образов $\{\psi_j\}$ (если не имеется их явного вида) базиса $\{\varphi_j\}$, а во-вторых, вычисление элементов матрицы Грама. Поэтому, если удается существенно ускорить вычисления на указанных этапах алгоритма, то МНК становится вполне конкурентоспособным в задачах томографии, в том числе и в случае областей с евклидовой метрикой.

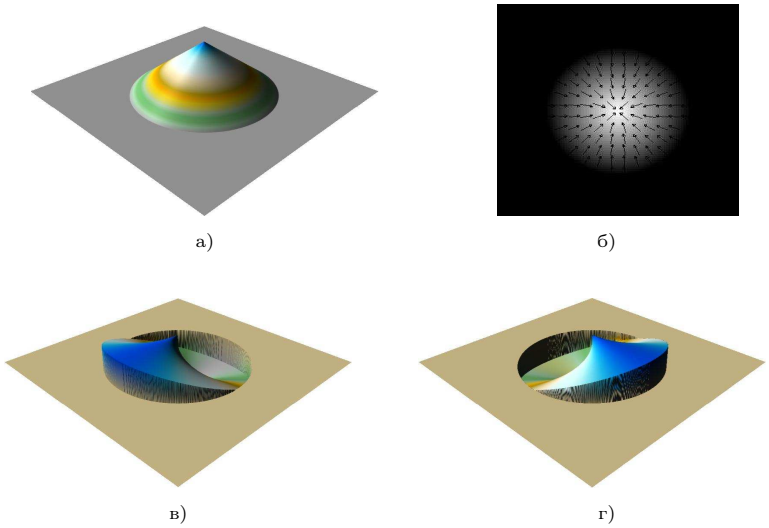
5.1. **Некоторые численные результаты.** Мы остановимся лишь на двух результатах из многочисленных численных экспериментов по восстановлению скалярных, векторных и тензорных полей, заданных в областях как с евклидовой, так и с римановой метриками [31]–[36].

В первом примере рассматривается задача восстановления компонент потенциального разрывного векторного поля по его поперечному лучевому преобразованию. В этом пункте мы переходим к более привычным обозначениям (x, y) для координат точек на плоскости.

Векторное поле имеет вид $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$, где

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} h - \dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{при} \quad x^2+y^2 < R^2 \\ 0, & \text{при} \quad x^2+y^2 \geq R^2 \end{cases},$$

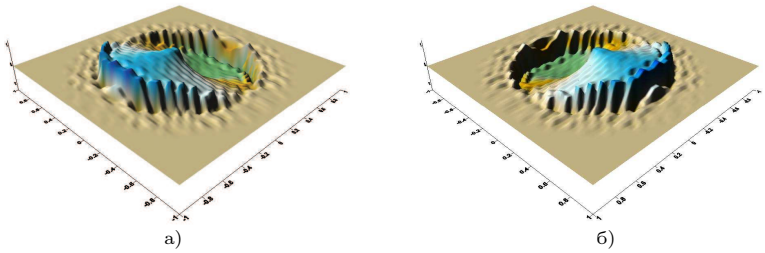
$h > 0$ и $R > 0$ являются параметрами.



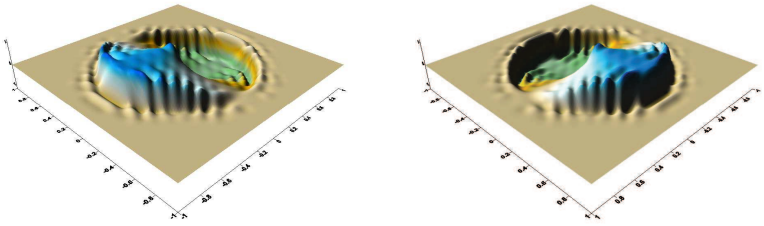
а) б) в) г)

Рис. 2. Потенциал (а), векторное поле (б), его компоненты (в,г).

Восстановление векторного поля осуществлялось методом наименьших квадратов, при этом использовались пространства Соболева $H^1(S^1(B))$, и $H^1(T)$, где $T = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$.



а) б)

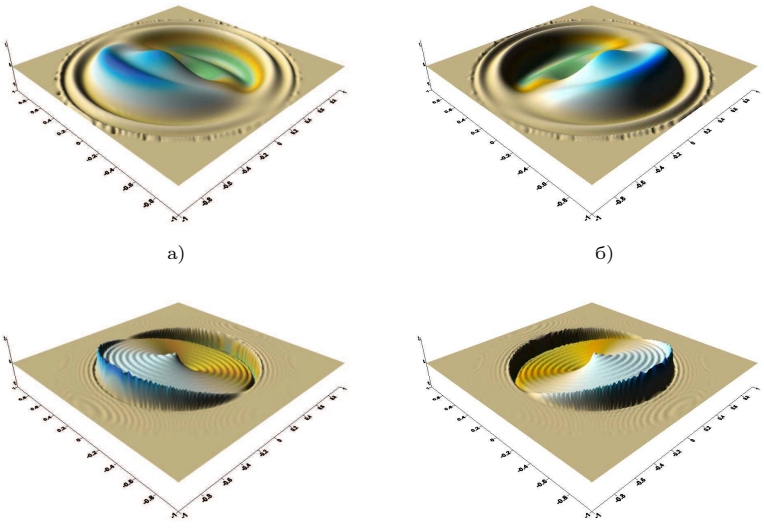


в) г)

Рис. 3. Метод наименьших квадратов. Аппроксимация компонент векторного поля: B-сплайнами 1-й степени (а,б); B-сплайнами 3-й степени (в,г).

Характер поведения разрывов прослеживается на всех рисунков. Для более качественного восстановления (разрывного) векторного поля необходима существенно большая степень дискретизации (соответственно, и объема) данных. Точность восстановления векторных полей, обладающих большей степенью гладкости, при той же дискретизации намного лучше.

То же векторное поле восстанавливалось и с помощью сингулярного разложения оператора поперечного лучевого преобразования, применяемого к векторным полям. В качестве базисов выступают ортогональные (в $L_2(S^1(B))$) потенциальные векторные поля, построенные с помощью полиномов, и соответствующий базис их образов, также ортогональный, но уже в пространстве $L_2(T, (1-s^2)^{1/2})$ с весом $(1-s^2)^{-1/2}$. Ниже приведены соответствующие рисунки.



а) б)

в) г)

Рис. 4. Аппроксимация компонент векторного поля. SVD-разложение, полиномы 20-й степени (а,б); 100-й степени (в,г).

В качестве второго примера приведем результаты восстановления симметричных соленоидальных 2-тензорных полей трех типов: разрывного, с разрывами (1-го рода) в производных, и гладкого. Исходными данными выступает продольное лучевое преобразование. Потенциалами являются следующие функции:

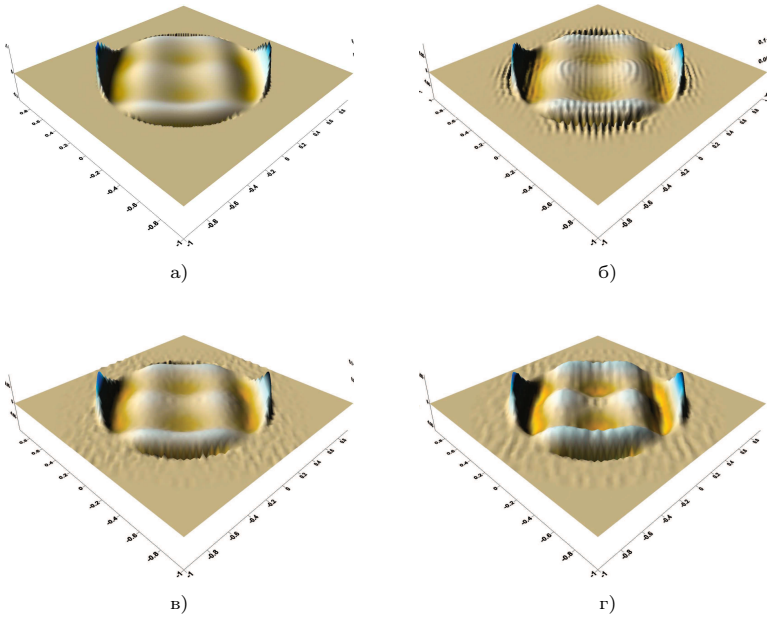
1) $\psi_1(x,y) = x^2y^2\left(R^2 - x^2 - y^2\right)^2$ при $x^2+y^2 < R^2$, $\psi(x,y) = 0$ при $x^2+y^2 \geq R^2$, $R = 0.7$;

2) $\psi_2(x,y) = \left(R^2 - x^2 - y^2\right)^3$ при $x^2+y^2 < R^2$, $\psi(x,y) = 0$ при $x^2+y^2 \geq R^2$, $R = 0.7$;

3) $\psi_3(x,y) = \mathrm{e}^{-24(x^2+y^2)}$.

Посредством потенциалов ψ_k, $k = 1,2,3$, образуются соленоидальные 2-тензорные поля v_{ij} по формулам $v_{11} = \frac{\partial^2\psi_k}{\partial y^2}$, $v_{12} = v_{21} = -\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x\partial y}$, $v_{22} = \frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}$, $k = 1,2,3$. В качестве данных выступают продольные лучевые преобразования соответствующих полей.

Для всех трех типов тензорных полей восстановление производилось тремя способами. Первый состоял в использовании алгоритма на основе МНК, в котором базисом послужили соленоидвльные 2-тензорные поля, построенные на основе B-сплайнов 5-го порядка. Восстановление вторым способом производилось на основе формулы обращения с использованием преобразования Фурье. Наконец, третий вариант восстановления поля состоял в использовании формулы обращения (36). Ниже приведены соответствующие рисунки.

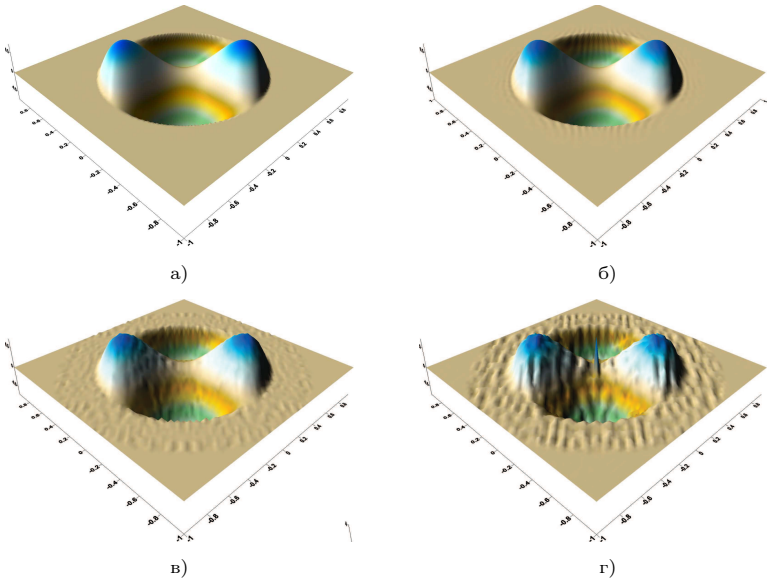


а) б) в) г)

Рис. 5. Аппроксимация компоненты v_{12} соленоидального поля с потенциалом ψ_1. Оригинал (а); МНК на основе B-сплайнов (б); формула обращения с использованием преобразования Фурье (в); формула обращения для потенциала (г).

На всех рисунках содержится компонента v_{12}; ее оригинал (а) и восстановленная компонента v_{12}: МНК алгоритмом (б); вторым способом (в); формулой обращения для потенциала ψ_j (г). Шум в данные не вносился.

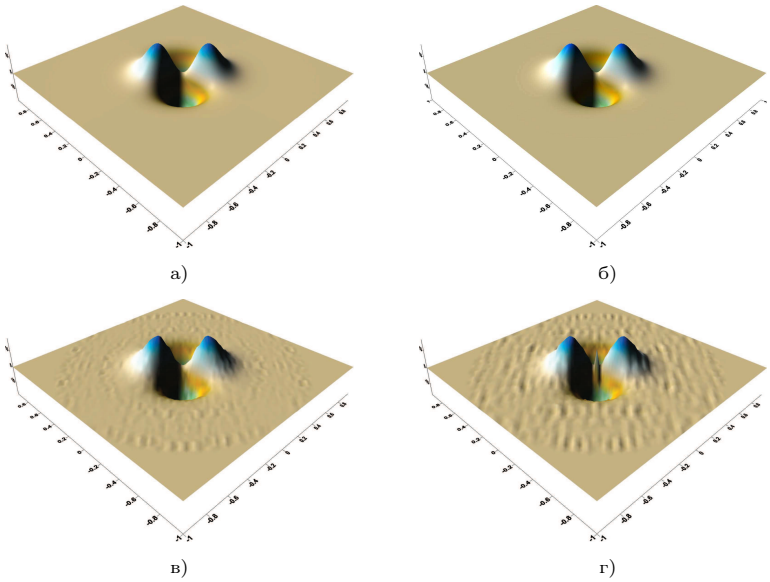
Сравнимые результаты, $\sim$ 26%–29% (относительная ошибка в процентах) дают 1-й и 2-й методы. Формула обращения для потенциала дает ошибку в 38%.



а) б) в) г)

Рис. 6. Аппроксимация компоненты v_{12} соленоидального поля с потенциалом ψ_2. Оригинал (а); МНК на основе B-сплайнов (б); формула обращения с ПФ (в); обращение потенциала (г).

Для поля с разрывными производными наилучший результат дает МНК (0.8%), затем второй способ, 3.4%, и восстановление формулой обращения для потенциала дает 24%. Таким образом, использование B-сплайнов в МНК дает как минимум в 5 раз лучший результат, чем остальные методы, но время счета при этом намного превышает затраченное для расчетов время по другим методам.



а) б) в) г)

Рис. 7. Аппроксимация компоненты v_{12} соленоидального поля с потенциалом ψ_3. Оригинал (а); МНК на основе B-сплайнов (б); формула обращения с ПФ (в); обращение потенциала (г).

Для гладкого потенциала МНК с использованием B-сплайнов дает идеальный результат, с ошибкой в 0.03%. Ошибку восстановления в 4.5% дает метод обращения на основе преобразования Фурье, ну а формула обращения для потенциала дает $\sim 23\%$. Здесь наблюдаем впечатляющее превосходство в точности метода наименьших квадратов, с использованием B-сплайнов, над остальными уже по крайней мере в 2 порядка.

Наихудшие результаты, который показывает 3-й способ, можно объяснить тем, что в нем необходимо двукратное численное дифференцирование данных, которое производилось путем взятия разностной производной. По-видимому, использование процедуры дифференцирования с той или иной регуляризацией должно привести к существенно лучшим результатам.

Автор выражает благодарность А. В. Ефимову, А. П. Поляковой и И. Е. Светову за любезно предоставленные результаты расчетов.

Список литературы

[1] P. Funk, *Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung*, Math. Ann., **77** (1916), 129–135.

[2] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl., **69** (1917), 262–277.

[3] J. F. Greenleaf, S. A. Johnson, W. F. Samayoa & F. A. Duck, *Algebraic reconstruction of spatial distributions of acoustic velocities in tissue from their time-of-flight profiles*, Acoustical Holography, Plenum Press, New York, N. Booth (Ed.), **6** (1975), 71–90.

[4] S. A. Johnson, J. F. Greenleaf, C. R. Hansen, W. F. Samayoa, M. Tanaka, A. Lent, D. A. Christensen & R. L. Wolley, *Reconstruction three-dimentional fluid velocity vector fields from acoustic transmission measurements*, Acoustical Holography, Plenum Press, New York, L. W. Kessler (Ed.), **7** (1977), 307–326.

[5] S. A. Johnson, J. F. Greenleaf, M. Tanaka & G. Flandro, *Reconstructing three-dimentionai temperature and fluid velocity vector fields from acoustic transmission measurements*, ISA Transactions, **16**:3 (1997), 3–15.

[6] W. Munk & C. Wunsch, *Ocean acoustic tomography: a scheme for large-scale monitoring*, Deep-Sea Res., **26A** (1979), 123–161.

[7] W. Munk & C. Wunsch, *Observing the ocean in the 1990s.* Phil. Trans. R. Soc. Lond., **A**:307 (1982), 439–464.

[8] S. J. Norton, *Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging*, J. Geophys., **97** (1987), 161–168.

[9] H. Braun & A. Hauck, *Tomographic reconstruction of vector fields*, IEEE Trans. Signal Proc., **39**:2 (1991), 464–471.

[10] T. Schuster, *20 Years of Imaging in Vector Field Tomography: a Review*, In: Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dariation Therapy (IMRT), Y. Censor, M. Jiang, A. K. Louis (Eds.), Series: Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series, Birkhauser, **7** (2008), 389–424.

[11] J. L. Kinsey, *Fourier transform Doppler spectroscopy: A new means of obtaining velocity - angle distributions in scattering experiments*, J. Chem. Phys., **66**:6 (1977), 2560–2565.

[12] R. Koslover, R. McWilliams, *Measurement of multidimensional ion velocity distributions by optical tomography*, Rev. Sci. Instrum., **57**:10 (1986), 2441–2448.

[13] N. P. Efremov, N. P. Poluektov, V. N. Kharchenko, *Tomography of ion and atom velocities in plasmas*, JQSRT, **53**:6 (1995), 723–728.

[14] А. Г. Горелик, В. В. Стерлядкин, *Доплеровская томография в радиолокационной метеорологии*, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, **26**:1 (1990), 47–54.

[15] S. P. Juhlin, *Doppler tomography*, Engineering in Medicine and Biology Society, Proceedings of the 15th Annual International Conference of the IEEE, 1993, 212–213.

[16] G. Sparr, K. Strahlen, K. Lindstrem and H. W. Persson, *Doppler tomography for vector fields*, Inverse Problems, **11** (1995), 1051–1061.

[17] M. Defrise, G. T. Gullberg, 3*D-reconstruction of tensors and vectors*, Technical Report No.LBNL-54936, Berkeley: LBNL, 2005.
[18] А. С. Кравчук, *Основы компьютерной томографии*, Москва, 1999.
[19] S. Deans, *The Radon Transform and Some of its Applications*, New York, Wiley, 1983.
[20] Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии*, М., Мир, 1990.
[21] Н. Е. Кочин, *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*, М.: Из-во Академии наук СССР, 1936.
[22] H. Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory*, Duke Math. J., **7** (1940), 411–444.
[23] С. Л. Соболев, *Об одной новой задаче математической физики*, Изв. АН СССР, Сер. матем., **18**:1 (1954), 3–50.
[24] *Сейсмическая томография*, Под редакцией Г. Нолета, М.: Мир., 1990.
[25] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* М.: Наука, 1980, 287 с.
[26] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, М.: Наука, 1984.
[27] Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, М.: Наука, 1980.
[28] Х. К. Абен, *Интегральная фотоупругость*, Таллинн: Валгус, 1975.
[29] V. Cherveny, I. A. Molotkov, I. Pshenchik, *Ray method in seismology*, Praha: Univ. Karlova, 1977.
[30] В. А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Новосибирск: Наука, 1993.
[31] E. Yu. Derevtsov, A. G. Kleshchev, V. F. Sharafutdinov, *Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction*, J. Inverse Ill-posed Problems, **7**:1 (1999), 83–103.
[32] Е. Ю. Деревцов, И. Г. Кашина, *Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов*, Сиб. Ж. Вычислительной математики, **5**: 3 (2002), 233–254.
[33] Деревцов Е. Ю., Кашина И. Г. *Приближенное решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов.* Сиб. Ж. Индустриальной матем., 2002, Том V, №1(9), с. 39–62.
[34] E. Yu. Derevtsov, *An approach to direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems.* J. Inverse Ill-Posed Problems, **13**:3–6 (2005), 213–246.
[35] E. Yu. Derevtsov, I. E. Svetov, Yu. S. Volkov and T. Schuster, *Numerical B-spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorbtion and refraction*, Proceedings 2008 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08, Novosibirsk Scientific Center, Novosibirsk, Russia, July 21–25, 2008, 212–217.
[36] Е. Ю. Деревцов, И. Е. Светов, Ю. С. Волков, *Использование B-сплайнов в задаче эмиссионной 2D-томографии в рефрагирующей среде*, Сиб. Ж. Индустриальной матем., **XI**:3(35) (2008), 45–60.

Евгений Юрьевич Деревцов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dert@math.nsc.ru

S ©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.112–С.122 (2010)

УДК 517.968, 517.544
MSC 30E20, 45E05, 45E10, 45F15

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В ИССЛЕДОВАНИИ КОРРЕКТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Ф. Воронин, А.Е. Ковтанюк, М.М. Лаврентьев

Abstract. In this paper, we are developing the criterion for canonical factorization (for equality all partial indices are to zero) of matrix function for Riemann boundary value problem. We are consider the applications of Riemann boundary value problem for mathematical physics problems.

Keywords: Riemann problem, partial indices, matrix function, integral equation, convolution, system, well-posedness, mathematical physics problems, Cauchy-type singular integral equation.

Введение

Положим $L_{n\times m}$ — пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, где R — расширенная вещественная прямая $R = (-\infty, \infty)\bigcup\{\pm\infty\}$; $\mathcal{F}f$

Voronin, A.F., Kovtanyuk, A.E., Lavrentiev, M.M. The Riemann boundary value problem in research of well-posednes of linear and nonlinear mathematical physics problems.

© 2010 Воронин А.Ф., Ковтанюк А.Е., Лаврентьев М.М.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН выполняемых совместно со сторонними научными организациями (проект №93-2009), гранта конкурса интеграционных проектов ДВО, СО и УрО РАН (№09-2-СО-004) и гранта РФФИ (проект №10-01-00384).

Поступила 4 марта 2010 г.

— Фурье образ матрицы-функции $f \in L_{n\times m}$:

$$\mathcal{F}f(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ipt}\,dt,\ p \in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c + \mathcal{F}f$, где c — постоянная матрица размера $n \times n$ и $f \in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$).

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

Будем говорить, что матрица $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$ допускает стандартную факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x) = G_+(x)D(x)G_-(x),\ x \in R, \tag{0.1}$$

где $G_\pm \in \mathcal{G}W_\pm^{n\times n}$, $D(x)$ - диагональная матрица-функция

$$D(x) = \{(\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_1}, ..., (\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_n}\},$$

$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq ... \geq \kappa_n$ — частные индексы матрицы G (целые числа),
$\kappa :=\mathrm{Ind}\,\det\, G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_R \arg\det\, G(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G. Если $\kappa_1 = \kappa_2 = ... = \kappa_n = 0$ ($D = I$ — единичная матрица), то $G = G_+G_-$ — каноническая факторизация матрицы-функции G.

В данной работе, для простоты, рассматривается случай, когда суммарный индекс матрицы-функции G равен нулю ($\kappa = 0$).

Под задачей Римана (задача факторизации) будем понимать проблему разложения матрицы $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$ в виде произведения матриц (0.1).

Скалярная задача Римана (0.1) ($n = 1$) исследована достаточно полно, она изучается в университетском курсе теории функций [1, глава 3]. Различные ее приложения, и в частности, в математической физике изложены, например, в монографии [2]. Векторная задача Римана (0.1) ($n > 1$) [3-5] существенно меньше изучена чем скалярная, но имеет более широкие приложения. Важной нерешенной проблемой в теории векторной задачи Римана является проблема вычисления инвариантов задачи — частных индексов матричного коэффициента G, в частности, проблема эффективно проверяемых критериев канонической факторизации матрицы-функции G. Последней проблеме и посвящена оригинальная часть работы. Здесь будет предложен эффективный критерий канонической факторизации для матрицы-функции $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$, обладающей определенной симметрией, а в качестве иллюстрации приложений задачи Римана рассмотрены несколько различных уравнений математической физики, которые могут быть исследованы с помощью вышеназванной задачи.

1. Рассматриваемые уравнения.

Существование канонической факторизации матричного коэффициента G в (0.1) гарантирует корректную разрешимость задачи Римана (0.1) [5, глава 1,§ 5]) (и различных уравнений, которые сводятся к этой задаче).

1). Система уравнений Винера-Хопфа. Рассмотрим систему интегральных уравнений Винера-Хопфа :

$$u(t) - \int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{1.1}$$

где

$k(t)$ — матрица-функция размера $n \times n$, $u,\ f$ — вектора-столбцы длины n, $k \in L_{n\times n}(R),\ f \in L_{n\times 1}(0,\infty),\ \det\left(I - \mathcal{F}k(x)\right) \neq 0,\ x \in R.$
Легко видеть [2, гл. 2, § 5.1],[6], что эта система эквивалентна неоднородной задаче Римана на вещественной оси для вектор-функций $\Phi^{\pm} \in W_{0\pm}^{n\times 1}$:

$$\Phi^+(p) = G(p)\Phi^-(p) + g(p),\ p \in R,\ g \in W_0^{n\times 1}, \tag{1.2}$$

где

$W_{0\pm}^{n\times 1} = \{\mathcal{F}f\ :\ f \in L_{n\times 1}(R),\ f(t) = 0\ \text{ при}\ \pm t < 0\},\ W_0^{n\times 1} = \{\mathcal{F}f\ :\ f \in L_{n\times 1}(R)\}.$

В данном случае,

$$G(p) = (I - \mathcal{F}k(p))^{-1},\ g(p) = G(p)\mathcal{F}f(p),\ \Phi^+(p) = \mathcal{F}u(p),$$

$$\Phi^-(p) = -\mathcal{F}\{\theta(-t)\int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds\}(p),\ (u(t) = f(t) = 0,\ t < 0),$$

θ — функция Хевисайда.
В самом деле, систему (1.1) рассмотрим на всей вещественной оси R. Тогда для $t \in (-\infty,\infty)$ имеем

$$u(t) - \int_{-\infty}^\infty k(t-s)u(s)\,ds = f(t) - \theta(-t)\int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds.$$

Применив к вышестоящей системе преобразование Фурье получим неоднородную задачу Римана (1.2).

2). Интегральные уравнения в свертках на конечном интервале. В [7] показано, что интегральные уравнения в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале

$$\alpha u(t) - \int_0^b k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,b), \tag{1.3}$$

где

$$k \in L_1(-b,b), \quad f \in L_1(0,b), \quad b > 0,\ \alpha = 0,1,$$

эквивалентны (при некотором условии) задаче Римана (1.2) с матричным коэффициентом G порядка два :

$$G(x) = -\frac{1}{1 - \mathcal{F}k_-(x)}\begin{pmatrix} 1 & -e^{ixb}\mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ixb}(\mathcal{F}k_+(x) + 1 - \alpha) & \alpha - \mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где

$$k(t) = 0,\ t\overline{\in}(-b,b),\ k_\pm(t) = \theta(\pm t)k(t),\ t \in R.$$

3). Характеристическая система сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши :

$$A(t)\phi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(s)}{s-t}\,ds = \mathcal{F}f(t), \quad t \in R, \tag{1.5}$$

где

$$A, B \in W^{n\times n},\ f \in L_{n\times 1}(R),\ \det\left(A(t) \pm B(t)\right) \neq 0,\ t \in R.$$

Если положить $G := (A+B)^{-1}(A-B)$, то система (1.5), при некоторых дополнительных условиях, также сводится эквивалентным образом к задаче Римана (1.2) [3, глава 6].

4). Нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + 2\alpha|\psi|^2\psi, \tag{1.6}$$

с начальными и граничными условиями

$$\psi(x,0) = \psi(x),\ \psi(x,t) = 0,\ |x| \to \infty. \tag{1.7}$$

Здесь $\psi(x,t)$ — комплекснозначная функция (классическое заряженное поле), $x \in R,\ t \geq 0$, α — вещественный параметр.

Задача (1.6)-(1.7) сводится [8] к задаче Римана (1.2), в которой матрица-функция G порядка два.

Наиболее содержательные физические приложения уравнение (1.7) имеет в нелинейной оптике. В то же время оно является достаточно универсальной моделью нелинейного уравнениях [8].

Необходимо отметить, что векторная задача Римана играет важную роль в квантовой теории рассеяния [9],[10] и является одним из основных инструментов метода обратной задачи рассеяния [11],[12],[8]. Кроме того, она нашла применение в задачах фильтрации [13, с. 361-362] и теории вероятностей [14],[15].

2. Исследование задачи Римана.

В свою очередь, для исследования корректности краевой задачи Римана (1.2) используется следующая, хорошо известная (см.,например, [6, теорема 7.2],[5, глава 1,§ 5])

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$. Тогда факторизация (0.1) существует. Если, кроме того, все частные индексы матричного коэффициента G равны нулю, т.е. факторизация (0.1) каноническая, то задача Римана (1.2) имеет решение, причем единственное. Решение устойчиво по коэффициентам G и g в соответствующих нормах.*

Однако, как было замечено во введении, задача определения частных индексов неособенных матриц-функций из алгебры $W^{n\times n}$ (в частности, с нулевым суммарным индексом) является проблемой. Приведем критерий канонической факторизации матрицы-функции из алгебры $W^{n\times n}$. Этот критерий эффективный на классах матриц, обладающих определенной симметрией. Для формулировки и доказательства критерия проведем дополнительные построения и напомним следующее известное утверждение [6, теорема 7.3]:

Лемма 1. *Пусть $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$ и суммарный индекс матрицы G равен нулю ($\kappa = 0$). Тогда любая другая стандартная факторизация матрицы $G(x)$*

имеет следующий вид :

$$G(x) = \widetilde{G}_+(x)\, D(x)\, \widetilde{G}_-(x),\ x \in R, \tag{2.1}$$

где

$$\widetilde{G}_\pm \in \mathcal{G}W_\pm^{n\times n},\ \widetilde{G}_+(x) = G_+(x)\,\Omega_+(x),\ \widetilde{G}_-(x) = \Omega_-(x)\,G_-(x). \tag{2.2}$$

Причем, если все частные индексы равны нулю, то $\Omega_- = \Omega_+^{-1}$ *— произвольная невырожденная постоянная матрица.*

В противном случае (когда не все частные индексы равны нулю) $\Omega_\pm$ *— рациональные матрицы-функции из* $\mathcal{G}W_\pm^{n\times n}$*, соответственно, и выполняются следующие соотношения :*

1) $\omega_{jk}^+(x) \equiv 0$ *при* $\kappa_k > \kappa_j$*,*

2) $\omega_{jk}^+(x) = const_j$ *при* $\kappa_k = \kappa_j$*,*

3) $\omega_{jk}^+(x)$ *— произвольный полином от* $(x-i)/(x+i)$ *степени* $\le \kappa_j - \kappa_k$ *при* $\kappa_k < \kappa_j$*,*

где

$\omega_{jk}^+(x)$ $(j,k = 1,...,n)$ *— элементы матрицы* $\Omega_+(x)$*;*

$$\Omega_-(x) = D^{-1}(x)\Omega_+^{-1}(x)D(x),\ x \in R.$$

Из леммы 1 вытекает, что матрица $\Omega_+(x)$ при условии, что не все частные индексы матрицы $G(x)$ равны нулю, имеет следующий общий вид :

$$\Omega_+(x) = \begin{pmatrix} Q_1 & * & ... & * \\ 0 & Q_2 & ... & * \\ 0 & ... & Q_j & * \\ 0 & 0 & ... & Q_m \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где Q_j — произвольная невырожденная постоянная квадратная матрица порядка m_j — кратность индекса κ_j, $(j = 1,...,m \le n)$. Звездочками помечены места, на которых находятся матрицы с элементами, являющимися произвольными многочленами от $(x-i)/(x+i)$ соответствующих степеней.

Очевидно, что матрицы $\Omega_\pm(x)$ — верхние треугольные при $\kappa_k \ne \kappa_j$, $j \ne k$ $(j,k = 1,...,n)$. В частности, для $n = 2$ матрица $\Omega_+(x)$ имеет следующий общий вид :

$$\Omega_+(x) = \begin{pmatrix} c_1 & P(x) \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные $(c_1c_2 \ne 0)$, $P(x)$ — произвольный полином от $(x-i)/(x+i)$ степени не выше $\kappa_1 - \kappa_2$.

Пусть матрица-функция G удовлетворяет условиям леммы 1 и среди ее частных индексов существует хотя бы один отличный от нуля. Тогда для такой матрицы $G(x)$ будем обозначать через $\mathcal{K}_n$ — множество (набор) ее частных индексов. Таким образом, $\mathcal{K}_n = \{\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n\}$, где $\kappa_1 \ge \kappa_2 \ge ... \ge \kappa_n$. Через $\mathcal{P}^+(R; \mathcal{K}_n)$ обозначим класс рациональных матриц-функций вида (2.3), отвечающих набору $\mathcal{K}_n$. Положим

$$\mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n) := \{\Omega_+(\infty)\ :\ \Omega_+ \in \mathcal{P}^+(R; \mathcal{K}_n)\}.$$

Следовательно, каждому набору $\mathcal{K}_n$ соответствует класс постоянных матриц $\mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n)$. Из (2.3) вытекает, что

$$I, V \in \mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n),\ I_1 \notin \mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n)$$

для любого набора $\mathcal{K}_n$, где V — верхняя треугольная постоянная неособенная матрица порядка n, I_1 — матрица порядка n состоящая из нулей за исключением неглавной диагонали, которую заполняют единицы.

Легко видеть, что матрица I_1 обладает следующими свойствами,

$$I = I_1^2,\ I_1^{-1} = I_1^T = I_1,$$

где T — знак транспонирования.

Отметим важное свойство класса $\mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n)$. Из (2.3) можно видеть, что если $\Omega_+(\infty) \equiv (\omega_{kj}^+) \in \mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n)$, то $\omega_{n1}^+ = 0$. Тогда положив $(b_{kj}) := \Omega_+(\infty)I_1$ имеем

$$b_{nn} = 0, \quad (\omega_{n1}^+ = 0) \tag{2.5}$$

для любого набора $\mathcal{K}_n$.

Сформулируем теперь критерий канонической факторизации.

Критерий канонической факторизации. *Пусть $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$ и суммарный индекс матрицы $G(x)$ равен нулю ($\kappa = 0$). Положим*

$$(\omega_{kj}^+) := G_+^{-1}(\infty)\widetilde{G}_+(\infty), \tag{2.6}$$

где $\widetilde{G}_+$ и G_+ – факторы в факторизациях (2.1) и (0.1), соответственно. Тогда, если $\omega_{n1}^+ \neq 0$, то факторизации (2.1) и (0.1) канонические.

Верно и обратное утверждение. Если матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию (0.1), то существует другая каноническая факторизация (2.1) такая, что $\omega_{n1}^+ \neq 0$ в (2.6).

Докажем критерий 1. Пусть $\omega_{n1}^+ \neq 0$. Предположим противное, матрица-функция G не допускает каноническую факторизацию. Из (2.6) и первого равенства в (2.2) получим $(\omega_{kj}^+) \in \mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n)$. Тогда из (2.5) следует противоречивая цепочка $0 \neq \omega_{n1}^+ = 0$. Значит принятое предположение, что $D \neq I$, не верно.

Вторая часть критерия (обратное утверждение) непосредственно следует из первой части леммы 1.

Из критерия канонической факторизации видно, что для его практического использования достаточно показать, что $\omega_{n1}^+ \neq 0$. Но, мы не имеем априорной информации о матрицах $G_+(\infty), \widetilde{G}_+(\infty)$ в общем случае. Однако об их произведении, матрице (ω_{kj}^+), априорную информацию можно получить, если исходная матрица-функция $G(x)$ обладает определенной симметрией. Например, если $G(x)$ — четная унитарная или эрмитова положительно определенная, то в этих случаях устанавливается, что $\omega_{n1}^+ \neq 0$.

Заметим, что априорная информация о свойствах факторов $G_\pm(\infty), \widetilde{G}_\pm(\infty)$ приведена в [16, гл. 8, теорема 10.1], где утверждается, что если $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$, $G(\infty) = I$, то можно считать

$$G_\pm(\infty) = I. \tag{$*$}$$

Однако легко видеть, что теорема 10.1 из [16, гл. 8] в части равенства $(*)$ не верна. Приведем контрпример. Положим

$$G(x) := I_1 D(x) I_1,\ n := 2,$$

где

$$D(x) = \{(\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_1}, (\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_2}\},$$

$\kappa_1 = -\kappa_2 > 0$ — частные индексы. Тогда согласно леммы 1 общий вид фактора $G_+(x)$ в (0.1) для рассматриваемой матрицы следующий : $G_+(x) = I_1\Omega_+(x)$,

где $\Omega_+ \in \mathcal{P}^+(R;\mathcal{K}_2)$. Тогда из $(*)$ вытекает невозможное равенство $\Omega_+(\infty) = I_1$, ввиду того, что для $n = 2$ матрица $\Omega_+(\infty)$ — верхняя треугольная.

Ниже, в утверждении 1, покажем, что постоянные матрицы $G_\pm(\infty), \widetilde{G}_\pm(\infty)$ обладают свойством унитарной симметрии.

Утверждение 1. *Пусть $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$. Тогда можно считать, что в факторизации (0.1) $G_+(\infty)$ — унитарная матрица. Если, кроме того, матрица $G(\infty)$ — унитарная, то можно считать, что в факторизации (0.1) факторы $G_\pm(\infty)$ — также унитарные матрицы.*

Докажем утверждение 1. Предположим, что матрица-функция G не допускает каноническую факторизацию, в противном случае утверждение 1 очевидное следствие леммы 1. Из леммы 1 следует, что $\widetilde{G}_+(x) := G_+(x)\Omega_+(x)$ — также фактор, где Ω_+ — произвольная матрица из $\mathcal{P}^+(R;\mathcal{K}_n)$. Легко видеть (см. лемму 1), что множество верхних треугольных неособенных матриц является подмножеством множества $\mathcal{P}^+(\mathcal{K}_n)$. По известной теореме алгебры [17, гл. 2, §6] матрица $G_+(\infty)$ представляется в виде произведения $G_+(\infty) = UT$, где U — унитарная, T — верхняя треугольная матрицы. Положив $\Omega_+(\infty) = T^{-1}$ получим, что $\widetilde{G}_+(\infty) = U$. Утверждение доказано.

В качестве первой иллюстрации применения критерия канонической факторизации приведем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть*

$$M \in \mathcal{G}W^{2\times 2},\ M(x) = M^{-1}(-x). \tag{2.7}$$

Если

$$Ind\ \det M(x) = 0,\ M(\infty) \neq c_1 I,\ c_1 = \pm 1, \tag{2.8}$$

то матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию

$$M(x) = M_+(x)AM_+^{-1}(-x),\ x \in R, \tag{2.9}$$

где

$M_+ \in \mathcal{G}W_+^{2\times 2}$, $A = A^{-1}$ — *некоторая постоянная матрица порядка 2*

Доказательство теоремы 2 проведем методом от противного. Предположим, что матрица-функция M не допускает каноническую факторизацию. Тогда по теореме 1 для матрицы $M(x)$ справедлива правильная факторизация

$$M(x) = M_+(x)D(x)M_-(x),\ x \in R, \tag{2.10}$$

где

$$M_\pm \in \mathcal{G}W_\pm^{2\times 2},\ D(x) = \mathrm{diag}(p^{\kappa_1}, p^{-\kappa_1}),\ p = \frac{x-i}{x+i},\ \kappa_1 > 0.$$

Из (2.10) непосредственно получим

$$M^{-1}(-x) = M_-^{-1}(-x)D(x)M_+^{-1}(-x), \tag{2.11}$$

ввиду того, что $D(x) = D^{-1}(-x)$. Из (2.10)-(2.11) и равенства в (2.7) имеем

$$M_+(x)D(x)M_-(x) = M_-^{-1}(-x)D(x)M_+^{-1}(-x),\ x \in R. \tag{2.12}$$

Из равенства двух правильных факторизаций матрицы $M(x)$ в (2.12) по лемме 1 следует существование матрицы $\Omega_+(x) \in \mathcal{P}^+(R;\mathcal{K}_2)$ такой, что

$$M_+(x)\Omega_+(x) = M_-^{-1}(-x),\ x \in R. \tag{2.13}$$

Из (2.13) с учетом очевидного равенства

$$M_-^{-1}(-x) = M(x)M_+(-x)D(-x)$$

получим

$$M_+(x)\Omega_+(x) = M(x)M_+(-x)D(-x). \tag{2.14}$$

Из (2.14) при $x = \infty$ получим

$$\Omega_+(\infty) = M_+^{-1}(\infty)M(\infty)M_+(\infty),$$

т.к. $M_+(\infty) = M_+(-\infty),\ D(-\infty) = I$. Следовательно, $\Omega_+(\infty) = \Omega_+^{-1}(\infty)$. Значит, первый диагональный элемент треугольной матрицы Ω_+ равен c_1.

Покажем теперь, что существует решение $M_+ \in \mathcal{G}W_+^{2\times 2}$ следующего матричного уравнения,

$$c_1 M_+(x) = M(x)M_+(-x)D(-x). \tag{2.15}$$

Матричное уравнение (2.15) распадается на две специальные краевые задачи Римана:

$$c_1 V_1^+(x) = p^{-\kappa_1} M(x)V_1^+(-x),\ V_1^+ \in W_+^{2\times 1}, \tag{2.16}$$

$$c_1 V_2^+(x) = p^{\kappa_1} M(x)V_2^+(-x),\ V_2^+ \in W_+^{2\times 1}, \tag{2.17}$$

где

$$V_j^+(x) = (m_{1j}^+(x), m_{2j}^+(x))^T,\ j = 1, 2,\ (M_+ \equiv (m_{ik}^+)),\ W_+^{2\times 1} = W_{0+}^{2\times 1} + c,$$

c —произвольный постоянный вектор длины 2.

В силу предположения о существовании правильной факторизации (0.1) при $D \neq I$, существует нетривиальное решение матричного уравнения (2.14) (с вышеприведенной матрицей $\Omega_+ \in \mathcal{P}^+(R; \mathcal{K}_2)$ общего вида (2.4)). Следовательно, существует нетривиального решения задачи Римана (2.16) ввиду того, что $\Omega_+(x)$ — верхняя треугольная матрица.

Для доказательства разрешимости специальной задачи Римана (2.17) рассмотрим следующую задачу Римана,

$$U^+(x) = c_1 p^{\kappa_1} M(x)U^-(x),\ U^\pm \in W_\pm^{2\times 1}. \tag{2.18}$$

Задача Римана (2.18) имеет нетривиальное решение [5,теорема 5.6] ввиду того, что частные индексы матрицы $c_1 p^{\kappa_1} M(x)$ неотрицательны по построению. Тогда из равенства (2.18) с учетом равенства в (2.7) получим

$$U^-(-x) = c_1 p^{\kappa_1} M(x)U^+(-x). \tag{2.19}$$

Положим $V_2^+(x) := U^+(x) + U^-(-x)$. Складывая равенства (2.18) и (2.19) получим (2.17). Таким образом, имеем равенство

$$c_1 Q_+(x)D(x) = M(x)Q_+(-x),$$

где матрица $Q_+(x)$ состоит из векторов-столбцов $V_1^+(x), V_2^+(x)$. Значит, $Q_+ \in W_+^{2\times 2}$. Осталось показать, что $Q_+ \in \mathcal{G}W_+^{2\times 2}$, т.е. последнее равенство является правильной факторизацией матрицы $M(x)$.

Из последнего равенства и факторизации (2.10) имеем

$$c_1 Q_+(x)D(x) = M_+(x)D(x)M_-(x)Q_+(-x).$$

После элементарных преобразований получим

$$D(x)M_-(x)Q_+(-x) = c_1 M_+^{-1}(x)Q_+(x)D(x).$$

Тогда из полученного равенства по теореме об аналитическом продолжении и обобщенной Лиувилля [2, гл. 1, § 3.1], точно также, как при доказательстве теорема 7.3 в [6], имеем $M_+^{-1}(x)Q_+(x) = \omega^+(x) \in \mathcal{P}^+(R; \mathcal{K}_2)$. Следовательно, $Q_+ = M_+\omega^+ \in \mathcal{G}W_+^{2\times 2}$.

Из (2.15) при $x = \infty$ и очевидного равенства $M_{\pm}(-\infty) = M_{\pm}(\infty)$, получим противоречие $c_1 M_+(\infty) = M(\infty)M_+(\infty)$. Значит, предположение, что матрица $M(x)$ не допускает каноническую факторизацию не верно. Теорема 2 доказана.

Имеют место следующие две теоремы, которые также получены с помощью критерия.

Теорема 3. *Пусть $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$. Если*

$$G(x) = \overline{G^{\perp}}(-x),\ x \in R,\ (G^{\perp} \equiv (G^T)^{-1})$$

то матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию.

Теорема 4. *Пусть*

$$G \in \mathcal{G}W^{n\times n},\ G(x) = G^*(x),\ x \in R,\ (G^* \equiv \overline{G^T}).$$

Если все собственные значения матрицы $G(\infty)$ одного знака, то матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию.

Теорема 3 анонсирована в [18] и доказана в [19], теорема 4 впервые доказана в [20], а с помощью критерия — в [19]. Заметим, что идея доказательства теоремы 4 в [20] иная (чем в [19]), и не переносится на неэрмитовы матрицы-функции.

Приведем пример еще одного класса матриц, обладающего определенной симметрией, для которого с помощью критерия будет установлено существование канонической факторизации.

Теорема 5. *Пусть*

$$M \in \mathcal{G}W^{2\times 2},\ M(x) = \begin{pmatrix} 1 + m_{11}(x) & -m_{12}(x) \\ m_{12}(-x) & 1 + m_{22}(x) \end{pmatrix},\ M(\infty) = I, \tag{2.20}$$

где $m_{jj}(x) = m_{jj}(-x),\ j = 1, 2$. Тогда матрица $M(x)$ допускает каноническую факторизацию

$$M(x) = M_+(x)AM_+^{\mathcal{T}}(-x),\ x \in R, \tag{2.21}$$

где

$$M_+ \in \mathcal{G}W_+^{2\times 2},\ M_+^{\mathcal{T}}(x) = I_2 M_+^T(x) I_2,\ I_2 = diag\,(1, -1),$$

$A = A^{\mathcal{T}}$ — некоторая постоянная невырожденная матрица порядка 2.

Доказательство теоремы 5. Положим

$$G(x) := \frac{1}{\sqrt{m(x)}} I_1 M(x), \tag{2.22}$$

где

$m = \det M$, $\sqrt{m(x)}$ — главное значение квадратного корня.

По условию $m(x) \neq 0,\ x \in R$. Тогда из четности функции m следует, что $\mathrm{Ind}\ m(x) = 0$. По теореме Винера-Леви (см., например, [21, теоремы W,L, глава 1, §1]) получим существование функции $l \in L_1(R)$ такой, что $\sqrt{m(x)} = 1 + \mathcal{F}l(x),\ (\sqrt{m(x)} \in \mathcal{G}W^{1\times 1})$. Следовательно функция $\sqrt{m(x)}$ допускает каноническую факторизацию [2]:

$$\sqrt{m(x)} = m_+(x)m_+(-x),\ x \in R,\ m_+ \in \mathcal{G}W_+^{1\times 1}. \tag{2.23}$$

Из условия теоремы и равенств (2.22)-(2.23) следует, что матрица $G(x)$ удовлетворяет теореме 2. Значит матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию. Тогда матрица $M(x)$ также будет допускать каноническую факторизацию ввиду равенств (2.22)-(2.23). Теорема 5 доказана.

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода в свертках на конечном интервале (1.3). Докажем следующее

Утверждение 2. *Пусть* $\alpha = 1$, $k(t)$ *— четная функция и* $|1 - \mathcal{F}k_-(z)| > 0$, $Im\, z \leq 0$. *Тогда матрица* $G(x)$ *в (1.4) допускает каноническую факторизацию и следовательно, уравнение (1.3) корректно разрешимо.*

Доказательство. Сравнивая матрицу M из (2.20) с матрицей G в (1.4) легко видеть, что матрица $(1 - \mathcal{F}k_-(x))G(x)$ удовлетворяет теореме 5 (см. [22, утверждение 2]). Следовательно, из теоремы 5 и второй части теоремы 1 следует справедливость утверждения 2.

Заметим, что утверждение 2 вытекает также из теоремы 1 и [22, лемма 1].

Список литературы

[1] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1987.

[2] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, Москва, 1978.

[3] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, Москва, 1968.

[4] Ф. Д. Гахов, *Краевая задача Римана для системы n пар функций*, Успехи мат. наук, **7**: 4 (1954), 3–54.

[5] Г. С Литвинчук, *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*, Наука, Москва, 1986.

[6] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов*, Успехи мат. наук, **13**: 2(80) (1958), 3–72.

[7] А. Ф. Воронин, *Полное обобщение метода Винера-Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами*, Диф. уравнения, **40**: 9 (2004), 1153 – 1160.

[8] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва, 1986.

[9] М. Г. Крейн, *К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем*, ДАН, **6** (1956), 1167–1170.

[10] R. G. Newton and P.Jost, *The Construction of Potentials from the S-Matrix for Systems of Differential Equations*, JE Nuovo Cimento 1, **4** (1956), 590-622.

[11] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.

[12] А. Б. Шабат *Обратная задача рассеяния*, Диф. уравн., **15**: 10 (1979), 1824 – 1834.

[13] П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*, ГИТЛ, Москва, 1952.

[14] Э. Л. Пресман, *Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова*, Изв. Акад. наук СССР, сер. матем, **33**: 4 (1969), 70–81.

[15] В. А. Малышев, *Уравнения Винера-Хопфа и их применения в теории вероятностей, Итоги науки и техн. Сер. Теор. Вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, ВИНИТИ, Москва,**13** (1976), 5–35.

[16] П. П. Забрейко, А. И., Кошелев, М. А. Красносельский и др., *Интегральные уравнения*, Наука, Москва, 1968.

[17] Р. Хорн , Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, Москва, 1989.

[18] А. Ф. Воронин, *О корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом*, Докл. РАН, **414**: 2 (2007), 156–158.

[19] А. Ф. Воронин, *Частные индексы унитарной и эрмитовой матриц-функций*, Сиб. математич. журна, **51**: 5 (2010),1010—1016.

[20] Ю. Л. Шмульян, *Задача Римана с положительно определенной матрицей*, Успехи мат. наук, **8**: 2(54) (1953), 143–145.

[21] М. Г. Крейн, *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов*, Успехи мат. наук, **13**: 5(83) (1958), 3 – 120.

[22] А. Ф. Воронин, *Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром*, Сиб. матем. журнал, **49**: 4 (2008), 756–767.

Анатолий Федорович Воронин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: voronin@math.nsc.ru

Андрей Егорович Ковтанюк
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: ankov@iam.dvo.ru

Михаил Михайлович Лаврентьев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gelios@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.123–С.129 (2010)

УДК 512.5
MSC 13A99

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ

М.А. Шишленин

Abstract. We consider 2D analogy of Gel'fand-Levitan-Krein equation for inverse acoustic problem. Numerical results are presented and discussed.

Keywords: inverse acoustic problem, Gel'fand-Levitan-Krein equation.

1. Введение

В данной статье рассматривается прямой метод решения обратной задачи акустики определения плотности среды по известной системе источников и приемников заданных на поверхности. Нелинейная двумерная обратная задача акустики сводится к системе линейных интегральных уравнений второго рода (многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна). Одномерный вариант метода был предложен А.С. Благовещенским [1]. Многомерный вариант был предложен в работах [2, 3]. В [4, 5] приведены результаты численных расчетов одномерной задачи и проведен сравнительный анализ численных методов решения одномерной обратной задачи акустики. В данной работе приведены результаты численных расчетов двумерной обратной задачи акустики.

Shishlenin, M.A., Direct method for solving inverse acoustic problems.

© 2010 Шишленин М.А.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00746) и интеграционным проектом СО РАН "Обратные и экстремальные задачи электромагнитного и акустического зондирования Мирового океана".

Поступила 16 января 2010 г.

Рассмотрим обратную задачу нахождения плотности среды $\rho(x,y)$. Рассмотрим последовательность прямых задач

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} + \nabla_{x,y} \ln \rho(x,y)\, \nabla_{x,y}\Big] u^{(k)} = 0, \tag{1}$$

$$u^{(k)}\big|_{t<0} \equiv 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}(+0,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,\delta(t); \tag{3}$$

$$u^{(k)}\big|_{y=\pi} = u^{(k)}\big|_{y=-\pi}. \tag{4}$$

Здесь $x>0$, $y\in(-\pi,\pi)$, $t>0$, $k\in\mathbb{Z}$.

Предполагаем, что след решения прямой задачи (1)–(4) существует:

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t). \tag{5}$$

Обратная задача (1)–(5) заключается в нахождении функции $\rho(x,y)$ по последовательности функций $f^{(k)}(y,t)$.

В обратной задаче (1)–(5) предполагаем, что $\rho(0,y)$ известно. Необходимое условие разрешимости обратной задачи (1)–(5)

$$f^{(k)}(y,+0) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}, \quad y\in(-\pi,\pi), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Введем вспомогательную последовательность прямых задач [2]:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} + \nabla_{x,y} \ln \rho(x,y)\, \nabla_{x,y}\Big] w^{(m)} = 0, \qquad x>0, \quad y\in(-\pi,\pi), \quad t\in\mathbb{R}, \qquad m\in\mathbb{Z}; \tag{6}$$

$$w^{(m)}(0,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}my}\,\delta(t), \qquad \frac{\partial w^{(m)}}{\partial x}(0,y,t) = 0. \tag{7}$$

Решение (6), (7) имеет вид

$$w^{(m)}(x,y,t) = S^{(m)}(x,y)\big[\delta(x+t)+\delta(x-t)\big] + \tilde{w}^{(m)}(x,y,t), \tag{8}$$

где функция $\tilde{w}^{(m)}(x,y,t)$ кусочно-гладкая

$$S^{(m)}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho(x,y)}{\rho(0,y)}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}my}.$$

Очевидно, что

$$u^{(k)}(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_k f_m^{(k)}(t-s)\, w^{(m)}(x,y,s)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

при $x>0$, $y\in(-\pi,\pi)$, $t\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{Z}$. Здесь $f_m^{(k)}$ – коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}$

$$f^{(k)}(y,t) = \sum_m f_m^{(k)}(t)\cdot e^{imy}.$$

Продолжим четным образом функции $u^{(k)}(x,y,t)$ и $f^{(k)}(y,t)$ по переменной t.

Применим к выражению (9) следующую операцию

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^x \frac{(\,\cdot\,)}{\rho(\xi,y)}\,\mathrm{d}\xi$$

и обозначим

$$V^{(m)}(x,y,t) = \int\limits_0^x \frac{w^{(m)}(\xi,y,t)}{\rho(\xi,y)}\,\mathrm{d}\xi. \tag{10}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^x \frac{u^{(k)}(\xi,y,t)}{\rho(\xi,y)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_m V^{(m)}(x,y,s) f_m^{(k)}(t-s)\,\mathrm{d}s \\
&= 2\sum_m f_m^{(k)}(+0)V^{(m)}(x,y,t) + \sum_m \int\limits_{-x}^{x} f_m^{(k)\prime}(t-s)V^{(m)}(x,y,s)\,\mathrm{d}s \\
&= -2V^{(k)}(x,y,t) + \sum_m \int\limits_{-x}^{x} f_m^{(k)\prime}(t-s)V^{(m)}(x,y,s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Исследуем функцию при $x > |t|$

$$G^{(k)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^x \frac{u^{(k)}(\xi,y,t)}{\rho(\xi,y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y.$$

Из вида решения прямой задачи (1)–(5) следует, что

$$G_x^{(k)}(x,t) = 0, \qquad G_t^{(k)}(x,t) = 0, \qquad |t| < x.$$

Таким образом $G^{(k)}(x,t) = \mathrm{const}$ при $|t| < x$. Найдем эти константы. Продолжим функции $u^{(k)}(x,y,t)$ и $\rho(x,y)$ нечетным образом по переменной x. Тогда $u^{(k)}(x,y,t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}
\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} + \nabla_{x,y}\ln\rho(x,y)\,\nabla_{x,y}\Big]u^{(k)} = 0, \\
x\in\mathbb{R}, \qquad y\in(-\pi,\pi), \qquad t>0; \qquad k\in\mathbb{Z}; \\
u^{(k)}\big|_{t=0} = 0; \qquad \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}\Big|_{t=0} = -2\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,\delta(x).
\end{gathered}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
G^{(k)} := \lim_{t\to+0} G^{(k)}(x,t) &= \lim_{t\to+0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi,y,t)}{\rho(\xi,y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to+0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-x}^{x} \frac{u_t^{(k)}(\xi,y,t)}{\rho(\xi,y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y = -\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}}{\rho(0,y)}\,\mathrm{d}y, \quad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi^{(m)}(x,t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} V^{(m)}(x,y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Тогда мы получим следующую систему интегральных уравнений $\Phi^{(m)}(x,t)$:

$$2\Phi^{(k)}(x,t) - \sum_m \int_{-x}^{x} {f_m^{(k)}}'(t-s)\,\Phi^{(m)}(x,s)\,\mathrm{d}s = G^{(k)}, \tag{11}$$

где $|t| < x$, $k \in \mathbb{Z}$. Система (11) является многомерным аналогом уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна. Используя (8) и (10) можно вычислить значение функции $V^{(m)}(x,y,t)$ при $t = x$:

$$V^{(m)}(x,y,x-0) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}my}}{2\sqrt{\rho(x,y)\rho(0,y)}}.$$

Таким образом

$$\Phi^{(m)}(x,x-0) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}my}}{2\sqrt{\rho(x,y)\rho(0,y)}}\,\mathrm{d}y.$$

Решение обратной задачи (1)–(5) находится по формуле

$$\rho(x,y) = \frac{\pi^2}{\rho(0,y)} \Big[\sum_m \Phi^{(m)}(x,x-0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}my} \Big]^{-2}. \tag{12}$$

Для того чтобы найти решение уравнение (11) при фиксированном параметре x_0 и вычислить $\rho(x_0,y)$ по формуле (12).

2. Численные расчеты и выводы

В численных расчетах рассмотрены два случая: точное решение обратной задачи акустики задавалось гладкой функцией (см. рис. 1) и кусочно-постоянной функцией (см. рис. 5).

В численных расчетах рассматривалось N-приближение и приближенное решение обратной задачи (1)–(5) находилось по формуле

$$\rho(x,y) = \frac{\pi^2}{\rho(0,y)} \Big[\sum_{m=-N}^{N} \Phi^{(m)}(x,x-0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}my} \Big]^{-2}.$$

Приближенные данные задавались следующим образом:

$$f^{\epsilon}(t) = f(t) + \varepsilon\alpha(t)(f_{\max} - f_{\min}),$$

где $f(t)$ точные данные обратной задачи, ε уровень шума в данных, $\alpha(t)$ случайное число равномерно распределенное на отрезке $[-1,1]$ для фиксированного t, $f_{\max}$ и $f_{\min}$ максимальное и минимальное значение точных данных.

Метод позволяет находить значение коэффициента в произвольной точке глубины $x \in (0,\ell)$ без дополнительных вычислений на предыдущих слоях.

Численные расчеты показали, что точность восстановления улучшается при увеличении числа N при точных данных.

Список литературы

[1] А. С. Благовещенский, *О локальном методе решения нестационарной обратной задаче для однородной струны*, Труды Математического института им. В. А. Стеколова АН СССР, **115**, Математические вопросы теории дифракции и распространения волн, 1 (1971), Ленинград: Наука, 28—38.

[2] С.И. Кабанихин, *Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений*, Препринт №27, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1988.

[3] S.I. Kabanikhin, *On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations*, Sov. Math. Dokl., **40**:3 (1990), 579–583.

[4] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Boundary control and Gel'fand–Levitan–Krein methods in inverse acoustic problem*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **12**:2 (2004), 125-–144.

[5] S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev and M.A. Shishlenin, *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*, VSP, The Netherlands, 2004.

Максим Александрович Шишленин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

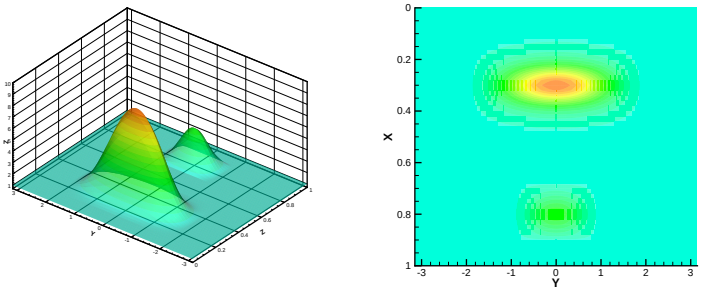


Рис. 1. Точное решение

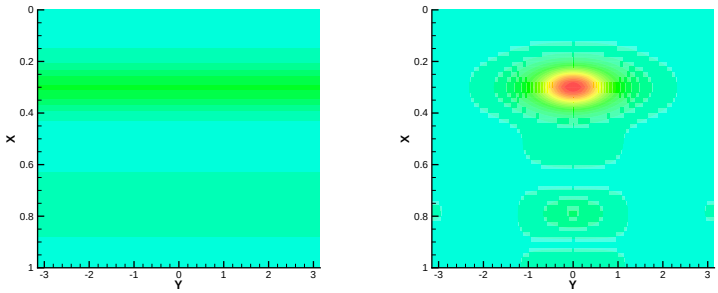


Рис. 2. Восстановленное решение, $\varepsilon = 0$: $N = 0$ (слева) и $N = 2$ (справа)

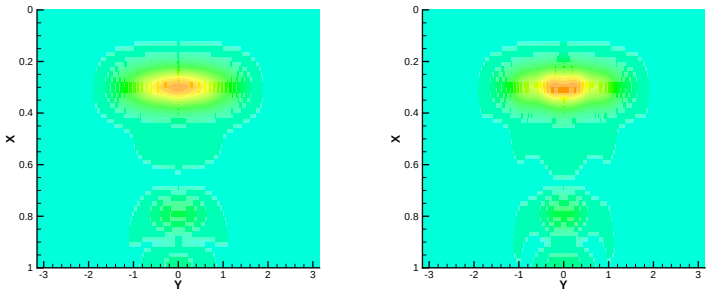


Рис. 3. Восстановленное решение $N = 10$: $\varepsilon = 0$ (слева) и $\varepsilon = 5$ (справа)

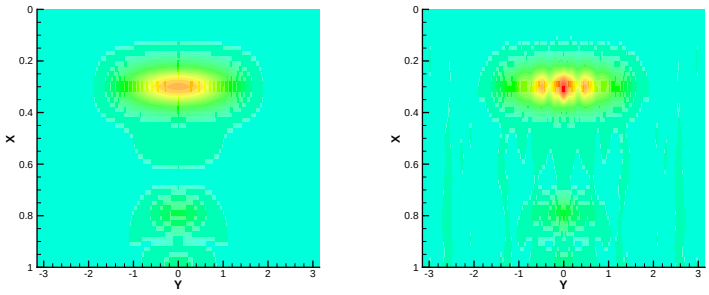


Рис. 4. Восстановленное решение $N = 30$: $\varepsilon = 0$ (слева) и $\varepsilon = 5$ (справа)

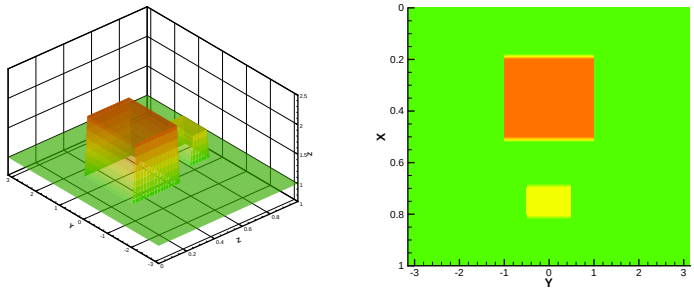


Рис. 5. Точное решение

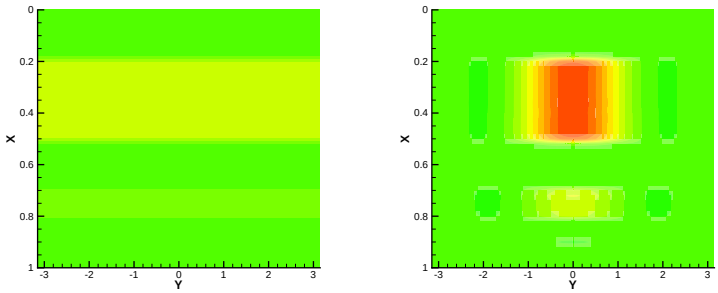


Рис. 6. Восстановленное решение, $\varepsilon = 0$: $N = 0$ (слева) и $N = 2$ (справа)

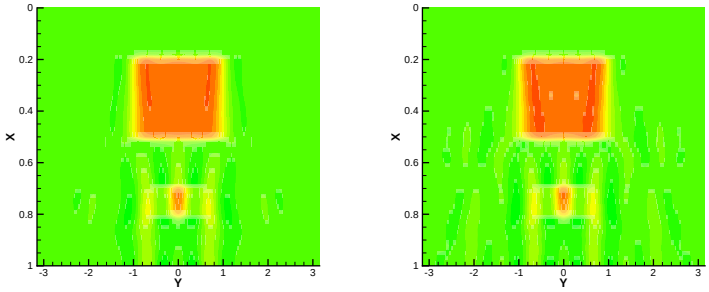


Рис. 7. Восстановленное решение $N = 10$: $\varepsilon = 0$ (слева) и $\varepsilon = 5$ (справа)

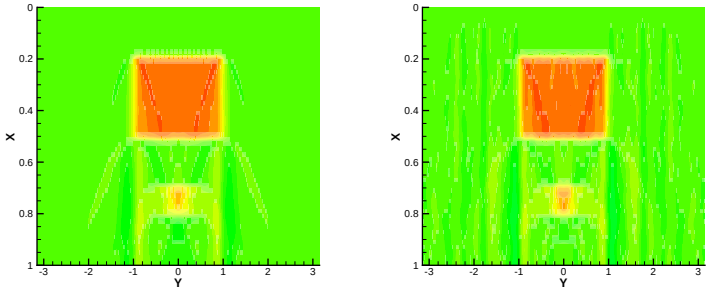


Рис. 8. Восстановленное решение $N = 30$: $\varepsilon = 0$ (слева) и $\varepsilon = 5$ (справа)

S ©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.130–С.138 (2010)

УДК 517.956.32
MSC 13A99

О КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.М. ГОРДИЕНКО

Abstract. We consider a mixed problem in a quarter-space for the wave equation with two spatial variables. The boundary condition is a linear combination of the first derivatives.

We study boundary conditions under which the mixed problem satisfies the Lopatinskii condition. The established criterion is constructive. Namely, we verify that a second order polynomial is Hurwitzian. Coefficients of the polynomial are defined explicitly by the coefficients of the boundary condition of the mixed problem.

We prove well-posedness of the problems satisfying the Lopatinskii condition by means of constructing a dissipative energy integral allowing us to obtain easily a priori estimate. To construct the dissipative energy integral we solve a system of linear algebraic equations.

Keywords: wave equation, mixed problem, dissipative energy integral.

Введение

Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с двумя пространственными переменными в четверти пространства. На границе задается условие в виде линейной комбинации первых производных.

Выясняется при каких граничных условиях смешанная задача удовлетворяет равномерному условию Лопатинского. Критерий конструктивный — состоит

Gordienko V.M., On well-posedness of a mixed problem for the wave equation.
© 2010 Гордиенко В.М.
Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарные проекты №40, №107).

Поступила 5 марта 2010 г.

в выяснении гурвицевости полинома второй степени, коэффициенты которого явно выписаны через коэффициенты граничного условия смешанной задачи.

Для задач удовлетворяющих равномерному условию Лопатинского доказывается корректность — строится диссипативный интеграл энергии, позволяющий легко получить априорную оценку. Построение диссипативного интеграла энергии тоже конструктивно — состоит в решении некоторой системы линейных алгебраических уравнений.

Возможно обобщение рассмотренных вопросов на случай когда вместо волнового уравнения рассматривается гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами и младшими членами. Также возможны обобщения на случай большего чем двух числа пространственных переменных, на случай когда неизвестная функция является вектор-функцией и на случай когда граничное условие связывает производные высокого порядка.

§ 1. Условие Лопатинского в смешанной задаче для волнового уравнения

Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \quad t > 0\,, \quad x > 0$$

$$(2) \qquad a\,\frac{\partial u}{\partial t} + b\,\frac{\partial u}{\partial x} + c\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0$$

$$(3) \qquad u = \varphi, \quad u_t = \psi \qquad \text{при} \quad t = 0\,.$$

Неизвестная функция $u = u(t, x, y)$ — вещественная или комплекснозначная; коэффициенты граничного условия a, b, c — вещественные или комплексные числа.

Выделим граничные условия при которых смешанная задача заведомо некорректна.
Экспоненциальная функция $u(t\,, x\,, y) = e^{\tau t + \xi x + i\eta y}$ удовлетворяет волновому уравнению (1) и граничному условию (2), если параметры τ, ξ, η удовлетворяют соотношениям:

$$(4) \qquad \begin{cases} \tau^2 - \xi^2 + \eta^2 = 0 \\ a\tau + b\xi + ic\eta = 0\,. \end{cases}$$

Пусть эти параметры удовлетворяют еще условиям:

$$(5) \qquad \Re\,\tau > 0\,, \quad \Re\,\xi < 0\,, \quad \eta \in \mathbb{R}\,,$$

тогда краевая задача некорректна , потому что можно построить пример Адамара. В с. д., функции

$$u_n(t\,, x\,, y) = e^{-\sqrt{n}} e^{n(\tau t + \xi x + i\eta y)}$$

удовлетворяют волновому уравнению (1) и граничному условию (2),
если $t = 0\,,$ то $u_n(0, x, y) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно вместе со всеми своими производными до любого фиксированного порядка, а если $t > 0\,,$ то $u_n(t, x, y) \to \infty$ при $n \to \infty\,.$

Утверждение 1. *Пусть полином* $\mathcal{P}(z) \equiv z^2 - \dfrac{2b}{c+a}\, z - \dfrac{c-a}{c+a}$ *имеет корень* $z : \Re z > 0\,,\ \Im z \neq 0$ *или* $z = 1\,,$ *тогда смешанная задача (1)—(3) допускает построение примера некорректности Адамара.*

Доказательство. Пусть полином $\mathcal{P}(z)$ имеет корень $z : \Re z > 0\,,\ \Im z \neq 0\,;$ положим

$$\tau = \frac{i}{\Im z} \cdot \frac{z^2+1}{z^2-1}\,, \qquad \xi = -\frac{i}{\Im z} \cdot \frac{2z}{z^2-1}\,, \qquad \eta = \frac{1}{\Im z}\,.$$

Легко проверить, что соотношения (4) выполнены. Также легко вывести формулы:

$$\Re\,\tau = \frac{4\Re\, z}{|z^2-1|^2}\,, \qquad \Re\,\xi = -\frac{2(|z|^2+1)}{|z^2-1|^2}\,,$$

и значит, соотношения (5) тоже выполняются.

Если полином $\mathcal{P}(z)$ имеет корень $z = 1\,,$ положим $\tau = 1\,,\ \xi = -1\,,\ \eta = 0\,.$ И в этом случае соотношения (4), (5) выполняются. Утверждение 1 доказано.

Справедливо обратное

Утверждение 2. *Смешанная задача (1)—(3) допускает построение примера некорректности Адамара только в случаях указанных в утверждении 1.*

Будем говорить, что смешанная задача (1)—(3) удовлетворяет равномерному условию Лопатинского, если нельзя построить пример некорректности Адамара для данной задачи и для всех задач с как угодно близкими граничными условиями.

Не сложно показать, что произвольно мало изменяя коэффициенты граничного условия $a, b, c\,,$ можно корень полинома $\mathcal{P}(z)$ сдвинуть в любом направлении.

Таким образом справедливо

Утверждение 3. *Равномерное условие Лопатинского для задачи (1)—(3) выполнено тогда и только тогда когда оба корня полинома* $\mathcal{P}(z)$ *лежат в левой полуплоскости:* $\Re z_1\,,\ \Re z_2 < 0\ .$

Используя критерий Рауса-Гурвица для полинома $\mathcal{P}(z)$ приходим к формулировке равномерного условия Лопатинского в терминах коэффициентов граничного условия.

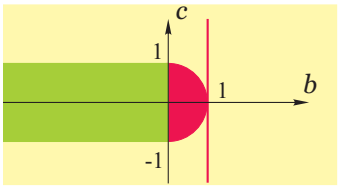
Утверждение 4. *Равномерное условие Лопатинского для задачи (1)—(3) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\Re a\bar{b} < 0\,, \quad (\Re a\bar{b})^2 - (\Re b\bar{c})^2 - (\Im a\bar{c})^2 > 0\ .$$

Остановимся на случае вещественных коэффициентов a, b, c в граничном условии.

Утверждение 5. *Равномерное условие Лопатинского для задачи (1)—(3) в случае* $b\,,\ c \in \mathbb{R}\,,\ a = 1$ *выполнено тогда и только тогда когда* $b < 0\,,\ |\,c\,| < 1.$

Обосновать это утверждение можно и как следствие утверждения 4 и непосредственно как следствие утверждения 3.



Область, где выполнено равномерное условие Лопатинского, на рисунке отмечена зеленым цветом. Значения b, c при которых можно построить пример некорректности Адамара отмечены красным цветом, эти значения составляют внутренность единичного полукруга и касающуюся полукруга прямую. Оставшиеся значения b, c отмечены желтым цветом. При этих значениях нет примера Адамара, но и равномерное условие Лопатинского не выполняется. А значит, по определению равномерного условия Лопатинского, имеются как угодно близкие значения коэффициентов граничного условия b, c при которых смешанная задача допускает пример Адамара. Но эти близкие значения в данном случае являются комплексными.

§ 2. Краевая задача для симметрических гиперболических систем с диссипативным граничным условием

Напомним основные факты теории симметрических гиперболических систем, подробнее см. в [1].

Система для n-мерной вектор-функции $U = U(t, x, y)$

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + B\frac{\partial U}{\partial x} + C\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

называется симметрической t — гиперболическая по-Фридрихсу, если

$$A = A^* > 0\,, \quad B = B^*\,, \quad C = C^*\,;$$

квадратные матрицы A, B, C – симметрические (в комплексном случае – эрмитовые), а матрица A, кроме того, положительно определена.

Постановка краевой задачи в четверти пространства $t > 0$, $x > 0$ предполагает задание начальных данных $U = U_0$ при $t = 0$ и граничного условия при $x = 0$. Граничное условие задают в виде

$$MU = 0\,,$$

где M — прямоугольная матрица размера $k \times n$, число ее строк k (число граничных условий) должно равняться числу положительных собственных чисел матрицы B.

Граничное условие диссипативно если

$$\langle BU, U\rangle < 0 \quad \text{при} \quad MU = 0\,, \quad U \neq 0\,.$$

Известно, что на решениях системы (6) выполнено дополнительное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle AU, U\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle BU, U\rangle + \frac{\partial}{\partial y}\langle CU, U\rangle = 0\,. \tag{7}$$

Использование этого соотношения играет существенную роль в теории симметрических гиперболических систем.

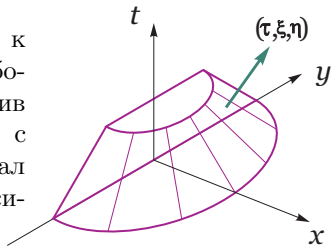
Тождество (7) можно проинтегрировать по любой области G

$$\iiint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial t}\langle AU,U\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle BU,U\rangle + \frac{\partial}{\partial y}\langle CU,U\rangle\right] dG = 0\ ,$$

а затем, используя формулу Остроградского, объемный интеграл превратить в поверхностный

$$\iint\limits_S \big\langle \big[\tau A + \xi B + \eta C\big]U, U\big\rangle\, dS = 0\ . \tag{8}$$

Возьмем в качестве области G, примыкающую к границе часть усеченного конуса. Интеграл по боковой поверхности в (8) можно отбросить (заменив равенство на неравенство), выбирая область G, с достаточно пологой боковой поверхностью. Интеграл по границе отбрасывается благодаря условию диссипативности граничного условия.



Таким образом получается оценка решения при $t = T$ через начальные данные — априорная оценка

$$\iint\limits_{t=T} \langle AU,U\rangle\, dS \le \iint\limits_{t=0} \langle AU,U\rangle\, dS\ .$$

Используя эту априорную оценку, можно доказать корректность краевой задачи для симметрической гиперболической системы с диссипативным граничным условием.

§ 3. Сведение волнового уравнения к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием

Мы покажем, что если граничное условие в смешанной задаче (1)—(3) удовлетворяет равномерному условию Лопатинского, то эту смешанную задачу можно свести к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием для вектор-функции составленной из первых производных решения задачи (1)—(3). Это сведение позволяет для задачи (1)—(3) получить априорную оценку и доказать корректность.

Сведение волнового уравнения к симметрической системе основано на следующем дифференциальном тождестве

$$\begin{bmatrix} k & l & m \\ l & k & in \\ m & -in & k \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l & k & in \\ k & l & m \\ -in & m & -l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & -in & k \\ in & -m & l \\ k & l & m \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \\ l(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \\ m(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \end{bmatrix}\ . \tag{9}$$

Это тождество выполняется при любой функции $u = u(t,x,y)$ и любых числах k,l,m,n, мы будем считать эти числа вещественными, чтобы обеспечить эрмитовость матриц, входящих в тождество.

В силу тождества (9), если функция $u = u(t,x,y)$ удовлетворяет волновому

уравнению (1), то вектор-функция $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ составленная из первых производных от u, удовлетворяет системе с эрмитовыми матрицами

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} k & l & m \\ l & k & in \\ m & -in & k \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l & k & in \\ k & l & m \\ -in & m & -l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} m & -in & k \\ in & -m & l \\ k & l & m \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \, .$$

Система (10) гиперболична, если

$$(11) \qquad \begin{bmatrix} k & l & m \\ l & k & in \\ m & -in & k \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k > 0 \, , \quad k^2 - l^2 - m^2 - n^2 > 0 \, .$$

Граничное условие (2) индуцирует для системы (10) граничное условие

$$(12) \qquad au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \, .$$

Начальные условия (3) индуцируют для системы (10) начальные условия

$$(13) \qquad u_1 = \psi, \quad u_2 = \varphi_x, \quad u_3 = \varphi_y \qquad \text{при} \quad t = 0 \, .$$

Таким образом, смешанная задача для волнового уравнения (1)—(3) сведена к краевой задаче для симметрической гиперболической системе (10) ,(12) ,(13) .

Граничное условие (12) для системы (10) диссипативно, если

$$(14) \qquad \left\langle \begin{bmatrix} l & k & in \\ k & l & m \\ -in & m & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0 \\ \text{при} \quad au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \, , \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \neq 0 \, .$$

Итак, смешанная задача для волнового уравнения (1)—(3) будет сведена к краевой задаче для симметрической гиперболической системе (10) ,(12) ,(13) с диссипативным граничным условием, если мы найдем числа k, l, m, n такие что выполнено условие гиперболичности (11) и условие диссипативности (14).

Мы предполагаем, что для задачи для (1)—(3) выполнено р.у.Л., а это значит, что у полинома

$$\mathcal{P}(z) \equiv z^2 - \frac{2b}{c+a} z - \frac{c-a}{c+a}$$

оба корня лежат в левой полуплоскости $\Re z_1 \, , \ \Re z_2 < 0$.

Введем матрицу $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c-a}{c+a} & \frac{2b}{c+a} \end{bmatrix}$;

и заметим что, $\det (zI - \Lambda) = \mathcal{P}(z)$; т.е., собственные числа матрицы Λ совпадают с корнями полинома $\mathcal{P}(z)$.

Утверждение 4 теперь может быть сформулировано так:

Утверждение 4*. *Равномерное условие Лопатинского для задачи (1)—(3) выполнено тогда и только тогда когда оба собственных числа матрицы* Λ *лежат в левой полуплоскости.*

Пусть $G = G^* > 0$ произвольная эрмитова положительно определенная матрица размера 2×2.

По теореме Ляпунова существует единственная матрица H :

$$\Lambda^* H + H\Lambda = -G \ ,$$

причем $H = H^* > 0$.

Запишем матрицу H в виде $H = \begin{bmatrix} k-m & -l-in \\ -l+in & k+m \end{bmatrix}$.

Последнее равенство служит определением чисел k, l, m, n .

Покажем, что при так определенных числах k, l, m, n выполняются условия (11) и (14).

Легко видеть что условие $H > 0$ эквивалентно условию гиперболичности (11).

В с. д., $H = \begin{bmatrix} k-m & -l-in \\ -l+in & k+m \end{bmatrix} > 0 \iff$

$$\iff \quad k > 0\,, \quad k^2 - l^2 - m^2 - n^2 > 0 \quad \iff \quad \begin{bmatrix} k & l & m \\ l & k & in \\ m & -in & k \end{bmatrix} > 0 \ .$$

Покажем что, условие $G > 0$ эквивалентно условию диссипативности (14).

Сделаем замену переменных $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Запишем граничное условие в новых переменных

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad \iff \quad (a-c)v_1 - 2bv_2 + (a+c)v_3 = 0 \quad \iff$$

$$\iff \quad v_3 = \frac{c-a}{c+a}\, v_1 + \frac{2b}{c+a}\, v_2 \ .$$

Последнее соотношение можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c-a}{c+a} & \frac{2\,b}{c+a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \iff \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \ .$$

Итак, граничное условие (12) мы записали с помощью матрицы Λ, входящей в формулировку равномерного условия Лопатинского

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad \iff \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \ .$$

Запишем в новых переменных форму, входящую в формулировку условия диссипативности граничного условия (14)

$$\left\langle \begin{bmatrix} l & k & in \\ k & l & m \\ -in & m & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle = -\left\langle H \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right\rangle - \left\langle H \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Теперь полностью запишем в новых переменных форму условие диссипативности граничного условия (14)

$$\left\langle \begin{bmatrix} l & k & in \\ k & l & m \\ -in & m & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle = -\left\langle H \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right\rangle - \left\langle H \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\left\{ \text{при} \quad au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= -\left\langle \{\Lambda^* H + H\Lambda\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle G \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Таким образом, условие $G > 0$ эквивалентно условию диссипативности (14).

§ 4. Возможные обобщения

Возможно обобщение рассмотренных вопросов на случай когда вместо волнового уравнения рассматривается гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами и младшими членами [2]. При сведении гиперболического уравнения второго порядка к симметрической системе в системе появятся переменные коэффициенты и младшие члены, но для систем Фридрихса это не является проблемой.

Если характеристический конус гиперболического уравнения второго порядка сильно наклонен, то может оказаться, что на границе не надо задавать граничных условий или наоборот надо задавать два [3].

В [2, 4] рассматривает случай когда волновому уравнению удовлетворяет не функция а вектор-функция. Рассмотрение векторного волнового уравнения (кроме самостоятельного значения) позволяет для скалярного волнового уравнения исследовать смешанные задачи с граничными условиями связывающие производные высокого порядка.

Также возможны обобщения на случай большего чем двух числа пространственных переменных [5].

Основным моментом данной работы является сведение волнового уравнения к симметрической гиперболической системе. Ясно, что у симметрической системы решений больше чем у волнового уравнения. В [6] выделяются решения симметрической системы, связанные с волновым уравнением.

Работа [7] посвящена описанию всех систем Фридрихса, к которым может быть сведено трехмерное волновое уравнение. Здесь оказалось удобным использование кватернионов.

Список литературы

[1] С.К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1979.

[2] В.М. Гордиенко, *Симметризация смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными*, Сиб. мат. журн., **2** (1981), 84-104.

[3] О.А. Бондаренко, В.М. Гордиенко, *Симметризация векторного гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными*, Сиб. мат. журн., **3** (1986), 3-9.
[4] V.M. Gordienko, *Un probleme mixte pair l'eqution vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'energie; Cas mal poses*, C.r. Acad. Sci., Serie A., **10** (1979), 547-550.
[5] А.Н. Малышев, *Смешанная задача для гиперболического уравнений второго порядка с комплексным граничным условием первого порядка*, Сиб. мат. журн., **6** (1983), 102-121.
[6] В.М. Гордиенко, *Гиперболические системы, эквивалентные волновому уравнению*, Сиб. мат. журн., **1** (2009), 19-27.
[7] В.М. Гордиенко, *Системы Фридрихса для трехмерого волнового уравнения*, Сиб. мат. журн., **6** (2010), 1282-1297.

Гордиенко Валерий Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gordienk@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.139–С.149 (2010)

УДК 514.8, 517.983, 519.6
MSC 44A30

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ 2-ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ, ЗАДАННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ, ПО ИХ ПРОДОЛЬНЫМ ЛУЧЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

И.Е. СВЕТОВ

Abstract. The numerical method for solving a tensor tomography problem of reconstructing symmetric solenoidal 2-tensor fields, given in a unit disk, is offered. Desired field with fixed properties on the boundary are found from longitudinal ray transforms, calculated along the straight lines crossing the support of the field. The solution is sought by means of the least-squares method with the use, as approximating sequence, of local bases constructed on the basis of B-splines. This algorithm was compared with algorithms based on inversion formulas for the accuracy of reconstruction.

Keywords: tensor tomography, solenoidal field, least-squares method, B-splines, approximation, fast Fourier transform, inversion formula.

1. Введение

В настоящей работе задача 2-тензорной томографии рассматривается в следующей постановке. Пусть некоторое симметричное 2-тензорное поле задано

Svetov, I.E., Reconstruction of solenoidal 2-tensor fields, given in a unit disk, in their longitudinal ray transforms.

© 2010 Светов И.Е.

Работа осуществлена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-92001), Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН № 14).

Поступила 6 марта 2010 г.

в ограниченной области плоскости, заполненной средой, в которой зондирующее излучение распространяется вдоль прямых. Требуется найти это поле по его известному продольному лучевому преобразованию. Далее, для краткости, вместо выражения “2-тензорное поле” будет использоваться термин “поле”.

При вычислении продольного лучевого преобразования вдоль луча вклад в результат вносится лишь проекцией искомого поля на луч. Поэтому задача восстановления симметричного поля по продольному лучевому преобразованию единственного решения не имеет. А именно, потенциальные поля, потенциал которых (векторное поле) обращается в нуль на границе области, продольным лучевым преобразованием “не замечается”. Поэтому по продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть поля.

Для решения поставленной задачи использовался алгоритм, основанный на методе наименьших квадратов (МНК). Ранее МНК успешно использовался для решения двумерных задач эмиссионной [1], [2], векторной [3], [4] и 2-тензорной томографии [5]. В частности, в работе [5] МНК применялся для восстановления соленоидальной части поля. В качестве базиса использовались соленоидальные поля, построенные на основе полиномов. Общая схема алгоритма МНК, использованная в упомянутых выше работах, была применена и при решении поставленной задачи тензорной томографии. В то же время реализованный в настоящей работе вычислительный алгоритм обладает рядом характерных особенностей, существенно отличающими его от разработанных ранее для решения аналогичных задач. Перечислим основные черты реализованного алгоритма МНК. 1) В качестве базисных последовательностей выбраны поля с локальным носителем, построенные на основе B-сплайнов [6], которые в последнее время стали наиболее мощным и универсальным инструментом в вычислительных задачах, связанных с необходимостью интерполяции и аппроксимации данных. 2) В качестве образов (базисных последовательностей на основе B-сплайнов) под действием продольных лучевых преобразований использованы точные аналитические выражения, что привело к значительной экономии времени вычислений. 3) Для решения системы линейных уравнений с матрицей Грама, возникающей при реализации МНК, использовался метод ортогонализации. Подробнее о реализации и тестировании алгоритма МНК с использованием базиса из 2-тензорных полей, построенных на основе B-сплайнов, смотри [7].

Целью настоящей работы является сравнение точности восстановления для приведенного выше алгоритма и алгоритмов, основанных на использовании формул обращения.

2. Постановка задачи

Пусть на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задана декартова прямоугольная система координат, точки плоскости в заданной системе имеют координаты $(x, y) \equiv (x^1, x^2) \equiv (y^1, y^2) \equiv \ldots$ Через $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ обозначим круг единичного радиуса с границей $\partial B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Через $S^2(B)$ будем обозначать пространство симметричных 2-тензорных полей, заданных на $\mathbb{R}^2$ и равных нулю вне B. $H^1(S^2(B))$ — пространство Соболева 1го порядка. Компоненты поля $u \in H^1(S^2(B))$ будем записывать в векторной форме $u_{ij} = (u_{11}, u_{12}, u_{22})$. Через $H^1(\partial B \times \partial B)$ обозначим пространство Соболева 1го

порядка 2π-периодических по каждому аргументу функций. Скалярное произведение функций $f, g \in H\ (\partial B \times \partial B)$ определяется формулой

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} (1 + k^2 + l^2) c_{k,l}(f)\overline{c_{k,l}(g)}, \tag{1}$$

где

$$c_{k,l}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) e^{-i(k\alpha + l\beta)} d\alpha d\beta \tag{2}$$

коэффициенты разложения f в ряд Фурье (см. [8]).

Любое симметричное 2-тензорное поле u может быть единственным образом представлено в виде суммы соленоидального поля u^s и потенциального поля $\mathrm{d}v$ с потенциалом v, обращающимся в нуль на границе ∂B:

$$u = \mathrm{d}v + u^s, \qquad v|_{\partial B} = 0, \qquad \delta u^s = 0. \tag{3}$$

Здесь $v \in H^2(S^1(B))$ — векторное поле. Оператор $\mathrm{d} : H^2(S^1(B)) \to H^1(S^2(B))$ — оператор внутреннего дифференцирования, переводящий векторное поле $v = (v_1, v_2)$ в симметричное потенциальное 2-тензорное поле:

$$(\mathrm{d}v)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right).$$

Оператор дивергенции $\delta : H^1(S^2(B)) \to H^0(S^1(B))$ преобразует 2-тензорное поле u в векторное поле δu по формуле $(\delta u)_i = \partial u_{ij}/\partial x^j$. Здесь и далее предполагается выполненным правило Эйнштейна, состоящее в том, что по повторяющимся сверху и снизу одноименным индексам в одном мономе предполагается суммирование от 1 до 2.

Продольным лучевым преобразованием 2-тензорного поля u называется линейный оператор $\mathcal{P} : H^1(S^2(B)) \to H^1(\partial B \times \partial B)$, определяемый равенством

$$[\mathcal{P}u](\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{ij}(x_0 + \xi t)\xi^i\xi^j\, dt. \tag{4}$$

Здесь $x_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — точка на границе ∂B, из которой проводится луч, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. β — угол между внешней нормалью к окружности в точке x_0 и направляющим вектором луча, $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (-\cos(\alpha + \beta), -\sin(\alpha + \beta))$, $-\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$.

Так как предполагается, что $u(x) = 0$ при $x \notin B$, то формулу (4) можно переписать в виде

$$[\mathcal{P}u](\alpha, \beta) = \int_0^{2\cos\beta} u_{ij}(x_0 + \xi t)\xi^i\xi^j\, dt. \tag{5}$$

Приведем запись продольного лучевого преобразования в переменных $s = \sin\beta,\ \gamma = \alpha + \beta$.

$$[\mathcal{P}u](s, \gamma) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} u_{ij}(-s\sin\gamma - t\cos\gamma, s\cos\gamma - t\sin\gamma)\xi^i\xi^j\, dt. \tag{6}$$

Очевидно, что записи (5) и (6) эквивалентны.

Сформулируем постановку *задачи 2-тензорной томографии* так, как она понимается в данной работе. Пусть известны значения (5) продольного лучевого преобразования $\mathcal{P}$ для всех $(\alpha, \beta) \in \partial B \times \partial B$. Требуется по этим данным восставить симметричное соленоидальное 2-тензорное поле $u(x)$, $x \in B$.

Как известно, (см. [7]) оператор $\mathcal{P}$ обладает ненулевым ядром, состоящим из всех потенциальных полей вида $u = \mathrm{d}v$, $v \in H^2(S^1(B))$, $v|_{\partial B} = 0$. Напомним, что по продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную компоненту поля [9]. Известно [5], что всякое соленоидальное симметричное поле u^s задается потенциалом ψ так, что

$$u^s = (u^s_{11}, u^s_{12}, u^s_{22}) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \tag{7}$$

3. Схема алгоритма восстановления на основе МНК

Общая схема МНК. Опишем общую схему алгоритма наилучшего приближения, предлагаемого для решения задачи 2-тензорной томографии. Детали можно найти в [1], [10].

Пусть H, K — гильбертовы пространства. $A : H \to K$ линейный ограниченный оператор: $\|Af\|_K \le C\|f\|_H$, $f \in H$. Предполагается, что A инъективен. Задача состоит в том, чтобы найти приближенное решение операторного уравнения $Af = g$ с заданным элементом $g \in K$ и искомым $f \in H$. На самом деле известно лишь приближенное значение g_δ правой части g, удовлетворяющее неравенству $\|g_\delta - g\|_K < \delta$. По заданному g_δ требуется найти аппроксимацию f_δ искомого элемента f. В пространстве H выберем полную линейно независимую последовательность элементов

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_n,\ \ldots \tag{8}$$

В силу инъективности оператора A последовательность элементов

$$\psi_1 = A\varphi_1,\ \psi_2 = A\varphi_2, \ldots, \psi_n = A\varphi_n, \ldots \tag{9}$$

линейно независима. Заметим, что при этом, если оператор не сюръективен, последовательность (9) может и не быть полной в K.

Пусть задан элемент $g_\delta \in K$. Фиксируя некоторое n, положим $g_{\delta n} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \psi_k$. Если мы определили коэффициенты $c_k^{(n)}$, доставляющие минимум норме

$$\|g_\delta - g_{\delta n}\|_K, \tag{10}$$

то, в силу линейности оператора A и способа построения последовательности (9), получим

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \psi_k = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} A\varphi_k = A\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \varphi_k \Big) = Af_{\delta n},$$

где

$$f_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \varphi_k.$$

Задача минимизации нормы (10) решается методом наименьших квадратов, который приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} (\psi_k, \psi_m) = (g_\delta, \psi_m), \qquad m = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

с матрицей Грама, определитель которой отличен от нуля для всякого n.

Конкретизация алгоритма. Укажем функциональные пространства, в рамках которых реализован алгоритм МНК численного решения задачи 2-тензорной томографии. В качестве пространства H выбрано пространство Соболева $H^1(S^2(B))$. В качестве пространства K выбирается пространство Соболева $H(\partial B \times \partial B)$. Оператор A, описанный в общей схеме алгоритма, определяется формулой (5).

При реализации численных экспериментов удобно полагать носитель поля u лежащим строго внутри B. Иными словами, $\mathrm{supp} u \subset B_{r_0} = \{(x,y) \in B \,|\, x^2 + y^2 < r_0^2\}$, при $0 < r_0 < 1$.

В настоящей работе в качестве элементов последовательности (8) выбираются 2-тензорные поля, построенные на основе двумерных B-сплайнов, являющихся тензорным произведением одномерных нормализованных B-сплайнов степени 4 по равномерному разбиению. Степень 4 выбрана из соображений оптимальности (см. [7]).

Напомним определение B-сплайнов. Пусть на отрезке $[-1,1]$ задано равномерное разбиение $\Delta_N : -1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ с шагом $h = x_i - x_{i-1} = 2/N$. Через B_4^i будем обозначать B-сплайн 4-й степени с серединой отрезка-носителя в точке $x_{i+\frac{5}{2}}$. Обозначим $\mu = (x - x_{i+\frac{5}{2}})/h$. B-сплайн 4-й степени определяется формулой

$$B_4^i(x) = \begin{cases} \frac{(2\mu+5)^4}{384} & \text{для } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ \frac{-16\mu^4-80\mu^3-120\mu^2-20\mu+55}{96} & \text{для } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ \frac{48\mu^4-120\mu^2+115}{192} & \text{для } x \in [x_{i+2}, x_{i+3}), \\ \frac{-16\mu^4+80\mu^3-120\mu^2+20\mu+55}{96} & \text{для } x \in [x_{i+3}, x_{i+4}), \\ \frac{(-2\mu+5)^4}{384} & \text{для } x \in [x_{i+4}, x_{i+5}), \\ 0 & \text{для } x \notin [x_i, x_{i+5}). \end{cases}$$

Тензорное произведение одномерных сплайнов $B_4^i(x)$ и $B_4^j(y)$ — двумерный B-сплайн $B_4^{ij}(x,y) = B_4^i(x) \times B_4^j(y)$ степени 4 по равномерному разбиению $\Delta_N \times \Delta_N$. В предлагаемом алгоритме, при восстановлении по известным преобразованиям (5), элементами последовательности (8) выбраны поля, построенные по формулам (7), где в качестве потенциалов используются двумерные B-сплайны (для краткости такие базисные поля будем обозначать $B_4^s(x,y)$).

Процедура дискретизации задачи, достаточна сложная и трудоемкая, включает в себя следующие элементы.

1) Дискретизация значений $[\mathcal{P}u](\alpha,\beta)$ продольных лучевых преобразований восстанавливаемого 2-тензорного поля и базисных элементов по углам α, β. В численных экспериментах использованы дискретизации 64×32, 128×64 и 256×128 по α, β.

2) Выбор шага равномерной сетки, на которой задаются 2-тензорные поля, построенные на основе B-сплайнов. Для каждой из дискретизаций по α, β выбирается оптимальное $h = 2/N$, при $N \approx$ (дискретизация по α)/4 (см. [7]). В численных экспериментах для дискретизации по α 64 выбрано $N = 17$, для дискретизации α 128 выбрано $N = 31$, а для дискретизации α 256 выбрано $N = 63$.

3) Вычисление интеграла (5) при фиксированных значениях α, β. Эта часть является основой для следующих этапов алгоритма, и поэтому требует расчетов с высокой степенью точности. При вычислении лучевых преобразований (5) для восстанавливаемого поля заключающемся в интегрировании вдоль луча, использовалась квадратурная формула Боде высокой степени точности $O\left(h^6\right)$. Для вычисления же лучевых преобразований (5) для базисных полей $B_4^s(x,y)$ использовались точные формулы. Приведем формулы для случая, когда центр носителя поля, построенного на основе B-сплайна, находится в начале координат:

$$[\mathcal{P}B_4^s](\alpha,\beta) = K(\alpha,\beta)\sum_{i,j=1}^{6} C_{ij}\chi_{ij}(\alpha,\beta), \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
K(\alpha,\beta) &= -\frac{1}{7!h^8\cos^5(\alpha+\beta)\sin^5(\alpha+\beta)};\\
C_{ij} &= (-1)^{i+j}C_5^{i-1}C_5^{j-1};\\
\chi_{ij}(\alpha,\beta) &= \begin{cases}(p_{ij}(\alpha,\beta)-p)^7, & p_{ij}(\alpha,\beta)-p>0,\\ 0, & p_{ij}(\alpha,\beta)-p\leqslant 0;\end{cases}\\
p_{ij}(\alpha,\beta) &= h((7/2-i)\sin(\alpha+\beta)-(7/2-j)\cos(\alpha+\beta)).
\end{aligned}$$

Для перехода к общему случаю нужно лишь произвести сдвиг в нужную точку, используя свойство продольного лучевого преобразования и его связь с преобразованием Радона [11].

4) В качестве дискретного аналога скалярного произведения (1) был выбран следующий вариант,

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k,l=0}^{L-1}[1+(k-L/2)^2+(l-L/2)^2]c_{k,l}(f)\overline{c_{k,l}(g)},$$

который в сочетании с известными свойствами ДПФ [12] позволяет вдвое сократить размер основного массива, в котором размещены элементы матрицы Грама.

5) Для решения полученной системы (11) использован метод ортогонализации Грама-Шмидта.

4. Формулы обращения

В сравнительных экспериментах использовались две формулы обращения, поэтому для различения мы будем называть их “формула с преобразованием Фурье” и “формула без преобразования Фурье”.

Формула с преобразованием Фурье. Пусть для соленоидального поля u известны $[\mathcal{P}u](s,\gamma)$, для всех $s\in[-1,1],\ \gamma\in[0,2\pi)$. Если луч с направляющим вектором ξ проходит через точку $x=(x_1,x_2)$, тогда $s=-x_1\cos\gamma+x_2\sin\gamma$ и $[\mathcal{P}u](s,\gamma)=[\mathcal{P}u](x,\gamma)$. Формула обращения для произвольной валентности соленоидального поля и размерности пространства была получена в [9]. В нашем

случае ее удалось упростить

$$u_{11}(x) = \frac{1}{4\pi}(-\Delta)^{1/2}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\gamma\mathcal{P}u(x,\gamma)d\gamma,$$

$$u_{12}(x) = \frac{1}{4\pi}(-\Delta)^{1/2}\int\limits_0^{2\pi}\cos\gamma\sin\gamma\mathcal{P}u(x,\gamma)d\gamma,$$

$$u_{22}(x) = \frac{1}{4\pi}(-\Delta)^{1/2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\gamma\mathcal{P}u(x,\gamma)d\gamma.$$

Здесь $(-\Delta)^{1/2}$ — псевдодифференциальный оператор со свойством

$$[\widehat{(-\Delta)^{1/2}f}](y) = |y|\widehat{[f]}(y),$$

где $\widehat{[\cdot]}$ — применение преобразования Фурье.

Кратко опишем дискретизацию алгоритма с применением этой формулы обращения.

1) Дискретизация значений $[\mathcal{P}u](s,\gamma)$ продольных лучевых преобразований восстанавливаемого 2-тензорного поля по s,γ. В численных экспериментах использованы дискретизации 64×64, 128×128 и 256×256 по s,γ.

2) Дискретизация значений

$$u'_{11}(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\gamma\mathcal{P}u(x,\gamma)d\gamma, \qquad u'_{12}(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\gamma\sin\gamma\mathcal{P}u(x,\gamma)d\gamma,$$

$$u'_{22}(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\gamma\mathcal{P}u(x,\gamma)d\gamma$$

по x_1,x_2 согласованное с процедурой БПФ. Интегрирование по γ проводилось численно. В численных экспериментах использовалась дискретизация 64×64 по x_1,x_2. При дискретизациях больше 64×64 точность восстановления хуже.

3) Нахождение $\widehat{[u]}(y) = |y|\widehat{[u']}(y)$ путем применения БПФ.

4) Применяем обратное БПФ и получаем аппроксимацию u.

Формула без преобразования Фурье. Пусть для соленоидального поля $u = (u_{11},u_{12},u_{22}) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)$ известны $[\mathcal{P}u](s,\gamma)$, для всех $s\in[-1,1]$, $\gamma\in[0,2\pi)$, тогда формула для восстановления потенциала ψ следующая

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\mathcal{P}u](s-x_1\sin\gamma+x_2\cos\gamma,\gamma)\ln|s|\,ds\,d\gamma.$$

Кратко опишем дискретизацию алгоритма с применением этой формулы обращения.

1) Дискретизация значений $[\mathcal{P}u](s,\gamma)$ продольных лучевых преобразований восстанавливаемого 2-тензорного поля по s,γ. В численных экспериментах использованы дискретизации 64×64, 128×128 и 256×256 по s,γ.

2) Дискретизация значений аппроксимации для потенциала ψ по x_1, x_2. Интегрирование по γ и по s проводилось численно. В численных экспериментах использовалась дискретизация 64×64 по x_1, x_2.

3) Получение аппроксимации искомого поля u с использованием численного дифференцирования.

5. Численные эксперименты

В данном разделе приводятся описания и результаты численных экспериментов, направленных на сравнение точности восстановления модельного поля по его известным продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль прямых, для алгоритма с использованием МНК (для краткости будем его называть "алгоритм №1"), алгоритма основанного на использовании формулы обращения с использованием преобразования Фурье (алгоритм №2) и алгоритма основанного на использовании формулы обращения без использования преобразования Фурье (алгоритм №3). Относительная погрешность реконструкции восстанавливаемого поля u (в процентах) вычислялась в норме $L_2(S^2(B))$. В качестве модельных полей выбирались разрывные поля, с разрывной первой производной и бесконечно дифференцируемые. Пустая клетка в таблицах указывает на то, что при данных условиях восстановить тестовое поле не удалось.

5.1 В первом эксперименте восстанавливалось разрывное соленоидальное поле с потенциалом

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x^2y^2(0.49 - x^2 - y^2)^2, & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant 0.49, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таблице 1 указана относительная погрешность восстановления данного поля каждым из предлагаемых алгоритмов.

Таблица 1.

алгоритм \ α или γ	64	128	256
алгоритм №1	75.14	42.05	29.2
алгоритм №2	49.81	35.43	31.89
алгоритм №3	91.16	47.08	38.14

Из таблицы 1 видно, что относительная ошибка восстановления уменьшается с ростом дискретизации по α и γ для всех алгоритмов, но ни один из алгоритмов не показал хорошей точности восстановления разрывного поля.

5.2 В следующем эксперименте восстанавливалось соленоидальное поле с разрывной производной и с потенциалом

$$\psi(x,y) = \begin{cases} (0.49 - x^2 - y^2)^3, & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant 0.49, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В таблице 2 указана относительная погрешность восстановления данного поля каждым из предлагаемых алгоритмов.

Таблица 2.

алгоритм \ α или γ	64	128	256
алгоритм №1	9.79	2.31	0.78
алгоритм №2	21.83	8.32	3.39
алгоритм №3		62.37	24.68

Из таблицы 2 видно, что, как и в предыдущем эксперименте, относительная ошибка восстановления уменьшается с ростом дискретизации по α и γ для всех алгоритмов. Алгоритм №1 показал лучшую точность восстановления при дискретизации 256 по α. На рисунке 1 изображены в строках компоненты искомого поля (рис. 1а) и его аппроксимации с помощью алгоритмов №1 (рис. 1б), №2 (рис. 1в) и №3 (рис. 1г) при дискретизации 256 по α и γ.

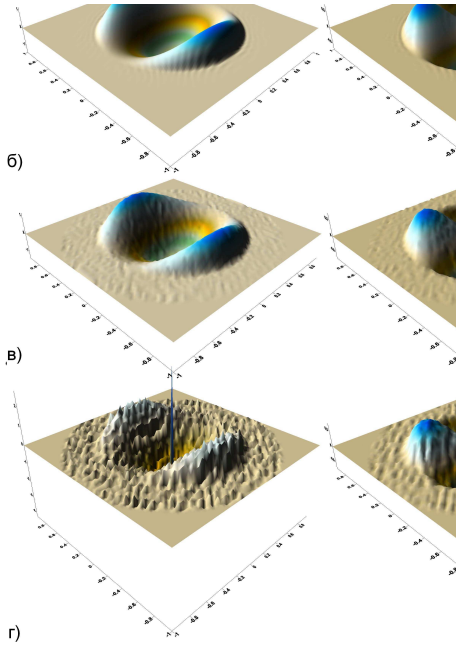


Рис. 1. Компоненты искомого поля (а) и его аппроксимации с помощью алгоритмов №1 (б), №2 (в) и №3 (г).

5.3 В следующем эксперименте восстанавливалось бесконечно дифференцируемое соленоидальное поле с потенциалом

$$\psi(x, y) = \exp(-24(x^2 + y^2)).$$

В таблице 3 указана относительная погрешность восстановления данного поля каждым из предлагаемых алгоритмов.

Таблица 3.

алгоритм \ α или γ	64	128	256
алгоритм №1	4.26	0.39	0.03
алгоритм №2	33	12.6	4.52
алгоритм №3		58.83	23.58

Из таблицы 3 видно, что, как и в предыдущих экспериментах, относительная ошибка восстановления уменьшается с ростом дискретизации по α и γ для всех алгоритмов. Алгоритм №1 показал практически абсолютную точность при дискретизации 256 по α.

6. Заключительные выводы

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1) Показано преимущество алгоритма с использованием МНК перед алгоритмами основанными на формулах обращения по точности восстановления для непрерывных полей (при малых дискретизациях алгоритм восстановления на основе формулы без преобразования Фурье даже расходится).

2) При использовании всех алгоритмов, с увеличением дискретизации по α или γ относительная ошибка восстановления уменьшается.

3) При увеличении степени гладкости восстанавливаемого поля относительная ошибка восстановления уменьшается. Наибольшая ошибка появляется при восстановлении разрывных полей, что вполне объяснимо.

Список литературы

[1] E. Yu. Derevtsov, A. G. Kleshchev, V. A. Sharafutdinov, *Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **7**:1 (1999), 83–103.

[2] Е. Ю. Деревцов, И. Е. Светов, Ю. С. Волков *Использование B-сплайнов в задаче эмиссионной 2D-томографии в рефрагирующей среде*, Сибирский журнал индустриальной математики, **11**:3(35) (2008), 45-–60.

[3] Е. Ю. Деревцов, И. Г. Кашина, *Приближенное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов*, Препринт N 74, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2000.

[4] E. Yu. Derevtsov, I. E. Svetov, Yu. S. Volkov and T. Schuster, *Numerical B-spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorbtion and refraction*, Proceedings 2008 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08, Novosibirsk Scientific Center, Novosibirsk, Russia, July 21–25, 2008, 212–217.

[5] Е.Ю. Деревцов, И.Г. Кашина, *Приближенное решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов*, Сибирский журнал индустриальной математики, **5**:1(9) (2002), 39-–62.

[6] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн функций*, М.: Наука. 1980.

[7] И.Е. Светов, А.П. Полякова, *Восстановление 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их лучевым преобразованиям на основе МНК с использованием B-сплайнов*, Сиб. Ж. Вычислительной матем., Новосибирск, Россия. **13**:2 (2010), 183–199.

[8] Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии*, М:, Мир, 1990.

[9] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, Utrecht: VSP, 1994.

[10] E. Yu. Derevtsov, R. Dietz, A. K. Louis, T. Schuster, *Influence of refraction to the accuracy of a solution for the 2D-emission tomography problem*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **8**:2 (2000), 161–191.

[11] S. R. Deans, *The Radon Transform And Some Of Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[12] *Статистические методы для ЭВМ / Под ред. К. Энслейна, Э. Рэлстона, Г. С. Уилфа*, М.: Наука, 1986.

Иван Евгеньевич Светов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: svetovie@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.150–С.162 (2010)

УДК 519.63

УСТОЙЧИВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Э.П. ШУРИНА М.И. ЭПОВ О.В. НЕЧАЕВ

Abstract. Computational schemes for solving three-dimensional Maxwell equation in frequency domain are discussed in the aerticle. We demonstrate the efficiency of our approach on the test problem with jumps in the conductivity. The results of numerical modeling of VIKIZ probes in boreholes are given.

Keywords: Maxwell equation, vector finite elements method, VIKIZ probes.

1. Введение

Вычислительные аспекты электромагнетизма определяются областью приложений. Для задач геоэлектрики основными характеристиками являются: типы источников возбуждения электромагнитного поля, например, индукционные, гальванические; геометрически разномасштабные составные области с контрастными физическими свойствами в подобластях, с криволинейными межфрагментарными границами. При гармонической зависимости от времени система уравнений Максвелла имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} + \vec{J}_0; \tag{2}$$

© 2010 Шурина Э.П, Эпов М.И., Нечаев О.В.
Работа поддержана РФФИ (грант 09-05-00702).
Поступила 16 февраля 2010 г.

$$\operatorname{div} \mu\vec{H} = 0; \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \varepsilon\vec{E} = \rho; \tag{4}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – комплексные векторные функции (напряженность электрического и магнитного поля); ρ – плотность заряда; $\vec{J_0}$ – плотность стороннего тока.

Если от (2) взять дивергенцию,а (4) продифференцировать по времени, то мы получим уравнение сохранения заряда

$$\operatorname{div} (\vec{J_0} + \sigma\vec{E}) = -i\omega\rho, \tag{5}$$

являющиеся необходимым условием для существования решения системы уравнений Максвелла.

От системы уравнений первого порядка (1)–(4) можно перейти к уравнению второго порядка для векторных комплексных функций $\vec{E}$ или $\vec{H}$. Для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ — это векторное уравнение Гельмгольца

$$\operatorname{rot}\mu^{-1}\operatorname{rot} \vec{E} + k^2\vec{E} = -i\omega\vec{J_0}, \tag{6}$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$.

Область моделирования Ω для одной из задач геоэлектрики —- электромагнитный каротаж -— состоит из нескольких подобластей: скважина, заполненная буровой жидкостью; зонд, содержащий генераторные и измерительные катушки; околоскваженное пространство, включающее пласты, пропластки [1], т.е. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$. Область Ω ограничена, ее граница $\partial\Omega$ липшиц-непрерывна, на границе области моделирования заданы условия

$$\vec{E} \times \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Каждая из подобластей Ω_i имеет различные свойства, а именно: диэлектрическую проницаемость ε; электрическую проводимость σ; магнитную проницаемость μ. Следовательно, на границах Γ_{ij}, разделяющих подобласти Ω_i и Ω_j, должны выполняться условия непрерывности напряженности электрического поля $\vec{E}$:

$$[\vec{n} \times \vec{E}]_{\Gamma_{ij}} = 0; \tag{8}$$

$$[\vec{n} \cdot (\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E}]_{\Gamma_{ij}} = 0. \tag{9}$$

Кроме того, условие существования решения (5) системы уравнений Максвелла должно выполняться для векторного уравнения Гельмгольца (6). При индукционном возбуждении электромагнитного поля плотность стороннего тока, ток в катушке, удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{J_0} = 0. \tag{10}$$

Следовательно, для этого класса задач уравнение сохранения заряда (5) – условие разрешимости векторного уравнения Гельмгольца (6) имеет вид

$$\operatorname{div} (\sigma\vec{E}) + i\omega\rho = 0. \tag{11}$$

Подставив (4) в (11), получим

$$\operatorname{div} ((\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E}) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) – это закон сохранения заряда в областях, где частота электромагнитного поля и электрические характеристики среды таковы, что токи

проводимости и смещения практически соизмеримы. В высокочастотном индукционном каротаже диапазон рабочих частот от 1 до 14 МГц, что приводит к необходимости корректного выполнения условия (12). Особенности решения уравнения Гельмгольца (6) связаны с ядром rot – оператора, условиями непрерывности тангенциальных компонент поля $\vec{E}$ (8) и выполнением условия (9) – скачка нормальных компонент поля $\vec{E}$ на межфрагментарных границах, обеспечивающего выполнения закона сохранения заряда (12) [5].

Дополнительным и обязательным условием разрешимости и устойчивости дискретного аналога задачи (6), (7), (8), (9) является максимально точное выполнение условия совместности ситемы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих задачу (6) -(9).

Современные вычислительные схемы для трехмерных задач электромагнетизма базируются на векторном методе конечных элементов, активно развивающимся, начиная с пионерских работ A. Bossavit [3], G.K. Nedelee'c [6, 7]. R.Hiptmair [8, 5], D. Arnold [2], P. Monk [4] и д.р. В этих работах впервые показано и обосновано использование конечномерных аналогов дифференциальных комплексов De Rham'a для построения устойчивых и точных численных решений уравнений Максвелла. В [10] рассматриваются векторные иерархические базисные функции различных порядков, обеспечивающие непрерывность тангенциальных компонент поля на межэлементных границах для тетраэдральных конечных элементов.

В данной работе рассматриваются результаты численного моделирования трехмерных электромагнитных полей в частотной области для задач высокочастотного индукционного каротажа векторным методом конечных элементов на неструктурированном тетраэдральном разбиении с использованием иерархических векторных базисных функций полных порядков.

2. Векторная вариационная постановка

Пусть Ω трехмерная, возможно неоднородная по физическим свойствам область с липщицнепрерывной границей $\partial\Omega$. Введем пространства [6, 7]

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \{\phi \in \mathrm{L}^2(\Omega) : grad\,\phi \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^3, \phi|_{\partial\Omega} = 0\}$$
$$\mathrm{H}(\mathrm{rot};\Omega) = \{\vec{v} \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^3 : \mathrm{rot}\,\vec{v} \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^3\},$$
$$\mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega) = \{\vec{v} \in \mathrm{H}(\mathrm{rot};\Omega) : \vec{v} \times \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\mathrm{rot},\Omega} = \int_\Omega \vec{u} \cdot \vec{u}^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \mathrm{rot}\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{u}^* \mathrm{d}\Omega.$$

Определим скалярное произведение

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \vec{u} \cdot \vec{v}^* \mathrm{d}\Omega.$$

Для задачи (6),(7) сформулируем следующую вариационную постановку[5] *Для* $\vec{J_0} \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^3$ *найти* $\vec{E} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)$ *такое, что для* $\forall \vec{v} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)$

$$(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}, \mathrm{rot}\,\vec{v}) + (k^2\vec{E}, \vec{v}) = -i(\omega\vec{J_0}, \vec{v}). \tag{13}$$

Для введенного пространства имеет место следующее свойство вложения

$$grad\,\phi \in \mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega),\ \forall\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega). \tag{14}$$

Вариационная постановка (13) выполняется для всех $\vec{v} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{rot}, \Omega)$. Согласно (14) возьмем $\vec{v} = grad\,\phi$, $\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, и тогда (13) имеет вид

$$(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\vec{E}, \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi) + (k^2\vec{E}, grad\phi) = -i(\omega\vec{J}_0, grad\phi);\ \ \forall\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Учитывая (10) и свойство $\mathrm{r}ot\,grad\,\phi = 0$, получим

$$(\,(\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\vec{E}, grad\,\phi) = 0;\ \ \forall\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega, \tag{15}$$

$$(\,(\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\vec{E}, grad\,\phi) = \int_\Omega (\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\vec{E}\cdot grad\,\phi \mathrm{d}\Omega,$$

$$\int_\Omega (\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\vec{E}\cdot grad\,\phi \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathrm{d}iv\,[(\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\vec{E}]\,\phi \mathrm{d}\Omega. \tag{16}$$

Из (16) следует, что уравнение (15) является вариационным аналогом закона сохранения (12). Следовательно, решение вариационной задачи (13) удовлетворяет закону сохранения заряда (12) в слабом смысле.

3. Дискретный аналог вариационной задачи

Традиционно базисные функции, образующие пространство $\mathrm{H}^h(\mathrm{rot};\Omega)$ делят на два типа. Первый тип базисных функций был введен в [6], а второй в [7]. Согласно (14) часть пространства $\mathrm{H}^h(\mathrm{rot};\Omega)$ состоит из функций, являющихся градиентами скалярных функций. Если для определения базиса порядка p используют скалярные функции порядка не выше p, то результирующий базис является базисом первого типа, а если скалярные функции имеют порядок не выше p+1, то это базис второго типа. Таким образом, базис второго типа можно получить из базиса первого типа, пополнив его базисными функциями являющимися градиентами скалярных функций порядка p+1. Базис второго типа p-го порядка на одном элементе точно аппроксимирует векторную функцию p-го порядка, а базис первого типа этим свойством не обладает. Для аппроксимации электрического поля будут использоваться базисные функции второго типа.

Для построения дискретного аналога вариационной задачи будем аппроксимировать элементы пространства $\mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)$ элементами дискретного подпространства ${\mathrm{H}_0}^h(\mathrm{rot};\Omega)$, в качестве базисных функций которого возьмем векторные элементы с первого по шестой порядок на тетраэдральной сетке [10].

Например, локальные базисные функции второго порядка имеют вид

$$
\begin{aligned}
\vec{N}_1 &= \lambda_1\nabla\lambda_2 - \lambda_2\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_2 &= \lambda_1\nabla\lambda_3 - \lambda_3\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_3 &= \lambda_1\nabla\lambda_4 - \lambda_4\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_4 &= \lambda_2\nabla\lambda_3 - \lambda_3\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_5 &= \lambda_4\nabla\lambda_2 - \lambda_2\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_6 &= \lambda_3\nabla\lambda_4 - \lambda_4\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_7 &= \lambda_1\nabla\lambda_2 + \lambda_2\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_8 &= \lambda_1\nabla\lambda_3 + \lambda_3\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_9 &= \lambda_1\nabla\lambda_4 + \lambda_4\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{10} &= \lambda_2\nabla\lambda_3 + \lambda_3\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{11} &= \lambda_4\nabla\lambda_2 + \lambda_2\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{12} &= \lambda_3\nabla\lambda_4 + \lambda_4\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{13} &= \lambda_2\lambda_3\nabla\lambda_1 + \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{14} &= \lambda_2\lambda_3\nabla\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{15} &= \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_1 + \lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{16} &= \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{17} &= \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_2 - 2\lambda_3\lambda_2\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{18} &= \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_2 + \lambda_3\lambda_2\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{19} &= \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_1 + \lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{20} &= \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{21} &= \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{22} &= \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_2 + \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{23} &= \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{24} &= \lambda_2\lambda_3\nabla\lambda_4 + \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{25} &= \lambda_2(2\lambda_1 - \lambda_2)\nabla\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_2 - \lambda_1)\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{26} &= \lambda_3(2\lambda_1 - \lambda_3)\nabla\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_3 - \lambda_1)\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{27} &= \lambda_4(2\lambda_1 - \lambda_4)\nabla\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_4 - \lambda_1)\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{28} &= \lambda_3(2\lambda_2 - \lambda_3)\nabla\lambda_2 - \lambda_2(2\lambda_3 - \lambda_2)\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{29} &= \lambda_2(2\lambda_4 - \lambda_2)\nabla\lambda_4 - \lambda_4(2\lambda_2 - \lambda_4)\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{30} &= \lambda_4(2\lambda_3 - \lambda_4)\nabla\lambda_3 - \lambda_3(2\lambda_4 - \lambda_3)\nabla\lambda_4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{N}_{20} &= \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{21} &= \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{22} &= \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_2 + \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{23} &= \lambda_1\lambda_3\nabla\lambda_4 + \lambda_1\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_1,\\
\vec{N}_{24} &= \lambda_2\lambda_3\nabla\lambda_4 + \lambda_2\lambda_4\nabla\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{25} &= \lambda_2(2\lambda_1 - \lambda_2)\nabla\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_2 - \lambda_1)\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{26} &= \lambda_3(2\lambda_1 - \lambda_3)\nabla\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_3 - \lambda_1)\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{27} &= \lambda_4(2\lambda_1 - \lambda_4)\nabla\lambda_1 - \lambda_1(2\lambda_4 - \lambda_1)\nabla\lambda_4,\\
\vec{N}_{28} &= \lambda_3(2\lambda_2 - \lambda_3)\nabla\lambda_2 - \lambda_2(2\lambda_3 - \lambda_2)\nabla\lambda_3,\\
\vec{N}_{29} &= \lambda_2(2\lambda_4 - \lambda_2)\nabla\lambda_4 - \lambda_4(2\lambda_2 - \lambda_4)\nabla\lambda_2,\\
\vec{N}_{30} &= \lambda_4(2\lambda_3 - \lambda_4)\nabla\lambda_3 - \lambda_3(2\lambda_4 - \lambda_3)\nabla\lambda_4.
\end{aligned}
$$

Для улучшения спектральных свойств матриц, получаемых после дискретизации исходной задачи, можно ортогонализовать базисные функции. Полная ортогонализация привела бы к резкому увеличению количества ненулевых элементов матрицы. В [10] предлагается проводить частичную ортогонализацию, т.е. разбить базисные функции на множество групп, а затем выполнить ортогонализацию внутри каждой группы.

Векторные базисные функции высоких порядков могут быть ассоциированы с ребром, гранью или с самим тетраэдром. Это зависит от того, как определяется степень свободы конкретной базисной функции: интегралом вдоль ребра, интегралом по грани или интегралом по всему геометрическому элементу соответственно. Поскольку одно ребро, грань или элемент для функций высоких порядков ассоциированы с несколькими функциями, то естественным было бы использовать это свойство в качестве разделителя на группы.

В [10] для ортогонализации используется стандартное скалярное произведение, в данной работе базисные функции внутри одной группы ортогонализуются относительно билинейной формы, которая используется для построения вариационной постановки.

Введем дискретный аналог вариационной задачи

Дискретная вариационная задача. *Для* $\vec{J}_0 \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^3$ *найти* $\vec{E}^h \in \mathrm{H}_0^h(\mathrm{rot};\Omega)$, *такое что* $\forall \vec{v}^h \in \mathrm{H}_0^h(\mathrm{rot};\Omega)$ *выполняется*

$$(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{r}ot\,\vec{E}^h, \mathrm{r}ot\,\vec{v}^h) + (k^2\vec{E}^h, \vec{v}^h) = -i(\omega\vec{J}_0, \vec{v}^h).$$

Поскольку для построенных дискретных подпространств [10] имеет место свойство включения

$$grad\,\phi^h \in {\mathrm{H}_0}^h(\mathrm{rot};\Omega),\ \forall\phi^h \in {\mathrm{H}_0^1}^h(\Omega),$$

дискретный аналог напряженности электрического поля $\vec{E}^h$ будет удовлетворять закону сохранения заряда в слабом смысле

$$(\,(\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\vec{E}^h, \mathrm{g}rad\,\phi^h) = 0;\ \ \forall\phi^h \in {\mathrm{H}^1_0}^h(\Omega).$$

Обозначим через $\vec{w}_i^h$ – базисные функции пространства $\mathrm{H}_0^h(\mathrm{rot};\Omega)$.

Раскладывая векторы напряженности электрического поля $\vec{E}^h$ по базису дискретного подпространства $\mathrm{H}_0^h(\mathrm{rot};\Omega)$ и выбирая в качестве функции $\vec{v}^h$ базисные функции $\vec{w}_i^h$, от дискретной вариационной задачи перейдем к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$[(D+B) + iC]\,x = f, \tag{17}$$

где вектор x – это вектор весов в разложении по базису $\vec{E}^h$, а элементы матриц A, B, C и вектор правой части f определяются соотношениями

$$[D]_{i,j} = (\frac{1}{\mu}\,\mathrm{r}ot\,\vec{w}_i^h, \mathrm{r}ot\,\vec{w}_j^h),$$

$$[B]_{i,j} = -(\varepsilon\omega^2\vec{w}_i^h, \vec{w}_j^h),$$

$$[C]_{i,j} = (\sigma\omega\vec{w}_i^h, \vec{w}_j^h),$$

$$[f]_i = (\omega\vec{J}_0, \vec{w}_i^h),$$

4. Мультипликативный алгоритм

Пусть даны два подпространства V_1 и V_2 пространства R^n такие, что

$$\mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2 = R^n, \quad \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 \neq 0$$

Введем матрицы P_1 и P_2, столбцы которых образуют базисы подпространств V_1 и V_2 соответственно. Для последовательного уточнения начального приближения элементами подпространств V_1 и V_2 можно сформулировать следующий итерационный алгоритм[9] решения СЛАУ (17)

Мультипликативный алгоритм Шварца:
$r_0 = b - Ax_0$;
Для $i = 1, 2, ...$
$g_1 = P_1^T r_{i-1}$;
$z_1 = (P_1^T A P_1)^{-1} g_1$ или $z_1 = S_1((P_1^T A P_1), g_1, \gamma_1)$;
$x_{i-1/2} = x_{i-1} + P_1 z_1$;
$r_{i-1/2} = b - Ax_{i-1/2}$;
$g_2 = P_2^T r_{i-1/2}$;
$z_2 = (P_2^T A P_2)^{-1} g_2$ или $z_2 = S_2((P_2^T A P_2), g_2, \gamma_2)$;
$x_i = x_{i-1/2} + P_2 z_2$;
$r_i = b - Ax_i$;
Если x_i удовлетворяет необходимой точности, то закончить;
Увеличить i.

где $x_i = S(A, b, \gamma)$ – итерационный решатель для СЛАУ $Ax = b$, а γ определяет во сколько раз норма невязки приближенного решения x_i меньше нормы правой части (начальное приближение $x_0 = 0$). В качестве данного решателя будем использовать symmetric QMR [12]. Далее будем полагать, что $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_2 = 0.1$, другой вариант выбора значений этих коэффициентов изложен в [11].

Если матрица A является положительно определенной, данный алгоритм сходится [9], но при наличии в спектре матрицы A отрицательных и комплексных собственных значений нельзя гарантировать как сходимость, так и расходимость алгоритма.

Введем следующие обозначения:

(1) $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2)$ – дискретное пространство образованное базисом второго типа
(2) $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1)$ – дискретное пространство образованное базисом первого типа
(3) $\mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2) = \{\vec{u} \in \mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2);\ \nabla \times \vec{u} = 0\}$ - ядро роторного оператора в пространстве $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2)$,
(4) $\mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1) = \{\vec{u} \in \mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1);\ \nabla \times \vec{u} = 0\}$ - ядро роторного оператора в пространстве $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1)$

Необходимо отметить, что ядро роторного оператора состоит из функций, которые являются градиентами скалярных функций.

Согласно способу построения пространств $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2)$ и $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1)$ [6, 7] имеют место следующие соотношения:

$$\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1) \cup \mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2) = \mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2)$$

$$\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1) \cap \mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 2) = \mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,; \Omega; 1)$$

Пусть $\mathrm{V}_2 = \mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;2)$ и $\mathrm{V}_1 = H^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;1)$, тогда мультипликативный алгоритм Шварца можно использовать для решения СЛАУ (17). Из определения подпространств следует, что матрицы $(P_2^T A P_2)$ и $(P_1^T A P_1)$ будут соответствовать дискретным вариационным задачам, сформулированным относительно векторного уравнения Гельмгольца в пространствах $\mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;2)$ и $H^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;1)$ соответственно. Таким образом, для получения данных матриц можно использовать конечноэлементную технологию.

Поскольку $\mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;1) \subset \mathrm{N}^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;2)$ предложенный мультипликативный алгоритм будет играть роль сглаживателя, предложенного в [8] для пространства $\mathrm{H}^h(\mathrm{r}ot\,;\Omega;1)$, что в свою очередь уменьшит временные затраты при работе $S_1((P_1^T A P_1), g_1, \gamma_1)$.

5. Результаты численного тестирования

Численное исследование предложенного алгоритма выполнялось на задаче (6)-(7) моделирования гармонического электрического поля в области $[-2.5, 2.5]^3$, состоящей из двух подобластей с различными значениями удельной проводимости $\sigma_1 = 1$ S/m и $\sigma_2 = 10$ S/m (рис. 1). В подобласти 1 расположена генераторная катушка, в которой задан ток силой 1 А, с частотой 1МГц. Тестирование проводилось на компьютере с процессором Intel Core 2 Duo E6550.

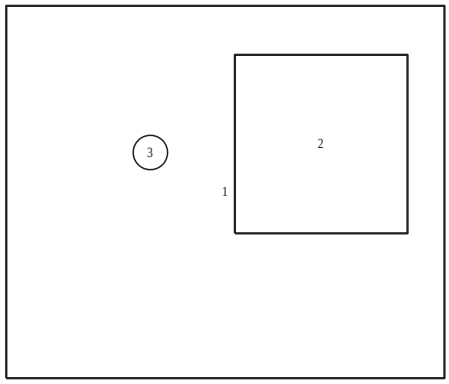


Рис. 1. Расчетная область, вид сверху

В таблице 1 приведены результаты моделирования, полученные при помощи базисных функций различных порядков. Расчетная тетраэдральная сетка для каждого базиса подбиралась так, чтобы условие (9) – скачок нормальной компоненты поля на границе разрыва свойств материала, выполнялось с относительной точностью порядка 1%, что является некоторым критерием точности решения задачи. Условием выхода из мультипликативного алгоритма было уменьшение нормы невязки в 10^7 раз.

На (рис. 2) изображены E_x и E_y компоненты амплитуды электрического поля вдоль прямой параллельной оси oy и пересекающей область 2. E_x компонента поля(нормальная относительно границы раздела сред) терпит разрыв при y=-1 и y=1, а E_y компонента поля(тангенциальная относительно границы раздела сред) остается непрерывной.

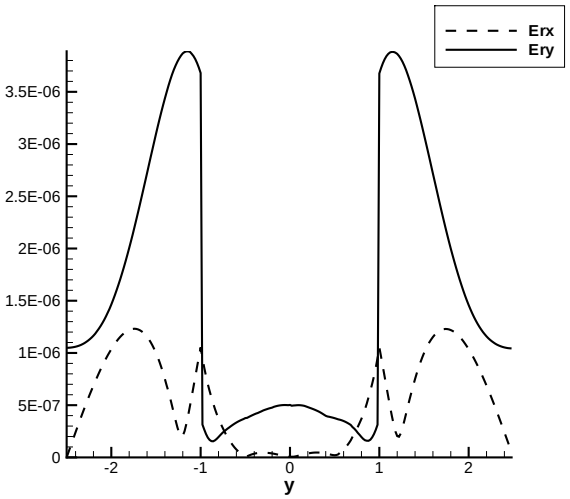


Рис. 2. E_x и E_y компоненты амплитуды электрического поля

P	2	3	4	5	6
T(c)	384	235	245	268	384
M(Mb)	1351	574	522	391	663
N	38292	5696	2412	593	331

Таблица 1. Результат моделирования. P – порядок базисных функций, T – время в секундах, необходимое для решения СЛАУ, M – размер выделенной памяти в Мегабайтах, N – количество узлов в расчетной сетке (это не размерность СЛАУ)

Из данных, приведенных в таблице 1 следует,что для решения задач с заданной точностью, целесообразно использовать базисные функции высоких порядков, вплоть до шестого. Выбор конкретного порядка зависит от решаемой задачи. Например, для моделирования электромагнитного поля в скважине и околоскважинном пространстве, где в расчетной области присутствуют криволинейные поверхности, для более точного приближения необходима более мелкая сетка. Для того, чтобы не использовать очень мелкую сетку, что приведет к увеличению размерности СЛАУ, при решении реальных задач наиболее приемлемым будут базисные функции третьего порядка.

Для этого геофизического объекта было выполнено численное моделирование: скважина (радиус 0.108 m) заполненная буровой жидкостью с удельной проводимостью 25 S/m, вмещающая среда – пласт с проводимостью 0.002 S/m, диэлектрический зонд (радиус 0.035 m), находящийся в скважине, с генераторной катушкой, полный ток в генераторной катушке 1 A, частота f=14МГц.

На рис. 3 - 5 представлены линии тока в плоскости XY, для различных положений зонда относительно оси скважины. Сечение выполнено на расстоянии 0.5 m от генераторной катушки.

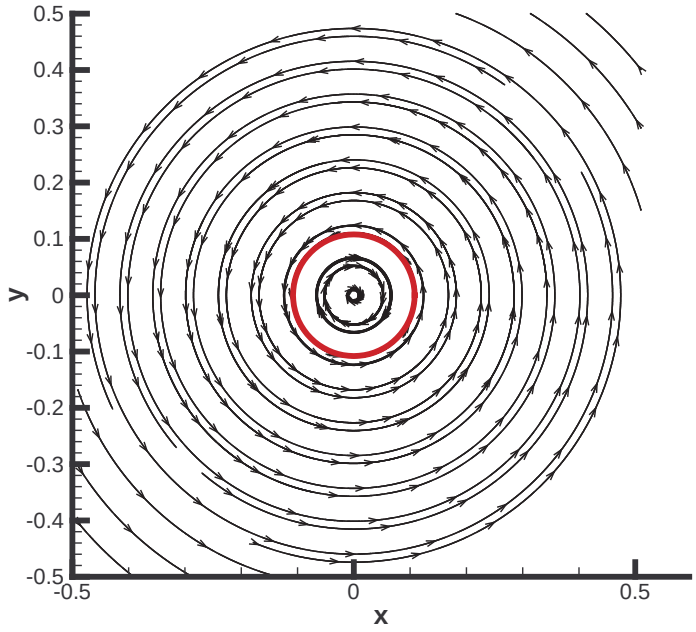


Рис. 3. Линии тока в плоскости XY на расстоянии 0.5m от генераторной катушки. Зонд в центре скважины, красный круг - стенка скважины

Результаты вычислительных экспериментов для тестовых и приближенных к реальным задачах показывают эффективность разработанных вычислительных схем и их программной реализации.

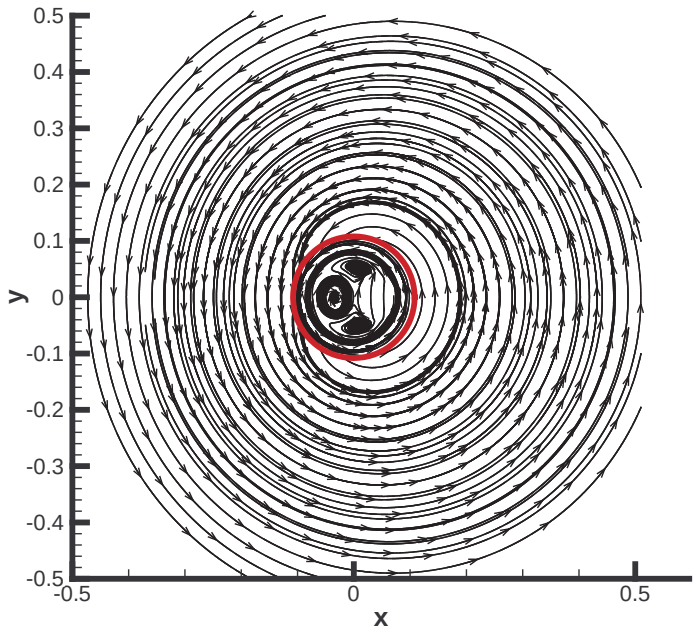


Рис. 4. Линии тока в плоскости XY на расстоянии 0.5m от генераторной катушки. Зонд смещен относительно центра скважины, красный круг - стенка скважины

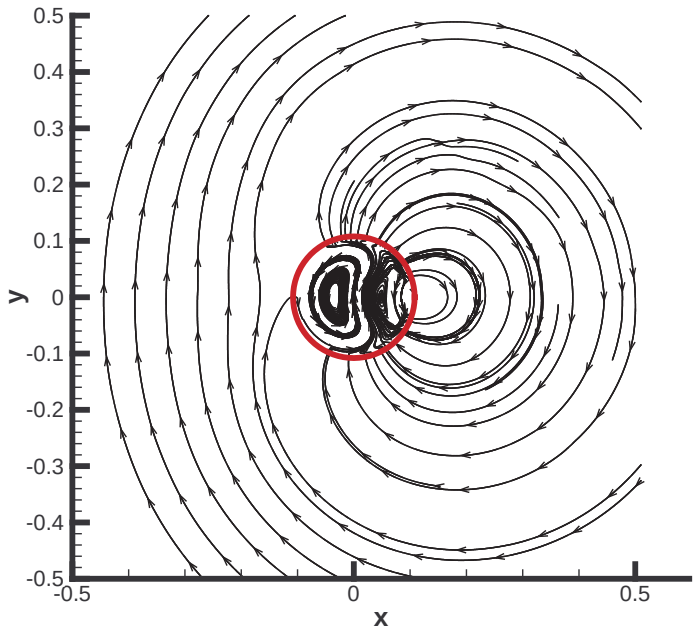


Рис. 5. Линии тока в плоскости XY на расстоянии 0.5m от генераторной катушки. Зонд лежит на стенке скважины, красный круг - стенка скважины

Список литературы

[1] *Технология исследования нефтегазовых скважин на основе ВИКИЗ. Методическое руководство*, ред. М. И. Эпов, Ю. Н. Антоновю.- Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, Издательство СО РАН, 2000, 121с.

[2] Douglas N. Arnold, Richard S. Falk and Ragnar Winther, *Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications*, Acta Numer., **15** (2006), 1–155.

[3] A. Bossavit, *Computational electromagnetism. Variational formulations, complementarity, edge elements, in: Electromagnetism*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1998.

[4] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003.

[5] R. Hiptmair, *Finite elements in computational electromagnetism*, Acta Numerica (2002), 237–339.

[6] J.C. Nedelec, *Mixed Finite Elements in* R^3, Numerische Mathematik, **35** (1980), 315–341.

[7] J.C. Nedelec, *A New Family of Mixed Finite Elements in* R^3, Numerische Mathematik, **50** (1986), 57–81.

[8] R. Hiptmair, *Multigrid methods for Maxwell's equations*, SIAM J. Nymer. Anal., **36**:1 (1998), 204–225.

[9] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company, 1996.

[10] Jon P. Webb, *Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements*, IEEE Transactions on antennas and propagation, **47**:8 (1999).

[11] O.V. Nechaev, E.P. Shurina, M.A. Botchev, *Multilevel iterative solvers for the edge finite element solution of the 3D Maxwell equation*, Computers and Mathematics with Applications, **55** (2008), 2346–2362.

[12] R.W. Freund, N.M. Nachtigal, *Software for simplified Lanczos and QMR algorithms*, Appl. Numer. Math., **19** (1995).

Шурина Элла Петровна
Новосибирский государственный технический университет,
пр. Карла Маркса 20
630092, Новосибирск, Россия
Эпов Михаил Иванович
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 3
630090, Новосибирск, Россия
Нечаев Олег Валентинович
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 3
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: shurina@online.sinor.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.163–С.172 (2010)

УДК 517.983
MSC 49K35

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ: ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. В. Баев

Abstract. The report is devoted to application of the theory of optimal recovery to solve linear inverse problems with a convex balanced set of *a priori* constraints. Last achievements are in use. Here is described a class of conditionally well-posed linear inverse problems for which an optimal solution method is managed to be constructed. Also, here is described a class of ill-posed linear inverse problems for which an optimal regularizing algorithm is managed to be constructed.

Keywords: linear inverse problem, optimal method, optimal algorithm.

1. Введение

Развитие теории и методов решения обратных задач длится уже несколько десятилетий. На данный момент построено множество методов решения как линейных, так и нелинейных задач. В связи с этим на практике часто возникает вопрос, каким методом решать конкретную задачу. Этот вопрос очень актуален для специалистов, решающих конкретные прикладные задачи обработки экспериментальных данных, поскольку методов обработки действительно много, а хочется применять "наилучший". Развитие классификации методов решения обратных задач тоже длится несколько десятилетий. Введено несколько понятий оптимальности/регулярности метода решения, доказаны теоремы

Bayev, Andrey Valeryevich, Numerical algorithms for optimal methods of solving linear inverse problems: application of optimal recovery.

© 2010 Баев А.В.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-01-91150-ГФЕН_а и 08-01-00160-а).
Поступила 16 октября 2009 г.

о свойствах конкретных методов, и даже о свойствах некоторых классов методов.

У подавляющего большинства обратных задач математической физики нарушается такое свойство корректности, как устойчивость решения по отношению к возмущению входных данных. В линейных задачах это приводит к невозможности восстановления решения с конечной погрешностью. Но если для решения удаётся выделить ограничения определённого вида (например, компактное *множество априорных ограничений*), то задачу можно свести к задаче *оптимального восстановления* [15, 7]. Эта методика позволяет решать задачу именно тем методом, который "лучше" всех возможных; тем методом, который обладает минимальной *априорной погрешностью*.

Этот доклад посвящён применению последних достижений теории задач оптимального восстановления для решения линейных обратных задач с выпуклым уравновешенным множеством априорных ограничений. Описан класс условно корректных обратных задач, для которых удалось построить оптимальный метод решения, а также описан класс некорректных обратных задач, для которых удалось построить оптимальный регуляризирующий алгоритм.

2. Постановка задач

Опишем постановки обратной задачи и задачи оптимального восстановления для случая неточных входных данных. Также покажем, как связаны их решения.

Пусть Z и U — действительные линейные пространства, $A : Z \to U$ — линейный оператор. Рассмотрим множество $M \subset Z$ и элемент $\bar{z} \in M$. Обозначим $\bar{u} := A\bar{z}$ и рассмотрим задачу поиска элемента $\bar{z}$ из условий:

$$Az = \bar{u}, \quad z \in M. \tag{1}$$

Для решения конкретных прикладных задач необходимо модифицировать постановку задачи (1). Одной из особенностей практического решения этой задачи является то, что вне зависимости от размерности пространства U об элементе $\bar{u}$ известна лишь конечная информация, и она задана с погрешностью. Допустим, что информация об элементе $\bar{u}$ задаётся набором из m действительных чисел. А именно, пусть известны линейный оператор $Q_m : U \to \mathbb{R}^m$, конечномерный вектор $v \in \mathbb{R}^m$ и выпуклое уравновешенное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, такие что $v - Q_m\bar{u} \in \Omega$ (см. рис. 1). Если Ω является замкнутым шаром радиуса ε с центром в нуле, то последнее включение эквивалентно неравенству $\|v - Q_m\bar{u}\| \leqslant \varepsilon$. Иными словами, m-мерный вектор $Q_m\bar{u}$ известен с точностью ε.

Также будем считать, что вместо оператора A мы умеем точно вычислять лишь линейный оператор $F : Z \to \mathbb{R}^m$, являющийся приближением для оператора $Q_m A$. Пусть в задаче известно выпуклое уравновешенное подмножество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$, такое что

$$\mathcal{O} \supset \Omega + (Q_m A - F)(M). \tag{2}$$

Покажем, что $v - F\bar{z} \in \mathcal{O}$:

$$v - F\bar{z} = v - Q_m A\bar{z} + Q_m A\bar{z} - F\bar{z} =$$

$$= (v - Q_m\bar{u}) + (Q_m A - F)\bar{z} \in \Omega + (Q_m A - F)(M) \subset \mathcal{O}.$$

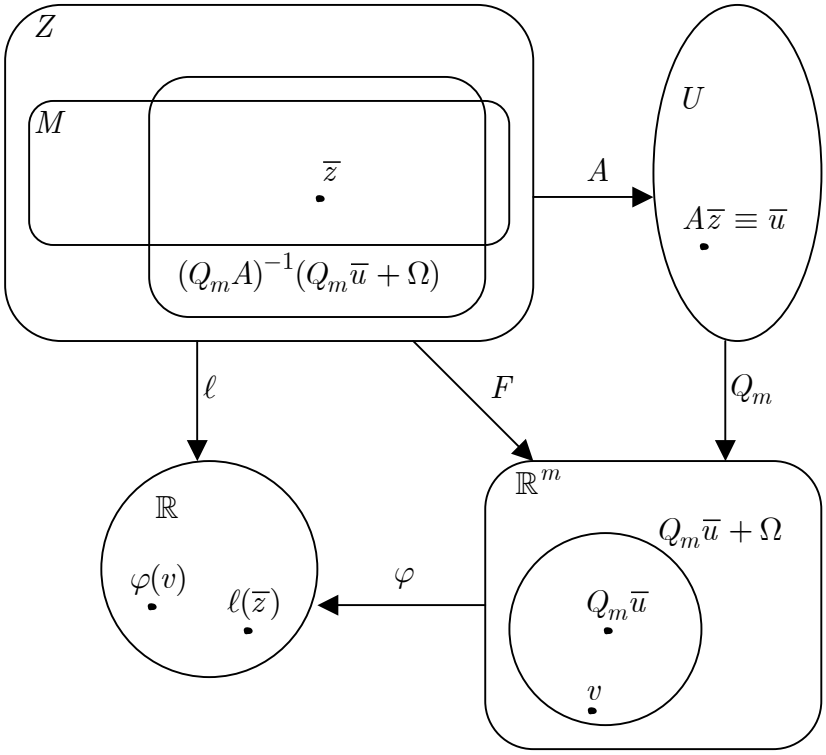


Рис. 1. Схема поиска информации о решении.

Теперь вместо условия $v - Q_m A\bar{z} \in \Omega$ будем использовать условие $v - F\bar{z} \in \mathcal{O}$, поскольку оператор F известен, а оператор $Q_m A$ нет. Это можно интерпретировать следующим образом. Считаем, что оператор $Q_m A$ известен точно и равен F, а правая часть обратной задачи известна с погрешностью, задаваемой уже не множеством Ω, а множеством $\mathcal{O}$. Если множество M содержит нулевой вектор, то $\mathcal{O} \supset \Omega$, и это означает, что погрешность правой части формально увеличилась. Всю информацию о погрешности задания оператора A и правой части $\bar{u}$ объединим в множество $\mathcal{O}$. В работе [1] можно найти пример нахождения множества $\mathcal{O}$ по данным о погрешности входных данных. Далее будем пользоваться обозначением $Y := \mathbb{R}^m$.

Итак, считаем, что в обратной задаче поиска элемента $\bar{z}$ известны M, F, v и $\mathcal{O}$, такие что

$$\bar{z} \in M, \qquad v - F\bar{z} \in \mathcal{O}. \tag{3}$$

Эту постановку обратной задачи будем называть *сэт-постановкой* обратной задачи.

В качестве ответа задачи имеет смысл требовать лишь конечный набор чисел. Разобьём задачу их поиска на несколько задач поиска одного числа, которые сформулируем в виде задачи оптимального восстановления линейного функционала.

Рассмотрим линейный функционал ℓ на пространстве Z. Вместо поиска элемента $\bar{z}$ из условий (3) будем искать приближение для числа $\ell(\bar{z})$. Метод решения такой задачи можно охарактеризовать отображением $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, которое по вектору $v \in Y$ строит приближение для числа $\ell(\bar{z})$. Любое отображение $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ назовём *методом восстановления* функционала ℓ по информации $(M, F, \mathcal{O})$. *Погрешностью* (или *априорной погрешностью*) метода φ называется число

$$\mathcal{E}(\ell, M, F, \mathcal{O}, \varphi) := \sup_{\substack{z \in M,\, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} |\ell(z) - \varphi(y)| .$$

Величина

$$E(\ell, M, F, \mathcal{O}) := \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^Y} \mathcal{E}(\ell, M, F, \mathcal{O}, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а любой $\widehat{\varphi} \in \mathbb{R}^Y$, на котором достигается этот минимум, называется *методом оптимального восстановления*. Если M выпукло и уравновешено, а ℓ и F линейны, то среди методов оптимального восстановления существует линейный метод $\widehat{\varphi}$, т.е. $\widehat{\varphi} \in Y^*$. Для более простого случая этот факт доказывался в работах [17, 4, 16], а для общей постановки задачи подобное утверждение было доказано в [6, 14].

Введём обозначение. Задачи на поиск минимума и экстремалей будем записывать так:

$$f(x) \to \min_x, \quad \mathcal{P}(x).$$

Подобная запись означает, что ищется минимум значения функционала f по аргументу x. На месте выражения $\mathcal{P}(x)$ будут стоять условия, задающие множество изменения аргумента x. Решением такой задачи на экстремум будем считать элемент x, который удовлетворяет условию $\mathcal{P}(x)$ и на котором достигается минимум.

Из сказанного следует, что задачу поиска метода и погрешности оптимального восстановления можно переформулировать так:

$$\sup_{\substack{z \in M,\, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} |\ell(z) - \varphi(y)| \to \min_{\varphi}, \quad \varphi \in Y^*. \tag{4}$$

Эта задача называется задачей *оптимального восстановления функционала ℓ по информации* $(M, F, \mathcal{O})$. Множество M называется *множеством априорных ограничений*, оператор F называется *информационным оператором*, множество $\mathcal{O}$ называется *окрестностью погрешности*. Интерпретация решения такова: приближением для числа $\ell(\bar{z})$ считается число $\widehat{\varphi}(v)$. Тогда погрешностью этого приближения будет число $E(\ell, M, F, \mathcal{O})$. Убедимся в этом:

$$|\ell(\bar{z}) - \widehat{\varphi}(v)| \leqslant \sup_{\substack{z \in M,\, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} |\ell(z) - \widehat{\varphi}(y)| = E(\ell, M, F, \mathcal{O}).$$

Таким образом, мы переформулировали обратную задачу (1) в виде сэт-постановки (3), где учитывается, что оператор и правая часть известны приближённо. А задачу поиска элемента $\bar{z}$ из сэт-постановки мы свели к поиску метода и погрешности оптимального восстановления, т.е. к задаче (4).

Для многих прикладных задач значение минимума в задаче (4) равно $+\infty$, т.е. все методы восстановления $\varphi \in \mathbb{R}^m$ имеют бесконечную априорную погрешность. Это означает, что отсутствует свойство устойчивости решения обратной

задачи. В этом случае можно искать *оптимальный регуляризирующий алгоритм*. Но если оператор F выдаёт достаточно информации (т.е. вектор v достаточно информативен), и множество M достаточно узко, то минимум может быть конечным. В этом случае можно искать метод и погрешность оптимального восстановления.

3. Классы условно корректных задач

До недавнего времени теория оптимального восстановления не имела алгоритмов решения достаточно широкого класса задач вида (4). Методика решения достаточно широкого класса задач была предложена в [10, 7]. Она основана на конечномерной аппроксимации исходной задачи. При этом задача сводится к задаче того же вида (4), где присутствуют только конечномерные объекты. Поскольку решатся задача оптимального восстановления, то переход к конечномерной задаче нужно производить специальным образом, чтобы не потерять оптимального свойства. Опишем схему конечномерной аппроксимации для задачи (4) и сформулируем основную теорему.

Замена пространства Z на некоторый конечномерный аналог может быть представлена в виде действия линейного оператора. Рассмотрим пару линейных пространств Z и $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и пару линейных операторов $P_n : Z \to \mathbb{R}^n$ и $V_n : \mathbb{R}^n \to Z$. Оператор P_n сопоставляет элементу из Z его конечномерный аналог, а оператор V_n по конечномерному вектору строит бесконечномерный вектор пространства Z. Рассмотрение произвольных операторов P_n и V_n является бессмысленным, поэтому введём условия, связывающие эти операторы с другими данными задачи:

$$\exists \varkappa^n \in (\mathbb{R}^n)^* : \quad \ell = \varkappa^n \circ P_n, \tag{5}$$

$$V_n P_n(M) \subset M, \tag{6}$$

$$P_n V_n = \hat{1}_{\mathbb{R}^n}, \tag{7}$$

где $\hat{1}_{\mathbb{R}^n}$ — единичный оператор в $\mathbb{R}^n$. Функционал $\varkappa^n$ будем представлять в виде n-мерного вектора, т.е. будем считать, что $\varkappa^n \in \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в конечномерных пространствах будем обозначать угловыми скобками. Рассматриваемые отображения и множества изображены на рис. 2.

Предположим, что мы умеем вычислять линейный оператор $A_0 : Z \to U$, являющийся приближением для оператора A из задачи (1). Обозначим $B \stackrel{\text{def}}{=} Q_m A_0 V_n$ и $M_n \stackrel{\text{def}}{=} P_n(M)$, т.е. $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $M_n \subset \mathbb{R}^n$. Это конечномерные аналоги оператора F и множества M. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального восстановления функционала на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\sup_{\substack{x \in M_n,\, y \in \mathbb{R}^m: \\ y - Bx \in \mathcal{O}}} |\langle \varkappa^n, x\rangle - \langle \varphi, y\rangle| \to \min_{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Это задача оптимального восстановления функционала $\varkappa^n$ по информации $(M_n, B, \mathcal{O})$. Она является конечномерным аналогом задачи (4).

Сформулируем теорему о связи погрешностей оптимального восстановления для задач в конечномерном и бесконечномерном пространстве. Для этого

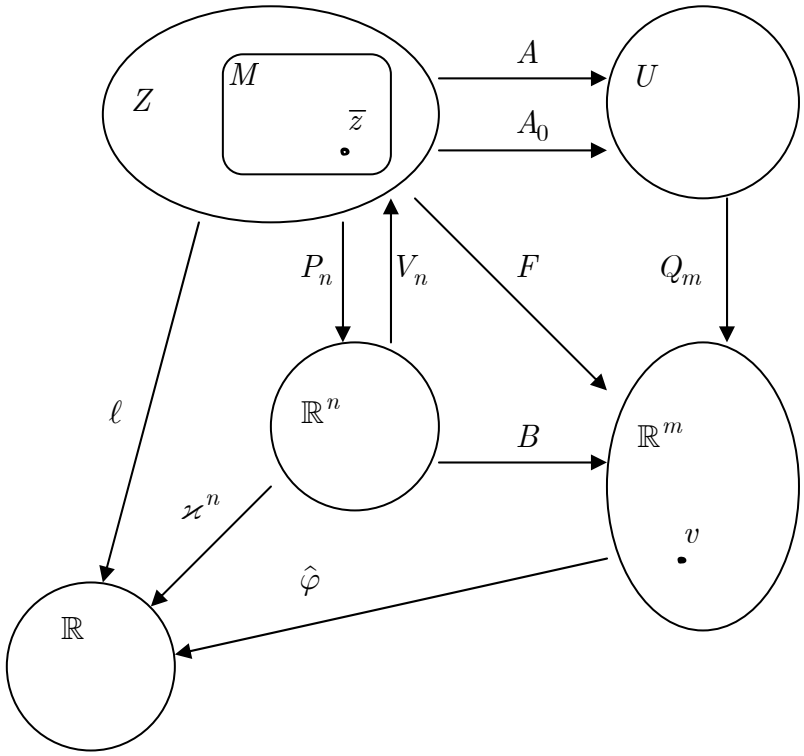


Рис. 2. Схема конечномерной аппроксимации.

надо модифицировать окрестность погрешности. Будем считать, что известен вектор $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий условиям

$$\Delta_j^n \equiv (\Delta^n)_j \geqslant \sup_{z \in M} |(Q_m A_0 (z - V_n P_n z))_j| \quad \forall j \in \{1; \ldots; m\}. \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{O}_0 \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое уравновешенное множество, такое что (ср. с (2))

$$\mathcal{O}_0 \supset \Omega + Q_m(A - A_0)(M);$$

$$\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_0 + \{ y \in \mathbb{R}^m \mid |y_j| \leqslant \Delta_j^n \ \ \forall j \in \{1; \ldots; m\} \}.$$

Множество $\mathcal{O}_0$ называется *невозмущённой* окрестностью погрешности, множество $\mathcal{O}_n$ называется *возмущённой* окрестностью погрешности. Пусть $\widehat{\varphi}_n \in \mathbb{R}^m$ — решение задачи (8) при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$. Введём обозначение для погрешности этого метода:

$$E_n := \mathcal{E}(\varkappa^n, M_n, B, \mathcal{O}_n, \widehat{\varphi}_n) = E(\varkappa^n, M_n, B, \mathcal{O}_n).$$

Рассмотрим невозмущённую бесконечномерную задачу (4) при $F = Q_m A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$. Пусть $\widehat{\varphi} \in \mathbb{R}^m$ — её решение, а $\bar{E}$ и $\bar{E}_n$ — погрешности методов $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}_n$ в этой задаче, т.е.

$$\bar{E} := \mathcal{E}(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0, \widehat{\varphi}) = E(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0),$$
$$\bar{E}_n := \mathcal{E}(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0, \widehat{\varphi}_n).$$

Из результатов работ [10, 7] следует следующая

Теорема 1. *Пусть Z является нормированным пространством, линейный функционал ℓ непрерывен, выпуклое уравновешенное множество M слабо секвенциально компактно в Z, линейный оператор $Q_m A_0$ непрерывен, $\mathcal{O}_0$ замкнуто, выпукло и уравновешено. Рассмотрим последовательность векторов $\{\Delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательности линейных операторов $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие что для любого $n \in \mathbb{N}$ $P_n : Z \to \mathbb{R}^n$, $V_n : \mathbb{R}^n \to Z$, P_n непрерывен, $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$, выполнено (9) и $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta^n = 0$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (5), (6) и (7). Тогда $\bar{E} \leqslant \bar{E}_n \leqslant E_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{E}_n = \bar{E}$.*

Эта теорема означает, что погрешность метода $\widehat{\varphi}_n$ можно сделать сколь угодно близкой к погрешности оптимального восстановления. Это можно достигнуть выбором подходящей конечномерной аппроксимации. Доказанные в литературе [15, 10, 7] теоремы позволяют выбирать аппроксимирующие операторы V_n и P_n так, чтобы ошибки, вносимые конечномерной аппроксимацией, были значительно меньше ошибок, задаваемых невозмущённой окрестностью погрешности. Иными словами, конечномерную аппроксимацию следует выбирать так, чтобы $\mathcal{O}_n \approx \mathcal{O}_0$. Такое правило выбора конечномерной аппроксимации было предложено в [10].

После того, как сформулирован конечномерный аналог задачи оптимального восстановления, остаётся решить эту конечномерную задачу. Алгоритмы для конечномерных задач предложены в [9]. Они применимы для множеств квадратичных (и как частный случай линейных) ограничений вида

$$
\begin{aligned}
M_n &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|G_\sigma x\|^2 \leqslant \rho_\sigma^2 \ \ \forall \sigma \in \Sigma\},\\
\mathcal{O}_n &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid \left\|\hat{G}_\sigma y\right\|^2 \leqslant \hat{\rho}_\sigma^2 \ \ \forall \sigma \in \hat{\Sigma}\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где Σ — конечное множество индексов; при любом $\sigma \in \Sigma$ $\rho_\sigma > 0$, $G_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d_\sigma}$ — линейный оператор, $d_\sigma \in \mathbb{N}$. Аналогичным определениям удовлетворяют объекты $\hat{\Sigma}$, $\hat{\rho}_\sigma$, $\hat{G}_\sigma$. Для реализации предложенных численных алгоритмов необходимо решать задачи максимизации линейных функционалов на множествах вида (10). Численные алгоритмы решения этих задач можно найти в [2].

4. Классы некорректных задач

Если значение задачи (4) равно $+\infty$, то теория оптимального восстановления напрямую не применима. Но в этом случае можно искать так называемые оптимальные регуляризирующие алгоритмы. Для их построения удаётся воспользоваться результатами теории оптимального восстановления. В этом разделе обсуждается вопрос о решении некорректных задач с истокопредставимым решением, т.е. $M = \operatorname{Im} V$, где $V : W \to Z$ — известный линейный инъективный компактный оператор из действительного гильбертова пространства W.

Существует множество методов решения задачи (1) с $M = \operatorname{Im} V$. Примеры алгоритмов можно найти в работах [13, 11, 12, 18, 3]. Среди методов решения выделяется класс *оптимальных по порядку регуляризирующих алгоритмов.*

В [8] построен *оптимальный регуляризирующий алгоритм* для некорректной задачи с истокопредставимым решением. Этот алгоритм построен на основе *метода расширяющихся компактов* [11, 5, 3] с применением методов теории оптимального восстановления. В [8] доказано *регуляризирующее* и *оптимальное* свойство построенного алгоритма.

Дадим определения введённым терминам. Обозначим $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Пусть вместо одного множества Ω имеется семейство множеств $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$, такое что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ множество $\Omega_\varepsilon \subset Y$ обладает следующим свойством: $\sup\limits_{y\in\Omega_\varepsilon} \|y\| \leqslant \varepsilon$. Пусть также вместо оператора A мы умеем точно вычислять лишь его приближение — линейный непрерывный оператор $A_\varepsilon : Z \to U$, такой что $\|A_\varepsilon - A\| \leqslant h(\varepsilon)$. Здесь отображение $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таково, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = 0$. Для исследования регуляризирующих свойств алгоритма вместо объектов m, Q_m и v необходимо ввести зависимость от параметра ε размерности пространства Y (т.е. $\dim Y = m(\varepsilon)$), параметрическое семейство операторов $\{Q_{m(\varepsilon)}\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ и семейство векторов $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$, удовлетворяющих условию $v_\varepsilon - Q_{m(\varepsilon)}\bar{u} \in \Omega_\varepsilon$. Положительное число $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ является оценкой погрешности правой части обратной задачи, поскольку $\left\|v_\varepsilon - Q_{m(\varepsilon)}\bar{u}\right\| \leqslant \varepsilon$. Но семейство операторов $\{Q_{m(\varepsilon)}\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ нельзя брать любым, иначе не удастся доказать регуляризирующее свойство построенного метода решения, каким бы он ни был. В [8] регуляризирующее свойство доказано для случая, когда $\{Q_{m(\varepsilon)}\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$ является полным семейством конечномерной аппроксимации пространства U.

Определение. Семейство операторов $\{Q_{m(\varepsilon)}\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}$, где $Q_{m(\varepsilon)} : U \to \mathbb{R}^{m(\varepsilon)}$, назовём *полным семейством конечномерной аппроксимации* пространства U, если, во-первых, $\exists C_Q \in \mathbb{R}_+$: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\left\|Q_{m(\varepsilon)}\right\| \leqslant C_Q$ и, во-вторых, если либо

$$\varliminf_{\varepsilon\to+0} \left\|Q_{m(\varepsilon)}u_1 - Q_{m(\varepsilon)}u_2\right\| > 0 \tag{11}$$

для любых $u_1, u_2 \in U$, таких что $u_1 \neq u_2$, либо нижний предел, присутствующий в условии (11), не существует (в этом случае говорят, что он равен ∞; при этом можно считать, что формально выполнено неравенство (11)).

Обозначения. Будем пользоваться обозначением $Y_\varepsilon := \mathbb{R}^{m(\varepsilon)}$. Множество всех линейных непрерывных операторов из нормированного пространства Z в нормированное пространство U обозначим $\mathrm{Hom}(Z, U)$. Множество всех линейных инъективных непрерывных операторов из нормированного пространства Z в нормированное пространство U обозначим $\mathcal{BI}(Z, U)$.

Определение. Семейство отображений $R_\varepsilon : \mathrm{Hom}(Z, U) \times Y_\varepsilon \to \mathbb{R}$, параметризуемое числом $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, назовём *регуляризирующим алгоритмом восстановления функционала* $\ell \in Z^*$ *в задаче* (1) с $M = \mathrm{Im}\, V$ (или просто *регуляризирующим алгоритмом*), если для любого $z \in \mathrm{Im}\, V$ выполнено условие

$$\sup_{\substack{A'\in\mathcal{BI}(Z,U):\,\left\|A'-A_\varepsilon\right\|\leqslant h(\varepsilon),\\ y\in Y_\varepsilon:\,y-Q_{m(\varepsilon)}A'z\in\Omega_\varepsilon}} |\ell(z) - R_\varepsilon(A_\varepsilon, y)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Этот регуляризирующий алгоритм будем обозначать R.

Определение. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{M} \subset Z$ и $\mathcal{O}_\varepsilon \subset Y_\varepsilon$, такие что $\mathcal{O}_\varepsilon \supset \Omega_\varepsilon + Q_{m(\varepsilon)}(A - A_\varepsilon)(\mathcal{M})$. Для этих объектов определим *обобщённую погрешность*

регуляризирующего алгоритма R на множестве $\mathcal{M}$:

$$\Delta_0(\varepsilon, R_\varepsilon, \mathcal{M}, \mathcal{O}_\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in\mathcal{M}} \left(\sup_{y\in Y_\varepsilon:\, y-Q_{m(\varepsilon)}A_\varepsilon z\in\mathcal{O}_\varepsilon} |\ell(z) - R_\varepsilon(A_\varepsilon, y)| \right).$$

Определение. Регуляризирующий алгоритм R называется *оптимальным* на множестве $\mathcal{M} \subset Z$ для уровня погрешности $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и окрестности погрешности $\mathcal{O}_\varepsilon \subset Y_\varepsilon$, если

$$\Delta_0(\varepsilon, R_\varepsilon, \mathcal{M}, \mathcal{O}_\varepsilon) = \inf_{\mathcal{R}\in\mathbb{R}^{\mathrm{Hom}(Z,U)\times Y_\varepsilon}} \Delta_0(\varepsilon, \mathcal{R}, \mathcal{M}, \mathcal{O}_\varepsilon).$$

5. Заключение

На основе изложенного материала опишем классы линейных обратных задач, для которых имеются оптимальные методы решения, применимые на практике.

Если значение минимума в задаче (4) конечно, то можно решать эту задачу оптимального восстановления вместо исходной обратной задачи. В этом случае находится метод восстановления с минимальной априорной погрешностью. Построенные алгоритмы могут решать задачи, у которых после конечномерной аппроксимации множество априорных ограничений и окрестность погрешности будут иметь вид (10). При этом конечномерную аппроксимацию надо проводить по описанной схеме.

Если же множество априорных ограничений M широкое, а информация о решении скудна настолько, что значение задачи (4) равно $+\infty$, то указанная методика напрямую не применима. Но если априорная информация задаётся в виде истокопредставимости известным линейным инъективным компактным оператором $V : W \to Z$, действующим из действительного гильбертова пространства W, т.е. $M = \operatorname{Im} V$, то можно решать задачу оптимальным регуляризирующим алгоритмом, основанном на методе расширяющихся компактов и на теории задач оптимального восстановления. Предложенный в [8] регуляризирующий алгоритм оптимален на множествах вида

$$\mathcal{M} = V(\,\{w \in W \mid \|w\| \leqslant \rho\}\,)$$

для достаточно малых значений погрешности ε и для окрестности погрешности в виде эллипсоида

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{j=1}^{m} \omega_j y_j^2 \leqslant \varepsilon^2\,\}.$$

(См. определение оптимальности регуляризирующего алгоритма). ρ, ω_1, …, ω_m — положительные действительные числа.

Следует отметить, что все применяемые алгоритмы обоснованы соответствующими теоремами, доказанными в приводимой литературе.

Список литературы

[1] A.V. Bayev, A.G. Yagola, *Optimal recovery in problems of solving linear integral equations with a priori information*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **15**:6 (2007), 569–586.

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] K.Yu. Dorofeev, N.N. Nikolaeva, V.N. Titarenko, A.G Yagola, *New approaches to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **10**:2 (2002), 155–170.
[4] R. Scharlach, *Optimal recovery by linear functionals*, J. Approxim. Theory, **44**:2 (1985), 167–172.
[5] A.G Yagola, K.Yu. Dorofeev, *Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems*, Fields Inst. Communications: Operator Theory and Its Applications, Providence, RI: American Mathematical Society, **25** (2000), 543–550.
[6] В.В. Арестов, *Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи*, Труды МИАН СССР, **189** (1989), М.: Наука, 3–20.
[7] А.В. Баев, *Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах*, Матем. Сборник, **199**:12 (2008), 3–18.
[8] А.В. Баев, *Оптимальный регуляризирующий алгоритм восстановления функционала в линейных обратных задачах с истокопредставимым решением*, Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ., **48**:11 (2008), 1933–1941.
[9] А.В. Баев, *Принцип Лагранжа в задаче оптимального обращения линейных операторов в конечномерных пространствах при наличии априорной информации о решении*, Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ., **47**:9 (2007), 1512–1523.
[10] А.В. Баев, *Принцип Лагранжа и конечномерная аппроксимация в задаче оптимального обращения линейных операторов*, Вычисл. методы и программирование, **7**:2 (2006), 323–336, `http://www.srcc.msu.su/num-meth`
[11] И.Н. Домбровская, В.К. Иванов, *К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных банаховых пространствах*, Сибирский матем. журнал., **6**:3 (1965), 499–508.
[12] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и её приложения*, М.: Наука, 1978.
[13] М.М. Лаврентьев, *Об интегральных уравнениях первого рода*, Доклады АН СССР, **127**:1 (1959), 31–33.
[14] Г.Г. Магарил-Ильяев, К.Ю. Осипенко, *Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным*, Мат. Заметки, **50**:6 (1991), 85–93; английский перевод в *Math. Notes* **50** (1991), 1274–1279.
[15] Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, М.: Эдиториал УРСС, 2000.
[16] Г.Г. Магарил-Ильяев, Чан Тхи Ле, *К задаче оптимального восстановления функционалов*, Успехи матем. наук., **42**:2 (1987), 237–238.
[17] С.А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук. МГУ, 1965.
[18] А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, М.: Наука, 1995.

Андрей Валерьевич Баев
ЗАО "Новомет–Пермь",
Каширский проезд 21,
115201, Москва, Россия
E-mail address: `andrewbayev@mail.ru`

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.173–С.177 (2010)

УДК 517.55
MSC 35J25

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ

Э. В. АРБУЗОВ, А. Л. БУХГЕЙМ

Abstract. A Carleman type formula for the solution to the Cauchy problem for second-order elliptic equations in a planar domain is obtained.

Keywords: Cauchy problem, Caushy integral operator, second-order elliptic equations, Carleman formula.

1. Введение

Получена формула для решения задачи Коши для эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде с переменными коэффициентами в произвольной односвязной области. Эллиптические уравнения общего вида, с помощью соответствующей замены переменных, можно привести к каноническому виду во всей рассматриваемой области [1].

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана.

В [2] Т. Карлеман доказал формулу, дающую решение задачи Коши для уравнения Коши — Римана в области специального вида. Развивая его идею,

---

Arbuzov E.V., Bukhgeim A.L., About solving the Cauchy problem for second-order elliptic equations in a planar domain using the Cauchy integral operator.

© 2010 Арбузов Э.В., Бухгейм А.Л.

Работа Э.В. Арбузова выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00207 и Совета по грантам президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ - 1440.2008.1.

Работа А.Л. Бухгейма поддержана NSF grant DMS-0505470.

Поступила 5 марта 2010 г.

Г. М. Голузин и В. И. Крылов в [3] перенесли его результат на случай произвольных односвязных областей.

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора со специальными свойствами (названное функцией Карлемана) была получена М. М. Лаврентьевым [4]. Применяя этот метод, Ш. Я. Ярмухамедов [5, 10] построил функции Карлемана для операторов Лапласа и Гельмгольца с постоянным коэффициентом для пространственных областей специального вида, когда часть границы области, где данные неизвестны, является конической поверхностью, либо гиперповерхностью $\{x_3 = 0\}$.

В работе [6] Н. Н. Тархановым и А. А. Шлапуновым проведено исследование достаточно общих эллиптических систем, и дан критерий разрешимости соответствующих задач Коши, а также формулы для их решения в терминах базисов с двойной ортогональностью.

Используя экспоненциально растущие решения, Икехата [7] получил формулу для решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом для областей в пространстве, где неизвестные данные расположены на участке гиперповерхности $\{x \cdot s = t\}$.

Другие подходы, и полученные с помощью них результаты исследования данного типа задач, приводятся в работах [8]-[14].

В данной работе используется обобщение метода Голузина — Крылова, полученное в [15] для оператора Гельмгольца, и эллиптическое уравнение второго порядка сводится к системе уравнений первого порядка типа Коши — Римана.

2. Постановка задачи и основной результат

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область с границей класса $C^{1+\alpha}, 0 < \alpha < 1$, $M \subset \partial\Omega$ — участок границы области Ω, состоящий из объединения конечного числа замкнутых дуг.

Для функции $u(x_1, x_2) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ рассматривается задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде:

$$\Delta u + a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} + a_0 u = 0, \tag{1}$$

$$u|_M = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial n} u|_M = u_0',$$

где коэффициенты $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_1, a_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, и данные Коши $u_0 \in C^1(M)$, $u_0' \in C(M)$.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^2$ как комплексную плоскость $\mathbb{C}$, где $x = (x_1, x_2) = x_1 + \mathrm{i}x_2$, и использовать следующие обозначения:

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + \mathrm{i}\partial_2), \quad \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - \mathrm{i}\partial_2), \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$\mathbb{P}$ — интегральный оператор Коши:

$$\mathbb{P}A(x) = \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{A(y)}{x - y}\, dy_1 dy_2,$$

а $\overline{\mathbb{P}}$ — оператор с сопряженным ядром $\overline{(x-y)^{-1}}$.

Определим аналитическую в Ω функцию φ :

$$\operatorname{Re} \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in M; \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus M. \end{cases}$$

Используя обозначения

$$a_{-\tau} = ae^{-\mathrm{i}2\tau\mathrm{Im}\varphi},\ b_\tau = be^{\mathrm{i}2\tau\mathrm{Im}\varphi},$$

где

$$a = e^{\frac{1}{4}(\overline{\mathbb{P}}A - \mathbb{P}\bar{A})}(a_0 - \partial\bar{A} - \frac{1}{4}|A|^2), \quad b = -e^{\frac{1}{4}(\mathbb{P}\bar{A} - \overline{\mathbb{P}}A)},$$
$$A = a_1 - \mathrm{i}a_2,$$

определим оператор $\mathbb{S}$

$$\mathbb{S}w = \frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}b_\tau\mathbb{P}a_{-\tau}w.$$

Далее определим матрицы $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}(x) \end{pmatrix}$, и $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{n} = n_1 + \mathrm{i}n_2$ — вектор единичной внешней нормали к границе области $\partial\Omega$.

Для решения задачи (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение уравнения (1) в точке $x^0 \in \Omega$ находится по формуле*

$$u(x^0) = e^{-\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}\lim_{\tau\to\infty}\int_M e^{-\tau\varphi(x^0)}(e^{\tau\Phi(x)}\mathrm{N}\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w})\mathrm{d}s, \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — векторозначная функция с компонентами

$$u_1 = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}u, \qquad u_2 = e^{\frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}A}(2\bar{\partial}u + \frac{1}{2}\bar{A}u), \quad A = a_1 - \mathrm{i}a_2, \tag{3}$$

Функция $\widetilde{\mathbf{v}}(x) = \begin{pmatrix} 2\partial\mathcal{E}(x - x^0) \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{\pi}\ln|x|$, а компоненты вектор-функции $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ определяются формулами

$$w_2 = (\mathrm{I} - \mathbb{S})^{-1}\frac{1}{2}\overline{\mathbb{P}}b_\tau\widetilde{v}_1, \quad w_1 = \frac{1}{2}\mathbb{P}a_{-\tau}w_2.$$

Скалярное произведение определяется равенством $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2$.

3. Задача Коши для системы первого порядка

Задача (1) эквивалентна задаче определения векторозначной функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$$L\mathbf{u} = (\mathcal{D} + Q)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_M = \mathbf{u}_M,$$

где u_j определяются формулами (3),

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial} & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом, граничные значения вектор-функции $\mathbf{u}(z)$, определяются через данные Коши задачи (1) следующим образом:

$$u_1|_M = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}u_0,$$
$$u_2|_M = e^{\frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}A}\big((n_1 + \mathrm{i}n_2)(u_1 + \mathrm{i}u_0') + \frac{1}{2}\bar{A}u_0\big).$$

Доказанная в теореме 1 формула (2) получается из соответствующего результата для системы первого порядка.

Теорема 2. *Пусть $a \in L_\infty,\ b \in W_\infty^1$.*

Тогда для первой компоненты решения $\mathbf{u}$ справедливо равенство

$$u_1(x^0) = \lim_{\tau\to\infty}\int_M e^{-\tau\varphi(x^0)}(e^{\tau\Phi(x)}\mathrm{N}\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w})\mathrm{d}s,$$

где $\widetilde{\mathbf{v}}$ *и* $\mathbf{w}$ *определяются как в теореме 1.*

При этом, для любого $\varepsilon > 0$ *выполняется оценка*

$$|u_1(x_0)| \le \varepsilon l(\mathbf{u}) + C(\varepsilon)\|\mathbf{u}\|_{C(M)},$$

где

$$l(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{C(\partial\Omega\setminus M)}, \quad C(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon/c)^{-1/\mathrm{Re}\varphi(x_0)},$$

и константа c *не зависит от* τ.

Из приведенной оценки условной устойчивости следует соответствующая оценка для решения уравнения (1).

Из формулы Грина

$$\int_\Omega (L\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathrm{d}x = \int_\Omega (\mathbf{u}, L^t\mathbf{v})\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\mathrm{N}\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathrm{d}s, \tag{4}$$

определяется транспонированный оператор L^t:

$$L^t = -\mathcal{D} + Q^t, \quad Q^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 2 опирается на построение решения специального вида для данного оператора.

Теорема 3. *Пусть* $a \in L_\infty,\ b \in W^1_\infty$.

Тогда найдётся число $\tau_0 > 0$, *такое что при всех* $\tau \ge \tau_0$ *существует решение уравнения*

$$L^t\mathbf{v} = -e^{\tau\varphi}\begin{pmatrix} \delta(x - x^0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое можно представить в виде

$$\mathbf{v} = e^{\tau\Phi}(\widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w}),$$

где вектор-функция $\mathbf{w}$ *определяется формулами:*

1) если функция $\widetilde{\mathbf{v}}(x) = \begin{pmatrix} 2\partial\mathcal{E}(x - x^0) \\ 0 \end{pmatrix}$, *то*

$$w_2 = (\mathrm{I} - \mathbb{S})^{-1}\frac{1}{2}\overline{\mathbb{P}}b_\tau\widetilde{v}_1, \quad w_1 = \frac{1}{2}\mathbb{P}a_{-\tau}w_2,$$

при этом, $\mathbf{w} \in W^1_p$, $1 < p < 2$;

2) если функция $\widetilde{\mathbf{v}}(x) = \begin{pmatrix} 2\partial\mathcal{E}(x - x^0) \\ b_\tau\mathcal{E}(x - x^0) \end{pmatrix}$, *то*

$$w_2 = (\mathrm{I} - \mathbb{S})^{-1}\big(\frac{1}{4}\overline{\mathbb{P}}b_\tau\mathbb{P}g_1 + \frac{1}{2}\overline{\mathbb{P}}g_2\big), \quad w_1 = \frac{1}{2}\mathbb{P}g_1 + \frac{1}{2}\mathbb{P}a_{-\tau}w_2,$$

где

$$\mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} ab \\ -2(\partial b)_\tau - \tau b_\tau 2\partial\varphi \end{pmatrix}\mathcal{E}(x - x^0),$$

при этом, $\mathbf{w} \in W^1_p \cap C^\alpha$, $p > 2$, $\alpha \in (0, 1 - 2/p]$.

Таким образом, формулу типа Карлемана для решений рассматриваемых задач можно получить при подстановке решения специального вида, полученного в теореме 3, в формулу Грина (4), и переходе к пределу при $\tau \to \infty$.

Список литературы

[1] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Наука, Москва, 1988.

[2] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.

[3] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, *Обобщенная формула Carleman'a и ее применения к аналитическому продолжению функций*, Матем. сборник, **40**:2 (1933), 144–149.

[4] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

[5] Ш. Я. Ярмухамедов, *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, ДАН СССР, **235**:2 (1977), 281–283.

[6] A. A. Shlapunov and N. N. Tarkhanov, *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbol*, Proc. London Math. Soc., **71**:3 (1995), 1–52.

[7] M. Ikehata, *The enclosure method and its applications. Analytic Extension Formulas and their Applications*, Kluwar Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2001.

[8] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1990.

[9] Л. А. Айзенберг, Н. Н. Тарханов, *Абстрактная формула Карлемана*, ДАН СССР, **298**:612 (1988), 1292–1296.

[10] Ш. Я. Ярмухамедов, Т. И. Ишанкулов, О. И. Махмудов, *О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве*, Сиб. мат. журнал, **33**:1 (1992), 186–190.

[11] О. И. Махмудов, И. Э. Ниезов, *Регуляризация решений задачи Коши для системы теории упругости в бесконечной области*, Матем. заметки, **68**:4 (2000), 548–553.

[12] О. И. Махмудов, *О задаче Коши для эллиптических систем в пространстве* $\mathbb{R}^m$, Матем. заметки, **75**:6 (2004), 849–860.

[13] E. V. Arbuzov and A. L. Bukhgeim, *Carleman's formulas for A-analitic functions in a half-plane*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **5**:6 (1997), 491–505.

[14] Э. В. Арбузов, *Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости*, Сиб. мат. журнал, **44**:1 (2003), 3–20.

[15] Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм, *Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости*, Сиб. Мат. Ж., **47**:3 (2006), 518–526.

Эдуард Витальевич Арбузов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: arbuzov@math.nsc.ru

Александр Львович Бухгейм
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
и
Wichita State University, Department of Mathematics and Statistics,
1845 N.Fair-mount,Wichita,KS, 67260-0033,USA
E-mail address: boukhgueim@math.wichita.edu

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.178–С.198 (2010)

УДК 517.972.5
MSC 49N45

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА

А.В. Пененко

Abstract. An inverse coefficient heat conduction problem in layered medium is considered. Given boundary measurement data one has to determine thermal diffusivity coefficient. Direct problem operator that maps a thermal diffusivity coefficient to the boundary measurement data has been shown to have compact integral sensitivity operator (a generalization of the Freshet derivative). Investigation of the Lipshitzian properties of the sensitivity operator allowed to prove a theorem describing local convergence of the gradient projection method iterations to the solution of the inverse problem.

Keywords: inverse heat conduction problem, thermal diffusivity coefficient, layered medium, gradient descent method.

1. Введение

Математические модели теплопроводности в слоистых средах и обратные задачи для них достаточно универсальны: одна и та же модель может описывать широкий спектр различных по своей природе процессов. К конкретным примерам относятся задача об определении температуропроводности почвы по данным измерения температуры и потока тепла на её поверхности, задача

Penenko, A.V., On solution of the inverse coefficient heatconduction problem with a gradient projection method.

© 2010 Пененко А.В.

Работа поддержана программами фундаментальных исследований №4 Президиума РАН и №3 Отделения математических наук РАН.

Поступила 30 ноября 2009 г.

об определении гидропроводности нефтяного пласта на основе знания дебита скважины и забойного давления, задача электроразведки полезных ископаемых, в случаях, когда в системе уравнений Максвелла можно пренебречь токами смещения и требуется по измерениям характеристик электромагнитного поля на поверхности Земли определить электропроводность более глубоких слоёв.

Как правило, обратные задачи некорректны по Адамару. Вследствие этого, минимизация функционалов, описывающих разницу между рассчитанными по модели и измеренными величинами, не всегда связана с убыванием ошибки в решении обратной задачи. Для нахождения условий применимости оптимизационных методов целесообразно анализировать модели с позиций теории обратных и некорректных задач, с тем, чтобы применять адекватные найденным свойствам методы решения.

Применению оптимизационных алгоритмов к решению коэффициентных обратных задач теплопроводности посвящены работы [1, 2, 3, 4, 5]. К достоинствам таких алгоритмов стоит отнести простоту в реализации, а к недостаткам - проблему выбора начального приближения и необходимость выяснения в каждом случае некорректной задачи, как сконструировать алгоритм так, чтобы при убывании функционала невязки происходило убывание ошибки её решения. В работе [6] доказана теорема о том, что последовательность итераций, порождаемая алгоритмом градиентного спуска, ограничена сверху и снизу некоторыми константами, и сходится к некоторому пределу. Для использования в приложениях, дальнейшего прояснения требует вопрос о том, как будет изменяться соотношение между данным пределом и решением обратной задачи в условиях, когда перестает выполняться теорема единственности решения обратной задачи [7], т.е. при неточно заданных данных обратной задачи, приближенно вычисляемом градиенте и т.д. Целью настоящей статьи является прояснение этой связи.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрим постановку обратной задачи в дифференциальной форме (Определения 1, 2, 3), а также в форме операторного уравнения (Определения 5, 6).

Исследование обратной задачи в разделе 3 начнём с анализа чувствительности изменения значения нелинейного оператора прямой задачи к изменению его аргументов (Лемма 1). Часто при исследовании различных моделей с точки зрения теории обратных задач, применяются функции чувствительности (см. напр. [8]), которые, как правило, описывают изменение некоторой измеряемой скалярной характеристики модели при изменении искомых параметров модели. Объединяя (аналогично [5, 9]) семейство специальным образом выбранных функций чувствительности (полученных в Следствии 2), сформируем (Лемма 5) интегральный оператор чувствительности (Определение 10). Оператор прямой задачи (Определение 5) позволил переформулировать обратную задачу в виде операторного уравнения, а компактный оператор чувствительности (компактная производная Фреше оператора прямой задачи) связывает полученное операторное уравнение с теорией нелинейных некорректных задач (Теорема 3, Следствие 4). Это дает возможность определить набор свойств модели (на основе [10]), которые необходимо исследовать для построения алгоритма решения обратной задачи. Нужные свойства представлены в Следствиях 5, 6, 7.

Полученные в разделе 3 результаты сами по себе важны для исследования свойств модели теплопроводности с позиций теории обратных и некорректных задач. Кроме того, на их основе удается построить эффективный метод решения поставленной задачи.

В разделе 4, следуя [10], докажем Теорему 5 о локальной сходимости итераций алгоритма минимизации функционала невязки (Определение 11) методом проекции градиента с постоянным параметром спуска (Определение 12, Лемма 7). Эта теорема описывает связь результата работы алгоритма с искомыми коэффициентами модели. Её практический смысл заключается в том, что она позволяет на качественном уровне выделить характеристики модели и алгоритма, влияющие на точность решения обратной задачи.

2. Постановка обратной коэффициентной задачи теплопроводности

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: НКБ - неравенство Коши-Буняковского, ОНБ - ортонормированный базис, ГП - гильбертово пространство, $\|.\| = \|.\|_{L_2(0,1)}$, $\|.\|_L = \|.\|_{L(L_2(0,1),L_2(0,1))}$, $\|u(x)\|_{(x)} = \sqrt{\int_0^1 u^2(x)dx}$, $\square = (0,1)\times(0,1)$, $I(a,b)$ - индикаторная функция отрезка (a,b), $\{a,b\}$ -дискретное множество $a,\ldots,b$, $\{e_l\}_{i=1}^N$ - конечная ($N<\infty$) или бесконечная ($N=\infty$) последовательность $e_1,\ldots,e_N$, Sp - спектр матрицы, dim - размерность.

Определение 1. *Рассмотрим всевозможные разбиения X отрезка $[0,1]$, состоящие из конечного числа точек*

$$0 = x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{N+1} = 1.$$

Множеством S назовём множество кусочно-постоянных функций:

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^{N} k_{(i+0.5)} I\left(x_i, x_{i+1}\right) \mid \{x_i\}_{i=1}^{N+1} \in X, \left\{k_{(i+0.5)}\right\}_{i=1}^{N+1} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Множеством K назовём множество кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих условиям равномерной ограниченности сверху и снизу:

$$K := \left\{ S \mid 0 < k_{\min} \le k_{(i+0.5)} \le k_{\max} < \infty, i \in \{1,N\} \right\}.$$

Для $k \in S$ определим N - количество отрезков постоянства k, $\{x_i\}_{i=1}^{N+1} \in X$ - точки разбиения, соответствующего k, $D(k) := \bigcup\limits_{i=1}^{N} (x_i, x_{i+1})$.

Если где-нибудь будут использоваться $\hat{k}, \tilde{k} \in K$ с несовпадающими, вообще говоря, точками разрыва, то можно без ограничения общности дальнейшего изложения предполагать, что их отрезки постоянства совпадают. Если $\left\{x_i(\hat{k})\right\}_{i=1}^{N(\hat{k})+1}$ и $\left\{x_i(\tilde{k})\right\}_{i=1}^{N(\tilde{k})+1}$ - это точки разрывов некоторых $\hat{k}, \tilde{k} \in K$, то оба коэффициента можно рассматривать как коэффициенты $\hat{k}_*, \tilde{k}_* \in K$ с точками разрыва в $\left\{x_i(\hat{k})\right\}_{i=1}^{N(\hat{k})+1} \cup \left\{x_i(\tilde{k})\right\}_{i=1}^{N(\tilde{k})+1}$, отрезками постоянства $D(\hat{k},\tilde{k}) := D(\hat{k}) \cap D(\tilde{k})$ и значениями

$$\hat{k}_*(x) = \hat{k}(x),\ \tilde{k}_*(x) = \tilde{k}(x),\ x \in [0,1] / \left(\left\{x_i(\hat{k})\right\}_{i=1}^{N(\hat{k})+1} \cup \left\{x_i(\tilde{k})\right\}_{i=1}^{N(\tilde{k})+1} \right).$$

Определение 2. *Решением прямой задачи при* $\{\alpha, k\} \in C_0^1[0,1] \times K$ *называется функция* $u \in \bigcap_{i=1}^{N} C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0,1)) \bigcap_{i=1}^{N} C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0,1])$ *такая, что*

$$u_t(x,t) = (k(x)u_x(x,t))_x, \ (x,t) \in (x_i, x_{i+1}) \times (0,1), i \in \{1, N\}, \tag{1}$$

$$ku_x(0+,t) = \alpha(t), \ ku_x(1-,t) = 0, \ t \in [0,1], \tag{2}$$

$$[u](x_i,t) = 0, \ [ku_x](x_i,t) = 0, (i,t) \in \{2, N\} \times [0,1], \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, x \in [0,1]. \tag{4}$$

Обозначим это решение через $u(.,.;\alpha,k)$.

Определение 3. *Решением обратной задачи называется функция* $k \in K$ *такая, что при* $\alpha \in C_0^1[0,1]$ *и заданной* f

$$u(0+,t;\alpha,k) = f(t), \ t \in [0,1].$$

Определение 4. *Решением прямой задачи для потока при* $\{\alpha, k\} \in C_0^1[0,1] \times K$ *называется функция* $z \in \bigcap_{i=1}^{N} C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0,1)) \bigcap_{i=1}^{N} C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0,1])$ *такая, что*

$$z_t(x,t) = k(x)z_{xx}(x,t), \ (x,t) \in (x_i, x_{i+1}) \times [0,1], i \in \{1, N\}, \tag{5}$$

$$z(0+,t) = \alpha(t), \ z(1-,t) = 0, \ t \in [0,1], \tag{6}$$

$$[z](x_i,t) = 0, \ [z_x](x_i,t) = 0, (i,t) \in \{2, N\} \times [0,1], \tag{7}$$

$$z(x,0) = 0, x \in [0,1]. \tag{8}$$

Обозначим это решение через $z(.,.;\alpha,k)$.

Теорема 1 (о существовании [11], единственности [12] и связи решений прямых задач)**.** *Пусть* $k \in K$, $\alpha \in C_0^1[0,1]$, *тогда:*

- *Существует единственное решение прямой задачи для потока* $z(x,t;\alpha,k)$.
- *Единственное решение прямой задачи определяется формулой*

$$u(x,t;\alpha,k) = \int_0^x \frac{z(\xi,t;\alpha,k)}{k(\xi)} d\xi + \int_0^t z_x(0+,\tau;\alpha,k) d\tau.$$

- *Если* $u(x,t;\alpha,k)$ *- решение прямой задачи, то*

$$z(x,t;\alpha,k) = k_{(i+0.5)}u_x(x,t;\alpha,k), \ (x,t) \in [x_i, x_{i+1}] \times [0,1].$$

Используя Теорему 1 определим оператор прямой задачи и перепишем обратную задачу в операторной форме.

Определение 5. *Для* $\alpha \in C_0^1[0,1]$ *определим оператор прямой задачи*

$$A : \begin{cases} K \to L_2(0,1) \\ k \mapsto u(0+,t;\alpha,k) \end{cases}.$$

Определение 6. *Для* $\{\alpha, f\} \in C_0^1[0,1] \times A(K)$ *решением обратной задачи назовём функцию* $k_* \in K$ *такую, что*

$$A(k_*) = f.$$

Функцию f *будем называть данными обратной задачи.*

3. Чувствительность оператора к изменению аргумента

3.1. **Функции чувствительности.** В этом пункте исследуем связь между возмущением коэффициента и возмущением данных обратной задачи.

Определение 7. *Решением сопряженной задачи при* $\{\mu, k\} \in C_0^1[0,1] \times K$ *называется функция* $v \in \bigcap_{i=1}^{N} C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0,1)) \bigcap_{i=1}^{N} C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0,1])$ *такая, что*

$$-v_t(x,t) = (k(x)v_x(x,t))_x, \ (x,t) \in (x_i, x_{i+1}) \times [0,1], i \in \{1, N\}, \tag{9}$$

$$kv_x(0+,t) = \mu(t), \ kv_x(1-,t) = 0, \ t \in [0,1], \tag{10}$$

$$[v](x_i,t) = 0, \ [kv_x](x_i,t) = 0, (i,t) \in \{2, N\} \times [0,1], \tag{11}$$

$$v(x,1) = 0, x \in [0,1]. \tag{12}$$

Обозначим это решение через $v(.,.;\mu,k)$.

Лемма 1 (о тождестве Лагранжа, на основе [13])**.** *Пусть* $\alpha \in C_0^1[0,1]$, $\mu \in C_0^1[0,1], \tilde{k}, \hat{k} \in K$, *тогда*

$$\begin{gathered} \int_0^1 \left(u\left(0+,t;\alpha,\tilde{k}\right) - u\left(0+,t;\alpha,\hat{k}\right)\right)\mu(t)dt = \\ = \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)\right) \int_0^1 u_x\left(x,t;\alpha,\tilde{k}\right) v_x\left(x,t;\mu,\hat{k}\right) dtdx = \\ = \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)\right) \int_0^1 u_x\left(x,t;\alpha,\hat{k}\right) v_x\left(x,t;\mu,\tilde{k}\right) dtdx. \end{gathered} \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим: $\tilde{u}(x,t) = u\left(x,t;\alpha,\tilde{k}\right)$, $\hat{u}(x,t) = u\left(x,t;\alpha,\hat{k}\right)$, $v(x,t) = v\left(x,t;\mu,\hat{k}\right)$. С учетом (4) и (12) справедливо тождество

$$\begin{gathered} \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{u}_t(x,t) - \hat{u}_t(x,t))\, v(x,t)dtdx = \\ = \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t))\, (-v_t(x,t))\, dtdx. \end{gathered} \tag{14}$$

Верна цепочка равенств

$$\begin{gathered} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t)\right)_x v(x,t)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t)\right)_x v(x,t)dx = \\ = \left(\tilde{k}(x)\,\tilde{u}_x(x,t) - \hat{k}(x)\,\hat{u}_x(x,t)\right) v(x,t)\Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \\ - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t)v_x(x,t)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t)v_x(x,t)dx = \\ = \left(\tilde{k}(x)\,\tilde{u}_x(x,t) - \hat{k}(x)\,\hat{u}_x(x,t)\right) v(x,t)\Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \\ - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)\right) \tilde{u}_x(x,t)v_x(x,t)dx - \\ - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, \hat{k}(x)v_x(x,t)dx = \\ = \left(\tilde{k}(x)\,\tilde{u}_x(x,t) - \hat{k}(x)\,\hat{u}_x(x,t)\right) v(x,t)\Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \\ - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)\right) \tilde{u}_x(x,t)v_x(x,t)dx - \\ - (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t))\, \hat{k}(x)\, v_x(x,t)\Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} + \\ + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t)) \left(\hat{k}(x)v_x(x,t)\right)_x dx. \end{gathered}$$

Просуммируем по $i \in \{1, N\}$, учитывая краевые условия и условия на скачках (2), (3), (10), (11) и интегрируя по t от 0 до 1, получим тождество

$$\begin{array}{c} \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t)\right)_x v(x,t)dxdt - \int_0^1 \int_0^1 \left(\hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t)\right)_x v(x,t)dxdt = \\ = -\int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)\right) \tilde{u}_x(x,t)v_x(x,t)dxdt + \\ + \int_0^1 \left(\tilde{u}(0+,t) - \hat{u}(0+,t)\right) \mu(t)dt + \\ + \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t)\right) \left(\hat{k}(x)v_x(x,t)\right)_x dxdt. \end{array} \tag{15}$$

Вычитая из тождества (14) тождество (15), с учетом (1) и (9), получим

$$0 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)\right) \tilde{u}_x(x,t)v_x(x,t)dxdt - \int_0^1 \left(\tilde{u}(0,t) - \hat{u}(0,t)\right) \mu(t)dt.$$

Переходя обратно к исходным обозначениям, получим утверждение Леммы. □

Определение 8. *Решением сопряженной задачи для потока при* $\{\mu, k\} \in C_0^1[0,1] \times K$ *называется функция*
$w \in \bigcap_{i=1}^{N} C^{2,1}\left((x_i, x_{i+1}) \times (0,1)\right) \bigcap_{i=1}^{N} C^{1,0}\left([x_i, x_{i+1}] \times [0,1]\right)$ *такая, что*

$$-w_t(x,t) = k(x)w_{xx}(x,t),\ (x,t) \in (x_i, x_{i+1}) \times [0,1],\ i \in \{1, N\}, \tag{16}$$

$$w(0+,t) = \mu(t),\ w(1-,t) = 0,\ t \in [0,1], \tag{17}$$

$$[w](x_i,t) = 0,\ [w_x](x_i,t) = 0,\ (i,t) \in \{2, N\} \times [0,1], \tag{18}$$

$$w(x,1) = 0, x \in [0,1], \tag{19}$$

Обозначим это решение через $w(.,.;\mu,k)$.

Лемма 2 (о выпуклости, [14])**.** *Для того, чтобы дифференцируемая функция* $u(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы её производная* $u'(x)$ *не убывала на* $[a,b]$.

Лемма 3 (о норме производной)**.** *Пусть* $\alpha, \mu \in C_0^1[0,1]$, $k \in K$, $x \in D(k)$, *тогда*

$$\int_0^1 u_x^2(x,t;\alpha,k)\,dt \le \frac{1-x}{k^2(x)} \int_0^1 \alpha^2(t)dt, \quad \int_0^1 v_x^2(x,t;\mu,k)\,dt \le \frac{1-x}{k^2(x)} \int_0^1 \mu^2(t)dt.$$

Доказательство. По Теореме 1 функция $z(x,t) = k(x)u_x(x,t;\alpha,k)$ является решением прямой задачи для потока. Домножим (5) на $z(x,t)$ на каждом интервале (x_i, x_{i+1}), $i \in \{1, N\}$ и проинтегрируем по времени от 0 до 1:

$$z^2(x,1) - z^2(x,0) = \int_0^1 2k(x)z_{xx}(x,t)z(x,t)dt. \tag{20}$$

Используем соотношение

$$2k(x)z_{xx}(x,t)z(x,t) = k(x)\left(z^2\right)_{xx}(x,t) - 2k(x)z_x^2(x,t). \tag{21}$$

Подставляя (21) и начальное условие (8) в (20), получим

$$z^2(x,1) + \int_0^1 2k(x)z_x(x,t)^2dt = k(x)\left(\int_0^1 z^2(x,t)\,dt\right)_{xx} \ge 0.$$

В силу условий на скачках (7): $\left[\left(\int_0^1 z^2(x,t)\,dt\right)_x\right](x_i,t)=0$, $i\in\{2,N\}$. Следовательно, функция $\left(\int_0^1 z^2(x,t)\,dt\right)_x$ не убывает на $[0,1]$ и по Лемме 2 (о выпуклости) функция $\int_0^1 z^2(x,t)\,dt$ является выпуклой на интервале $[0,1]$ и

$$\int_0^1 z^2(x,t)\,dt \le (1-x)\int_0^1 \alpha^2(t)dt.$$

Поделив на $k^2(x)$ получим требуемое. Аналогично можно показать справедливость утверждения для v. □

3.2. **Оператор чувствительности.** Идея дальнейшего построения состоит в том, чтобы при выборе μ из некоторого ОНБ $L_2(0,1)$, рассматривать левую часть (13) как коэффициент Фурье разложения $A\left(\tilde{k}\right)-A\left(\hat{k}\right)$ по этому ОНБ, и на основе этого разложения объединить соответствующие элементам разложения правые части (13) в единый интегральный оператор, действующий на $\tilde{k}-\hat{k}$. Препятствием к реализации этой идеи является то, что на данном этапе исследования решение сопряженной задачи определено только для $\{\mu,k\}\in C_0^1[0,1]\times K$. Для преодоления этого затруднения расширим по Лемме 3 линейные операторы производных с $C_0^1[0,1]$ на $L_2(0,1)$:

Определение 9 (операторов производных)**.** *Для $k\in K$ и $x\in D(k)$ определим на $L_2(0,1)$ операторы*

$$U[k,x]:\left\{\begin{array}{c} L_2(0,1)\to L_2(0,1)\\ \alpha\mapsto \lim_{n\to\infty} u_x(x,.;\alpha_n,k)\end{array}\right.,\ V[k,x]:\left\{\begin{array}{c} L_2(0,1)\to L_2(0,1)\\ \mu\mapsto \lim_{n\to\infty} v_x(x,.;\mu_n,k)\end{array}\right.,$$

где пределы понимаются в смысле $L_2(0,1)$ и $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C_0^1[0,1]$, $\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C_0^1[0,1]$, $\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n$.

Перепишем утверждение Лемм 1 и 3 в новых обозначениях:

Следствие 1 (о норме U,V)**.** *Для $k\in K$, $x\in D(k)$ и $\alpha,\mu\in L_2(0,1)$*

$$\|U[k,x]\alpha\|\le\frac{\sqrt{1-x}}{k(x)}\|\alpha\|,\ \|V[k,x]\mu\|\le\frac{\sqrt{1-x}}{k(x)}\|\mu\|.$$

Следствие 2 (о тождестве Лагранжа с операторами)**.** *Пусть $\alpha\in C_0^1[0,1]$, $\mu\in L_2(0,1)$, $\tilde{k},\hat{k}\in K$, тогда*

$$\begin{array}{c}\int_0^1\left(A\left(\tilde{k}\right)-A\left(\hat{k}\right)\right)\mu(t)dt=\\ =\int_0^1\left(\tilde{k}(x)-\hat{k}(x)\right)\int_0^1 U\left[\tilde{k},x\right]\alpha(t)V\left[\hat{k},x\right]\mu(t)dtdx.\end{array}\tag{22}$$

Доказательство. Обозначим $U[x]:=U\left[\tilde{k},x\right]$, $V[x]:=V\left[\hat{k},x\right]$. Рассмотрим последовательность $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in C_0^1[0,1]$, $\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n$. По Лемме 1 (о тождестве Лагранжа)

$$\begin{array}{c}\int_0^1\left(u\left(0,t;\alpha,\tilde{k}\right)-u\left(0,t;\alpha,\hat{k}\right)\right)\mu_n(t)dt=\\ =\int_0^1\left(\tilde{k}(x)-\hat{k}(x)\right)\int_0^1 U[x]\,\alpha(t)V[x]\,\mu_n(t)dtdx.\end{array}\tag{23}$$

Рассмотрим для некоторого $x \in D(\tilde{k}, \hat{k})$ разность

$$\begin{array}{c}\left|\int_0^1 U[x]\,\alpha(t)V[x]\,\mu(t)dt - \int_0^1 U[x]\,\alpha(t)V[x]\,\mu_n(t)dt\right| \leq \\ \leq \|U[x]\,\alpha\|\,\|V[x]\,(\mu-\mu_n)\| \leq \frac{1-x}{\tilde{k}(x)\hat{k}(x)}\|\alpha\|\,\|\mu-\mu_n\|.\end{array}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^1 U[x]\,\alpha(t)V[x]\,\mu(t)dt - \int_0^1 U[x]\,\alpha(t)V[x]\,\mu_n(t)dt\right\| = 0.$$

Переходя в (23) к пределу по $n \to \infty$, получим требуемое. □

Покажем сначала, что ряд, составленный из всевозможных подынтегральных выражений из правых частей (22), является функцией, суммируемой с квадратом:

Лемма 4 (о свойствах коэффициентов Фурье, [12]). *Для того, чтобы ортонормированная система $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$, была ОНБ ГП H, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов $f, g \in H$ имели место равенства*

$$\|f\|_H^2 = \sum_{l=1}^{\infty}\langle f, e_l\rangle_H^2\,,\ \langle f, g\rangle_H = \sum_{l=1}^{\infty}\langle f, e_l\rangle_H\,\langle g, e_l\rangle_H\,,$$

и чтобы линейное многообразие, натянутое на эту систему, было всюду плотным в H множеством.

Теорема 2 (Лебега о мажорируемой сходимости, [12]). *Пусть Ω - некоторая область пространства $\mathbb{R}^n$. Если последовательность измеримых функций $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$, сходится п.в. в Ω к некоторой функции $f(x)$ и $|f_l(x)| \leq g(x)$ п.в. где $g(x)$ интегрируема, то $f(x)$ тоже интегрируема и $\lim_{l\to\infty}\int_\Omega f_l dx = \int_\Omega f dx$.*

Следствие 3 (теоремы Фубини, [12]). *Пусть Ω_n - ограниченная n-мерная область переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а Ω_m - ограниченная m-мерная область переменных $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Если $g(x, y)$ измерима в Ω_{m+n}, неотрицательна п.в. и существует один из повторных интегралов в (24) (т.е., например, для п.в. x функция $g(x, y)$ интегрируема по y и функция $\int_{\Omega_m} g(x, y)dy$ интегрируема по x), то функция $g(x, y)$ интегрируема по Ω_{m+n} и, тем самым, существует повторный интеграл и имеют место равенства*

$$(24)\quad \int_{\Omega_{m+n}} g(x,y)dxdy = \int_{\Omega_n}\left(\int_{\Omega_m} g(x,y)dy\right)dx = \int_{\Omega_m}\left(\int_{\Omega_n} g(x,y)dx\right)dy.$$

Кроме того, для п.в. $x \in \Omega_n$ $g(x, y)$ интегрируема по $y \in \Omega_m$ и для п.в. $y \in \Omega_m$ $g(x, y)$ интегрируема по $x \in \Omega_n$. Функции $\int_{\Omega_m} g(x, y)dy$ и $\int_{\Omega_n} g(x, y)dx$ интегрируемы по $x \in \Omega_n$ и $y \in \Omega_m$, соответственно.

Лемма 5 (о ядре оператора чувствительности). *Пусть $\alpha \in C_0^1[0, 1]$, $\tilde{k}, \hat{k} \in K$, $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$ - некоторый ОНБ $L_2(0, 1)$, тогда при $\Xi \to \infty$,*

$$(25)\quad \sum_{l=1}^{\Xi}\left(\int_0^1 U\left[\tilde{k}, .\right]\alpha(\zeta)V\left[\hat{k}, .\right]e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l \xrightarrow{L_2(\square)} V\left[\hat{k}, .\right]^* U\left[\tilde{k}, .\right]\alpha,$$

где $V\left[\hat{k},x\right]^*$ - *сопряженный оператор к* $V\left[\hat{k},x\right]$ *в* $L_2(0,1)$. *Для любого* $x \in D\left(\tilde{k},\hat{k}\right)$ u $\Xi \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\left(\int_0^1 V\left[\hat{k},x\right]^* U\left[\tilde{k},x\right]\alpha(\zeta)e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l\right\| \leq \frac{1-x}{\tilde{k}(x)\hat{k}(x)}\|\alpha\|. \tag{26}$$

Доказательство. Обозначим $U[x] := U\left[\tilde{k},x\right]$,$V[x] := V\left[\hat{k},x\right]$, тогда по определению сопряженного оператора

$$\sum_{l=1}^{\Xi}\left(\int_0^1 U[x]\alpha(\zeta)V[x]e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l = \sum_{l=1}^{\Xi}\left(\int_0^1 V[x]^*U[x]\alpha(\zeta)e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l,$$

и $\|V[x]^*\|_L = \|V[x]\|_L$. По Следствию 1 (о норме оператора производной) для $x \in D\left(\tilde{k},\hat{k}\right)$

$$\|V[x]^*U[x]\alpha\| \leq \|V[x]\|_L \|U[x]\alpha\| \leq \frac{1-x}{\tilde{k}(x)\hat{k}(x)}\|\alpha\|.$$

Так как ряд Фурье элемента из $L_2(0,1)$ сходится по норме $L_2(0,1)$ к этому элементу (Лемма 4), то для любого $x \in D\left(\tilde{k},\hat{k}\right)$

$$\lim_{\Xi\to\infty}\left\|\sum_{l=1}^{\Xi}\left(\int_0^1 V[x]^*U[x]\alpha(\zeta)e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l - V[x]^*U[x]\alpha\right\| = 0, \tag{27}$$

и, кроме того, при любом $x \in D\left(\tilde{k},\hat{k}\right)$ для начального и конечного отрезка ряда Фурье

$$\left\|\sum_{l=1}^{\Xi}\left(\int_0^1 V[x]^*U[x]\alpha(\zeta)e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l\right\| \leq \|V[x]^*U[x]\alpha\| \leq \tfrac{1-x}{\tilde{k}(x)\hat{k}(x)}\|\alpha\|.$$
$$\left\|\sum_{l=\Xi+1}^{\infty}\left(\int_0^1 V[x]^*U[x]\alpha(\zeta)e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l\right\| \leq \tfrac{1-x}{\tilde{k}(x)\hat{k}(x)}\|\alpha\|.$$

Оценивая $\tilde{k},\hat{k}$ снизу, получим для любого $x \in D\left(\tilde{k},\hat{k}\right)$

$$\left\|\sum_{l=1}^{\Xi}\left(\int_0^1 V[x]^*U[x]\alpha(\zeta)e_l(\zeta)d\zeta\right)e_l - V[x]^*U[x]\alpha\right\| \leq \frac{2\|\alpha\|}{k_{\min}^2}. \tag{28}$$

По Теореме 2 (Лебега о мажорируемой сходимости) из (27) и (28), а также по Следствию 3 (из Теоремы Фубини), получим требуемое. □

Существование суммируемого с квадратом ядра позволяет корректно определить интегральный оператор чувствительности.

Определение 10 (оператора чувствительности)**.** *Для* $\tilde{k},\hat{k} \in K, \alpha \in L_2(0,1)$ *определим оператор*

$$\mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right] : \left\{\begin{array}{c} L_2(0,1) \to L_2(0,1) \\ y \mapsto \int_0^1 y(x)V\left[\hat{k},x\right]^* U\left[\tilde{k},x\right]\alpha dx \end{array}\right. .$$

Получим оценку для нормы оператора через оценку нормы ядра:

Следствие 4 (о норме $\mathcal{L}$)**.**

$$\left\|\mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right]\right\|_L \le \left\|V\left[\hat{k},.\right]^* U\left[\tilde{k},.\right]\alpha\right\|_{L_2(\square)} \le \left\|\frac{1-.}{\tilde{k}\hat{k}}\right\|\|\alpha\| \le \left\|\frac{1}{\tilde{k}\hat{k}}\right\|\|\alpha\| \le \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}^2}.$$

Заметим, что, вследствие суммируемости ядра с квадратом, интегральный оператор $\mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right]$ является компактным.

Теорема 3 (о связи невязки с ошибкой)**.** *Пусть* $\alpha \in C_0^1[0,1], \tilde{k},\hat{k} \in K$*, тогда*

$$A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) = \mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right]\left(\tilde{k}-\hat{k}\right) = \mathcal{L}\left[\hat{k},\tilde{k}\right]\left(\tilde{k}-\hat{k}\right).$$

Доказательство. Пусть $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$ - некоторый ОНБ $L_2(0,1)$. Из того, что $A\left(\tilde{k}\right), A\left(\hat{k}\right) \in L_2(0,1)$ следует, что

$$A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_0^1\left(u\left(0,t;\alpha,\tilde{k}\right) - u\left(0,t;\alpha,\hat{k}\right)\right)e_l(t)dt\right)e_l.$$

Обозначим коэффициент Фурье через $\Lambda_l(x) := \int_0^1 U\left[\tilde{k},x\right]\alpha(\zeta)V\left[\hat{k},x\right]e_l(\zeta)d\zeta$, тогда по Следствию 2 (о тождестве Лагранжа с операторами)

$$A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_0^1\left(\tilde{k}(x)-\hat{k}(x)\right)\Lambda_l(x)dx\right)e_l. \tag{29}$$

В силу сходимости ряда Фурье для $A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right)$ по Лемме 4 (о свойствах коэффициентов Фурье)

$$\lim_{\Xi\to\infty}\left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\left(\int_0^1\left(\tilde{k}(x)-\hat{k}(x)\right)\Lambda_l(x)dx\right)e_l\right\| = 0. \tag{30}$$

По Следствию 3 (из Теоремы Фубини), утверждению (26) Леммы 5 (о существовании ядра)

$$\left\|\left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(x)e_l(t)\right\|_{(t)}\right\|_{(x)} = \left\|\left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(x)e_l(t)\right\|_{(x)}\right\|_{(t)} = \left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l e_l\right\|_{L_2(\square)}, \tag{31}$$

и, кроме того, для п.в. $t \in [0,1]$

$$\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l e_l(t) \in L_2(0,1).$$

По НКБ для п.в. $t \in [0,1]$ и некоторой $y \in L_2(0,1)$

$$\left|\int_0^1 y(x)\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(x)e_l(t)dx\right| \le \|y\|\left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(.)e_l(t)\right\|,$$
$$\left\|\int_0^1 y(x)\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(x)e_l(t)dx\right\|_{(t)} \le \|y\|\left\|\left\|\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(x)e_l(t)\right\|_{(x)}\right\|_{(t)},$$

откуда, из (31) и утверждения (25) Леммы 5 (о существовании ядра) для любого $y \in L_2(0,1)$,

$$\lim_{\Xi\to\infty}\left\|\int_0^1 y(x)\sum_{l=\Xi}^{\infty}\Lambda_l(x)e_l dx\right\| = 0. \tag{32}$$

Для любого $y \in L_2(0,1)$ и $\Xi \in \mathbb{N}$ верно соотношение

$$\int_0^1 y(x) \sum_{l=1}^{\Xi} \Lambda_l(x) e_l dx = \sum_{l=1}^{\Xi} \left(\int_0^1 y(x) \Lambda_l(x) dx \right) e_l. \tag{33}$$

Применив (33) в (29), получим:

$$\begin{gathered} A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) = \textstyle\sum_{l=1}^{\Xi} \left(\int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \Lambda_l(x) dx \right) e_l + \\ + \textstyle\sum_{l=\Xi+1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \Lambda_l(x) dx \right) e_l = \\ = \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \textstyle\sum_{l=1}^{\Xi} \Lambda_l(x) e_l dx + \sum_{l=\Xi+1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \Lambda_l(x) dx \right) e_l = \\ = \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \textstyle\sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_l(x) e_l dx - \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \sum_{l=\Xi+1}^{\infty} \Lambda_l(x) e_l dx + \\ + \textstyle\sum_{l=\Xi+1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \Lambda_l(x) dx \right) e_l. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) - \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \textstyle\sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_l(x) e_l dx = \\ = \textstyle\sum_{l=\Xi+1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \Lambda_l(x) dx \right) e_l - \\ - \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \textstyle\sum_{l=\Xi+1}^{\infty} \Lambda_l(x) e_l dx. \end{gathered} \tag{34}$$

Переходя в (34) к пределу при $\Xi \to \infty$ с учетом (30) и (32), получим требуемое. □

Следствие 5 (о липшицевости A)**.** *Для* $\alpha \in C_0^1[0,1]$, $\tilde{k}, \hat{k} \in K$,

$$\begin{gathered} \left\| A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) \right\| \le \frac{\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\| \|\alpha\|}{\sqrt{3} k_{\min}^2} \le \frac{\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\| \|\alpha\|}{k_{\min}^2}, \\ \left\| A\left(\tilde{k}\right) \right\| \le \|A\left(k_{\min}\right)\| + \frac{(k_{\max}+k_{\min})}{\sqrt{3} k_{\min}^2} \|\alpha\|. \end{gathered}$$

3.3. **Липшицевость оператора чувствительности по параметрам.** Для того, чтобы анализировать сходимость алгоритма решения обратной задачи, нам понадобится исследовать гладкость оператора чувствительности.

Лемма 6 (о возмущении U,V по параметру, на основе [13])**.** *Пусть* $\alpha \in C_0^1[0,1]$, $\mu \in L_2(0,1)$, $\tilde{k}, \hat{k} \in K$, $x \in D\left(\tilde{k}, \hat{k}\right)$, *тогда*

$$\left\| U\left[\tilde{k}, x\right] \alpha - U\left[\hat{k}, x\right] \alpha \right\|_{L_2(\square)} \le \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}^2} \left\| \tilde{k} - \hat{k} \right\|, \tag{35}$$

$$\left\| V\left[\tilde{k}, x\right] \mu - V\left[\hat{k}, x\right] \mu \right\|_{L_2(\square)} \le \frac{\|\mu\|}{k_{\min}^2} \left\| \tilde{k} - \hat{k} \right\|. \tag{36}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{u}(x,t) = u\left(x,t;\alpha,\tilde{k}\right)$, $\hat{u}(x,t) = u\left(x,t;\alpha,\hat{k}\right)$. В силу начального условия (4) справедливо тождество

$$\begin{gathered} \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{u}_t(x,t) - \hat{u}_t(x,t)\right) \left(\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t)\right) dt dx = \\ = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left(\tilde{u}(x,1) - \hat{u}(x,1)\right)^2 dx. \end{gathered} \tag{37}$$

На каждом интервале $(x_i, x_{i+1}), i \in \{1, N\}$ верно тождество

$$
\begin{array}{c}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 \left(\left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t) \right)_x - \left(\hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t) \right)_x \right) (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t))\, dtdx \\
= \int_0^1 \tilde{k}(x)\, \tilde{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t))\, dt \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \\
- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 \tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx - \\
- \int_0^1 \hat{k}(x)\, \hat{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t))\, dt \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} + \\
+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 \hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx,
\end{array}
\tag{38}
$$

Суммируя (38) по $i \in \{1, N\}$ с учетом краевых условий и условий на скачках (2), (3), получим

$$
\begin{array}{c}
\int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t) \right)_x - \left(\hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t) \right)_x \right) (\tilde{u}(x,t) - \hat{u}(x,t))\, dtdx \\
= - \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t) - \hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t) \right) (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx.
\end{array}
\tag{39}
$$

Вычитая из тождества (37) тождество (39), с учетом уравнения прямой задачи (1), получим

$$
\begin{array}{c}
0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (\tilde{u}(x,1) - \hat{u}(x,1))^2\, dx + \\
+ \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t) - \hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t) \right) (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx.
\end{array}
$$

Следовательно,

$$
\int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{k}(x)\tilde{u}_x(x,t) - \hat{k}(x)\hat{u}_x(x,t) \right) (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx \le 0.
$$

Разложим $\tilde{k} = \left(\tilde{k} - \hat{k} \right) + \hat{k}$:

$$
\begin{array}{c}
\int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \int_0^1 \tilde{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx + \\
+ \int_0^1 \hat{k}(x) \int_0^1 (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))^2 dtdx \le 0, \\
\int_0^1 \hat{k}(x) \int_0^1 (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))^2 dtdx \le \\
\le - \int_0^1 \left(\tilde{k}(x) - \hat{k}(x) \right) \int_0^1 \tilde{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dtdx \le \\
\le \left\| \tilde{k} - \hat{k} \right\| \left\| \int_0^1 \tilde{u}_x(x,t)\, (\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t))\, dt \right\|_{(x)} \le \\
\le \left\| \tilde{k} - \hat{k} \right\| \left\| \|\tilde{u}_x(x,t)\|_{(t)}\, \|\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t)\|_{(t)} \right\|_{(x)}.
\end{array}
$$

Воспользовавшись оценкой Следствия 1 (о норме оператора производной) и оценив в левой части $\hat{k}(x)$ снизу, получим:

$$
k_{\min} \left\| \|\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t)\|_{(t)} \right\|_{(x)}^2 \le \left\| \tilde{k} - \hat{k} \right\| \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}} \left\| \|\tilde{u}_x(x,t) - \hat{u}_x(x,t)\|_{(t)} \right\|_{(x)}.
$$

По Следствию 3 (из Теоремы Фубини) и обоснованию её применимости из Леммы 1 (о норме производной)

$$
k_{\min} \|\tilde{u}_x - \hat{u}_x\|_{L_2(\square)}^2 \le \left\| \tilde{k} - \hat{k} \right\| \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}} \|\tilde{u}_x - \hat{u}_x\|_{L_2(\square)}. \tag{40}
$$

Сокращая одинаковые сомножители в левой и правой частях и переходя к исходным обозначениям, получим требуемое. Чтобы показать (36), нужно рассмотреть последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0^1[0,1]$, $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ и для неё

получить аналогичную (40) оценку. Далее, воспользовавшись Следствием 1 (о норме V) и Следствием 3 (из Теоремы Фубини), перейти к пределу по n. $\square$

Следствие 6 (о липшицевости ядра по первому параметру)**.** *Пусть* $\tilde{k}, \hat{k}, k \in K$, $\alpha \in C_0^1[0,1]$, *тогда*

$$\left\| V[k,.]^* U\left[\tilde{k},.\right]\alpha - V[k,.]^* U\left[\hat{k},.\right]\alpha \right\|_{L_2(\square)} \le \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}^3}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|.$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\tilde{U}[x] := U\left[\tilde{k},x\right]$, $\hat{U}[x] := U\left[\hat{k},x\right]$, $V[x] := V\left[k,x\right]$,

$$V[x]^*\tilde{U}[x]\alpha - V[x]^*\hat{U}[x]\alpha = V[x]^*\left(\tilde{U}[x]-\hat{U}[x]\right)\alpha.$$

Так как для любого $x \in D(\tilde{k},\hat{k})$

$$\left\| V[x]^*\left(\tilde{U}[x]-\hat{U}[x]\right)\alpha\right\| \le \|V[x]^*\|_L\left(\left\|\tilde{U}[x]\alpha\right\| + \left\|\hat{U}[x]\alpha\right\|\right),$$

то по Следствию 3 (из Теоремы Фубини), нормативному неравенству, соотношению $\|V[k,x]^*\|_L = \|V[k,x]\|_L$ и Следствию 1 (о норме U,V)

$$\begin{aligned}
&\left\| V[x]^*\left(\tilde{U}[x]-\hat{U}[x]\right)\alpha\right\|_{L_2(\square)} = \left\|\left\|V[x]^*\left(\tilde{U}[x]-\hat{U}[x]\right)\alpha(t)\right\|_{(t)}\right\|_{(x)} \le \\
&\le \left\|\|V[x]^*\|_L\left\|\left(\tilde{U}[x]-\hat{U}[x]\right)\alpha(t)\right\|_{(t)}\right\|_{(x)} \le \\
&\le \tfrac{1}{k_{\min}}\left\|\left\|\left(\tilde{U}[x]-\hat{U}[x]\right)\alpha(t)\right\|_{(t)}\right\|_{(x)} \le \tfrac{1}{k_{\min}}\left\|\tilde{U}[x]\alpha-\hat{U}[x]\alpha\right\|_{L_2(\square)}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Объединяя (41) и утверждение Леммы 6 (о возмущении операторов U,V), получим требуемое. $\square$

Следствие 7 (о производной Фреше оператора)**.** *Пусть* $\tilde{k}, \hat{k} \in K$, $\alpha \in C_0^1[0,1]$, *тогда*

$$A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) = A'\left(\hat{k}\right)\left(\tilde{k}-\hat{k}\right) + \omega\left(\tilde{k},\hat{k}\right),$$

где

$$A'\left(\hat{k}\right) = \mathcal{L}\left[\hat{k},\hat{k}\right],\ \left\|\omega\left(\tilde{k},\hat{k}\right)\right\| \le \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}^3}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|^2.$$

Доказательство. По Теореме 3 (о связи невязки с ошибкой)

$$A\left(\tilde{k}\right) - A\left(\hat{k}\right) = \mathcal{L}\left[\hat{k},\hat{k}\right]\left(\tilde{k}-\hat{k}\right) + (\mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right] - \mathcal{L}\left[\hat{k},\hat{k}\right])(\tilde{k}-\hat{k}).$$

Вводя обозначение $\omega\left(\tilde{k},\hat{k}\right)$ и оценивая норму разности интегральных операторов через норму разности их ядер по Следствию 6 (о липшицевости ядра по первому параметру), получим

$$\begin{aligned}
&\omega\left(\tilde{k},\hat{k}\right) := \left(\mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right] - \mathcal{L}\left[\hat{k},\hat{k}\right]\right)\left(\tilde{k}-\hat{k}\right), \\
&\left\|\omega\left(\tilde{k},\hat{k}\right)\right\| \le \left\|\mathcal{L}\left[\tilde{k},\hat{k}\right] - \mathcal{L}\left[\hat{k},\hat{k}\right]\right\|_{L_2(\square)}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\| \le \tfrac{\|\alpha\|}{k_{\min}^3}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|^2.
\end{aligned}$$

$\square$

4. Доказательство сходимости алгоритма проекции градиента

Так как возмущение значения оператора прямой задачи связано с возмущением его аргумента компактным оператором, то "устойчиво" удастся восстановить только "часть" решения. Поэтому в качестве алгоритма решения обратной задачи будем рассматривать алгоритм минимизации функционала невязки операторного уравнения (Определение 11) на множестве $Q := R \cap K$, где для некоторых $k_0 \in K$ и конечномерного подпространства Y кусочно-постоянных функций S определено линейное многообразие $R := k_0 + Y$.

Определение 11 (функционала невязки)**.**

$$J : \begin{cases} K \to \mathbb{R} \\ k \mapsto \|A(k) - f\|^2 \end{cases} .$$

Для построения градиентного алгоритма минимизации функционала необходимо вычислить его градиент:

Лемма 7 (о градиенте, на основе [1])**.** *Пусть $k, k+y \in Q$, $y \in Y$, Y - конечномерное подпространство пространства кусочно-постоянных функций S, тогда*

$$J(k+y) - J(k) = \langle \nabla_Y J(k), y \rangle + \omega(k+y, k),$$

где

$$\nabla_Y J(k) = 2P_Y A'(k)^* (A(k) - f) =$$
$$= 2P_Y \int_0^1 U[k,x]\alpha(t)V[k,x](A(k) - f)(t)dt,$$
$$|\omega(k+y,k)| \le \left(\frac{2\|\alpha\|}{k_{\min}^3} \left(\|A(k_{\min})\| + \frac{(k_{\max}+k_{\min})}{\sqrt{3}k_{\min}^2}\|\alpha\| + \|f\| \right) + \frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^4} \right) \|y\|^2,$$

и P_Y - ортогональный проектор на Y в $L_2(0,1)$.

Доказательство.

$$J(k+y) - J(k) = \|A(k+y) - f\|^2 - \|A(k) - f\|^2 =$$
$$= \langle A(k+y) - f, A(k+y) - f \rangle - \langle A(k) - f, A(k) - f \rangle =$$
$$= \langle A(k) + \mathcal{L}[k+y,k]y - f, A(k) + \mathcal{L}[k+y,k]y - f \rangle - \langle A(k) - f, A(k) - f \rangle =$$
$$= 2\langle \mathcal{L}[k+y,k]y, A(k) - f \rangle + \langle \mathcal{L}[k+y,k]y, \mathcal{L}[k+y,k]y \rangle =$$
$$= 2\langle \mathcal{L}[k,k]y, A(k) - f \rangle + \omega(k+y,k) = 2\langle y, \mathcal{L}[k,k]^*(A(k) - f) \rangle + \omega(k+y,k) =$$
$$= 2\langle y, P_Y \mathcal{L}[k,k]^*(A(k) - f) \rangle + \omega(k+y,k),$$

где

$$\omega(k+y,k) := 2\langle (\mathcal{L}[k+y,k] - \mathcal{L}[k,k])y, A(k) - f \rangle + \langle \mathcal{L}[k+y,k]y, \mathcal{L}[k+y,k]y \rangle. \quad (42)$$

По Следствию 4 (о норме $\mathcal{L}$)

$$\langle \mathcal{L}[k+y,k]y, \mathcal{L}[k+y,k]y \rangle \le \|\mathcal{L}[k+y,k]\|_L^2 \|y\|^2 \le \frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^4}\|y\|^2. \quad (43)$$

Последовательно применяя НКБ, Следствие 6 (о липшицевости ядра по первому параметру) и Следствие 5 (о липшицевости A), получим:

$$\langle (\mathcal{L}[k+y,k] - \mathcal{L}[k,k])y, A(k) - f \rangle \le$$
$$\le \|\mathcal{L}[k+y,k] - \mathcal{L}[k,k]\|_L \|y\| \|A(k) - f\| \le \quad (44)$$
$$\le \|y\|^2 \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}{}^3} \left(\|A(k_{\min})\| + \frac{k_{\max}+k_{\min}}{\sqrt{3}k_{\min}^2}\|\alpha\| + \|f\| \right).$$

Объединяя (42), (43) и (44), получим оценку

$$|\omega(k+y,k)| \le \left(\frac{2\|\alpha\|}{k_{\min}^3} \left(\|A\left(k_{\min}\right)\| + \frac{k_{\max}+k_{\min}}{\sqrt{3}k_{\min}^2}\|\alpha\| + \|f\| \right) + \frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^4} \right) \|y\|^2.$$

Из соотношения

$$\mathcal{L}[k,k]^* z = \int_0^1 V[k,x]^* U[k,x]\alpha(t)z(t)dt = \int_0^1 U[k,x]\alpha(t)V[k,x]z(t)dt$$

получим второе выражение для градиента. □

Определение 12 (алгоритма проекции градиента с постоянным параметром)**.** *Пусть задано линейное многообразие R и начальное приближение $k_1 \in K$. Определим рекурсивно*

$$k_{n+1} := P_Q\left(k_n - 2\gamma P_Y A'\left(k_n\right)^* \left(A\left(k_n\right) - f\right)\right), \tag{45}$$

где P_Q - метрический проектор на Q.

Вследствие приближенного характера результатов решения краевых задач на ЭВМ, напрямую получить следующее приближение по формуле (45) невозможно, за исключением узкого круга случаев, поэтому последовательность $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ будет порождаться по формуле

$$k_{n+1} := P_Q\left(k_n - 2\gamma\left(P_Y A'\left(k_n\right)^* \left(A\left(k_n\right) - f\right) + W_n\right)\right), \tag{46}$$

где W_n - погрешность вычисления градиента на n-ой итерации.

Лемма 8 (о проекциях)**.** *Если $k_* \in L_2(0,1)$, то $P_Q k_* = P_Q P_R k_*$.*

Теорема 4 (о метрической проекции, [15])**.** *Любое непустое и выпуклое подмножество Q в ГП H является нерастягивающим ретрактом H посредством нерастягивающей ретракции P_Q.*

Целью дальнейшего анализа будет выяснение того, как минимизация функционала невязки связана с убыванием ошибки в решении обратной задачи. Основой анализа сходимости является представление компактного оператора чувствительности в виде суммы невырожденного, на некотором конечномерном подпространстве области определения, оператора и остатка, который можно оценить на основе липшицевости оператора чувствительности. Конкретным приложением этой идеи к обратной задаче теплопроводности является следующая

Лемма 9 (об ошибке итераций)**.** *Если $k_* \in K$ такова, что $f = A(k_*) + \delta f$, то для последовательности, порожденной по формуле* (46)*, верна оценка*

$$\begin{aligned}\|k_{n+1} - P_R k_*\| \le \psi\left(k_n,\gamma\right)\|k_n - P_R k_*\| + 2\gamma\tfrac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\|k_n - P_R k_*\|^2 + \\ +2\gamma\tfrac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^4}\|\eta\| + 2\gamma\tfrac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\|\eta\|^2 + 2\gamma\|W_n\| + 2\gamma\|P_Y A'(k_n)^*\delta f\| + \|\xi\|,\end{aligned}$$

где для некоторого $\{e_l\}_{l=1}^{\dim Y}$ - ОНБ Y определены:

$$\psi\left(k_n,\gamma\right) := \max_{\lambda\in Sp(\mathcal{H}[k])}|1-2\lambda\gamma|,\ \eta := k_* - P_R k_*,\ \xi := P_Q k_* - P_R k_*, \tag{47}$$

$$\mathcal{H}[k] := \left\{\langle A'(k)e_j, A'(k)e_i\rangle\right\}_{i,j=1}^{\dim Y}. \tag{48}$$

Доказательство. По определению $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\|k_{n+1}-P_Rk_*\|=\left\|P_Q\left(k_n-2\gamma\left(P_Y\left(A'(k_n)^*\left(A(k_n)-f+\delta f\right)\right)+W_n\right)\right)-P_Rk_*\right\|.$$

По Лемме 8 (о проекциях): $P_Rk_*=P_QP_Rk_*-\xi$,

$$\begin{gathered}\|k_{n+1}-P_Rk_*\|\le\left\|P_Q\left(k_n-2\gamma\left(P_Y\left(A'(k_n)^*\left(A(k_n)-f+\delta f\right)\right)+W_n\right)\right)-\right.\\ \left.-P_QP_Rk_*\right\|+\|\xi\|.\end{gathered}$$

По Теореме 4 метрический проектор на выпуклое замкнутое множество является нерастягивающим, откуда

$$\|k_{n+1}-P_Rk_*\|\le\left\|k_n-2\gamma\left(P_Y\left(A'(k_n)^*\left(A(k_n)-f+\delta f\right)\right)+W_n\right)-P_Rk_*\right\|+\|\xi\|.$$

По Теореме 3 (о связи невязки с ошибкой)

$$A(k_n)-f=\mathcal{L}[k_*,k_n](k_n-k_*)=\mathcal{L}[k_n,k_*](k_n-k_*),$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\|k_{n+1}-P_Rk_*\|\le\left\|k_n-P_Rk_*-2\gamma P_YA'(k_n)^*\mathcal{L}[k_*,k_n](k_n-k_*)-\right.\\ \left.-2\gamma\left(W_n+P_YA'(k_n)^*\delta f\right)\right\|+\|\xi\|\le\\ \le\left\|k_n-P_Rk_*-2\gamma P_YA'(k_n)^*A'(k_n)(k_n-k_*)-\right.\\ \left.-2\gamma P_YA'(k_n)^*\left(\mathcal{L}[k_*,k_n]-A'(k_n)\right)(k_n-k_*)-\right.\\ \left.-2\gamma\left(W_n+P_YA'(k_n)^*\delta f\right)\right\|+\|\xi\|\le\\ \le\left\|P_Y\left(I-2\gamma A'(k_n)^*A'(k_n)\right)P_Y(k_n-P_Rk_*)+\right.\\ \left.+2\gamma P_YA'(k_n)^*A'(k_n)\eta-2\gamma P_YA'(k_n)^*\left(\mathcal{L}[k_*,k_n]-A'(k_n)\right)(k_n-k_*)-\right.\\ \left.-2\gamma\left(W_n+P_YA'(k_n)^*\delta f\right)\right\|+\|\xi\|\le\\ \le\left\|P_Y\left(I-2\gamma A'(k_n)^*A'(k_n)\right)P_Y(k_n-P_Rk_*)\right\|+\\ +2\gamma\left\|P_YA'(k_n)^*A'(k_n)\eta\right\|+\\ +2\gamma\left\|P_YA'(k_n)^*\left(\mathcal{L}[k_*,k_n]-A'(k_n)\right)(k_n-k_*)\right\|+\\ +2\gamma\left\|W_n+P_YA'(k_n)^*\delta f\right\|+\|\xi\|,\end{gathered}\tag{49}$$

где I - тождественный оператор. Оценим слагаемые правой части (49) по очереди.

$$\left\|P_Y\left(I-2\gamma A'(k_n)^*A'(k_n)\right)P_Y(k_n-P_Rk_*)\right\|\le\psi(k_n,\gamma)\|k_n-P_Rk_*\|.\tag{50}$$

Для второго слагаемого по Следствию 4 (о норме $\mathcal{L}$):

$$\left\|P_YA'(k_n)^*A'(k_n)\eta\right\|\le\left\|A'(k_n)^*\right\|_L\|A'(k_n)\|_L\|\eta\|\le\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^4}\|\eta\|.\tag{51}$$

Для третьего слагаемого по Следствиям 4 (о норме $\mathcal{L}$) и 6 (о липшицевости ядра по первому параметру)

$$\begin{gathered}\left\|P_YA'(k_n)^*\left(\mathcal{L}[k_*,k_n]-A'(k_n)\right)(k_n-k_*)\right\|\le\\ \le\|A'(k_n)\|_L\|\mathcal{L}[k_*,k_n]-A'(k_n)\|_L\|k_n-k_*\|\le\\ \le\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\|k_n-k_*\|^2=\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\left(\|k_n-P_Rk_*\|^2+\|\eta\|^2\right).\end{gathered}\tag{52}$$

Сопоставляя (49), (50), (51), (52), получим требуемое. □

Оценка, полученная в Лемме 9, может использоваться для анализа сходимости алгоритма. Однако наличие зависимости от текущей итерации в коэффициентах оценки усложняет анализ сходимости. Для того чтобы избавиться от этой зависимости нам понадобится следующая

Лемма 10 (о разнице спектров)**.** *Если* $\hat{k}, \tilde{k} \in K$, $\alpha \in C_0^1[0,1]$, *то*

$$\left|\psi\left(\tilde{k},\gamma\right) - \psi\left(\hat{k},\gamma\right)\right| \le 8\gamma dim Y \frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|.$$

Доказательство. Для любых самосопряженных неотрицательно определенных матриц A и B размерности $\dim Y$ на $\dim Y$, верно

$$|\sigma_l(A) - \sigma_l(B)| \le \|A-B\|_2,\ l \in \{1, dim A\},$$

где $\sigma_l(A) = \sqrt{\lambda_l\left(A^*A\right)}$ и $\lambda_l\left(A^*A\right)$ - собственные числа матрицы A^*A, $\|A\|_2 = \max\limits_{l\in\{1,\dim A\}} \sigma_l(A)$. Так как $\sigma_l(A) = \lambda_l(A)$, то из эквивалентности матричных норм

$$|\lambda_l(A) - \lambda_l(B))| \le \|A-B\|_2 \le \dim Y \max_{i,j\in\{1,\dim A\}}\{|A_{ij}-B_{ij}|\}.$$

Обозначим $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H}(\tilde{k})$, $\hat{\mathcal{H}} := \mathcal{H}(\hat{k})$, тогда

$$\left|\lambda_l\left(\tilde{\mathcal{H}}\right) - \lambda_l\left(\hat{\mathcal{H}}\right)\right| \le \dim Y \max_{i,j\in\{1,dim Y\}}\left\{\left|\tilde{\mathcal{H}}_{ij} - \hat{\mathcal{H}}_{ij}\right|\right\},\ l \in \{1,\dim Y\}, \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\left|\tilde{\mathcal{H}}_{ij} - \hat{\mathcal{H}}_{ij}\right| \le &\left|\left\langle A'\left(\hat{k}\right)e_i, \left(A'\left(\hat{k}\right) - A'\left(\tilde{k}\right)\right)e_j\right\rangle\right| + \\ &+ \left|\left\langle \left(A'\left(\hat{k}\right) - A'\left(\tilde{k}\right)\right)e_i, A'\left(\tilde{k}\right)e_j\right\rangle\right|.\end{aligned} \tag{54}$$

Исследуем каждое слагаемое по отдельности. Для $u \in L_2(0,1)$:

$$\begin{aligned}&\left\langle u, \left(A'\left(\hat{k}\right) - A'\left(\tilde{k}\right)\right)e_j\right\rangle = \\ &= \int_0^1 e_j(x)\int_0^1 U\left[\hat{k},x\right]\alpha(t)\left(V\left[\hat{k},x\right] - V\left[\tilde{k},x\right]\right)u(t)dtdx + \\ &+ \int_0^1 e_j(x)\int_0^1 \left(U\left[\hat{k},x\right] - U\left[\tilde{k},x\right]\right)\alpha(t)V\left[\tilde{k},x\right]u(t)dtdx.\end{aligned} \tag{55}$$

Оценим слагаемые (55) по отдельности. По Следствию 1 (о норме U) и Лемме 6 (о возмущении V по параметру):

$$\int_0^1 e_i(x)\int_0^1 U\left[\hat{k},x\right]\alpha(t)\left(V\left[\hat{k},x\right] - V\left[\tilde{k},x\right]\right)u(t)dtdx \le \frac{\|\alpha\|\|u\|}{k_{\min}^3}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|.$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в правой части (55). Объединяя эти оценки с (55), получаем:

$$\left|\left\langle u, \left(A'\left(\hat{k}\right) - A'\left(\tilde{k}\right)\right)e_j\right\rangle\right| \le 2\frac{\|\alpha\|\|u\|}{k_{\min}^3}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|. \tag{56}$$

По Следствию 4 (о норме $\mathcal{L}$): $\left\|A'\left(\hat{k}\right)e_i\right\| \le \frac{\|\alpha\|}{k_{\min}^2}$. Подставляя $A'\left(\hat{k}\right)e_i$ в (56) в качестве u, получим

$$\left|\left\langle A'\left(\hat{k}\right)e_i, \left(A'\left(\hat{k}\right) - A'\left(\tilde{k}\right)\right)e_j\right\rangle\right| \le 2\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|. \tag{57}$$

Сопоставляя (54) с (57) и (53), имеем

$$\left|\lambda_l\left(\tilde{\mathcal{H}}\right) - \lambda_l\left(\hat{\mathcal{H}}\right)\right| \le \delta\lambda := 4dim Y\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\left\|\tilde{k}-\hat{k}\right\|.$$

Так как $\tilde{\mathcal{H}}$ - неотрицательно определенная матрица, то

$$\mathrm{Sp}\left(\tilde{\mathcal{H}}\right) \subset \left[\max\{0, \lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right) - \delta\lambda\},\ \lambda_{dim Y}\left(\hat{\mathcal{H}}\right) + \delta\lambda\right] =: Sp_2.$$

Если $\{\lambda_i\}_{i=1}^{dimY}$ - собственные числа матрицы $\hat{\mathcal{H}}$, упорядоченные по возрастанию, то

$$\psi\left(\hat{k},\gamma\right)=\begin{cases}1-2\gamma\lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right) & 0<\gamma\leq\frac{1}{\lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)}\\ 2\gamma\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)-1 & \gamma>\frac{1}{\lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)}\end{cases}.$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right)\geq\delta\lambda$

$$\psi\left(\tilde{k},\gamma\right)=\max_{\lambda\in Sp\left(\tilde{\mathcal{H}}\right)}|1-2\lambda\gamma|\leq\max_{\lambda\in Sp_2}|1-2\lambda\gamma|\leq 2\gamma\delta\lambda+\psi\left(\hat{k},\gamma\right).$$

Аналогично, если $\lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right)<\delta\lambda$, то

$$\psi\left(\tilde{k},\gamma\right)\leq\begin{cases}1 & 0<\gamma\leq\frac{1}{\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\delta\lambda}\\ 2\gamma(\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\delta\lambda)-1 & \gamma>\frac{1}{\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\delta\lambda}\end{cases}\leq$$
$$\leq 2\gamma\delta\lambda+\begin{cases}1-2\gamma\lambda_1\left(\hat{\mathcal{H}}\right) & 0<\gamma\leq\frac{1}{\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\delta\lambda}\\ 2\gamma\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)-1 & \gamma>\frac{1}{\lambda_{dimY}\left(\hat{\mathcal{H}}\right)+\delta\lambda}\end{cases}\leq$$
$$\leq 2\gamma\delta\lambda+\psi\left(\hat{k},\gamma\right).$$

Меняя местами $\tilde{k}$ и $\hat{k}$ и повторяя доказательство, получим требуемое. □

Лемма 11 (об анализе рекуррентных неравенств)**.** *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *подчиняется соотношениям*

$$0\leq\varepsilon_{n+1}\leq a\varepsilon_n+b\,\varepsilon_n^2+c,n\in\mathbb{N},\tag{58}$$

$$a<1,\ (1-a)^2-4bc>0,\ \varepsilon_1<\frac{(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b},\tag{59}$$

тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varepsilon_n\leq\frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b}.\tag{60}$$

Доказательство. Предположим сначала, что

$$\varepsilon_1\leq\frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b},$$

тогда

$$\varepsilon_{n+1}\leq\frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b},$$

и верно (60). Предположим, далее, что начальное приближение выбрано так, чтобы

$$\frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b}<\varepsilon_1<\frac{(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b},$$

тогда при

$$\frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b}<\varepsilon_n<\frac{(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b},$$

верно неравенство $\epsilon_n < \epsilon_{n-1}$. Теперь выясним, существует ли для любого n такое B, что

$$\frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b} < B \le \varepsilon_n < \varepsilon_1 < \frac{(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b}. \tag{61}$$

Пусть это так, тогда

$$(a-1)\varepsilon_n + b\varepsilon_n^2 + c < \max\left\{(a-1)\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_1^2 + c, (a-1)B + b\,B^2 + c\right\} < 0. \tag{62}$$

Подставляя (62) в (58), получим

$$\begin{gathered}\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n + \left((a-1)\varepsilon_n + b\,\varepsilon_n^2 + c\right) \le \\ \le \varepsilon_n + \max\left\{(a-1)\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_1^2 + c, (a-1)B + b\,B^2 + c\right\} \le \\ \le \varepsilon_1 + n\max\left\{(a-1)\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_1^2 + c, (a-1)B + b\,B^2 + c\right\},\end{gathered}$$

и при

$$n > \frac{B-\epsilon_1}{\max\left\{(a-1)\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_1^2 + c, (a-1)B + b\,B^2 + c\right\}},$$

получится противоречие с неравенством $\varepsilon_n \ge B$ цепочки (61). Следовательно, $B \le \frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b}$, и в этом случае также верно (60). □

Получим оценку, коэффициенты которой не зависят от текущей итерации:

Теорема 5 (о локальной сходимости)**.** *Пусть $k_* \in K$ такова, что $f = A(k_*) + \delta f$ и*

$$\|W_n\| < \hat{W}, \tag{63}$$

тогда верна оценка скорости сходимости:

$$\|k_{n+1} - P_R k_*\| \le a\,\|k_n - P_R k_*\| + b\,\|k_n - P_R k_*\|^2 + c. \tag{64}$$

Если, кроме того,

$$\begin{gathered}a < 1,\ (1-a)^2 - 4bc > 0, \\ \|k_1 - P_R k_*\| \le \tfrac{(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b},\end{gathered}$$

где (в обозначениях Леммы 9)

$$a = \psi(P_Q k_*, \gamma) + 8\gamma dim Y \frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\|\xi\|,\ b = 2\gamma\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}(1 + 4dim Y), \tag{65}$$

$$c = 2\gamma\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^4}\|\eta\| + 2\gamma\frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\|\eta\|^2 + 2\gamma\hat{W} + 2\gamma\frac{\|\alpha\|\|\delta f\|}{k_{\min}^2} + \|\xi\|, \tag{66}$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|k_n - P_R k_*\| \le \frac{(1-a)-\sqrt{(1-a)^2-4bc}}{2b}.$$

Доказательство. По Лемме 10 (о разнице спектров):

$$\begin{gathered}\psi(k_n, \gamma) \le \psi(P_Q k_*, \gamma) + 8\gamma dim Y \tfrac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\,\|P_Q k_* - k_n\| \le \\ \le \psi(P_Q k_*, \gamma) + 8\gamma dim Y \tfrac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\,(\|P_R k_* - k_n\| + \|\xi\|).\end{gathered} \tag{67}$$

По Лемме 4 (о норме $\mathcal{L}$)

$$\|P_Y A'(k_n)^* \delta f\| \le \frac{\|\alpha\|\|\delta f\|}{k_{\min}^2}. \tag{68}$$

Подставляя (67), (68), (63) в утверждение Леммы 9 (об ошибке итераций) и вводя обозначения (65), (66), получим (64). По Лемме 11 (об анализе рекуррентных неравенств) получим требуемое. □

5. Заключение

Обратная задача об определении кусочно-постоянного коэффициента температуропроводности по данным измерений на границе области может быть сведена к операторному уравнению посредством введения оператора прямой задачи. Оператор прямой задачи обладает компактным оператором чувствительности, связывающим вариацию значения оператора с вариацией его аргументов. В частности, его производная Фреше компактна.

В статье рассмотрен алгоритм проекции градиента на подмножество допустимых коэффициентов Q конечномерного линейного многообразия $R := k_0 + Y$, где $k_0 \in K$, Y - конечномерное подпространство кусочно-постоянных функций. Показано, что если начальное приближение для градиентного алгоритма находится в достаточно малой окрестности точного решения, то итерации сходятся к его ещё более узкой окрестности.

На точность восстановления коэффициента градиентными методами (ширину целевой окрестности и ширину начальной окрестности) влияют такие факторы как: точность данных обратной задачи, точность вычисления градиента, ошибка в выборе общего вида предполагаемого решения (т.е. ошибка в выборе конечномерного линейного многообразия R), характер убывания сингулярного спектра сужений оператора чувствительности на заданные конечномерные подпространства.

Список литературы

[1] В. В. Пененко, *Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики*, глава Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы, 61–77, Наука, Новосибирск, 1975.

[2] О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев, *Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена*, Наука, Москва, 1988.

[3] С. И. Кабанихин, К. Т. Искаков, *Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач*, Издательство НГУ, Новосибирск, 2001.

[4] С. И. Кабанихин, М. А. Бектемесов, А. Т. Нурсеитова, *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*, Международный фонд обратных задач, Алматы-Новосибирск, 2006.

[5] М. Х. Хайруллин, Р. С. Хисамов, М. Н. Шамсиев, Р. Г. Фархуллин, *Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2006.

[6] Б. Рысбайулы, А. Т. Байманкулов, А. О. Исмайлов, *Разностный метод определения коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний*, Вестник НАН РК **2** (2008), 7–9.

[7] А. М. Денисов, *Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **22**:4 (1982), 858–864.

[8] Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр, *Некорректные обратные задачи теплопроводности*, Мир, Москва, 1989.

[9] А. В. Пененко, *Обнаружение источников загрязнений с помощью вариационных методов*, Выч. тех. **13** (2008), Спец.выпуск ч.3, 44–50.

[10] А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, А. И. Козлов, *Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений*, ЛКИ, Москва, 2007.

[11] Л. И. Камынин, *О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **28**:4 (1964), 721–744.

[12] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976.

[13] A. Hasanov, P. DuChateau, and B. Pektas, *An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **14**:4 (2006), 1–29.

[14] Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1988.

[15] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge studies inadvanced mathematics, **28**, Cambridge unversity press, Cambridge, 1990.

Алексей Владимирович Пененко
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: a.penenko@gmail.com

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.199–С.206 (2010)

УДК 519.633
MSC 35L05, 65M32

АКУСТИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ МЕТОДАМИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И ОБРАЩЕНИЕМ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин

Abstract. We consider 2D inverse acoustic problem. Linearization method and wave inversion approach in the time-domain are discussed. Numerical results are presented.

Keywords: inverse acoustic problem, linearization.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее эффективных способов определения неоднородных объектов (в воде, в воздухе, под поверхностью Земли) является акустическое зондирование, которое эффективно применяется в геофизике (сеймсоразведка, геотомография), в медицине (УЗИ), зондировании атмосферы. Использование не только характерных частот источников и приемников, но и амплитуды (сейсмограмм) позволяет повысить разрешающую способность акустического зондирования. В данной работе мы покажем это на примере линеаризованной двумерной задачи определения скорости распространения волн в среде в случае, когда источники и приемники расположены на части границы исследуемой

Kabanikhin, S.I. and Shishlenin, M.A., Direct methods for solving inverse acoustic problems.

© 2010 Кабанихин С.И., Шишленин М.А..

Работа С.И. Кабанихина выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08-01-00312.

Работа М.А. Шишленина выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН "Обратные и экстремальные задачи электромагнитного и акустического зондирования Мирового океана".

Поступила 24 ноября 2009 г.

среды $x = 0$. Переменная x, называемая далее выводящей переменной, соответствует глубине проникновения (в геофизике и в морской акустике). Среда и находящиеся в ней объекты предполагаются гладкими по горизонтальной переменной y. Мы покажем, что данное предположение позволяет локализовать и определить свойства объектов достаточно общей структуры.

В качестве основного примера рассмотрена линеаризованная двумерная обратная задача определения скорости распространения волн в среде [1]. Рассмотрен случай, когда акустические источники и приемники расположены на поверхности воды, исследуемая неоднородность локализована под водой. Вмещающая водная среда предполагается горизонтально слоистой. Показано, что структура вмещающей среды (акустический импеданс) может быть восстановлена на первом предварительно на основе решения одномерной обратной задачи акустики (работы А.С. Алексеева, В.И. Добринского, A. Bamberger, G. Chavent, P. Lailly) . На втором этапе решается двумерная обратная линеаризованная задача. Задача решается при помощи метода регуляризации в классе функций, представимых в виде конечного ряда Фурье по горизонтальной переменной. Показано, что количество членов ряда Фурье, с одной стороны, является параметром регуляризации обратной задачи, а с другой стороны, определяет количество необходимых приемников для однозначного определения исследуемой неоднородности. Разработан алгоритм численного решения и программа на языке C++. Проведена серия тестовых расчетов.

Разработан метод оконтуривания неоднородности на основе обращения волнового поля. Метод основан на идее миграции. Показано, что варьируя местоположение источников и приемников, можно добиться достаточно четкой визуализации неизвестного объекта. Метод обладает численной устойчивостью и может быть обобщен на случай трехмерно-неоднородных сред.

Рассматривается задача определения скорости распространения волн в полупространстве $(z, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ в случае, когда скорость представима в виде $c^2(z, y) = c_0^2(z) + c_1(z, y)$, функция c_1 много меньше c_0^2 и отлична от нуля лишь в конечной области полупространства. Здесь $\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел. Будем исследовать линеаризованный вариант обратной задачи, для которого построим конечно-разностный алгоритм решения обратной задачи [2, 3].

2. Постановка задачи

Предположим, что скорость распространения волн в полупространстве $(z, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ имеет следующую структуру:

$$c^2(z, y) = c_0^2(z) + c_1(z, y). \tag{1}$$

Предположим также, что функции c_0 и c_1 удовлетворяют следующим условиям.

Условие **I**:

1) $c_0 \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $c'(+0) = 0$;

2) существуют постоянные M_1, M_2, $M_3 \in \mathbb{R}_+$ такие, что при всех $z \in \mathbb{R}_+$ выполнены неравенства

$$0 < M_1 \le c_0(z) \le M_2, \qquad \|c_0\|_{C^2(\mathbb{R}_+)} < M_3. \tag{2}$$

Условие **II**:

1) функция $c_1(z,y)$ отлична от нуля лишь в области $(z,y) \in (0,h) \times K_n(D_1)$,

$$K_n(D_1) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y_j| < D_1,\ j = \overline{1,n}\},$$

где $h, D_1 \in \mathbb{R}_+$ — фиксированные числа;

2) $c_1(z,y) \in C^2((0,h) \times K_n(D_1))$,

$$\alpha = \|c_1\|_{C^2((0,h)\times K_n(D_1))}, \qquad \alpha \ll M_1. \tag{3}$$

Предположим, что до момента времени $t = 0$ среда находилась в покое:

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad (z,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{4}$$

и предположим, что в момент времени $t = 0$ на границу $z = 0$ полупространства $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ падает волна заданной формы

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = r(y)\delta(t), \qquad y \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

которая возбуждает в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ волновой процесс

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(z,y)\Delta_{z,y}u, \qquad (z,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Пусть известен след решения прямой задачи (4)–(6) на границе $z = 0$:

$$u\big|_{z=0} = f(y,t), \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Обратной будем называть задачу определения $c(z,y)$ из соотношений (4)–(7) (в предположении, что $c_0(z)$ известна и выполняются условия (1), **I**, **II**).

3. Линеаризация

Одной из основных особенностей исследованных ранее линеаризованных обратных задач являлось то обстоятельство, что дополнительную информацию (4) требовалось задавать на всей гиперплоскости $z = 0$. Прежде чем приступить к линеаризации обратной задачи (4)–(7), покажем, как на основе принципа конечной области зависимости решения гиперболического уравнения от его коэффициентов и от начальных и граничных условий можно локализовать обратную задачу, т. е. ограничиться заданием дополнительной информации (7) лишь на некотором ограниченном подмножестве гиперплоскости $z = 0$ и для некоторого конечного интервала времени [1].

В силу предположения (1) и условий **I** и **II** минимальное возможное время, за которое возмущение, порожденное падающей волной (5), успеет достигнуть глубины h при всех $y \in \mathbb{R}^n$ и вернуться на поверхность $z = 0$, равно $T_h = 2h/(M_1 - \alpha)$.

Следовательно, волны, отраженные от неоднородности, соответствующей функции $c_1(z,y)$, в силу финитности этой функции, а также в силу условий **I** и **II** не успевают за время T_h достигнуть гиперплоскостей $|y_j| = D$, $j = \overline{1,n}$, где $D = D_1 + T_h(M_2 + \alpha)$.

Предположим, что падающая волна (5) является плоской волной на некотором участке поверхности $z = 0$, простирающемся над областью $(n+1)$-мерной неоднородности, т. е.

$$r(y)\big|_{y\in K_n(D)} \equiv r_0, \qquad r_0 = \text{const}, \quad r_0 \neq 0. \tag{8}$$

Тогда в силу сказанного выше обратную задачу (4)–(7) можно заменить следующей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(z,y)\Delta_{z,y}u, \qquad (z,y) \in (0,h) \times K_n(D), \quad t \in (0,T_h); \tag{9}$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = r_0\delta(t); \tag{10}$$

$$u\big|_{y_j=D} = u\big|_{y_j=-D}, \qquad z \in (0,h), \quad t \in (0,T_h), \quad j = \overline{1,n}; \tag{11}$$

$$u\big|_{z=0} = f(y,t), \qquad y \in K_n(D), \quad t \in (0,T_h). \tag{12}$$

Используя предположение (3) о малости c_1, проведем линеаризацию [1] обратной задачи (9)–(12). С этой целью представим решение $u(z,y,t)$ начально-краевой задачи (9)–(11) в виде

$$u(z,y,t) = u_0(z,t) + u_1(z,y,t),$$

где $u_0(z,t)$ есть решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c_0^2(z)\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \qquad z \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+; \tag{13}$$

$$u_0\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial z}\Big|_{z=0} = r_0\delta(t). \tag{14}$$

Отметим, что при $z = 0$ решение задачи (13), (14) тождественно совпадает с решением (4)–(6) в случае, если

$$r(y) = r_0, \qquad t \in (0,T_h), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus K_n(2D).$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $c_1\,\Delta_{z,y}u_1$, для определения $u_1(z,y,t)$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_0^2(z)\,\Delta_{z,y}u_1 + c_1(z,y)\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \quad (z,y) \in (0,h) \times K_n(D), \qquad t \in (0,T_h); \tag{15}$$

$$u_1\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0; \tag{16}$$

$$u_1\big|_{\partial K_n(D)} = 0, \qquad z \in (0,h), \quad t \in (0,T_h). \tag{17}$$

Здесь $\partial K_n(D)$ — граница области $K_n(D)$.

В качестве дополнительной информации для определения $c_0(z)$ можно взять

$$u_0\big|_{z=0} = f(\hat{y},t), \qquad t \in (0,T_h), \tag{18}$$

где $\hat{y} \in \partial K_n(D)$, поскольку в силу сделанных предположений $f(y,t)$ не зависит от y в некоторой окрестности границы области $K_n(D)$ при $t \in (0,T_h)$.

Дополнительная информация о решении задачи (15)–(17) запишется в виде

$$u_1\big|_{z=0} = g(y,t), \qquad y \in K_n(D), \quad t \in (0,T_h), \tag{19}$$

где $g(y,t) = f(y,t) - u_0(0,t)$.

Таким образом, решение обратной задачи (4)–(7) при $t \in (0,T_h)$ можно локально разделить на этапы:

1) решение обратной задачи (13), (14), (18) на глубину h и определение $c_0(z)$;

2) решение прямой задачи (13), (14) на глубину h и определение u_{0zz};

3) решение обратной задачи (15)–(17), (19), т. е. задачи определения $c_1(z, y)$ по заданным u_{0zz} и $g(y, t)$.

В дальнейшем функцию $c_0(z)$ считаем известной и удовлетворяющей условию **I**.

Результаты численных расчетов линеаризованной двумерной обратной задачи представлены на рис. 2 и 4 с точными решениями и данными на рис. 1 и 3 соответственно.

4. Миграция

Во многих случаях наличие одного объекта можно обнаружить, используя метод обращения волнового поля во временной области. На рис. 5–9 видно, что аномальное поле на поверхности среды позволяет судить о глубине и местоположении неоднородности.

Список литературы

[1] С.И. Кабанихин, *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Наука, Новосибирск, 1988.

[2] С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, *Линеаризованная обратная задача для волнового уравнения*, Обратные задачи и информационные технологии, **1**:2 (2002), 83–113.

[3] S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev and M.A. Shishlenin, *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*, VSP, The Netherlands, 2004.

Сергей Игоревич Кабанихин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ksi52@mail.ru

Максим Александрович Шишленин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

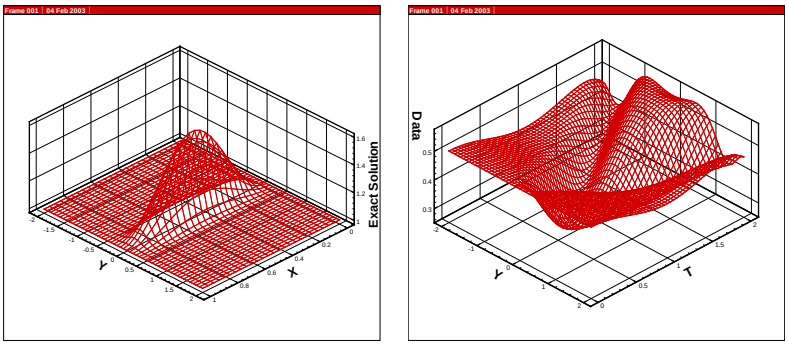


Рис. 1. Точное решение линеаризованной обратной задачи (слева) и данные обратной задачи (справа)

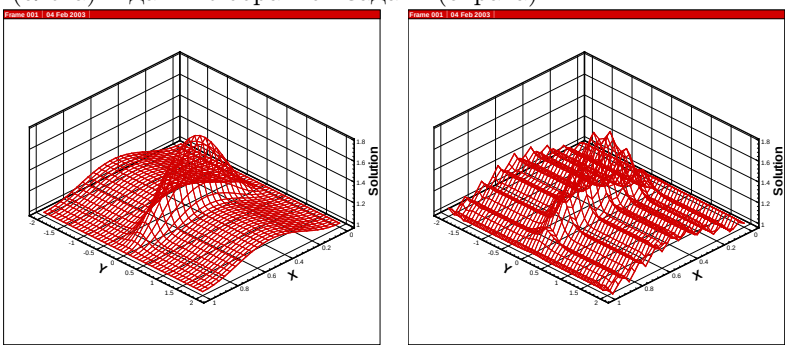


Рис. 2. Решение обратной задачи с точными (слева) и данными с шумом (справа)

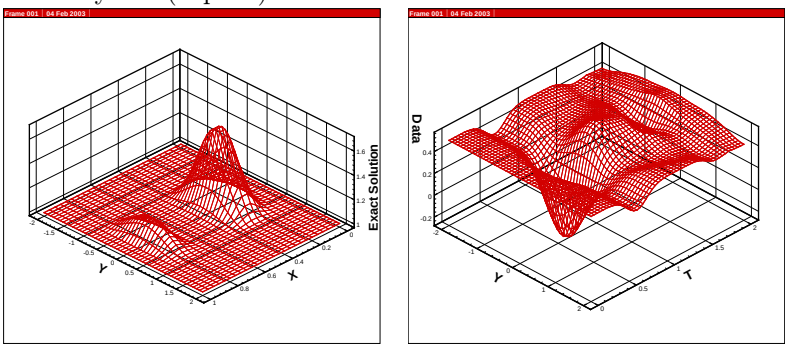


Рис. 3. Точное решение линеаризованной обратной задачи (слева) и данные обратной задачи (справа)

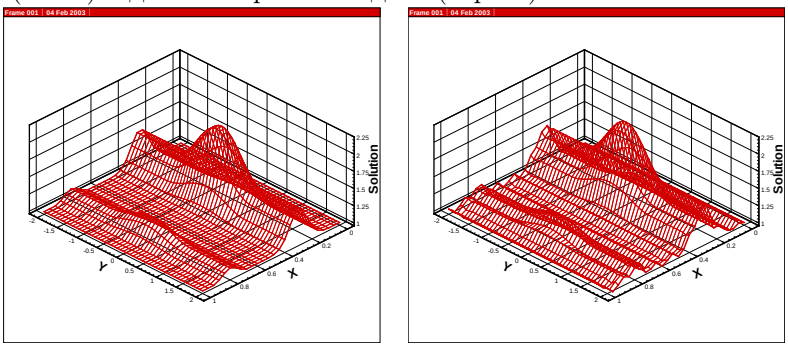


Рис. 4. Решение обратной задачи с точными (слева) и данными с шумом (справа)

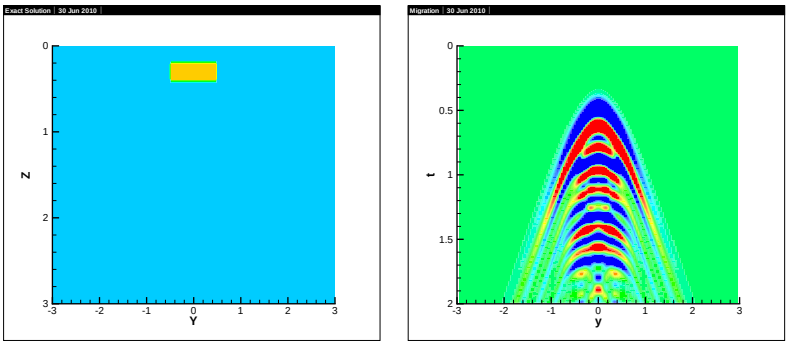


Рис. 5. Точное решение (слева) и аномальное поле с источником в центре области (справа)

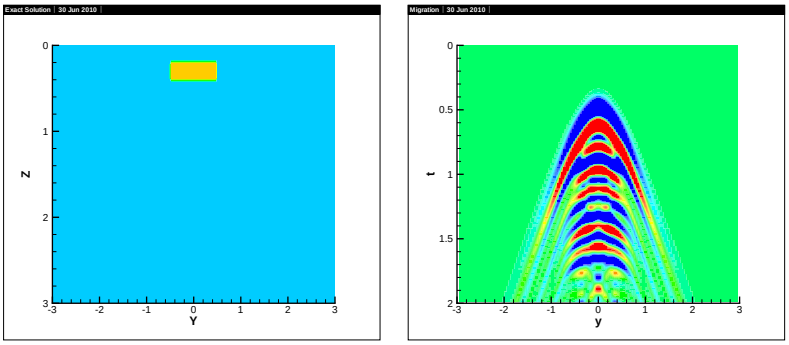


Рис. 6. Точное решение (слева) и аномальное поле (справа) на источник в центре

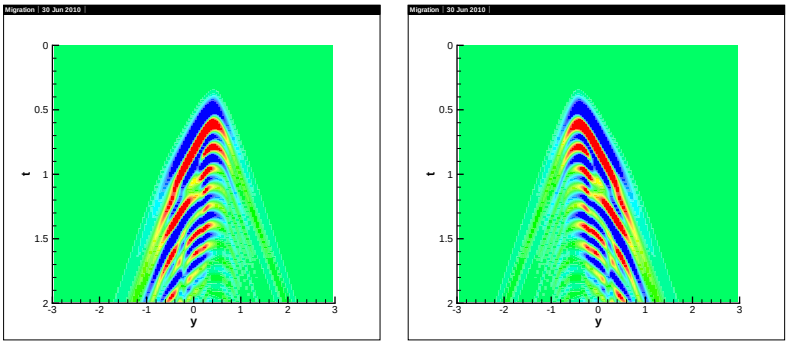


Рис. 7. Аномальное поле. Источник расположен на правом и левом краю

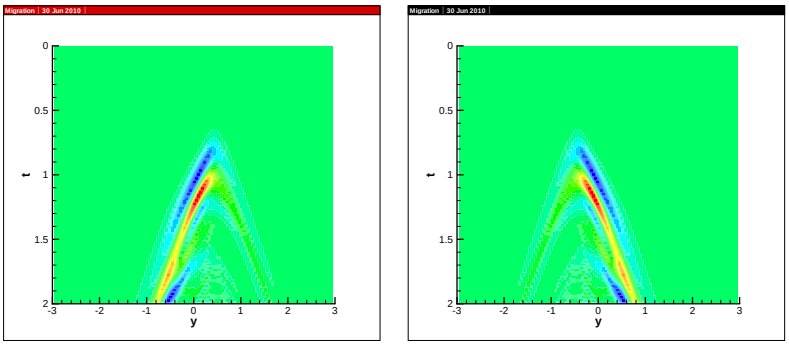


Рис. 8. Аномальное поле. Источник расположен на правом и левом краю

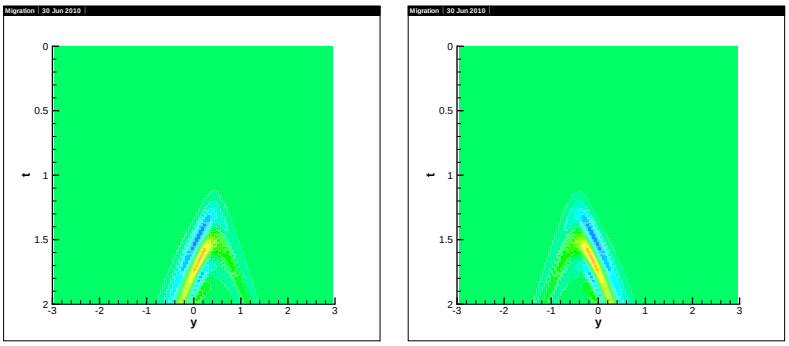


Рис. 9. Аномальное поле. Источник расположен на правом и левом краю

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.207–С.217 (2010)

УДК 519.6
MSC 65F22

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИЗВЕСТНЫМИ ТИХОНОВСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

В. И. ЕРОХИН, В. В. ВОЛКОВ

Abstract. In this paper we are investigating the problem of finding stable solution for systems of linear algebraic equations with approximate matrix using the Tikhonov's approach. We are describing the method for constructing model exact and approximate systems of linear algebraic equations with known solutions for this problem.

Numerical examples are given.

Keywords: approximate systems of linear algebraic equations, regularization, minimal matrix correction.

1. Введение

В данной статье проблема отыскания устойчивого решения приближенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) рассматривается в постановке А.Н. Тихонова [1, 2]:

Задача $P_0(\mu, \delta)$: Пусть существует точная совместная конечномерная СЛАУ

$$A_0 x = b_0, \tag{1}$$

где $A_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b_0 \in \mathbb{R}^m$, $b_0 \neq \mathbf{0}$, соотношения между размерами A_0 и ее рангом не оговариваются, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение системы (1) с минимальной евклидовой

Erohin, V.I., Volkov, V.V. Construction of model approximate systems of linear algebraic equations with known solutions.

© 2010 Ерохин В.И., Волков В.В.

Поступила 15 января 2010 г.

нормой (нормальное решение). Численные значения A_0 и b_0 неизвестны, а вместо них заданы приближенные матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq \mathbf{0}$ такие, что выполняются условия

$$\|A_0 - A\| \leqslant \mu,$$

$$\|b_0 - b\| \leqslant \delta < \|b\|,$$

где $\mu \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 0$ — известные параметры, символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова матричная или векторная норма. Полнота ранга матрицы A и совместность системы $Ax = b$ в общем случае не предполагаются.

Требуется найти $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $\|A - A_1\| \leqslant \mu$, $\|b - b_1\| \leqslant \delta$, $A_1x_1 = b_1$, $\|x_1\| \to \min$.

Как было показано в работах [1, 2], вектор x_1 является устойчивым приближением к вектору x_0, т.е. $\lim\limits_{\mu,\delta\to 0} x_1 = x_0$.

Наиболее интересным в контексте данной статьи результатом работ [1, 2] является предложенный в них способ решения задачи P_0, не ставший стандартным для сложившейся в последнее время теории и практики решения приближенных СЛАУ. Указанный способ заключается в переходе от задачи P_0 к следующей задаче математического программирования:

Задача $P_1(\mu,\delta)$: $\|x\| \to \min\limits_{\|b-Ax\|=\mu\|x\|+\delta}$.

Утверждение 1 ([1, 2]). *1) Задача* $P_1(\mu,\delta)$ *имеет решение тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна совместная СЛАУ* $\hat{A}x = \hat{b}$, *для которой* $\|\hat{A} - A\| \leqslant \mu$, $\|\hat{b} - b\| \leqslant \delta$.

2) Если решение задачи $P_1(\mu,\delta)$ *существует, то оно является единственным при* $\mu, \delta \to 0$.

3) Если $x_{\mu\delta}$ *— решение задачи* $P_1(\mu,\delta)$, *то существует единственная СЛАУ* $A_1x = b_1$, *для которой* $x_{\mu\delta}$ *является решением с минимальной евклидовой нормой и выполняются условия* $\|A_1 - A\| = \mu$, $\|b_1 - b\| = \delta$. *При этом* A_1 *и* b_1 *единственным образом определяются через* $x_{\mu\delta}$ *по формулам*

$$b_1 = b - \frac{\delta}{\|b - Ax_{\mu\delta}\|} \cdot (b - Ax_{\mu\delta}), A_1 = A + (b_1 - Ax_{\mu\delta}) \cdot \frac{x_{\mu\delta}^T}{x_{\mu\delta}^T x_{\mu\delta}}.$$

Утверждение 2 ([1, 2]). $x_{\mu\delta} = x_1$.

Утверждение 3 ([1, 2]). $\lim\limits_{\mu,\delta\to 0} x_{\mu,\delta} = x_0$.

Традиционно [3, 4, 5], задачу P_0 принято сводить к задаче безусловной минимизации сглаживающего функционала

$$\Phi^\alpha(x, A, b) = \|b - Ax\|^2 + \alpha\|x\|^2. \tag{2}$$

Задача P_2: $\Phi^\alpha(x, A, b) \to \min\limits_x$.

Обозначим через z_α решение задачи P_2.

Хорошо известно (см., например, [6]), что при любом $\alpha > 0$ существует единственный вектор z_α. Кроме того, при определенным образом выбранном $\alpha > 0$, вектор z_α является устойчивым приближением к вектору x_0, и, таким образом, служит решением задачи P_0 при $\mu, \delta \to 0$ [3, 4, 5].

Для последующих выкладок введем некоторые обозначения:

$\hat{x} = A^+ b$ — нормальное псевдорешение системы $Ax = b$, где A^+ — матрица, псевдообратная к матрице A, т.е. матрица, для которой выполняются уравнения Пенроуза [6, 7]:

$$AA^+A = A,$$
$$A^+AA^+ = A^+,$$
$$(AA^+)^T = AA^+,$$
$$(A^+A)^T = A^+A.$$

Вектор x_α — в общем случае нормальное решение системы

$$(A^TA + \alpha I)x = A^Tb, \tag{3}$$

где I — единичная матрица порядка n, при любом α.

Вектор $x_{\alpha+}$ — решение системы (3) при $\alpha \geqslant 0$.

Вектор $x_{\alpha-}$ — решение системы (3) при $\alpha < 0$.

Обратимся теперь к задачам минимальной матричной коррекции, возникающим при исследовании несовместных СЛАУ (см., например, [8]–[11]), несовместных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств [11]–[15] и несобственных задач линейного программирования [11]–[16]. Простейшие задачи минимальной матричной коррекции несовместных СЛАУ имеют вид:

Задача K_0: $\|H\| \to \inf\limits_{\text{система } (A+H)x=b \text{ совместна}}$.

Задача K_1: $\|\,[H - h]\,\| \to \inf\limits_{\text{система } (A+H)x=b+h \text{ совместна}}$.

На практике задачи минимальной матричной коррекции несовместных СЛАУ, как правило, выступают в роли обобщений метода наименьших квадратов. В настоящее время их не принято рассматривать в качестве инструментов для получения устойчивых решений приближенных СЛАУ. В определенных случаях, простейшим из которых является неполнота столбцевого ранга матрицы A, задачи K_0, K_1 и им подобные не имеют решения [6, 10]. Однако при обработке экспериментальных данных с низким уровнем погрешностей в исследуемых переопределенных системах с полноранговыми матрицами, скорректированные системы оказываются близки к точным, а их нормальные решения — к вектору x_0.

Существенной особенностью задач матричной коррекции является тот факт, что их решения могут быть найдены из системы (3) при $\alpha < 0$ [10].

Следующая теорема [17], доказательство которой мы здесь не приводим, определяет условия, в зависимости от выполнения которых, решение задачи $P_1(\mu, \delta)$ может быть получено с помощью метода классической регуляризации (задача P_2) или минимальной матричной коррекции (задачи K_0, K_1 и им подобные).

Теорема 1. *Если задача $P_1(\mu, \delta)$ имеет решение $x_{\mu\delta}$, то возможны следующие случаи:*

1) Если выполняется условие $\|b - A\hat{x}\| < \mu\|\hat{x}\| + \delta$, то вектор $x_{\mu\delta}$ является единственным решением задачи $P_1(\mu, \delta)$ и совпадает с единственной точкой минимума функционала (2) при некотором $\alpha > 0$ (т.е. решение задачи $P_1(\mu, \delta)$ совпадает с решением задачи P_2).

2) Если выполняется условие $\|b - A\hat{x}\| = \mu\|\hat{x}\| + \delta$, *то вектор* $\hat{x} = x_{\mu\delta}$ *является единственным решением задачи* $P_1(\mu, \delta)$ *и точкой минимума функционала* (2) *при* $\alpha = 0$.

3) Если выполняется условие $\|b - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\| + \delta$, *то вектор* $x_{\mu\delta}$ *является решением задачи* $P_1(\mu, \delta)$, *а также стационарной точкой функционала* (2) *при* $\alpha \leqslant 0$. *При этом, в случае, если матрица* A *имеет полный столбцевой ранг, то* $\alpha < 0$ *(т.е. решение задачи* $P_1(\mu, \delta)$ *является решением некоторой задачи минимальной матричной коррекции) и вектор* $x_{\mu\delta}$ *является единственным решением задачи* $P_1(\mu, \delta)$. *В противном случае —* $\alpha = 0$, *решение не единственно и имеет вид:* $x_{\mu\delta} = \hat{x} + \Delta x$, *где* Δx *— произвольный вектор, такой что* $A\Delta x = \mathbf{0}$, $\|b - A\hat{x}\| = \mu\|\hat{x} + \Delta x\| + \delta$.

Для последующих выкладок также введём без доказательства следующую лемму.

Лемма 1. *Если существуют вектор* x *и скалярный параметр* $\alpha > 0$, *такие, что* $(A^TA + \alpha I)x = A^Tb$ *и* $\|b - Ax\| = \mu\|x\| + \delta$, *то вектор* x *является единственным решением задачи* $P_1(\mu, \delta)$.

2. Построение модельных СЛАУ

В дальнейших выкладках ограничимся случаем, когда правая часть системы свободна от погрешности, т.е. $\delta = 0$. Далее будем исследовать задачи $P_1(\mu, 0)$ и $P_0(\mu, 0)$.

Приведенные ниже теоремы 2, 3 и 4 фактически описывают способ построения приближённых и точных систем для задачи $P_0(\mu, 0)$ с заданными свойствами. Прежде чем сформулировать эти теоремы, докажем необходимые леммы.

Лемма 2. *Вектор* x_μ *является единственным решением задачи* $P_1(\mu, 0)$ *с параметрами* $b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b$, $A^T\Delta b = 0$, $\|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|$, $\alpha > 0$.

Доказательство.

Для задачи $P_1(\mu, 0)$ условия Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$(A^TA + \alpha I)x = A^Tb_0,$$
$$\|b_0 - Ax\| = \mu\|x\|.$$

По условию леммы:

$$b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b,$$
$$\|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|,$$
$$A^T\Delta b = 0.$$

Тогда, с одной стороны, имеем:

$$\|b_0 - Ax_\mu\| = \|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|.$$

С другой стороны:

$$A^Tb_0 = A^TAx_\mu + \alpha A^TA^{+T}x_\mu = (A^TA + \alpha I)x_\mu.$$

Таким образом, оба условия Лагранжа для задачи $P_1(\mu, 0)$ и системы, удовлетворяющей условиям, указанным в формулировке леммы, обращаются в тождества.

Следовательно, в силу леммы 1, вектор x_μ является решением задачи $P_1(\mu, 0)$, причем единственным.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Вектор x_μ является единственным решением задачи $P_1(\mu, 0)$ с параметрами $b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b$, $A^T\Delta b = \mathbf{0}$, $\|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|$, $\alpha < 0$, $\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|$, $\mathrm{rank}A = n$.*

Доказательство.

Условия Лагранжа для задачи $P_1(\mu, 0)$ и системы, удовлетворяющей условиям, указанным в формулировке леммы, выполняются (см. доказательство леммы 2).

Кроме того, т.к. выполняется условие $\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|$ и матрица A имеет полный столбцевой ранг то, в силу теоремы 1, вектор x_μ является решением задачи $P_1(\mu, 0)$, причем единственным.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Вектор $x_\mu = \hat{x} + \Delta x$, где Δx — произвольный вектор, такой что $A\Delta x = \mathbf{0}$, $\|b_0 - A\hat{x}\| = \mu\|\hat{x} + \Delta x\|$, принадлежит множеству решений задачи $P_1(\mu, 0)$ с параметрами $b_0 = Ax_\mu + \Delta b$, $A^T\Delta b = 0$, $\|\Delta b\| = \mu\|x_\mu\|$, $\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|$, $\mathrm{rank}A < n$.*

Доказательство.

Условия Лагранжа для задачи $P_1(\mu, 0)$ и системы, удовлетворяющей условиям, указанным в формулировке леммы, выполняются (см. доказательство леммы 2).

Кроме того, т.к. выполняется условие $\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|$ и матрица A имеет неполный столбцевой ранг то, в силу теоремы 1, других решений кроме x_μ задача $P_1(\mu, 0)$ не имеет.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq \mathbf{0}$, $b_0 \in \mathbb{R}^m$, $b_0 \neq \mathbf{0}$ — произвольные векторы, $A_0 = A + (b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z$, $\mathrm{rank}A_0 = n$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}\left|\frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2, Zx_0 = \mathbf{0}\right.$ Тогда матрица A_0 и вектор b_0 могут считаться элементами точной СЛАУ с нормальным решением x_0, отвечающей условиям задачи P_0, а матрица A и вектор b_0 могут считаться элементами соответствующей приближенной СЛАУ.*

Доказательство.

1. Покажем, что вектор x_0 является нормальным решением СЛАУ $A_0x = b_0$.

По условию леммы:

$$A_0 = A + (b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z,$$

$$Zx_0 = \mathbf{0}.$$

Умножим обе части первого равенства на x_0:

$$A_0x_0 = Ax_0 + (b_0 - Ax_0)x_0^+x_0 + Zx_0,$$

$$A_0x_0 = b_0.$$

Таким образом, система $A_0x = b_0$ совместна, а в силу условия $\mathrm{rank}A_0 = n$ получаем, что вектор x_0 является ее единственным решением, которое можно считать нормальным.

2. Оценим величину $\|A_0 - A\|$.

Используя выражение для матрицы A_0, получим:

$$\|A_0 - A\| = \|(b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z\|.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\|A_0 - A\|^2 = \|(b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z\|^2 = \|(b_0 - Ax_0){x_0}^+\|^2 + \|Z\|^2 = \frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2.$$

Учтем, что по условию леммы выполняется равенство

$$\frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2.$$

Получим:

$$\|A_0 - A\| = \mu.$$

Таким образом, система $A_0x_0 = b_0$ совместна, x_0 является ее решением и выполняется условие $\|A_0 - A\| = \mu$.

Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *— произвольная матрица;* $x_\mu \in \mathbb{R}^n \,|A^+Ax_\mu = x_\mu$*;* $0 < \alpha \leqslant \frac{\mu\|x_\mu\|}{\|A^{+T}x_\mu\|}$*;* $b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b$*;* $\Delta b \in \mathbb{R}^m \,\big|A^T\Delta b = \mathbf{0}, \|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|$*;* $A_0 = A + (b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z$*;* $\mathrm{rank}A_0 = n$*;* $x_0 \in \mathbb{R}^n, Z \in \mathbb{R}^{m\times n} \,\Big|\, \frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2, Zx_0 = \mathbf{0}$*.*

Тогда система $A_0x = b_0$ *совместна,* x_0 *— ее нормальное решение,* x_μ *— единственное решение задачи* $P_1(\mu, 0)$*. СЛАУ* $A_0x = b_0$ *и* $Ax = b_0$ *являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи* P_0*.*

Доказательство.

Так как выполняются условия $A_0 = A + (b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z$, $\mathrm{rank}A_0 = n$, $\frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2$ и $Zx_0 = \mathbf{0}$, то, согласно лемме 5, СЛАУ $A_0x = b_0$ и $Ax = b_0$ являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи $P_0(\mu, 0)$.

Кроме того, так как выполняются условия $b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b$, $\|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|$, $A^T\Delta b = \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$, то из леммы 2 следует, что вектор x_μ является единственным решением соответствующей задачи $P_1(\mu, 0)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $\mathrm{rank}A = n$*;* $x_\mu \in \mathbb{R}^n$ *— произвольный вектор;* $b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b$*;* $A_0 = A + (b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z$*;* $\mathrm{rank}A_0 = n$*;* $\alpha < 0, \Delta b \,\big|A^T\Delta b = 0, \|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|, \|\Delta b\| > \mu\|x_\mu + \alpha A^+A^{+T}x_\mu\|$*;* $x_0 \in \mathbb{R}^n, Z \in \mathbb{R}^{m\times n} \,\Big|\, \frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2, Zx_0 = \mathbf{0}$*.*

Тогда система $A_0x = b_0$ *совместна,* x_0 *— ее нормальное решение,* x_μ *— единственное решение задачи* $P_1(\mu, 0)$*. СЛАУ* $A_0x = b_0$ *и* $Ax = b_0$ *являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи* $P_0(\mu, 0)$*.*

Доказательство.

Из леммы 5 следует, что СЛАУ $A_0x = b_0$ и $Ax = b_0$ являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи $P_0(\mu, 0)$ (см. доказательство теоремы 2).

Согласно условию теоремы, выполняется неравенство $\|\Delta b\| > \mu\|x_\mu - |\alpha|A^+A^{+T}x_\mu\|$.

Учтем, что $b_0 = Ax_\mu - |\alpha|A^{+T}x_\mu + \Delta b$. Тогда:

$$\hat{x} = A^+b_0 = x_\mu - |\alpha|A^+A^{+T}x_\mu.$$

Откуда получаем, что выполняется неравенство

$$\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|.$$

Кроме того, согласно условию теоремы, выполняются следующие равенства:

$$b_0 = Ax_\mu + \alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b,$$

$$A^T\Delta b = \mathbf{0},$$

$$\|\alpha A^{+T}x_\mu + \Delta b\| = \mu\|x_\mu\|.$$

Тогда из леммы 3 следует, что вектор x_μ является единственным решением соответствующей задачи $P_1(\mu, 0)$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}A < n$; $\hat{x}|A^+A\hat{x} = \hat{x}$; $x_\mu = \hat{x} + \Delta x$; $b_0 = A\hat{x} + \Delta b$; $A_0 = A + (b_0 - Ax_0)x_0^+ + Z$; $\mathrm{rank}A_0 = n$; $A\Delta x = \mathbf{0}$; $A^T\Delta b = \mathbf{0}$; $\|\Delta b\| = \mu\|\hat{x} + \Delta x\| > \mu\|\hat{x}\|$; $x_0 \in \mathbb{R}^n, Z \in \mathbb{R}^{m\times n} \left| \frac{\|b_0 - Ax_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2, Zx_0 = \mathbf{0}\right.$.

Тогда система $A_0x = b_0$ совместна, x_0 — ее нормальное решение, x_μ принадлежит множеству решений задачи $P_1(\mu, 0)$, которое содержит более одного решения, СЛАУ $A_0x = b_0$ и $Ax = b_0$ являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи $P_0(\mu, 0)$.

Доказательство.

Из леммы 5 следует, что СЛАУ $A_0x = b_0$ и $Ax = b_0$ являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи $P_0(\mu, 0)$ (см. доказательство теоремы 2).

Согласно условию теоремы выполняется неравенство $\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|$ (т.к. $\|\Delta b\| > \mu\|\hat{x}\|$ и $b_0 = A\hat{x} + \Delta b$) и матрица A имеет неполный столбцевой ранг, а также выполняются условия $\|\Delta b\| = \mu\|x_\mu\|$, $\|b_0 - A\hat{x}\| > \mu\|\hat{x}\|$ (т.к. $\|\Delta b\| = \mu\|\hat{x} + \Delta x\| > \mu\|\hat{x}\|$, $x_\mu = \hat{x} + \Delta x$ и $A\Delta x = \mathbf{0}$), $A^T\Delta b = \mathbf{0}$. Тогда из леммы 4 следует, что вектор x_μ принадлежит множеству решений задачи $P_1(\mu, 0)$.

Теорема 4 доказана.

Теоремы 2, 3 и 4 позволяют конструировать модельные точные и приближенные системы для задачи P_0.

3. Численные примеры

Представленные ниже численные примеры были построены с помощью специальной процедуры, основанной на использовании теорем 2, 3 и 4. Заметим, что для всех значений из этих примеров получены аналитические представления, и они могут быть записаны с любой степенью точности. Однако, в целях экономии места, для приведенных ниже величин выбрано представление в виде десятичной дроби с точностью до восьми знаков после запятой.

Пример 1 (Теорема 2)

Точная система:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 9.02448359 & 8.04447372 \\ 7.99197591 & 7.08858519 \\ 6.95017307 & 6.1450902 \\ 5.89907507 & 5.21398876 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 25.5222206 \\ 21.89206512 \\ 18.64920798 \\ 15.79364917 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}A_0 = 2.$$

Приближенная система:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \\ 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = b_0, \quad \mathrm{rank}A = 2.$$

Параметры задачи $P_1(\mu, 0)$:

$$\mu = 0.3, \quad \delta = 0;$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.03701688 & 0.02776266 \\ 0.03738547 & 0.0280391 \\ 0.03775406 & 0.02831555 \\ 0.03812265 & 0.02859199 \end{bmatrix};$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0.19364917 \\ -0.19364917 \\ -0.19364917 \\ 0.19364917 \end{bmatrix};$$

$$\alpha = 0.14285714.$$

Нормальное решение точной системы:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи $P_1(\mu, 0)$:

$$x_{\mu\delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2 (Теорема 3)
Точная система:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 9.02575395 & 8.01988194 \\ 7.99179256 & 7.06570368 \\ 6.94212695 & 6.13246438 \\ 5.87675713 & 5.22016403 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 25.26144288 \\ 21.65155712 \\ 18.70255712 \\ 16.41444288 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}A_0 = 2.$$

Приближенная система:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \\ 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = b_0, \quad \mathrm{rank}A = 2.$$

Параметры задачи $P_1(\mu, 0)$:

$$\mu = 0.3, \quad \delta = 0;$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.02602586 & 0.01951939 \\ 0.02628501 & 0.01971375 \\ 0.02654415 & 0.01990811 \\ 0.0268033 & 0.02010248 \end{bmatrix};$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0.33044288 \\ -0.33044288 \\ -0.33044288 \\ 0.33044288 \end{bmatrix};$$

$$\alpha = -0.03.$$

Нормальное решение точной системы:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -15.15 \\ 20.2 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи $P_1(\mu, 0)$:

$$x_{\mu\delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 3 (Теорема 4)
Точная система:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 9.10849719 & 8.19720623 \\ 8.10605321 & 7.30287324 \\ 7.14360923 & 6.35520692 \\ 6.10116525 & 5.51420727 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 16.39 \\ 14.68 \\ 11.97 \\ 11.26 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}A_0 = 2.$$

Приближенная система:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8.1 \\ 8 & 7.2 \\ 7 & 6.3 \\ 6 & 5.4 \end{bmatrix}, \quad b = b_0, \quad \mathrm{rank}A = 1.$$

Параметры задачи $P_1(\mu, 0)$:

$$\mu = 0.3, \quad \delta = 0;$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.11609719 & 0.087072895 \\ 0.11725321 & 0.087939908 \\ 0.11840923 & 0.088806921 \\ 0.11956525 & 0.089673934 \end{bmatrix};$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix};$$

$$\alpha = 0.$$

Нормальное решение точной системы:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Решения задачи $P_1(\mu, 0)$:

$$x_\mu{}^1 = \begin{bmatrix} 2.63421632 \\ -0.91579591 \end{bmatrix},$$

$$x_\mu{}^2 = \begin{bmatrix} -0.63421632 \\ 2.71579591 \end{bmatrix}.$$

Нормальное псевдорешение приближенной системы:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}.$$

Список литературы

[1] А.Н. Тихонов, *О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений*, Доклады АН СССР, **254**:3 (1980), 549–554.

[2] А.Н. Тихонов, *О приближенных системах линейных алгебраических уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **20**:6 (1980), 1373–1383.

[3] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1986.

[4] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, М.: Наука, 1978.

[5] А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола, *Численные методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1990.

[6] В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, М.: Наука, 1984.

[7] Ч. Лоусон, Р. Хенсон, *Численное решение задач метода наименьших квадратов*, М.: Наука, 1986.

[8] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *An analysis of the total least squares problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **17**:3 (1980), 883–893.

[9] S. Van Huffel, J. Vandewalle, *The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis*, Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, **9** (1991).

[10] В.А. Горелик, В.И. Ерохин, *Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы*, М.: ВЦ РАН, 2004.

[11] А.А. Ватолин, *Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **24**:12 (1984), 1907–1908.

[12] И.И. Еремин, В.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев, *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования*, М.: Наука, 1983.

[13] В.А. Горелик, *Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **41**:11 (2001), 1697–1705.

[14] В.А. Горелик, В.И. Ерохин, Р.В. Печенкин, *Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений*, М.: ВЦ РАН, 2006.

[15] В.А. Горелик, В.И. Ерохин, Р.В. Печенкин, *Минимаксная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов*, Изв. РАН. ТиСУ., **5** (2006), 52–62.

[16] В.И. Ерохин, *Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **47**:4 (2007), 587–601.

[17] В.И. Ерохин, В.В. Волков, *О некоторых взаимосвязях методов регуляризации и матричной коррекции при нахождении устойчивого решения приближенной системы линейных алгебраических уравнений*, Обратные и некорректные задачи математической физики: Труды международной конференции, посвящённой 75-летию академика М. М. Лаврентьева. Новосибирск: СО РАН, 2007, *http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/abstracts/Section3/ErohinVIVolkovVV.pdf*

Владимир Иванович Ерохин
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
Московский пр., 26
190013, Санкт-Петербург, Россия
E-mail address: erohin_v_i@mail.ru

Владимир Викторович Волков
Борисоглебский государственный педагогический институт,
ул. Народная, 43
397160, Борисоглебск, Россия
E-mail address: volkov@fizmat.net

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.218–С.237 (2010)

УДК 539.371

ПОСТРОЕНИЕ НА ОСНОВЕ НЕСКОЛЬКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ю.М. ВОЛЧКОВ

Abstract. We discuss some problems of determination of physical and geometrical characteristics of a layered inhomogeneous medium.

Keywords: layered inhomogeneous medium, inverse problem.

1. Введение

В монографии [1] изложены процедуры построения численных алгоритмов решения двумерных задач динамической теории упругости на основе нескольких локальных аппроксимаций неизвестных функций отрезками полиномов Лежандра . В отличие от классических конечно-элементных подходов процедура нескольких аппроксимаций для каждой из искомых функций дает возможность сформировать достаточную для обеспечения монотонности численного решения искусственную диссипацию с одновременным расщеплением многомерной задачи на ряд независимых одномерных задач по пространственным направлениям. Содержащиеся в одномерных задачах параметры — константы

Volchkov, Yu.M. Determination of physical and geometrical characteristics of a layered inhomogeneous medium.

© 2010 Волчков Ю.М.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00749-а) и междисциплинарным интеграционным проектом фундаментальных исследований СО РАН № 74 (2009–2011).

Поступила 11 марта 2010 г.

диссипации — позволяют регулировать в получаемых схемах величину искусственной вязкости. При этом процедура решения каждой из одномерных задач является независимой и может быть как явной, так и неявной.

При частном выборе констант диссипации, для случая регулярных сеток, получающаяся явная схема полностью совпадает со схемой Годунова. В то же время, одно из преимуществ предлагаемого подхода состоит в возможности построения схем, обладающих лучшими диссипативными свойствами по сравнению с методом распада разрыва. Существенно, что при этом не происходит увеличение числа арифметических операций, т. е. помимо улучшения диссипативных характеристик возрастает экономичность схемы.

Ниже излагается один из таких алгоритмов решения задачи о распространении плоских ударных волн в анизотропной упругой среде. Затем этот алгоритм используется качестве основного элемента решения задачи об определении физических и геометрических характеристик слоисто неоднородной среды.

2. Моделирование распространения плоских ударных волн в анизотропной упругой среде

2.1. **Плоские волны в анизотропном упругом слое.** Рассмотрим распространение в направлении оси z плоских волн в слоисто-неоднородном упругом слое $0 \le z \le L$, представляющем собой набор из K бесконечных в направлениях x и y упругих слоев постоянной толщины H_i, $i = 1, \ldots, K$ (рис. 1).

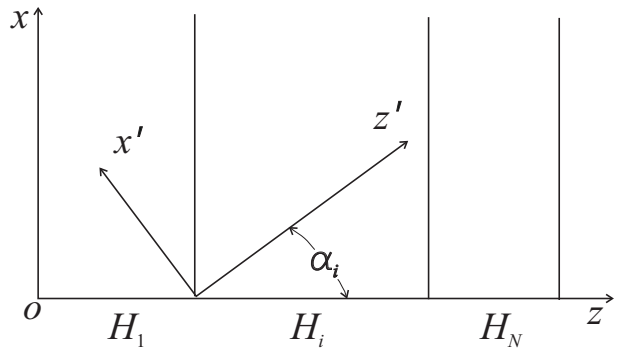


Рис. 1. Структура слоисто-неоднородной среды

Будем считать эти слои трансверсально-изотропными. В каждом из слоев в системе координат x', y', z', согласованной с кристаллографическими осями материала, закон Гука для случая трансверсально-изотропной среды (гексагональная система) можно записать в следующем виде [2]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z, & \tau_{xy} &= 2\mu_1\varepsilon_{xy},\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x) - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma_z, & \tau_{xz} &= 2\mu_2\varepsilon_{xz},\\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_2}{E_2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_2}\sigma_z, & \tau_{yz} &= 2\mu_2\varepsilon_{yz}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Константы упругости (модули Юнга E_1 и E_2, коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 и модули сдвига μ_1 и μ_2), входящие в (1), связаны дополнительным соотношением $E_i = 2\mu_i(1+\nu_i)$, $i = 1, 2$. Таким образом, трансверсально-изотропная среда в каждом слое характеризуется пятью модулями упругости, плотностью и наклоном кристаллографических осей к осям декартовой системы координат x, y, z.

Сделаем некоторые упрощающие задачу предположения. Пусть граничные условия на поверхностях, перпендикулярных оси z ($z = 0$ и $z = L$), а так же начальные напряжения и массовые скорости частиц при $t = 0$ не зависят от координат x и y. Кроме того, предположим, что плоскость $z^{'}$, $x^{'}$ совпадает с плоскостью z, x, так что наклон кристаллографической оси однозначно определяется углом α наклона оси $z^{'}$ к оси z, а вектор скорости как в начальный момент времени, так и в последующие лежит в плоскости z, x. Задача таким образом рассматривается в одномерной постановке — неизвестные функции являются функциями только пространственной переменной z и времени t.

В качестве неизвестных функций рассматриваются две компоненты вектора массовой скорости u и v — в направлениях z и x соответственно, а так же нормальная σ_z и касательная τ_{zx} компоненты тензора напряжений в системе координат z, x. Эти функции удовлетворяют уравнениям движения

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad \rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{2}$$

и закону Гука, который после дифференцирования по времени можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial z} + B\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial z} + C\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения:

$$A = a\cos^4\alpha + 2b\sin^2\alpha\cos^2\alpha + c\sin^4\alpha + \mu_2\sin^2 2\alpha,$$

$$B = -\frac{1}{2}(a\cos^2\alpha - b\cos 2\alpha - c\sin^2\alpha)\sin 2\alpha + \mu_2\cos 2\alpha\sin 2\alpha,$$

$$C = \frac{1}{4}(a - 2b + c)\sin^2 2\alpha + \mu_2\cos^2 2\alpha, \tag{4}$$

$$a = \frac{(1-\nu_1)E_2^2}{E_2(1-\nu_1) - 2E_1\nu_2^2}, \quad b = \frac{\nu_2 E_1 E_2}{E_2(1-\nu_1) - 2E_1\nu_2^2},$$

$$c = \frac{E_1(E_2 - \nu_2^2 E_1)}{(1+\nu_1)E_2(1-\nu_1) - 2E_1\nu_2^2}.$$

Несложно проверить, что матрица коэффициентов при производных по z в правой части (3) является положительно определенной. Таким образом для каждого слоя мы имеем одномерную систему четырех уравнений (2), (3) гиперболического типа для определения четырех неизвестных функций u, v, σ_z, τ_{zx}

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \\ r\sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ A & B & 0 & 0 \\ B & C & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Скорость распространения возмущений в описанном материале определяется величиной наклона характеристик системы $dz/dt = \pm c_+$, $dz/dt = \pm c_-$. Величины c_+ и c_- вычисляются как собственные числа матрицы коэффициентов в правой части (5)

$$c_+^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2\rho}, \quad c_-^2 = \frac{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2\rho}.$$

Заметим, что если $A > C$, то $c_- \le \sqrt{c}/\rho < \sqrt{A}/\rho \le c_+$.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для системы уравнений (2), (3). Пусть в начальный момент времени все искомые функции заданы:

$$\begin{aligned} u(0,z) = u^0(z), \qquad v(0,z) = v^0(z), \\ \sigma_z(0,z) = \sigma_z^0(z), \quad \tau_{zx}(0,z) = \tau_{zx}^0(z), \end{aligned} \tag{6}$$

а на поверхностях $z = 0$ и $z = L$ поставлены краевые условия вида

$$(\alpha_1^{\pm} u + \beta_1^{\pm} \sigma_z)|_{z=0,L} = f_1^{\pm}, \quad (\alpha_2^{\pm} v + \beta_2^{\pm} \tau_{zx})|_{z=0,L} = f_2^{\pm}, \tag{7}$$

где $\alpha_i^{\pm}$, $\beta_i^{\pm}$, $f_i^{\pm}$, $i = 1, 2$ — известные функции t. Соседние слои жестко сопряжены — векторы напряжений и скорости на их общей границе непрерывны.

2.2. **Численное решение на основе векторного расщепления.** Если рассматриваемые слои отличаются механическими свойствами, решение поставленной задачи можно получить только численно. Заметим, что если материал является изотропным, т. е. $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$, $\mu_1 = \mu_2$, или угол наклона α оси z' к оси z равен либо нулю, либо $\pi/2$, то $B = 0$ и задача (5)–(7) расщепляется на две независимые задачи вида

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial W}{\partial z}, \\ W(0,z) = W^0(z), \quad P(0,z) = p^0(z), \quad (\alpha^{\pm} W + \beta^{\pm} P)|_{z=0,L} = f^{\pm}. \end{gathered} \tag{8}$$

В первой системе $W = u$, $P = \sigma_z$, $D = A$, во второй $W = v$, $P = \tau_{zx}$, $D = C$.

Специальной, согласованной со скоростью распространения возмущений дискретизацией расчетной области можно получить точное решение обеих задач. Если $B \neq 0$, можно воспользоваться способом решения полной задачи, описанном в первой главе монографии [1]для случая равенства нулю младших членов, который практически сводится к процедуре диагонализации матрицы в системе (5). Рассмотрим эту процедуру подробнее на примере сформулированной задачи. Для этого запишем систему уравнений (5) в виде

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = D \frac{\partial \vec{W}}{\partial z}, \tag{9}$$

где

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемую область на плоскости z, t снова разобьем на элементарные прямоугольники $\omega = \{z_j \le z \le z_{j+1}, t_k \le t \le t_{k+1}\}$ и в качестве приближенного решения в ω примем линейные по ξ и по η полиномы

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{W}_1 \eta, \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_1 \eta, \quad \vec{W}' = \vec{W}_0' + \vec{W}_1' \xi, \quad \vec{P}' = \vec{P}_0' + \vec{P}_1' \xi, \tag{10}$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\rho\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{P}'}{\partial z},\quad \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=D\frac{\partial\vec{W}'}{\partial z}. \tag{11}$$

Из (10), (11) следуют формулы пересчета на верхний по времени слой

$$\vec{W}^{j+\frac{1}{2}}=\vec{W}_{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{\rho h}(\vec{P}_{j+1}-\vec{P}_j),\quad \vec{P}^{j+\frac{1}{2}}=\vec{P}_{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{\rho h}D(\vec{W}_{j+1}-\vec{W}_j), \tag{12}$$

где

$$\vec{W}_{j+\frac{1}{2}}=\vec{W}|_{\eta=-1},\quad \vec{W}^{j+\frac{1}{2}}=\vec{W}|_{\eta=1},\quad \vec{W}_{j+1}=\vec{W}'|_{\xi=1},\quad \vec{W}_j=\vec{W}'|_{\xi=-1},$$

$$\vec{P}_{j+\frac{1}{2}}=\vec{P}|_{\eta=-1},\quad \vec{P}^{j+\frac{1}{2}}=\vec{P}|_{\eta=1},\quad \vec{P}_{j+1}=\vec{P}'|_{\xi=1},\quad \vec{P}_j=\vec{P}'|_{\xi=-1}.$$

Дополнительные уравнения для определения величин с целочисленными индексами строятся на основе справедливого для всех полиномов (10), удовлетворяющих системе (11), энергетического тождества

$$\iint\limits_{\omega}\rho\vec{W}_0\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}d\omega+\iint\limits_{\omega}\vec{P}_0\frac{\partial\vec{W}'}{\partial z}d\omega+\iint\limits_{\omega}Qd\omega=\iint\limits_{\omega}\frac{\partial\vec{W}'\vec{P}'}{\partial z}d\omega,$$

где Q, с учетом (10), (11), можно записать в виде

$$Q=\left(\vec{W}_0'-\vec{W}_{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial\vec{P}'}{\partial z}\right)\frac{\partial\vec{P}'}{\partial z}+\left(\vec{P}_0'-\vec{P}_{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}D\frac{\partial\vec{W}'}{\partial z}\right)\frac{\partial\vec{W}'}{\partial z}. \tag{13}$$

Матрицу D представим в виде

$$D=T\tilde{D}T^{-1},\quad \tilde{D}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\rho c_+^2,\quad \alpha_2=\rho c_-^2,$$

где $\tilde{D}$ — диагональная матрица, а T составлена из нормированных собственных векторов матрицы D, отвечающих собственным числам α_1 и α_2:

$$T=\begin{pmatrix}-\theta & 1\\ 1 & \theta\end{pmatrix},\quad T^{-1}=-\frac{1}{1+\theta^2}\begin{pmatrix}\theta & -1\\ -1 & -\theta\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{B}{a-\alpha_1}.$$

Дополнительные уравнения сформулируем в виде

$$\begin{aligned}&\vec{W}_0'-\vec{W}_{j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}T\begin{pmatrix}\frac{\tau+\omega_1}{\rho} & 0\\ 0 & \frac{\tau+\omega_2}{\rho}\end{pmatrix}T^{-1}\frac{\partial\vec{P}'}{\partial z}=0,\\ &\vec{P}_0'-\vec{P}_{j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}T\begin{pmatrix}(\tau+\gamma_1)\alpha_1 & 0\\ 0 & (\tau+\gamma_2)\alpha_2\end{pmatrix}T^{-1}\frac{\partial\vec{W}'}{\partial z}=0.\end{aligned} \tag{14}$$

Система уравнений для определения целочисленных величин после этого может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix}\vec{W}_{j+1}+\vec{W}_j\\ \vec{P}_{j+1}+\vec{P}_j\end{pmatrix}-M\begin{pmatrix}\vec{W}_{j+1}-\vec{W}_j\\ \vec{P}_{j+1}-\vec{P}_j\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\vec{W}_{j+\frac{1}{2}}\\ \vec{P}_{j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

где M — матрица размерности 4×4, содержащая константы диссипации ω_1, ω_2, γ_1, γ_2. Можно показать, что условие неотрицательности ω_1, ω_2, γ_1, γ_2 обеспечивает устойчивость процесса вычисления приближенного решения, а формулы вычисления $\vec{W}_j$, $\vec{P}_j$ будут явными, если собственные числа матрицы M равны либо 1, либо -1.

Выпишем окончательные явные формулы для вычисления величин с целочисленными индексами

$$
\begin{gathered}
(\theta d_- u - d_- v + \frac{\theta}{d_-}\sigma_z - \frac{1}{d_-}\tau_{zx})_j = (\theta d_- u - d_- v + \frac{\theta}{d_-}\sigma_z - \frac{1}{d_-}\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}},\\
(-d_+ u - \theta d_+ v - \frac{1}{d_+}\sigma_z - \frac{\theta}{d_+}\tau_{zx})_j = (-d_+ u - \theta d_+ v - \frac{1}{d_+}\sigma_z - \frac{\theta}{d_+}\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}},\\
(-\theta d_- u + d_- v + \frac{\theta}{d_-}\sigma_z - \frac{1}{d_-}\tau_{zx})_{j+1} = (-\theta d_- u + d_- v + \frac{\theta}{d_-}\sigma_z - \frac{1}{d_-}\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}},\\
(d_+ u + \theta d_+ v - \frac{1}{d_+}\sigma_z - \frac{\theta}{d_+}\tau_{zx})_{j+1} = (d_+ u + \theta d_+ v - \frac{1}{d_+}\sigma_z - \frac{\theta}{d_+}\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Здесь $d_- = \sqrt{\rho c_-}$, $d_+ = \sqrt{\rho c_+}$. На общих границах между двумя соседними ячейками u_j, v_j, $(\sigma_z)_j$, $(\tau_{zx})_j$ непрерывны, а для вычисления граничных значений к уравнениям (15) следует добавить соответствующее краевое условие из (7). Схема устойчива если выполнено ограничение на шаг по времени τ

$$c_+\tau \le h.$$

Следует сказать, что даже в случае выполнения равенства в этом ограничении на шаг по времени схема обладает положительной искусственной диссипацией, пропорциональной величине $(c_+/c_- - 1)$, и во всех случаях, когда $c_- < c_+$, на фронте движущейся со скоростью c_- волны будет наблюдаться размазывание разрыва.

На рис. 2 приведены результаты тестового расчета сформулированной задачи для случая одного анизотропного слоя, когда $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$, $\mu_1 = 0$, $\lambda_2 = \nu_2 E_2/(1+\nu_2)(1-2\nu_2) = \mu_2$. В этом случае

$$A = \mu_2(1+\sin^2 2\alpha), \quad C = \mu_2 \cos^2 2\alpha, \quad B = \mu_2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha.$$

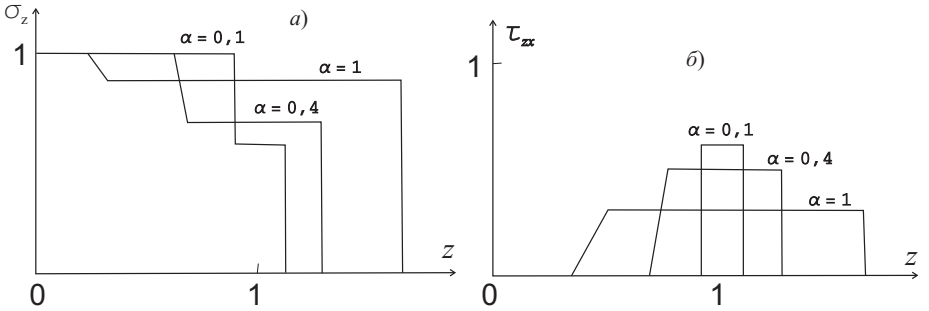


Рис. 2. Волны напряжений в анизотропном слое: а) нормального напряжения; б) касательного напряжения

Графики нормального σ_z и касательного τ_{zx} напряжений приведены для трех значений угла α: $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}4$, $\alpha = 1$. Начальные условия принимались нулевыми, к поверхности $z = 0$ приложено нормальное ударное воздействие: $\sigma_z = 1$. На рисунках приведены результаты решения после 200 шагов по времени. Заметим, что в отличие от случая изотропного материала, даже только при нормальном ударе графики нормального и касательного напряжений содержат два разрыва.

2.3. **Итерационная процедура решения задачи.** В описанном выше алгоритме решения необходимо приведение исходной системы уравнений в каждом

из слоев к каноническому виду. Для случая матрицы большой размерности такая процедура сопряжена со значительными техническими трудностями. К примеру, отказ от предположения о плоскопараллельном движении частиц в рассматриваемой задаче привел бы к системе перевязанных между собой шести уравнений. Положение тем более усложняется в двумерном случае.

Ниже предлагается итерационная процедура, основанная на двухэтапном решении одномерных задач, на которые расщепляется двумерная. Она представляет собой некоторую симметричную схему расщепления, и суть ее состоит в учете «мешающих» членов уравнений только на втором этапе в виде «поправочных» слагаемых.

Процедура численного решения системы (9) остается прежней вплоть до формулировки дополнительных уравнений. Разбив счетную область на элементарные прямоугольники ω и выбрав в качестве приближенного решения в ω линейные полиномы (10), получаем формулы (12) пересчета приближенного решения на верхний слой по времени :

$$
\begin{aligned}
u^{j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma_{z\ j+1} - \sigma_{z\ j}),\\
v^{j+\frac{1}{2}} &= v_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho h}(\tau_{zx\ j+1}\tau_{zx\ j}),\\
\sigma_z^{j+\frac{1}{2}} &= \sigma_{z\ j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}A(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h}B(v_{j+1} - v_j),\\
\tau_{zx}^{j+\frac{1}{2}} &= \tau_{zx\ j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h}B(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h}C(v_{j+1} - v_j).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Запишем в развернутой форме выражение (13) для мощности искусственной диссипации Q:

$$
\begin{aligned}
Q = \left(u_0^{'} - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial\sigma_z^{'}}{\partial z}\right)\frac{\partial\sigma_z^{'}}{\partial z} + \left((\sigma_z')_0 - (\sigma_z)_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}A\frac{\partial u^{'}}{\partial z} - \right.\\
\left. - \frac{\tau}{2}B\frac{\partial v^{'}}{\partial z}\right)\frac{\partial u^{'}}{\partial z} + \left(v_0^{'} - v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial\tau_{zx}^{'}}{\partial z}\right)\frac{\partial\tau_{zx}^{'}}{\partial z} +\\
+ \left((\tau_{zx}')_0 - (\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}C\frac{\partial v^{'}}{\partial z} - \frac{\tau}{2}B\frac{\partial u^{'}}{\partial z}\right)\frac{\partial v^{'}}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Дополнительные уравнения сформулируем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u_0^{'} - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial\sigma_z^{'}}{\partial z} &= \frac{\gamma}{2\rho}\frac{\partial\sigma_z^{'}}{\partial z},\\
(\sigma_z')_0 - (\sigma_z)_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}A\frac{\partial u^{'}}{\partial z} &= \frac{\gamma}{2}A\frac{\partial u^{'}}{\partial z} + \alpha\tau B\widetilde{\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial z}\right)},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
v_0^{'} - v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2\rho}\frac{\partial\tau_{zx}^{'}}{\partial z} &= \frac{\omega}{2\rho}\frac{\partial\tau_{zx}^{'}}{\partial z},\\
(\tau_{zx}')_0 - (\tau_{zx})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}C\frac{\partial v^{'}}{\partial z} &= \frac{\omega}{2}C\frac{\partial v^{'}}{\partial z} + \beta\tau B\widetilde{\left(\frac{\partial v^{'}}{\partial z}\right)}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

На первом этапе следует положить α и β равными нулю и решить две независимые задачи (17), (18), совпадающие с задачами для случая изотропной

среды. На втором этапе снова решаются две независимые задачи (17), (18), в которых α и β следует принять равными $1/2$, а производные $(\widetilde{\partial u'/\partial z})$ и $(\widetilde{\partial v'/\partial z})$ вычислить по решению, полученному на первом этапе.

Мощность искусственной диссипации при этом равна

$$Q = \frac{\gamma}{2\rho}\left(\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z}\right)^2 + \frac{\omega}{2\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}'}{\partial z}\right)^2 + \frac{\gamma}{2}A\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2 - \\ - \tau B\left[\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial v'}{\partial z} - \alpha\frac{\partial u'}{\partial z}\widetilde{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)} - \beta\widetilde{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)}\frac{\partial v'}{\partial z}\right] + \frac{\omega}{2}C\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2,$$

а решения одномерных задач (17), (18) будут вычисляться по явным формулам, если

$$\gamma = h/\sqrt{A/\rho} - \tau, \quad \omega = h/\sqrt{C/\rho} - \tau.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве сходимости построенного таким образом приближенного решения к точному. Это доказательство почти полностью совпадает с тем, которое приведено для итерационной процедуры решения двумерных динамических задач в третьей главе монографии [1]. Отметим только, что алгоритм будет корректным, если константы диссипации γ и ω удовлетворяют неравенствам $\gamma \geq 0$, $\omega \geq 0$, откуда следует ограничение на шаг по времени

$$\tau \leq h/\sqrt{\max\{A, C\}/\rho}. \tag{19}$$

Таким образом, описанный алгоритм решения полной задачи исключает процедуру приведения матрицы к диагональному виду и сводится к независимому решению необходимого набора гиперболических систем двух уравнений (система уравнений акустики).

Следует сказать, что, как и в алгоритме, основанном на приведении системы к каноническому виду, использование в схеме максимально допустимого по условию (19) шага по времени не позволяет получать точное решение задачи, так как одномерные задачи (17), (18), описывающие распространение возмущений с различными скоростями, решаются хотя и независимо, но на одной и той же сетке, в силу чего мощность искусственной диссипации Q не обращается в нуль, а пропорциональна множителю $\sqrt{\max\{A, C\}/\min\{A, C\}} - 1$.

В результате расчетов по схеме (16)–(18) сформулированной выше задачи после двухсот шагов по времени получаются графики напряжений σ_z и τ_{zx} и скоростей, совпадающие с приведенными на рис. 2.

2.4. **Численное решение задачи распространения сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде.** В настоящее время для решения задач, описывающих распространение волн в неоднородных средах хорошо зарекомендовал себя полуаналитический метод, основанный на сведении исходной многомерной задачи к семейству одномерных краевых задач с последующим восстановлением решения. Задача распространения сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде является классической задачей динамической теории упругости для слоисто-неоднородного тела.

Рассматриваемая в данном пункте прямая задача сейсморазведки относится к классу задач, для которых требования к точности решения оказываются

достаточно жесткими. Ее характерной особенностью можно считать достаточно малую зону действия источника возмущений по сравнению с масштабами области, в которой необходимо получить решение. Кроме того, сильно осциллирующий характер источника накладывает ограничения на шаг по времени, что, в свою очередь, приводит к необходимости достаточно мелкой дискретизации расчетной области.

Анализ задачи и тестовые расчеты показывают, что ее численное решение на основе разностной схемы принципиально возможно только в случае, если решены следующие проблемы:

- алгоритм дает монотонное решение и, в частности, не искажает его в окрестности оси симметрии;
- схема не обладает искусственной диссипацией на всех типах волн — разрывах решения (наличие даже малой схемной вязкости очень скоро приводит к полному затуханию возмущения);
- алгоритм допускает обобщение на случай существенно неоднородной среды;
- условия на границах выделенного для численного решения объема эффективно обеспечивают неотражение от этих границ.

При построении описанного выше итерационного численного алгоритма сформулированные требования были в основном выполнены.

2.4.1. *Постановка задачи.* Прямая задача сейсмики является классической динамической задачей определения напряженно-деформированного состояния слоистой, вертикально-неоднородной упругой среды, которую можно сформулировать следующим образом.

Рассматривается слоистая упругая среда (рис. 3). На рисунке y или z — координаты, направленные вглубь среды ($0 \le y,\, z \le K$); x или r — координаты на дневной поверхности $z = 0$, $y = 0$ ($0 \le x,\, r \le M$) для двух вариантов постановки — в декартовой системе координат (x, y) или для осесимметричной задачи (r, z) соответственно.

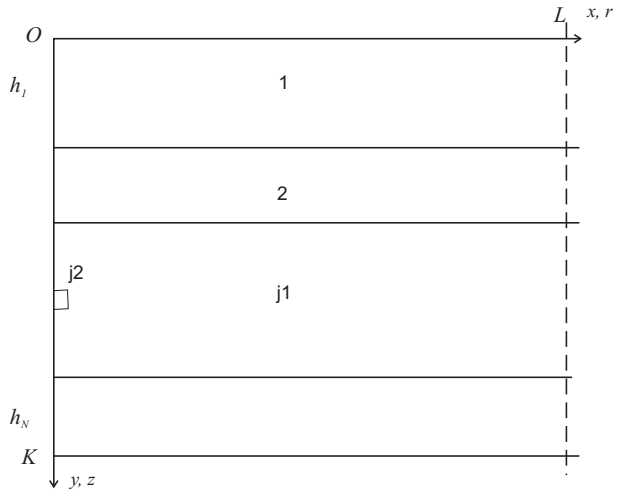


Рис. 3. Структура слоистой вертикально-неоднородной упругой среды

Неизвестными функциями являются: три компоненты тензора напряжений (σ_x, σ_y, τ_{xy}) в плоском случае и четыре компоненты (σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz}) в осесимметричном варианте; а так же две компоненты вектора скорости (u_x, u_y или u_r, u_z) для двух указанных вариантов соответственно.

Начальные условия задачи, как правило, можно принять нулевыми.

Граничные условия будут различными в зависимости от расположения и характера источника возмущений. К примеру, для случая заглубленного источника их можно сформулировать следующим образом:

1. Поверхность $y = 0$ ($z = 0$) свободна от напряжений:

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad (\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0).$$

2. Ось Oy (Oz) — ось симметрии:

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = 0 \quad (u_r|_{r=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{r=0} = 0).$$

3. При $x = L$ ($r = L$) заданы неотражающие условия в виде:

$$(\sigma_x + \rho c_p u_x)|_{x=L} = 0, \quad (\tau_{xy} + \rho c_s u_y)|_{x=L} = 0,$$

$$\{[(r\sigma_r) + L\rho c_p u_r]|_{r=L} = 0, \quad [(r\tau_{rz}) + L\rho c_s u_z]|_{r=L} = 0\}.$$

4. При $y = K$ ($z = K$) заданы неотражающие условия в виде:

$$(\sigma_y + \rho c_p u_y)|_{y=K} = 0, \quad (\tau_{xy} + \rho c_s u_x)|_{y=K} = 0,$$

$$\{[(r\sigma_z) + r\rho c_p u_z]|_{z=K} = 0, \quad [(r\tau_{rz}) + r\rho c_s u_r]|_{z=K} = 0\}.$$

Здесь ρ — плотность; c_p, c_s — скорость продольных и поперечных волн соответственно. Условия 2 выполнены на оси Oy (Oz) всюду, кроме некоторой достаточно узкой области, в которой расположен источник возмущений. Действие этого источника, размеры которого могут быть, вообще говоря, существенно меньше размеров расчетной ячейки, будем моделировать следующим образом. Зная расположение источника возмущений, мы будем решать одномерную сферически симметричную задачу о распространении упругих волн до тех пор, пока фронт волны не выйдет на какую-либо из границ области. Построенное решение проектируем на разностную сетку задачи и полученное таким образом решение берем в качестве начальных данных. Для плоской задачи в декартовой системе координат процедура расчета остается такой же, только в качестве начального условия берется решение одномерной осесимметричной задачи.

Иногда источник возмущений можно считать расположенным на поверхности $z = 0$ ($y = 0$). В этом случае его действие моделируется заданием в некоторой малой окрестности нуля поверхности $z = 0$ ($y = 0$) нормального напряжения σ_z (σ_y) либо вертикальной составляющей скорости u_z (u_y), как функций времени. Ясно, что в этом случае радиус зоны действия такого источника не удается сделать более мелким, чем ширина одной ячейки введенной разностной сетки.

Алгоритм численного решения сформулированной задачи реализован в виде набора программ, написанных на языке FORTRAN Power Station фирмы Microsoft. Разработаны два независимых варианта программы для решения плоской и осесимметричной задач, общей частью которых является только файл данных, содержащий информацию о конкретной модели среды.

2.4.2. *Задача о действии заглубленного источника импульсного типа в однородной полубесконечной среде.* Рассмотрим простейшую модельную задачу действия заглубленного (на одну ячейку) источника импульсного типа в однородной полубесконечной среде. Плотность среды принята равной единице, скорость продольных упругих волн в два раза превышает скорость поперечных волн и равна 1 км/с. На рис. 4 с помощью пакета ASPIS изображены 48 сейсмограмм (трасс) длительностью 0,5 с каждая, расположенных на расстоянии 4м друг от друга. При численном решении задачи шаг по времени τ выбирался равным 1 мс (0,001 с). На рис. 4 на невозмущенном фоне четко видны три «прямые линии», имеющие следующий смысл. Наиболее крутая, расположенная выше других, «прямая» («прямая волна») получается в результате регистрации на каждом из 48-и приемников прихода со скоростью продольных упругих волн сигнала, задаваемого источником возмущения.

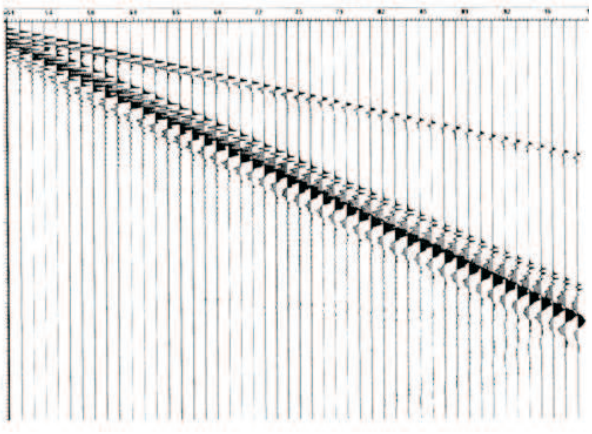


Рис. 4. Сейсмограмма сигнала в упругой однородной полубесконечной среде

Вторая, более пологая, «прямая» (ее наклон к вертикальной оси ровно в два раза меньше) образуется в результате регистрации сдвиговых (поперечных) волн. Немного положе на сейсмограмме расположена «прямая», возникшая в результате регистрации приемниками волны Релея, скорость которой несколько меньше скорости распространения поперечных волн. Если источник удалить от поверхности на достаточную глубину, на сейсмограмме будут четко выделены только продольная и поперечная волны, а взаимодействие возмущения от источника со свободной поверхностью будет регистрироваться очень слабо.

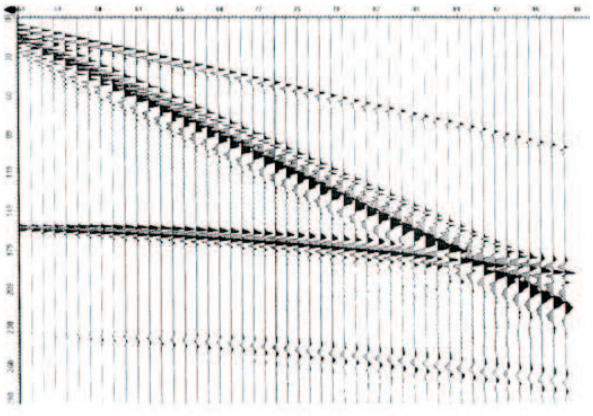


Рис. 5. Сейсмограмма сигнала в упругой двухслойной полубесконечной среде

На рис. 5 приведена сейсмограмма регистрации сигнала от такого же источника для двухслойной упругой среды. Верхний слой глубиной 50 м имеет те же упругие свойства, что и в предыдущем примере, а второй полубесконечный слой имеет плотность 2 г/см^3 и скорость продольных упругих волн — 2,5 км/с. В результате отражения сигнала от границы раздела двух сред, регистрируемая приемниками картина здесь существенно сложнее.

Для апробации работы программы был рассмотрен конкретный профиль в районе Гольчихинской скважины (п/о Таймыр).

В качестве граничных условий задавалась поверхностная нагрузка, распределенная по одной (первой от оси) ячейке $\sigma_z|_{z=0} = Ae^{-at}\cos(2\pi\omega t)$, где частота ω выбиралась равной ≈ 100 Гц, а декремент a обеспечивал затухание колебаний примерно на порядок на одном периоде. Шаг по времени выбран равным 2 мс; расчетная область при этом содержит примерно 100 000 ячеек. Сигнал снимался на 48 расположенных на поверхности $z = 0$ через каждые 50 метров приемниках, фиксирующих вертикальную составляющую скорости u_z.

На рис. 6 фрагмент рассчитанной сейсмограммы длительностью 1,8 с (после использования стандартной кинематической обработки с помощью пакета PROMAX) приведен в сравнении с реальным суммарным (по шести источникам) временным разрезом в районе скважины (на рис. 6 светлая вставка).

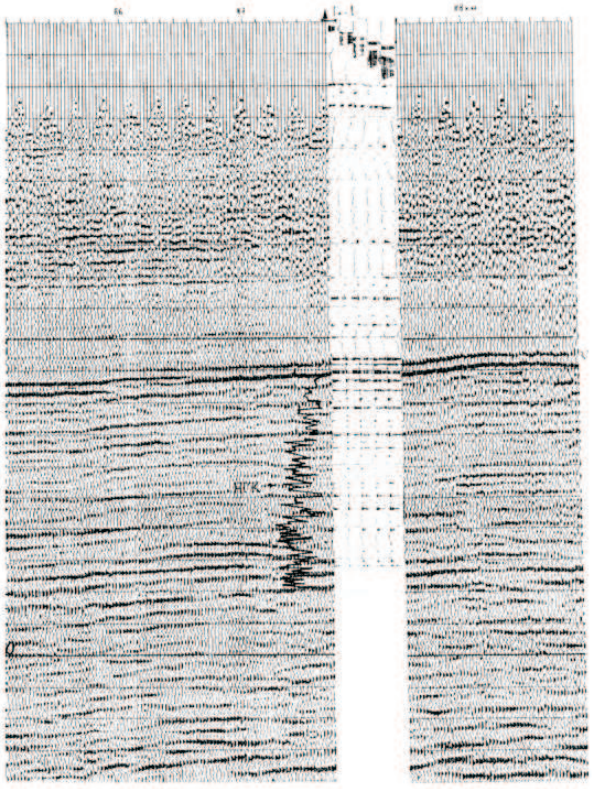


Рис. 6. Сейсмограмма длительностью 1,8 с

Следует отметить, что несовпадение в верхней части (0,2–0,3 с) обусловлено тем, что приход головной волны, а также мощные поверхностные волны в реальной сейсмограмме не фиксируются. «Глубины» 0,3–1 с не являлись целью исследования, поэтому физическая модель для этого района выбрана достаточно усредненной, чем и объясняется различие в сейсмограммах. Наибольший интерес представляет структура разреза на «глубинах» 1 с и далее, где присутствуют базальтовые слои, обеспечивающие значительный перепад импедансов. Эти границы фиксируются в расчете вполне удовлетворительно.

3. Определение физических и геометрических характеристик слоисто неоднородной среды

В предыдущих пунктах проиллюстрирована хорошая работоспособность и достаточно высокая точность предложенных численных алгоритмов при решении прямых задач динамической теории упругости для слоисто-неоднородных сред. Строение расчетной области, а также механические характеристики материала при этом считались заданными, а результатом решения задачи являлось вычисление на каждом шаге по времени и в каждой расчетной ячейке компонентов тензора напряжений и вектора скорости. Представляет интерес решение обратной задачи — задачи определения всех или некоторых механических характеристик (плотности, продольной и поперечной скорости распространения звуковых волн в среде), а также геометрии (в частности, толщин однородных слоев) среды на основе использования известной дополнительной информации

о решении. Ограничимся рассмотрением простой слоистой структурной среды, а в качестве основного элемента решения задачи используем изложенный выше алгоритм решения прямых задач.

3.1. **Геометрия слоистого полупространства. Постановка задачи.** Пусть на основе сейсмоакустического зондирования требуется определить механические характеристики (и, следовательно, оценить прочностные свойства) дна водоема относительно небольшой (5–10 метров) известной глубины. Одна из наиболее простых возможных математических формулировок этой задачи будет следующей.

Пусть рассматриваемая область представляет собой слоистое полупространство бесконечной глубины, которое имеет следующую структуру (рис. 7).

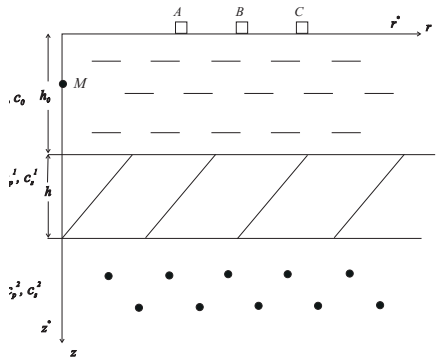


Рис. 7. Структура слоистого полупространства

Верхний слой известной глубины h_0 — это слой воды, плотность которой ρ_0 и скорость распространения звуковых волн c_0 известны. Ниже расположен упругий слой неизвестной толщины h. Его плотность ρ_1, скорости распространения продольной и поперечной упругих волн c_p^1 и c_s^1 соответственно. Еще ниже к нему примыкает полубесконечный упругий слой плотности ρ_2, скорости распространения упругих волн в котором c_p^2 и c_s^2 соответственно. Считаем, что возмущение в среде возбуждается источником взрывного типа, расположенным в точке M внутри слоя жидкости, а в известных точках A, B, C поверхности $z = 0$ расположены приёмники, фиксирующие изменение во времени вертикальной составляющей вектора скорости u_z.

Задачу будем рассматривать в осесимметричной постановке, т. е. ось Oz является осью симметрии. Поверхность $z = 0$ свободна от напряжений. Для ограничения расчетной области на боковой поверхности рассматриваемого цилиндра $r = r^*$ и на его дне $z = z^*$ будем задавать неотражающие условия. На основе информации, полученной на приёмниках A, B и C, необходимо определить упругие константы ρ_1, c_p^1, c_s^1, ρ_2, c_p^2, c_s^2 и толщину первого упругого слоя h либо, если это окажется затруднительным или невозможным, какие-то комбинации упругих констант, которые, тем не менее, могли бы дать представление о прочностных свойствах упругих слоев.

Последнее требует некоторого пояснения. Для этого наряду со сформулированной двумерной задачей, решение которой может быть найдено только численно, рассмотрим очень близкую к ней одномерную задачу, содержащую

все основные элементы и особенности постановки задачи двумерной, но у которой может быть найдено точное решение (прямой задачи), например, методом характеристик.

Рассмотрим полубесконечный неоднородный упругий стержень, состоящий из трех участков (рис. 8).

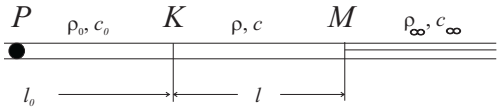


Рис. 8. Полубесконечный неоднородный упругий стержень

Первый участок OK известной длины l_0 имеет известную плотность ρ_0 и известную скорость распространения упругих волн в стержне c_0. У второго участка KM неизвестной длины l плотность ρ и скорость звука c неизвестны. Третий полубесконечный участок имеет неизвестные плотность ρ_∞ и скорость звука c_∞. Возмущение в стержне возбуждается на участке OK и фиксируется в некоторой точке P этого отрезка.

Очевидно, что амплитуда отраженных от границ раздела и прошедших в соседний участок сигналов будет зависеть только от величины импедансов ρc и $\rho_\infty c_\infty$, а не от каждого из параметров ρ, c, ρ_∞, c_∞ в отдельности. А сдвиг по времени принимаемых в точке P сигналов зависит не от длины второго участка , а только от времени пробега волны по этому участку $T = l/c$. Таким образом, независимо от формы задаваемого в OK возмущения для всех стержней описанной конструкции, имеющих одинаковые импедансы ρc, $\rho_\infty c_\infty$ и одно и тоже время пробега волны по участку KM, решение, зарегистрированное в точке P будет одним и тем же. Так что с помощью описанного способа зондирования из пяти неизвестных величин l, ρ, c, ρ_∞, c_∞ в принципе поддаются определению только три комбинации: ρc, $\rho_\infty c_\infty$, l/c.

Для сформулированной выше двумерной задачи ситуация несколько иная. Теоретически на решение в точках A, B и C влияют все семь введенных констант среды, однако отличие решений для моделей, например, с одним и тем же импедансом $\rho_1 c_p^1$, но различными скоростями c_p^1 и плотностями ρ_1 заметно только в том случае, если приёмники A, B, C достаточно удалены от источника (на 20–40 толщин первого слоя) и расположены на значительном расстоянии друг от друга. В рассматриваемой задаче мы считаем, что приемники расположены от источника на расстоянии не более чем 70–100 метров, поэтому, как показывает вычислительный эксперимент, в такой ситуации отличие в решениях будет величиной порядка ошибки вычислений. С практической точки зрения знание комбинаций $\rho_1 c_p^1$ и $\rho_2 c_p^2$ дает уже немалую информацию о большинстве упругих сред (за исключением, может быть, некоторых экзотических материалов).

Кроме того, с большой степенью достоверности можно считать, что скорости распространения поперечных упругих волн в обеих слоях составляют половину скоростей продольных волн $c_s^1 = c_p^1/2$, $c_s^2 = c_p^2/2$, т. е. коэффициенты Пуассона в одном и другом слое равны $\nu = 1/3$. В этом случае задача сводится к задаче определения в рассматриваемой среде только трех параметров $\rho_1 c_p^1$, $\rho_2 c_p^2$ и времени пробега продольной упругой волны поперек первого упругого слоя $T = h/c_p^1$. В такой постановке сформулированная обратная задача для двумерной среды становится идентичной рассмотренной одномерной задаче.

Сформулированная задача определения констант, характеризующих механические свойства и толщины слоев слоисто-неоднородной упругой среды, является классической динамической обратной задачей сейсмики. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических систем уравнений были сформулированы и исследованы А. С. Алексеевым [3], А. С. Благовещенским [4], М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым [5], [6] . К настоящему времени в зависимости от методов исследования определилось несколько основных подходов к решению этих задач. Будем решать поставленную задачу на основе конструирования и минимизации целевого функционала, характеризующего отклонение в подходящей норме зарегистрированного поля от рассчитанного для некоторой модели среды.

3.2. **Выбор целевого функционала.** При численной реализации поставленной задачи исследовались различные целевые функционалы. Достаточно удачным для данной задачи оказывается целевой функционал в следующем виде:

$$\Delta = \int_0^\infty [\varphi(t) - \varphi^*(t)]^2 dt, \tag{20}$$

где $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ являются свертками с единицей функций $f(t)$ и $f^*(t)$ соответственно

$$\varphi(t) = 1 \star f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad \varphi^*(t) = 1 \star f^*(t) = \int_0^t f^*(\tau)d\tau.$$

При численной реализации задачи функции $f(t)$ и $f^*(t)$ являются кусочно-постоянными (ступенчатыми), значение которых на шаге по времени с номером i есть f_i и f_i^* соответственно. В этом случае

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i^2 + s_i s_{i-1} + s_{i-1}^2), \tag{21}$$

где

$$s_0 = 0, \quad s_i = \sum_{k=1}^{i} (f_k - f_k^*).$$

На рис. 9 приведены зависимости функционала Δ от различных параметров задачи.

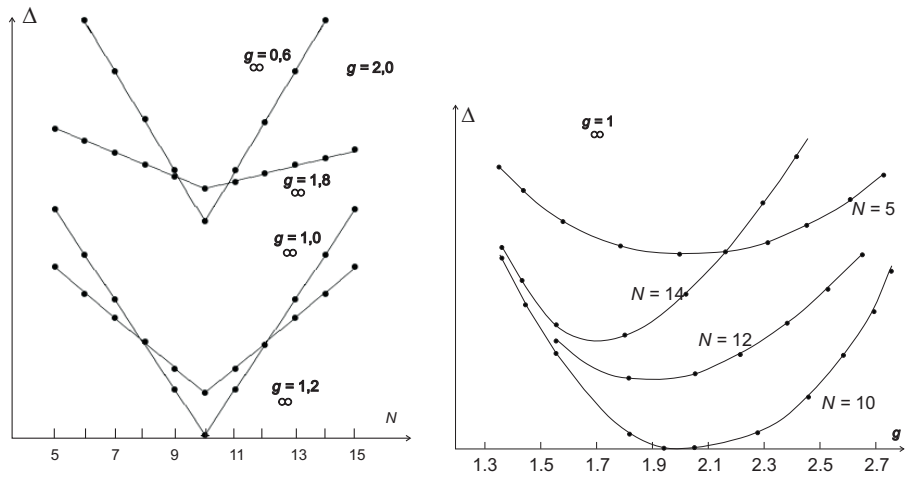


Рис. 9. Зависимость целевого функционала Δ_2 от параметров задачи:
а — от параметра N при различных значениях параметра g_∞; б — от параметра g при различных значениях параметра N.

Из приведенных графиков следует, что:

— зависимость Δ от g и g_∞ является гладкой, причем точка минимума не сильно удаляется от истинного значения при различных значениях N;

— при изменении g и g_∞ в достаточно широком диапазоне точка минимума функционала по N практически остается той же самой.

Отмеченные свойства позволяют говорить о том, что выбор функционала в виде (20) сделан удачно.

3.3. **Поиск минимума функционала.** Таким образом, для решения сформулированной обратной задачи необходимо найти минимум выпуклой функции трех переменных $\Delta(g, g_\infty, N)$ на достаточно широком допустимом множестве изменения аргументов. Этот минимум можно искать любым классическим способом, задавшись некоторым, принадлежащим допустимому интервалу, начальным приближением и решая необходимое число раз прямую задачу.

Однако у такого подхода есть и недостатки, которые заключаются в следующем:

- прямые двумерные задачи для слоистой среды, требующие значительного объема оперативной памяти компьютера и большого времени счета, приходится решать непосредственно в процессе решения обратной задачи;
- в силу специфики численного алгоритма решения прямой задачи некоторые входные параметры в процессе счета не могут быть выбраны произвольными, в то время как на каждом этапе спуска к точке минимума предлагается брать их вполне определенными, не совпадающими с допустимыми.

Последнее требует некоторого пояснения. Дискретизация расчетной области в предложенном алгоритме решения прямых задач для кусочно-однородных сред жестко связана с моделью среды. К примеру, в рассмотренной нами одномерной задаче отрезок KM содержит N ячеек, т. е. прямые задачи мы можем решать только при целых числах N. Два других параметра g и g_∞ мы можем

выбирать любыми. В двумерных задачах необходимость разбиения плоского прямоугольника на целое число элементарных квадратов определенного размера приводит уже к тому, что и толщина слоя и скорость распространения упругих волн могут принимать только отдельные допустимые значения. Значения этих параметров на очередном шаге поиска минимума могут не совпадать с допустимыми.

Предлагается искать минимум рассмотренной функции, аппроксимируя ее по ее значениям во всем допустимом интервале изменения переменных.

Таким образом, процедура решения обратной задачи состоит из следующих этапов:

1. Из всей области изменения аргументов, по возможности более равномерно, выбираются их некоторые допустимые значения — узлы g^i, g^j_∞, N^k, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$, $k = 1, \ldots, K$. Для каждого набора выбранных значений решается прямая задача и результат ее решения (функция $f(t)$) записывается в файл данных в виде одномерного массива действительных чисел (например, значений вертикальной составляющей вектора скорости в приёмнике на каждом шаге по времени). Размерность этого массива устанавливается экспериментально из соображений, что отброшенные значения изменяют конструируемый функционал только в пределах запланированной ошибки. Таким образом создается файл данных — банк сейсмограмм. Описанный этап является подготовительным и может быть проведен заранее, безотносительно к решению конкретной обратной задачи, а при решении обратной задачи необходимые сейсмограммы только считываются из файла данных.

2. После того, как известна истинная сейсмограмма $f^*(t)$ (одномерный массив значений f^*_k), во всех узлах по формулам (20), (21) насчитываются значения функционала $\Delta(g^i, g^j_\infty, N^k)$.

3. Для каждого значения g^i, g^j_∞, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$ находится минимум по N функционала

$$\Delta^*_{ij} = \Delta^*_{ij}(g^i, g^j_\infty) = \min_N \Delta(g^i, g^j_\infty, N).$$

В силу недифференцируемости функционала Δ по переменной N (см. рис. 9а) этот этап вызывает определенную сложность.

Достаточно точной оказалась следующая процедура вычисления минимума.

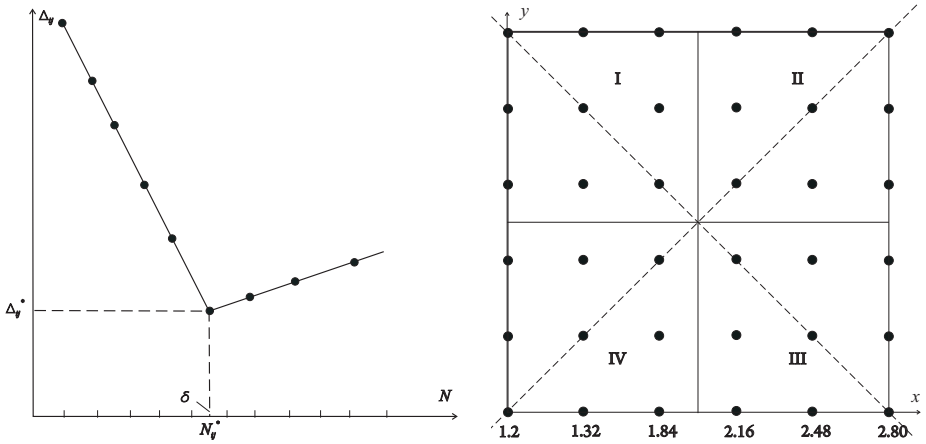


Рис. 10. К определению минимума целевого функционала

Сначала простым перебором по N^k определяется интервал δ (рис. 10а), которому принадлежит точка минимума N^*_{ij}.

Если бы истинное значение N^* было бы целым, этого перебора было бы достаточно. Однако в общем случае это не так. Поэтому по всем точкам справа от N^* и по всем точкам слева от N^* проводятся прямые, минимально (в смысле средних квадратов) отклоняющиеся от этих точек. В качестве N^*_{ij} принимается точка пересечения этих прямых, а в качестве N^* — среднее значение N^*_{ij} по всем $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$.

4. Как показывают расчеты, зависимость Δ от g и g_∞ является достаточно гладкой, поэтому минимум по g и g_∞ будем искать, основываясь на интерполяции функции двух переменных $\Delta^*(g, g_\infty)$ по значениям Δ^*_{ij}. Двумерную интерполяцию будем проводить следующим образом. Для упрощения записи обозначим $g = x$, $g_\infty = y$. Пусть известно, что x и y изменяются в интервалах (1,2, 2,8) и (0,5, 1,5) соответственно и пусть для вычисления функционала на каждом из интервалов (включая их концы) равномерно выбраны по шесть узлов (рис. 10б).

В этих 36-и узлах известны 36 значений Δ^*_{ij}, $i = 1, ..., 6$, $j = 1, ..., 6$. Будем искать $\Delta(x, y)$ в виде полинома по x и y пятой степени:

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) = {} & a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5 + \\ & + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^4 + a_{11}y^4 + \\ & + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y + a_{14}xy^2 + a_{15}y^3 + \\ & + a_{16}x^2 + a_{17}xy + a_{18}y^2 + \\ & + a_{19}x + a_{20}y + \\ & + a_{21},\end{aligned} \tag{22}$$

где 21 коэффициент $a_1, \ldots, a_{21}$ определяются из условия равенства $\Delta(x_i, y_j) = \Delta^*_{ij}$ в 21-й точке одного из четырех треугольников, лежащих выше или ниже одной из диагоналей рассматриваемой области (рис. 10б). Выбор одного из треугольников осуществляется следующим образом. Простым перебором по всем 36-и узлам определяется одной из четвертей прямоугольника, который принадлежит точка минимума (на рисунке они обозначены римскими цифрами), а для интерполяции выбирается тот треугольник, которому целиком принадлежит найденный квадрат.

После определения коэффициентов a_i, $i = 1, \ldots, 21$ минимум многочлена (22) находится как решение системы уравнений

$$\frac{\partial \Delta(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta(x,y)}{\partial y} = 0,$$

причем в качестве начального приближения выбирается узел грубого минимума.

В таблице 1 приведены истинные значения параметров, минимизирующие функционал и найденные в процессе решения обратной задачи.

Для двумерной задачи использовалась суммарная сейсмограмма, составленная из трех сейсмограмм (зависимостей вертикальной составляющей вектора массовой скорости от времени) в приемниках A, B и C, расположенных на расстоянии 30, 50 и 70 метров соответственно. Рассматривалась область протяженностью 100×100 метров, глубина слоя воды — 10 метров. Источник

взрывного типа (источник был выбран в точности таким же, как и в примерах, иллюстрирующих решение прямых задач сейсмики в предыдущем параграфе) расположен на глубине 5 метров. Шаг по времени выбран равным 1 мс. Из таблицы 3 видно, что решение обратной задачи в предложенной постановке находится с точностью около одного процента.

Таблица 1. Истинные значения параметров, минимизирующие функционал

g^*	g^*_∞	N^*	g	g_∞	N
3.5	1.3	9	3.5101	1.313	9
4.5	1.3	8	4.5060	1.308	8
3.5	2.6	11	3.4871	2.581	11
4.5	2.6	12	4.4881	2.584	12

Список литературы

[1] Г.В. Иванов, Ю.М. Волчков, И.О. Богульский, С.А. Анисимов, В.Д. Кургузов, *Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел*, Новосибирск, Сиб.унив. изд-во, 2002.

[2] Т.Д. Шермергор, *Теория упругости микронеоднородных сред*, М.: Наука, 1977.

[3] А.С. Алексеев, *Обратные динамические задачи сейсмики* , Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических знаний. М., 1967, 9–84.

[4] А.С. Благовещенский, *Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн*, Тр. Ленингр. ун-та. Л., **1** (1966), 68–81.

[5] М.М. Лаврентьев, В. Г.Романов, *О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений*, Докл. АН СССР, **171** (1966), 1279–1281.

[6] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.Л. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.

Юрий Матвеевич Волчков
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 15,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: volk@hydro.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.238–С.247 (2010)

УДК 517.9, 519.6
MSC 35Q60, 65R32, 65Z05

ЗАДАЧИ СВЕТОРАССЕЯНИЯ В СКАНИРУЮЩЕЙ ПРОТОЧНОЙ ЦИТОМЕТРИИ

Г. В. ДЯТЛОВ

Abstract. The paper represents the extended talk at the Young Scientist International School-Conference "Theory and Numerical Methods for Solution of Inverse and Ill-Posed Problems". The goal of the paper is to give a presentation of inverse scattering problems arising in scanning flow cytometry and methods for their solution.

Keywords: scanning flow cytometry, inverse light scattering, blood cells, discrete diplole approximation, T-matrix method, Mie scattering

1. Сканирующая проточная цитометрия

Задача характеризации частиц крови и других биологических частиц является важной задачей биологии и имеет многочисленные практические применения. Для приложений важно уметь обрабатывать большие количества однородных частиц, например, эритроцитов, с большой скоростью. По-видимому, одним из перспективных подходов к решению этой задачи является сканирующая проточная цитометрия, т.е. технология, основанная на обращении данных светорассеяния, полученных на сканирующем проточном цитометре.

Обсуждаемый цитометр разработан более десяти лет назад в ИХКиГ СО РАН. Подробное описание можно найти в монографии [1]. Мы ограничимся кратким описанием достаточным для понимания математической сути задачи.

Основной элемент цитометра — оптическая кювета, т.е. кварцевый капилляр с одним плоским и одним сферическим концом (см. Рис. 1). Поток воды со

Dyatlov, G.V., Light scattering problems in scanning flow cytometry.
© 2010 Дятлов Г.В.
Поступила 16 февраля 2010 г.

взвешенными в нем частицами течет по капилляру слева направо. Положение частицы отслеживается при помощи двух управляющих лучей. Луч лазера падающий вдоль оси капилляра слева рассеивается на движущейся частице. Рассеянный свет отражается от сферического конца, фокусируется системой зеркал и линз и в конце концов через апертуру достигает фотоумножительной трубки (ФУ). Схема рассчитана таким образом, что регистрируются только те лучи, которые после отражения от сферического конца параллельны оси.

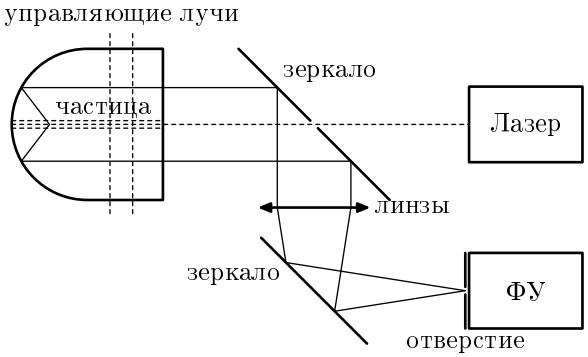


Рис. 1. Упрощенная оптическая схема цитометра.

Пусть θ и φ — полярный и азимутальный углы рассеянного луча. (Направление падающего луча соответствует $\theta = 0$.) Обозначим через $I(\theta, \varphi)$ двумерную индикатрису рассеяния, т.е. интенсивность света рассеянного в направлении (θ, φ). Поток воды, в котором взвешена частица, постоянный, так что можно считать, что $I(\theta, \varphi)$ не меняется со временем. Для каждого положения частицы существует единственный полярный угол θ такой, что соответствующие лучи после отражения параллельны оси и тем самым попадают на фотоумножитель. Частица движется по капилляру с известной постоянной скоростью, таким образом возникает взаимно однозначное отображение время — угол (см. подробнее [1]). Это позволяет каждому углу сопоставить соответствующую интенсивность рассеянной волны усредненную по азимутальному углу

$$I(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta, \varphi)\, d\varphi.$$

С одной стороны, интегрирование по φ вызвано конструкцией цитометра и является недостатком, поскольку ведет к потере информации. С другой стороны, двумерная индикатриса $I(\theta, \varphi)$ для отдельного направления (θ, φ) слишком мала для измерения, в то время как интегральная индикатриса $I(\theta)$ может быть измерена фотоумножителем с достаточно большой скоростью (порядка 1MHz). В этом смысле интегрирование по азимуту является вынужденной мерой при работе с малыми частицами. Заметим также, что для сферических частиц $I(\theta, \varphi)$ не зависит от φ и информация не теряется.

Кроме описанной схемы, которая реализована в действующем приборе, существует перспективная модифицированная схема [2], которая теоретически позволяет измерять некоторое интегральное преобразование

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} K(r, \theta) I(\theta, \varphi)\, d\theta$$

и тем самым саму функцию $I(\theta, \varphi)$ в некотором диапазоне $\theta_{\min} \le \theta \le \theta_{\max}$.

Конструктивной особенностью цитометра является то, что невозможно измерить $I(\theta)$ и $I(\theta, \varphi)$ при малых и больших θ. Реально измерения проводятся в диапазоне от 10° до 70°. На Рис. 2 представлена индикатриса рассеяния $s_{\text{int}}(\theta)$ сферической частицы (в логарифмическом масштабе). Легко заметить, что она быстро спадает и условие $\theta \geq 10^\circ$ приводит к существенной потере информации.

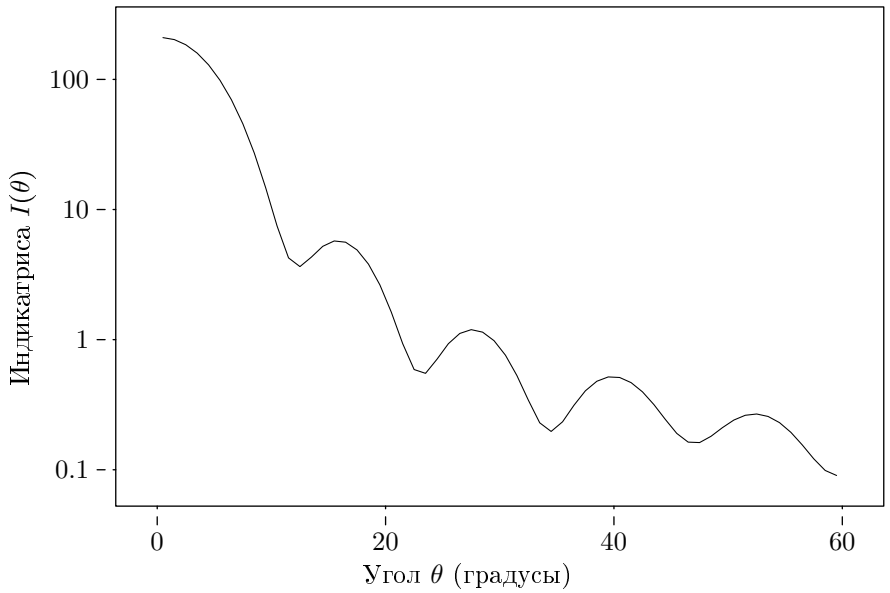


Рис. 2. Индикатриса рассеяния $I(\theta)$ сферической частицы. В виду быстрого убывания при больших углах используется логарифмический масштаб.

2. Уравнения Максвелла

Распространение электромагнитных волн, как известно, описывается системой уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} &\text{rot}E(x) = i\omega\mu H(x), \\ &\text{rot}H(x) = -i\omega\varepsilon E(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

где E и H — напряженности электрического и магнитного полей, ω — частота, ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости. В наших задачах предполагается, что μ постоянна, а $\varepsilon(x)$ кусочно постоянна:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{в } \Omega, \\ \varepsilon_0 & \text{вне } \Omega, \end{cases}$$

где Ω — ограниченная область с гладкой границей, занимаемая частицей.

В теории рассеяния ставится следующая (прямая) задача: *найти решение вида* $E(x) = E^{(i)}(x) + E^{(s)}(x)$, *где падающая волна* $E^{(i)}(x)$ *удовлетворяет* (1) *с* $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$, *а рассеянная волна* $E^{(s)}(x)$ *— условию излучения.* Здесь и далее мы рассматриваем только электрическую составляющую, так как магнитная восстанавливается из (1). В качестве падающей волны мы берем плоскую волну

$E^{(i)}(x) = E^0 e^{ik\hat{e}^{(i)}\cdot x}$, где $\hat{e}^{(i)}$ — единичный вектор направления распространения волны, E^0 — постоянный комплексный вектор ортогональный $\hat{e}^{(i)}$, а $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu}$ — волновое число, связанное с длиной волны λ следующим образом: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Рассеянная волна имеет следующую асимптотику на бесконечности

$$E^{(s)}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{-ik|x|}\left(E^\infty\Big(\frac{x}{|x|}\Big) + O\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\right), \quad |x| \to \infty,$$

причем $E^\infty(\hat{x})$ ортогонально $\hat{x}$ при при каждом единичном $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$. Если перейти к сферической системе координат (r, θ, φ), то E^∞ будет функцией θ, φ. Предположим, что направление падающей волны совпадает с направлением оси x_3. Для каждого направления (θ, φ) выберем стандартным образом базис $\hat{e}^{(i)}_\perp$, $\hat{e}^{(i)}_\parallel$ в плоскости x_1, x_2 и базис $\hat{e}^{(s)}_\perp$, $\hat{e}^{(s)}_\parallel$ в касательном пространстве к сфере в точке (θ, φ) так, чтобы первый вектор в каждой паре был перпендикулярен плоскости рассеяния, а второй параллелен (подробнее см. [3], § 3.2). Разложим векторы E^0 и E^∞ по соответствующим базисам:

$$E^0 = E^0_\perp(\theta,\varphi)\hat{e}^{(i)}_\perp + E^0_\parallel(\theta,\varphi)\hat{e}^{(i)}_\parallel,$$
$$E^\infty(\theta,\varphi) = E^\infty_\perp(\theta,\varphi)\hat{e}^{(s)}_\perp + E^0_\parallel(\theta,\varphi)\hat{e}^{(s)}_\parallel.$$

В силу линейности задачи пары коэффициентов связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} E^\infty_\perp \\ E^\infty_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(\theta,\varphi) & S_4(\theta,\varphi) \\ S_3(\theta,\varphi) & S_2(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^0_\perp \\ E^0_\parallel \end{pmatrix}.$$

Возникающая комплекснозначная матрица $(S_p(\theta,\varphi))$ называется амплитудной матрицей. Квадратичные комбинации ее элементов составляют матрицу рассеяния $S_{ij}(\theta,\varphi)$, $i, j = 1, \ldots, 4$:

$$S_{11} = \frac{1}{2}\Big(|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2\Big),$$
$$S_{12} = \frac{1}{2}\Big(|S_2|^2 - |S_1|^2 + |S_4|^2 - |S_3|^2\Big),$$
и т. д.

Вещественные функции $S_{ij}(\theta,\varphi)$ представляют собой наиболее полные данные, которые можно получить в реальном эксперименте. В частности $I(\theta,\varphi) = S_{11}(\theta,\varphi) \times$ интенсивность падающего света.

Более подробное изложение электромагнитной теории можно найти в [3, 4, 5, 6].

3. Прямые задачи

Решение обратной задачи начинается с решения прямой задачи и анализа ее решения. Мы вкратце опишем основные (практические) методы решения прямой задачи рассеяния. Единственный случай, в котором можно решить поставленную задачу в явном виде, это случай однородного шара (теория Ми). Этот подход можно обобщить с трудом на случае сфероидов, однако получающиеся формулы слишком громоздки. В общем случае прибегают к использованию тех или иных приближенных методов, каждый из которых имеет свои ограничения.

3.1. **Теория Ми.** В случае шара рассеянную волну и элементы матриц удается выписать в явном виде. В дальнейшем Ω — шар радиуса a, $\alpha = ka$ — параметр дифракции, $m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}$ — относительный показатель преломления, $\beta = m\alpha$.

Падающая и рассеянная волны раскладываются по векторным сферическим гармоникам $M^{(i)}_{p1n}$, $N^{(i)}_{1pn}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $p = e, o$ — обозначает четность (по φ), а i может быть либо 1, что соответствует регулярным гармоникам, либо 3, что соответствует гармоникам, удовлетворяющим условиям излучения (подробнее см., например, [3], Глава 4):

$$E^{(i)}(x) = E^0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (M^{(1)}_{o1n} - iN^{(1)}_{e1n}),$$
$$E^{(s)}(x) = E^0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (ia_n N^{(3)}_{e1n} - b_n M^{(3)}_{o1n}).$$

Коэффициенты a_n, b_n находятся из условий равенства касательных компонент внутреннего и внешнего полей и имеют вид

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{m\psi_n(\beta)\psi_n'(\alpha) - \psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta)}{m\psi_n(\beta)\xi_n'(\alpha) - \xi_n(\alpha)\psi_n'(\beta)}, \\ b_n &= \frac{\psi_n(\beta)\psi_n'(\alpha) - m\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta)}{\psi_n(\beta)\xi_n'(\alpha) - m\xi_n(\alpha)\psi_n'(\beta)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\psi_n(\rho)$, $\xi_n(\rho)$ — функции Риккати — Бесселя. Для элементов амплитудной матрицы получаются выражения

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \big(a_n \pi_n(\theta) + b_n \tau_n(\theta)\big),$$
$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \big(b_n \pi_n(\theta) + a_n \tau_n(\theta)\big),$$

где

$$\pi_n(\theta) = \frac{P^1_n(\cos\theta)}{\sin\theta}, \qquad \tau_n(\theta) = \frac{dP^1_n(\cos\theta)}{d\theta},$$

$P^m_n(t)$ — присоединенные многочлены Лежандра.

Очевидно, мы можем получить и выражения для $S_{ij}(\theta)$ в виде бесконечных рядов по произведениям $\pi_n(\theta)$ и $\tau_n(\theta)$.

Таким образом, решение прямой задачи предполагает следующую цепочку действий

$$\alpha,\, m \longrightarrow a_n,\, b_n \longrightarrow S_i(\theta) \longrightarrow S_{ij}(\theta)$$

Код программы для расчета матрицы рассеяния сферической частицы можно найти, например, в [3].

3.2. **Метод дискретных диполей.** Система уравнений Максвелла может быть (формально) переписана в виде эквивалентного интегрального уравнения относительно электрической составляющей $E(x)$:

$$E(x) = E^{(i)}(x) + \int_D \chi(y) G(x, y) E(y)\, dy,$$

где $\chi(y) = \varepsilon_1(x)/\varepsilon_0 - 1$, а $G(x,y)$ — матрица Грина с элементами

$$G_{ij}(x,y) = k^2\delta_{ij}\Phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j}\Phi(x,y), \qquad \Phi(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Ядро $G(x,y)$ имеет неинтегрируемую особенность при $x = y$ и это уравнение можно понимать лишь формально. Более строгий вывод приводит к такому уравнению (один из вариантов):

$$E(x) = E^{(i)}(x) + \int\limits_{D\setminus D_0(x)} \chi(y)G(x,y)E(y)\,dy$$
$$+ \int\limits_{D_0(x)} \chi(y)G(x,y)E(y) - \chi(x)G^0(x,y)E(x)\,dy + \int\limits_{\partial D_0(x)} \frac{\nu(y)(x-y)\cdot E(y)}{|x-y|^4}\,ds(y),$$

где $D_0(x)$ — окрестность x, а $G^0(x,y)$ — функция Грина $G(x,y)$ с $k = 0$. Последние два члена дают явно вклад сингулярности. Последнее уравнение при $x \in D$ имеет единственное решение $E(x)$. После нахождения $E(x)$ при $x \in D$ рассеянная волна вне частицы находится из того же равенства. Подробнее о решении системы уравнений Максвелла методом интегральных уравнений см. [5, 6].

Метод дискретных диполей подразумевает следующую дискретизацию последнего интегрального уравнения: область D разбивается на ячейки или дискретные диполи (как правило, равные кубы), в качестве дискретных параметров E_i берутся значения $E(x)$ в центре ячейки и интеграл заменяется некоторым образом суммой. В результате получается система линейных уравнений относительно E_i. Следует отметить, что различный выбор параметров и кубатурных формул приводит к многочисленным вариантам метода дискретных диполей. Метод обладает достаточной гибкостью для решения любых прямых задач светорассеяния, однако требует больших вычислительных ресурсов, так как для хорошего приближения нужно не менее 10 ячеек на длину волны и общее число параметров может достигать 10^8. Кроме того, для одной и той же частицы в разной ориентации требуются отдельные вычисления. Подробнее о методе дискретных диполей см. [4, 7, 8].

3.3. **Метод T-матрицы.** Метод T-матрицы и его составная часть — метод продолженных граничных условий является, можно сказать, обобщением решения задачи рассеяния на шаре. Падающая и рассеянная волна раскладываются по векторным волновым функциям $M^{(i)}_{pmn}$, $N^{(i)}_{pmn}$ (см. выше). В силу линейности уравнений Максвелла коэффициенты в разложении $E^{(s)}(x)$ и $E^{(i)}(x)$ связаны линейным отображением, которое и называется T-матрицей. Элементы T-матрицы находятся методом продолжения граничных условий следующим образом. В силу формулы Стрэттона — Чу (аналога формулы Грина для уравнений Максвелла) имеет место равенство

$$\int_{\partial D} i\omega\mu(\nu(y)\times H(y))G(x,y) + (\nu(y)\times E(y))\mathrm{rot}_y G(x,y)\,ds(y) = \begin{cases} E^{(s)}(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{cl}D, \\ -E^{(i)}(x), & x \in D. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, падающая и рассеянная волны связаны при помощи граничных значений полного поля $E(x)$ и $H(x)$ на границе ∂D, которые являются также

граничными значениями для внутреннего поля $E^{(in)}$, $H^{(in)}$, являющегося решением уравнения Максвелла в D с $\varepsilon = \varepsilon_1$. Раскладывая $E^{(in)}$, $H^{(in)}$ в ряд по (регулярным) векторным волновым функциям и подставляя эти разложения в (3), мы видим, что коэффициенты $E^{(i)}$, $H^{(i)}$ связаны линейно с коэффициентами $E^{(in)}$, $H^{(in)}$, а последние — с коэффициентами $E^{(s)}$, $H^{(s)}$. Элементы соответствующих матриц состоят из интегралов произведений векторных волновых функций по границе ∂D.

Описанный метод довольно быстро работает для частиц с симметрией, а также имеющих не очень большой перепад радиусов вписанного и описанного шаров. К плюсам относится также то, что за один проход получается решение для всех возможных ориентаций частицы. Подробнее о методе T-матрицы см. [4].

4. Обратная задача

Обратная задача состоит в нахождении формы частицы (области D) и относительного показателя преломления $m = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}$ по измеряемой индикатрисе рассеяния $I(\theta_i)$, $\theta_i \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$.

Как и в случае любой обратной задачи можно выделить два подхода: аналитический и оптимизационный. Первый опирается на анализ прямой задачи и дает либо формулу обращения, либо явный алгоритм. Оптимизационный метод состоит в подборе таких параметров, описывающих форму частицы, при которых расхождение между индикатрисой, посчитанной по этим параметрам, и измеренной индикатрисой будет минимальным. Иными словами, предполагает минимизацию невязки.

4.1. **Аналитические методы.** С одной стороны индикатриса $I(\theta)$ измеряемая цитометром представляет (формально) достаточно богатую информацию, так как измеряется для большого числа узлов, которое явно превышает число параметров, необходимых для описания формы известных частиц. С другой стороны, переход от $S_i(\theta, \varphi)$ к матрице рассеяния $S_{ij}(\theta, \varphi)$ приводит к потере существенной информации о фазе рассеянной волны. Кроме того, $I(\theta)$ нельзя измерить при малых и больших углах θ. Указанные обстоятельства сильно затрудняют применение чисто аналитических методов.

Все известные автору строгие результаты относятся к случаю шара. Если считать, что нам заданы функции $S_i(\theta)$, а не $S_{ij}(\theta)$, при всех углах θ, то радиус шара и показатель преломления находятся с помощью алгоритма, предложенного в работе [9]. Идея состоит в том, чтобы сначала по $S_i(\theta)$, пользуясь ортогональностью $\tau_n \pm \pi_n$ найти a_n, b_n, а по ним из формул (2) радиус и показатель преломления.

Другой результат, который можно отнести к аналитическим, основан на использовании известной асимптотики коэффициентов a_n, b_n при больших n: a_n, b_n быстро убывают при $n \geq \alpha$ (см. [10]), причем независимо от показателя преломления. Это обстоятельство означает, что при разложении $S_{11}(\theta)$ в ряд по тем или иным ортогональным функциям (например в ряд Фурье) коэффициенты резко обрываются и место, где это происходит, связано с размером частицы. Среди всех ортогональных семейств наиболее подходящим являются многочлены Гегенбауэра $T_n(\cos\theta)$, так как функции $\tau_n(\theta)$ и $\pi_n(\theta)$ легко через

них выражаются, и значит, для коэффициентов в разложении получаются явные формулы. На Рис. 3 изображены коэффициенты в разложении $S_{11}(\theta)$ по $T_n(\cos\theta)$ для шара одного радиуса с различными показателями преломления. Хорошо виден момент обрыва при $n \approx 63,90$. Интересно, что в середине коэффициенты показывают характерное поведение (парабола). Однако, автору не известно теоретическое объяснение этого факта. Заметим, что для разложения $S_{11}(\theta)$ в ряд по ортогональным функциям (в частности по $T_n(\cos\theta)$, нужно знать ее при всех углах, чего нет в реальном эксперименте. Имея индикатрису на меньшем интервале, мы по прежнему можем раскладывать в ряд и наблюдать затухание коэффициентов, но в этом случае связь с размерами частицы будет лишь эмпирической (см. [7, 11]).

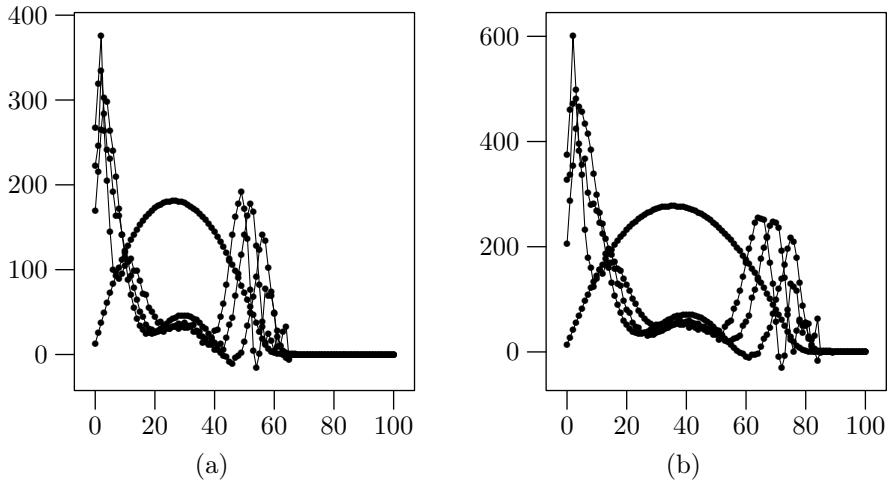


Рис. 3. Коэффициенты в разложении $S_{11}(\theta)$ по многочленам Гегенбауэра для шаров с параметрами $\alpha = 31,44$ ((a) и (b) соответственно) и $m = 1.01, \ldots, 1.18$.

4.2. **Оптимизационные методы.** Оптимизационные методы в меньшей мере используют специфику задачи и в этом смысле подходят для более широкого круга задач. Сложности, связанные с их применением традиционны: трудоемкость решения прямой задачи, затруднения с вычислением производной прямого отображения, и тем самым с применением градиентных методов, а также большое число «паразитных» локальных минимумов у невязки, и значит проблемы с выбором начального приближения.

Известные практические результаты к настоящему моменту основаны на поиске оптимального решения по заранее насчитанной базе данных. При этом удается характеризовать такие сложные частицы как эритроциты [7, 11].

Видимо, перспективным будет создание алгоритмов нахождения производной прямого отображения и использования градиентных методов. Однако, в любом случае остается проблема выбора начального приближения. В работе [13] предлагается подход поиска начального приближения, основанный на предварительном исследовании прямого отображения. Идея состоит в том, чтобы найти такое множество начальных приближений, что для любых данных, соответствующих частице из заданного класса, найдется хотя бы одно удачное начальное приближение. На Рис. 4 представлена сеть начальных приближений

для сферической частицы.

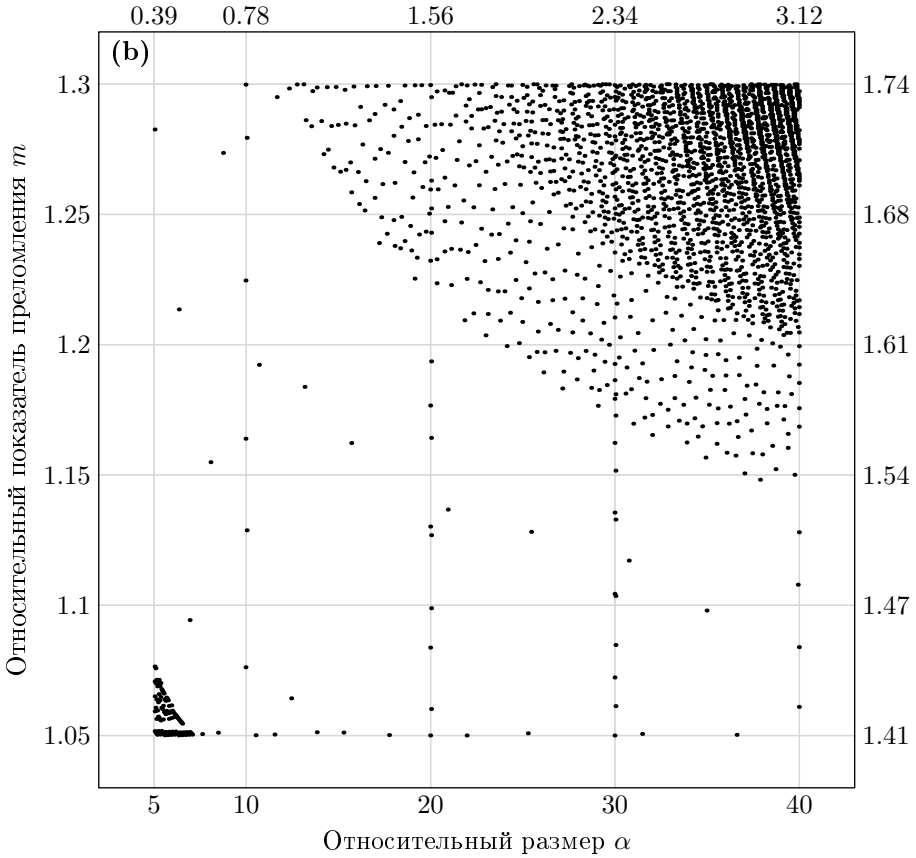


Рис. 4. Сеть начальных приближений.

5. Заключение

Несмотря на большой интерес и перспективность проточной цитометрии, ее применение, к сожалению, сдерживается отсутствием глубоких аналитических методов характеризации частиц по реально измеряемым данным. Последнее объясняется сложностью модели светорассеяния и неполнотой измеряемых данных.

Список литературы

[1] V. P. Maltsev and K. A. Semyanov, *Characterization of Bio-Particles from Light Scattering*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, VSP, Utrecht, 2004.

[2] G. V. Dyatlov, K. V. Gilev, K. A. Semyanov, and V. P. Maltsev, The Scanning Flow Cytometer Modified for Measurement of Two-Dimensional Light-Scattering Pattern of Individual Particles *Meas. Sci. Technol.* **19** (2008) (015408).

[3] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering Light by Small Particles*, Wiley, New York, 1983.

[4] M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[6] C. Müller , *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.
[7] M. A. Yurkin, *Discrete dipole simulations of light scattering by blood cells*, PhD thesis, University of Amsterdam, Amsterdam, 2007.
[8] M. A. Yurkin and A. G. Hoekstra, The discrete diploe approximation: an overview and recent developements *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **106** (2007), 558–589.
[9] I. K. Ludlow and J. Everitt, Inverse Mie problem *J. Opt. Soc. Am. A* **17**:12 (2000).
[10] I. K. Ludlow and J. Everitt, Application of Gegenbauer analysis to light scattering from spheres: Theory, *Physical Review E* **51**, 1995.
[11] M. A. Yurkin , K. A. Semyanov, P. A. Tarasov, A. V. Chernyshev, A. G. Hoekstra, and V. P. Maltsev, Experimental and theoretical study of light scattering by individual mature red blood cells with scanning flow cytometry and discrete dipole approximation, *Appl. Opt.* **44** (2005), 5249–5256.
[12] Z. Ulanowski, Z. Wang, P. H. Kaye, and I. K. Ludlow, Application of neural networks to the inverse light scattering problem from spheres, *Appl. Opt.* **37** (1998), 4027–4033.
[13] G. V. Dyatlov, K. V. Gilev, M. A. Yurkin, and V. P. Maltsev, An optimization method for solving the inverse Mie problem. Minimization with precomputed starting points *to appear*.

Глеб Владимирович Дятлов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dyatlov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.248–С.257 (2010)

УДК 514.8, 517.983, 519.6
MSC 44A30

О ПОЛУЧЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ОБРАЗОВ B-СПЛАЙНОВ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ РАДОНА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ЗАДАЧАХ СКАЛЯРНОЙ ТОМОГРАФИИ

А.П. Полякова

Abstract. In this paper we propose an algorithm to obtain analytical formulas for Radon transform images of B-splines of order n. Application of these formulas in solving of scalar tomography problem significantly reduced the time of computations in the implementation of the method of least squares.

Keywords: B-splines, Radon transform, scalar tomography, least-squares method.

1. Введение

Методы томографического исследования структуры неоднородных объектов, благодаря успехом как фундаментальной и вычислительной математики, так и современному аппаратурному оснащению, произвели революцию в биологических и медицинских исследованиях. Быстрый прогресс медицинской томографии сопровождался зарождением и развитием многих других приложений. Будучи эффективным средством решения обратных задач, направленных

Polyakova, A.P., About obtaining of analytical expressions for the images of B-splines for the Radon's transform and use of its in problems of scalar tomography.

© 2010 Полякова А.П.

Работа осуществлена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-92001), Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН № 14).

Поступила 6 марта 2010 г.

на реконструкцию внутренней структуры сложных объектов, методы вычислительной томографии стали все глубже проникать в радиофизику, оптику и акустику, технику физического эксперимента и геофизику, физику космоса и астрономию, биологию и аналитическую химию, внесли кардинальные перемены в дефектоскопию промышленных изделий [1].

Суть томографических методов состоит в многократных измерениях физического поля, "пропущенного" через объект исследования и, далее, в нетривиальной математической обработке и интерпретации результатов. Конечной целью использования таких методов является получение как можно более полных сведений о структуре и внутренних свойствах объекта. Как правило, результаты, полученные с помощью томографических методов, невозможно получить другими способами.

В данной работе под задачей скалярной томографии подразумевается следующая постановка. Пусть в ограниченной плоской области задана некоторая функция. Требуется найти эту функцию по ее известным преобразованиям Радона.

Ранее эта задача численно решалась, в частности, с помощью метода наименьших квадратов (МНК) с использованием полиномов в качестве аппроксимирующей последовательности. Однако на практике была установлена выигрышность локальных базисов, построенных на основе двумерных B-сплайнов, перед полиномиальными.

В работе предложен алгоритм получения аналитических формул для образов двумерных B-сплайнов при преобразовании Радона. Сформулирована гипотеза об общем виде этих формул для B-сплайнов произвольной степени n, которая была подтверждена для случаев $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Численные эксперименты показали, что полученные формулы позволили значительно уменьшить время вычисления образов базисных элементов при реализации МНК и в ряде случаев увеличить точность восстановления.

2. Постановка задачи

Через $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ обозначим единичный круг с границей $\partial B = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Пусть $\mathrm{P} = [-1, 1] \times [0, 2\pi]$.

Пусть на плоскости задана функция f переменных x, y, $f : B \to \mathbb{R}$. *Преобразованием Радона* функции $f(x, y)$ называется оператор

$$\mathcal{R} : L_2(B) \to L_2(\mathrm{P}),$$

который задается формулой:

$$(\mathcal{R}f)(s, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-t\sin\varphi + s\cos\varphi, t\cos\varphi + s\sin\varphi)\, dt.$$

Функция $(\mathcal{R}f)$, зависит от s, φ как от переменных, которыми определено положение (величина s) единственной прямой в пучке параллельных прямых, который, в свою очередь, задается нормальным вектором $\eta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Тогда направляющий вектор фиксированной прямой параллельного пучка, вдоль которой ведется интегрирование, есть $\eta^{\perp} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, и точка этой прямой задается координатами $(x(s, \varphi), y(s, \varphi)) = (s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)$.

Преобразование Радона обладает следующими свойствами:

1) четность, $(\mathcal{R}f)(-s, \varphi + \pi) = (\mathcal{R}f)(s, \varphi)$;

2) сдвиг, $(\mathcal{R}f(x-a))(s,\varphi) = (\mathcal{R}f(x))(s-\langle\eta,a\rangle,\varphi)$, где a — вектор сдвига;

3) поворот и растяжение, $(\mathcal{R}f(Ax))(s,\varphi) = |\det B|(\mathcal{R}f)(s,B^T\eta)$, где A — матрица, задающая линейное преобразование базисных векторов, $B{=}A^{-1}$ (см. [7]).

Известно, что функция f может быть однозначно восстановлена по преобразованию Радона $\mathcal{R}f$. При этом справедлива оценка устойчивости (см. [6])

$$\|f\|^2_{L_2(B)} \leqslant C\|\mathcal{R}f\|^2_{L_2(\mathrm{P})},$$

где константа C не зависит от f.

Ставится задача аналитически вычислить преобразование Радона от двумерных B-сплайнов степеней $0,1,2,3,4$.

3. B-сплайны

3.1. **Одномерные B-сплайны.** Пусть на отрезке $[-1,1]$ задано равномерное разбиение $-1 = x_0 < x_1 < .. < x_N = 1$, то есть $h = x_{i+1} - x_i = 2/N$. B-сплайном $B^i_n(x)$ степени n называется функция, обладающая следующими свойствами:

$$B^i_n(x)\begin{cases} > 0 & \text{для } x \in [x_i, x_{i+n+1}), \\ \equiv 0 & \text{для } x \notin [x_i, x_{i+n+1}). \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_i B^i_n(x) = 1. \tag{2}$$

$$B^i_n(x) = \frac{x-x_i}{nh}B^i_{n-1}(x) + \frac{x_{i+n+1}-x}{nh}B^{i+1}_{n-1}(x), \qquad \text{при } n>0. \tag{3}$$

При $n=0$ по формулам (1), (2) имеем

$$B^i_0 \;=\; \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{для } x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Будем обозначать $\sigma_{in} = \frac{1}{h}\left(x - x_{i+\frac{n+1}{2}}\right)$. Точка $x_{i+\frac{n+1}{2}}$ — середина отрезка-носителя B-сплайна. Тогда с помощью формулы (3) можно построить последовательность B-сплайнов степеней $n>0$. Приведем формулы для B-сплайнов степеней $n=1,2,3$.

$$\begin{aligned}
B^i_1(\sigma) &= (1+\sigma_{i1})B^i_0 + (1-\sigma_{i1})B^{i+1}_0; \\
B^i_2(\sigma) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\sigma_{i2}\right)^2 B^i_0 + \left(\frac{3}{4}-\sigma^2_{i2}\right)B^{i+1}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\sigma_{i2}\right)^2 B^{i+2}_0; \\
B^i_3(\sigma) &= \frac{1}{6}(2+\sigma_{i3})^3 B^i_0 + \left(\frac{2}{3}-\sigma^2_{i3}-\frac{\sigma^3_{i3}}{2}\right)B^{i+1}_0 + \\
&\quad \left(\frac{2}{3}-\sigma^2_{i3}+\frac{\sigma^3_{i3}}{2}\right)B^{i+2}_0 + \frac{1}{6}(2-\sigma_{i3})^3 B^{i+3}_0.
\end{aligned}$$

B-сплайны нулевой, первой, второй и третьей степени изображены на рисунке 1 (подробнее см. [3]).

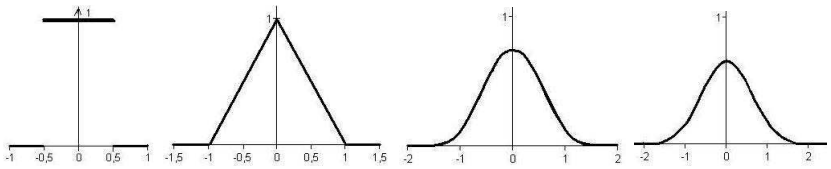


Рис. 1

3.2. **Двумерные B-сплайны.** Опишем двумерные B-сплайны. Рассматриваем квадрат $[-1,1]^2$, на котором задана равномерная сетка с шагом $h = 2/N$. Будем обозначать $\sigma_{in} = \frac{1}{h}\left(x - x_{i+\frac{n+1}{2}}\right)$, $\sigma_{jn} = \frac{1}{h}\left(y - y_{j+\frac{n+1}{2}}\right)$. Точки $x_{i+\frac{n+1}{2}}$, $y_{j+\frac{n+1}{2}}$ — это середины отрезков-носителей соответствующих одномерных B-сплайнов. Тогда имеем

$$B_n^{ij}(x,y) = B_n^i(x) \times B_n^j(y),$$

то есть

$$B_0^{ij}(x,y) \quad = \quad B_0^i(x) \times B_0^j(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x,y) \in [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1}), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

Соответственно, двумерный B-сплайн 1-ой степени задается формулой

$$\begin{aligned} B_1^{ij}(\sigma_{i1}, \sigma_{j1}) \quad = \quad & (1+\sigma_{i1})(1+\sigma_{j1})B_0^{ij}(x,y) + (1-\sigma_{i1})(1+\sigma_{j1})B_0^{(i+1)j}(x,y) \\ & +(1+\sigma_{i1})(1-\sigma_{j1})B_0^{i(j+1)}(x,y) + (1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{j1})B_0^{(i+1)(j+1)}(x,y). \end{aligned}$$

Для двумерных B-сплайнов 2-ой и 3-ей степени — аналогично.

На рисунке 2 изображены двумерные B-сплайны нулевой, первой, второй и третьей степени.

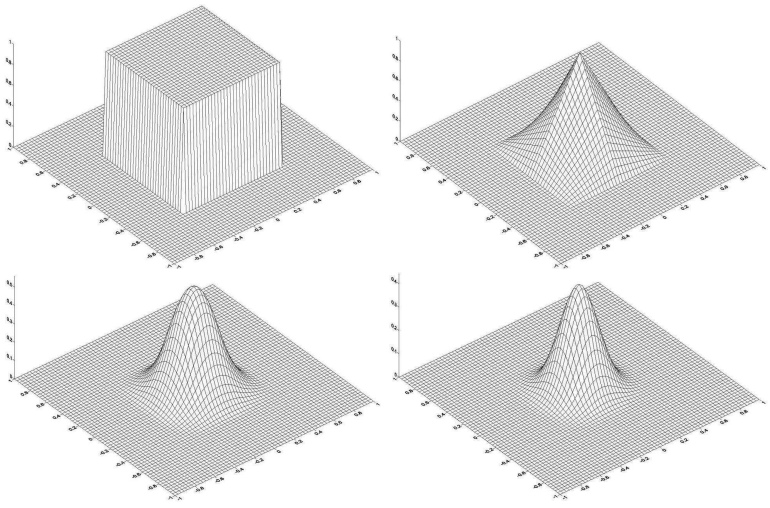


Рис. 2

4. Получение формул для преобразования Радона от B-сплайнов

4.1. **Определения и общие замечания.** При вычислении преобразования Радона от B-сплайнов следует учитывать их симметрию относительно прямых $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, при $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

Таким образом, во-первых, для вычислений удобнее поместить центр системы координат (x, y) в центр B-сплайна. Во-вторых, достаточно получить формулы для вычисления преобразования Радона только для углов $\varphi \in [0, \pi/4)$. Для углов $\varphi \in [\pi/4, 2\pi)$ формулы получаются путем несложных преобразований. Именно, в формулы подставляются $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$ для такого $\varphi' \in [0, \pi/4)$, что

$$\begin{aligned} \cos\varphi' &= |\cos\varphi|, \quad \sin\varphi' = |\sin\varphi|, \text{ при } \varphi \in [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi); \\ \cos\varphi' &= |\sin\varphi|, \quad \sin\varphi' = |\cos\varphi|, \text{ при } \varphi \in (\pi/4, 3\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4). \end{aligned}$$

В силу центральной симметрии B-сплайнов, формулы для s, при фиксированном φ, совпадают с формулами для $-s$, поэтому далее под s будем подразумевать $|s|$. Заметим, что при $s > \frac{(n+1)}{2}h(\cos\varphi + \sin\varphi)$ преобразование Радона равно нулю, $(\mathcal{R}B_n)(s, \varphi) = 0$, поэтому требуется вычислить его только для $s \in [0, \frac{(n+1)}{2}h(\cos\varphi + \sin\varphi)]$.

Процедура вычисления разбивается на следующие случаи в зависимости от φ и s.

(1) Отрезок $[0, \pi/4]$ разбивается на отрезки точками $0 = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_p = \pi/4$, где

$$\varphi_i = \operatorname{arctg}\frac{k}{l}, \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad k \leqslant l \leqslant n+1, \quad \text{НОД}(k, l) = 1;$$

Нужно определить количество пар (k, l), где $k < l$, то есть произвести выбор двух чисел из $n+1$ без повторений. Их количество — C^2_{n+1}. Также стоит учесть случай $k = l$. Итак, при $n = 0, 1, 2$ имеем $p = C^2_{n+1} + 1$. При $n = 3, 4$ возникает вариант $(k = 2, l = 4)$, который в нашей задаче равносилен случаю $(k = 1, l = 2)$, а значит его надо отбросить. Таким образом при $n = 3, 4$ имеем $p = C^2_{n+1}$.

(2) Отрезок $[0, \frac{(n+1)}{2}h(\cos\varphi + \sin\varphi)]$ разбивается на отрезки точками $0 = s_0 \leqslant s_1 \leqslant ... \leqslant s_m = \frac{(n+1)}{2}h(\cos\varphi + \sin\varphi)$, где $m = [(n+2)^2/2]$, s_i зависит от φ и n.

4.2. **Получение формул для преобразования Радона от B-сплайнов 0-ой степени.** Двумерный B-сплайн 0-ой степени с центром в нуле и шагом h описывается формулой

$$B_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in [-h/2, h/2)^2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для B-сплайнов 0-ой степени $p = 1$, $m = 2$.

$$s_1 = h(\cos\varphi - \sin\varphi)/2, \qquad s_2 = h(\cos\varphi + \sin\varphi)/2.$$

Имеем

$$(\mathcal{R}B_0)(s,\varphi) = \frac{h}{\cos\varphi} = \frac{(s_2 - s) - (s_1 - s)}{\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{при } s \in [s_0, s_1],$$

$$(\mathcal{R}B_0)(s,\varphi) = \frac{(s_2 - s)}{\sin\varphi\cos\varphi} \qquad \text{при } s \in [s_1, s_2].$$

4.3. **Получение формул для преобразования Радона от B-сплайнов 1-ой степени.** Одномерный B-сплайн 1-ой степени с центром в нуле и шагом h описывается формулой:

$$\widetilde{B}_1(x) = \left(1 + \frac{x}{h}\right) I_{[-h,0]} + \left(1 - \frac{x}{h}\right) I_{[0,h]},$$

где $I_{[a,b]}$ — характеристическая функция отрезка $[a,b]$. Двумерный B-сплайн 1-ой степени с центром в нуле и шагом h имеет вид:

$$B_1(x,y) = \widetilde{B}_1(x) \times \widetilde{B}_1(y).$$

Для B-сплайнов 1-ой степени $p = 2$, $m = 4$.

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Перечислим возможные значения s_i

$$s'_1 = h\sin\varphi, \quad s'_2 = h(\cos\varphi - \sin\varphi), \quad s'_3 = h\cos\varphi, \quad s'_4 = h(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

где s'_i — расстояние от центра B-сплайна до прямой, проходящей через i-ый узел в сетке носителя B-сплайна (рис. 3). В таблице 1 приведены значения s_i в зависимости от φ.

$\varphi\backslash s$	s_1	s_2	s_3	s_4
$[\varphi_0, \varphi_1]$	s'_1	s'_2	s'_3	s'_4
$[\varphi_1, \varphi_2]$	s'_2	s'_1	s'_3	s'_4

Таблица 1.

В таблице 2 приведены значения $(\mathcal{R}B_1)$ при соответствующих s и φ.

$\varphi\backslash s$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$
$[\varphi_0, \varphi_1]$	f_1^1	f_2^1	f_3^1	f_4^1
$[\varphi_1, \varphi_2]$	f_1^1	f_5^1	f_3^1	f_4^1

Таблица 2.

Здесь приняты следующие обозначения:

$$f_1^1(s,\varphi) = K_1(S_4 - 2S_3 + S_2 - 2S_1),$$
$$f_2^1(s,\varphi) = K_1(S_4 - 2S_3 + S_2),$$
$$f_3^1(s,\varphi) = K_1(S_4 - 2S_3),$$
$$f_4^1(s,\varphi) = K_1 S_4,$$
$$f_5^1(s,\varphi) = K_1(S_4 - 2S_3 - 2S_1),$$

где

$$S_i = (s'_i - s)^3, \qquad K_1 = \frac{1}{6\,h^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

Отметим, что при $\varphi = 0$: $(\mathcal{R}B_1)(s,0) = h\widetilde{B}_1(s)$.

Кроме того, нетрудно видеть, что в $f_i^1(s,\varphi)$ входят все S_j такие, что узел с номером j находится правее рассматриваемого луча (см. рис. 3 и 4). Причем коэффициенты при S_j в $f_i^1(s,\varphi)$ при различных i одинаковы.

Нумерация узлов и коэффициенты (в скобках) для B-сплайна 1-ой степени приведены на рисунке 3.

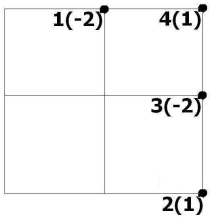


Рис. 3

На рисунке 4 схематично изображены различные случаи прохождение луча через носитель B-сплайна 1-ой степени. В соответствующих случаях для вычисления преобразования Радона применяются $f_1^1 - f_5^1$.

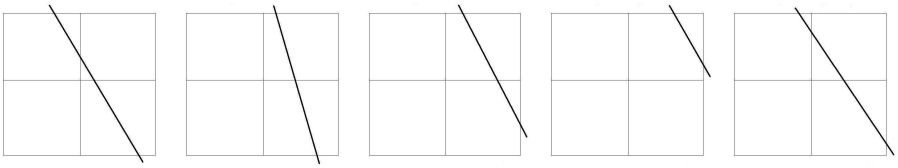


Рис. 4

На рисунке 5 изображены образы двумерных B-сплайнов нулевой и первой степени при преобразовании Радона.

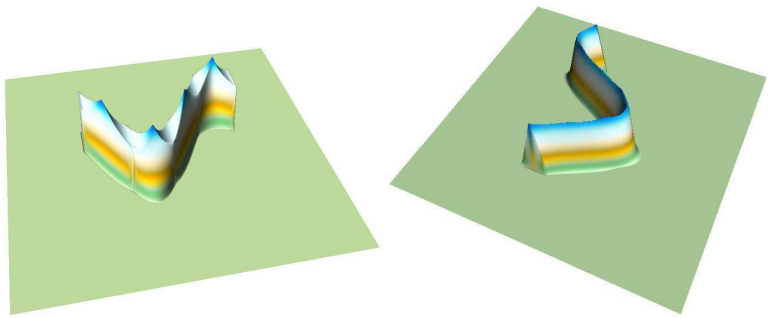


Рис. 5

4.4. **Гипотеза о виде формул для произвольного n.** Формула для преобразования Радона от B-сплайнов n-ой степени имеет вид:

$$[\mathcal{R}B_n](s,\varphi) = K_n(\varphi)\sum_{i,j=1}^{n+2} C_{ij}^n \chi_{ij}^n(s,\varphi), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} K_n(\varphi) &= \frac{1}{(2n+1)!h^{2n}\cos^{n+1}(\varphi)\sin^{n+1}(\varphi)};\\ C_{ij}^n &= (-1)^{i+j}C_{n+1}^{i-1}C_{n+1}^{j-1};\\ \chi_{ij}^n(s,\varphi) &= \begin{cases}(s_{ij}^n(\varphi)-s)^{2n+1}, & s_{ij}^n(\theta)-s>0,\\ 0, & s_{ij}^n(\varphi)-s\leqslant 0;\end{cases}\\ s_{ij}^n(\varphi) &= h(((n+3)/2-i)\cos\varphi+((n+3)/2-j)\sin\varphi). \end{aligned}$$

Как показали расчеты, гипотеза верна при $n = 0, .., 4$.

5. Численный эксперимент

Данный тест проведен с целью сравнения времени вычисления и точности восстановления при использовании двух различных методов:

метод 1 — вычисление образов B-сплайнов при преобразовании Радона с использованием полученных формул;

метод 2 — вычисление образов B-сплайнов при преобразовании Радона путем численного интегрирования. Восстанавливалась функция

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2(0.25-x^2-y^2)^2, & \text{при } x^2+y^2\leqslant 0.25,\\ 0, & \text{при } x^2+y^2>0.25.\end{cases} \tag{5}$$

В таблице 4 приведены время вычисления образов B-сплайнов, входящих в базис, (в секундах) и относительная погрешность восстановления функции $f(x,y)$ (L_2, %), в первой и второй строках соответственно, для каждого из двух методов в зависимости от $h = 2/N$ и степени B-сплайна.

В экспериментах участвовали B-сплайны степеней 0, 1, 2 и 3. Численное интегрирование B-сплайнов в методе 2 проводилось с шагом 0.01. Численное интегрирование искомой функции в обоих методах проводилось с шагом 0.001. Дискретизация данных 128×128. На рис. 6 изображена функция (5) и ее приближение B-сплайнами 1-ой, 2-ой и 3-ей степеней.

метод, степень \ N	29	31	33	35	37
метод 1, 0	1 25.17	1 24.86	1 22.31	1 21.53	1 27.75
метод 2, 0	487 25.22	531 24.87	548 22.35	604 21.39	652 27.64
метод 1, 1	1 4.64	1 4.4	1 3.62	1 3.62	1 5.58
метод 2, 1	928 4.64	1012 4.4	1086 3.63	1144 3.63	1227 5.57
метод 1, 2	2 2.57	2 2.43	2 4.59	2 5.64	2 38.42
метод 2, 2	1276 2.58	1384 2.43	1477 4.59	1566 5.64	1745 38.39
метод 1, 3	2 2.33	2 2.05	2 1.98	3 2.62	3 39.94
метод 2, 3	1553 2.33	1821 2.06	1920 1.98	2088 2.62	2149 61.74

Таблица 4.

В таблице 5 приведено время восстановления функции (получение образов B-сплайнов и далее реализация МНК) для каждого из двух методов, а также отношение времен. Рассматривался случай h=2/33.

степень	0	1	2	3
метод 1	243	215	195	168
метод 2	790	1300	1670	2068
отношение	3.25	6	8.6	12.4

Таблица 5.

6. Заключение

При реализации МНК-подхода к решению задач скалярной и векторной томографии возникает необходимость вычисления образов базисных элементов с высокой степенью точности. Ранее эта процедура выполнялась с использованием численного интегрирования, что требовало больших затрат времени. В работе предложен алгоритм получения аналитических формул для образов B-сплайнов степени n (базисные элементы в МНК) при преобразовании Радона, который значительно уменьшил число необходимых вычислений. Подробно описаны вычисления для случаев $n = 0, 1$. Также предложена гипотеза о виде формул для преобразования Радона от B-сплайнов произвольного степени n, которая аналитически была подтверждена для случаев $n = 2, 3, 4$.

Проведенные тесты для функций показали выигрышность использования полученных формул перед численным интегрированием (и по точности, и по времени восстановления).

Список литературы

[1] В. В. Пикалов, Н. Г. Преображенский, *Вычислительная томография и физический эксперимент*, Успехи физических наук, **141**:3 (1983), 469–498.

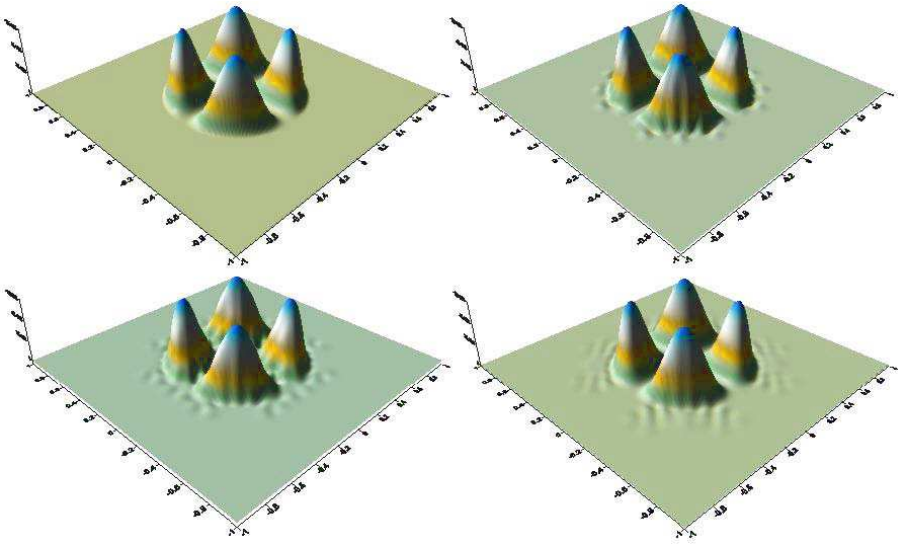


Рис. 6. Функция и ее приближения B-сплайнами 1-ой, 2-ой, и 3-ей степеней.

[2] Е.Ю. Деревцов, И.Г. Кашина, *Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов*, Сиб. Ж. Вычислительной математики, **5**:3 (2002), 233–254.

[3] Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, *Методы сплайн функций*, М.: Наука, 1980.

[4] Н.Е. Кочин, *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*, М: Издательство АН СССР, 1961.

[5] С.Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, М.: Наука. 1970.

[6] В.А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Новосибирск: Наука, 1993.

[7] S.R. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, University of South Florida, 1983.

[8] E. Yu. Derevtsov, A. G. Kleshchev, V. F. Sharafutdinov, *Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction*, J. Inverse Ill-posed Problems, **7**:1 (1999), 83–103.

Анна Петровна Полякова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anna.polyakova@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.258–С.282 (2010)

УДК 519.676
MSC 47A52

r-ПСЕВДООБРАТНЫЙ ДЛЯ КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРА

В.А.Чеверда, В.И.Костин

Abstract. The notion of a generalized r-solution for a system of linear algebraic equations is modified for approximation of the generalized inverse for a compact linear operator from a separable Hilbert space X into a separable Hilbert space Y. Approximation of the r-pseudoinverse by projection method is proposed and justified. Stability of the results with respect to data perturbations and approximation error of the operator is analyzed.

Keywords: compact operator, singular value decomposition, projection method, r-pseudoinverse.

Аннотация. В работе предлагается и обосновывается подход к аппроксимации обощённого обратного (ортогонального обобщённого обратного, псевдообратного) для компактного оператора, действующего из сепарабельного гильбертова пространства X в сепарабельное гильбертово пространство Y на основе понятия обобщённого нормального r-решения (решения ранга r), введенного ранее С.К.Годуновым с соавторами (1992) для систем линейных алгебраических уравнений.

Предложена и обоснована аппроксимация r-псевдообратного оператора с помощью проекционного метода. Получены оценки, характеризующие уклонение r-решения при наличии ошибок в правой части и исследуется поведение r-псевдообратного оператора при возмущении исходного компактного оператора.

---

r-pseudoinverse for a compact operator.

© 2010 Чеверда В.А., Костин В.И.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-05-00233, 11-05-00947).
Поступила 2 февраля 2010 г.

Ключевые слова: Компактный оператор, сингулярное разложение, проекционный метод, r-псевдообратный.

1. Основные понятия и обозначения

Известно, что любой непрерывный линейный оператор $A : X \to Y$ из сепарабельного гильбертова пространства X в сепарабельное гильбертово пространство Y порождает их разложение в следующие прямые ортогональные суммы (гл. 2 монографии К.Иосиды (1967)):

$$\begin{aligned} X &= N(A) \oplus N(A)^{\perp} = N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \\ Y &= N(A^*) \oplus N(A^*)^{\perp} = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}, \end{aligned}$$

где A^* – сопряженный к A оператор, $N(A)$ ($N(A^*)$) – ядро оператора $A\,(A^*)$, а $R(A)$ ($R(A^*)$) – образ оператора $A\,(A^*)$. Это разложение индуцирует пару ортогональных проекторов P и Q, таких, что:

$$\begin{aligned} P : X \to X, \qquad & R(P) = N(P); \\ Q : Y \to Y, \qquad & R(Q) = \overline{R(A)}. \end{aligned}$$

В свою очередь, эта пара ортогональных проекторов единственным образом определяет обобщенный обратный оператор, который в данном случае называется также ортогональным обобщенным обратным, или псевдообратным, и определяется следующими соотношениями (Nashed and Votruba, 1976):

$$D(A^{\dagger}) = R(A) \oplus N(A^*), \tag{1}$$

$$AA^{\dagger}y = Qy \quad \forall y \in D(A^{\dagger}), \tag{2}$$

$$A^{\dagger}Ax = (I - P)x \quad \forall x \in X. \tag{3}$$

Псевдообратный оператор плотно определен в Y и представляется на своей области определения в виде:

$$A^{\dagger} = \left(A|_{R(A^*)}\right)^{-1} Q,$$

где $A|_{R(A^*)}$ есть сужение оператора A на линейное многообразие $R(A^*)$. Оператор $A^{\dagger}$ является непрерывным на всем Y тогда и только тогда, когда $\overline{R(A)} = R(A)$.

Псевдообратный оператор выделяется из всех других обобщенных обратных тем, что он тесно связан с экстремальными (виртуальными) решениями (Nashed and Votruba, 1976; Ценг, 1949 а,б; Ценг, 1956) операторного уравнения

$$Ax = f. \tag{4}$$

Определение. Элемент $x^* \in X$ называется экстремальным решением уравнения (4), если $\|Ax^* - f\| = \inf\limits_{x \in X} \|Ax - f\|$.

Если при фиксированном $f \in Y$ через S_f обозначить множество всех экстремальных решений уравнения (4), то, как показал Z.Nashed (1976), оно задаётся следующим образом:

$$S_f = \{x^* : \|Ax^* - f\| = \inf_{x \in X} \|Ax - f\|\} = \{x : Ax = Qf\}.$$

Отсюда следует, что $S_f \neq \oslash$ тогда и только тогда, когда $f \in R(A) \oplus N(A^*)$. В этом случае S_f есть выпуклое замкнутое множество и содержит в себе элемент минимальной длины – x^{**} – экстремальное решение минимальной нормы уравнения (4) (Nashed and Votruba, 1976), называемое также его псевдорешением.

Связь псевдорешения и псевдообратного оператора определяется теоремой, доказанной Z.Nashed and G.F. Votruba (1976):

Теорема 1. *Уравнение (4) имеет экстремальное решение минимальной нормы x^{**} тогда и только тогда, когда $f \in R(A) \oplus N(A^*)$. При этом $A^\dagger f = x^{**}$, где $A^\dagger$ – псевдообратный оператор, определяемый соотношениями (1)– (3).*

Пусть теперь A – компактный оператор. В этом случае его образ $R(A)$ и образ сопряженного к нему оператора описываются следующей теоремой о сингулярном разложении компактного оператора (см. гл.5 кн.Т.Като (1972)):

Теорема 2. *Если $A : X \to Y$ есть компактный оператор из сепарабельного гильбертова пространства X в сепарабельное гильбертово пространство Y, то существуют ортонормированные базисы $\{x_n \in X, n \in N\}$ (правые сингулярные векторы), $\{y_n \in Y, n \in N\}$ (левые сингулярные векторы) и набор скаляров $\{s_n \geq 0, n \in N\}$ (сингулярные числа) такие, что:*

$$\begin{aligned} Ax_n &= s_n y_n, \\ A^* y_n &= s_n x_n, \\ \overline{span}\{x_n\} &= \overline{R}(A^*) = N(A)^\perp, \\ \overline{span}\{y_n\} &= \overline{R}(A^) = N(A^*)^\perp, \end{aligned}$$

причем множество $\{s_n, n \in N\}$ не имеет предельных точек, отличных от нуля.

Отметим еще одно важное свойство, присущее компактным операторам (гл. 5 кн. Л.В.Канторовича и Г.П.Акилова (1977)), а именно:
отличные от нуля сингулярные числа компактного оператора имеют конечную кратность.

Следствие. Если A– компактный оператор, то:

(1) $f \in R(A) \oplus N(A^*)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{(f, y_n)^2}{\lambda_n^2} < \infty$$

(критерий разрешимости Пикара (Nashed, 1976a));

(2) $\forall y \in R(A) \oplus N(A^*)$

$$A^\dagger y = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{(y, y_n)}{\lambda_n} x_n$$

есть экстремальное решение уравнения (4) минимальной нормы.

Замечание. Как уже было отмечено ранее, оператор $A^\dagger$ является ограниченным на всем пространстве Y тогда и только тогда, когда его образ $R(A)$ является замкнутым подпространством в Y. В то же время образ компактного оператора замкнут тогда и только тогда, когда он имеет конечную сингулярную систему $\{x_n, y_n, s_n\}$.

Введем в рассмотрение пухнущие системы подпространств и соответствующие им ортогональные проекторы:

$$\begin{aligned} X_r = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_r\} &\subset X, \\ \Pi_{X_r} : X \to X, \quad \Pi_{X_r}(X) &= X_r, \\ Y_r = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_r\} &\subset Y, \\ \Pi_{Y_r} : Y \to Y, \quad \Pi_{Y_r}(Y) &= Y_r, \end{aligned}$$

причем номера r выбираются так, чтобы $\lambda_r > \lambda_{r+1}$. Это ограничение связано с тем, что при $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ ортогональные проекторы Π_{X_r}, Π_{Y_r} определены некорректно в том смысле, что они оказываются зависящими от нумерации сингулярной системы.

Определение. Оператор $A_r^\dagger = A^\dagger \Pi_{Y_r} : Y \to X$ называется r-псевдообратным оператором, а элемент

$$x_{[r]} = A_r^\dagger f = \sum_{n=1}^{r} \frac{(f, y_n)}{s_n} x_n \tag{5}$$

– обобщенным нормальным r - решением (в дальнейшем – просто r-решением) операторного уравнения (4). Этот оператор определен и ограничен на всем пространстве Y и $\forall f \in Y_r \subset R(A) \quad A_r^\dagger f = A^\dagger f$, а $\forall f \in R(A) \oplus N(A^*) \quad A_r^\dagger f = \Pi_{X_r}(A^\dagger f)$. Кроме того, так как $\bigcup\limits_{r \in N} X_r = R(A^*)$, то $\forall f \in D(A^\dagger)$ и $\forall \delta > 0$ всегда найдётся $r(\delta)$ такой, что $\forall r < r(\delta)$ имеет место неравенство $\|A^\dagger f - A_r^\dagger f\| < \delta$. Следовательно, семейство операторов $A_r^\dagger$ можно рассматривать как аппроксимирующее для псевдообратного оператора $A^\dagger$ на его области определения и, тем самым, рассматривать его как регуляризующий алгоритм для вычисления действия обобщённого обратного (гл.IV кн. А.Н.Тихонова и В.Я.Арсенина (1986)).

При численном решении уравнения (4) ни сам оператор A, ни правая часть f не известны точно. Вместо них заданы $\widetilde{A}$, $\widetilde{f}$, погрешности численной аппроксимации оператора и ошибка измерений:

$$\|A - \widetilde{A}\| \le \delta_1 \quad \|f - \widetilde{f}\| \le \delta_2.$$

Возмущённая правая часть $\widetilde{f}$ уже может и не принадлежать области определения псевдообратного оператора $\widetilde{A}^\dagger$, даже если $f \in D(A^\dagger)$), Поэтому не имеет смысла изучать поведение величины $\|A^\dagger f - \widetilde{A}^\dagger \widetilde{f}\|$ при $\delta_{1,2} \to 0$. Однако, так как операторы $A_r^\dagger$ и $\widetilde{A}_r^\dagger$ определены и ограничены на всем пространстве Y, разность $\|A_r^\dagger f - \widetilde{A}_r^\dagger f\|$ характеризует точность вычисления проекции решения уравнения (4) на первые r сингулярных векторов для заданного уровня погрешности оператора и правой части.

При дальнейших рассмотрениях нам понадобится понятие r-решения системы линейных алгебраических уравнений,

$$Ax = f \tag{6}$$

для M переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_M)^T$, введённое С.К.Годуновым с соавторами (Годунов и др., 1992, гл.3).

Пусть $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r > s_{r+1} \geq \ldots \geq s_{N_0}$ – набор сингулярных чисел матрицы A, а

$$A = VDU^* \tag{7}$$

– ее сингулярное разложение. Здесь $N_0 = \min(N, M)$, а V, U – ортогональные матрицы соответствующих размеров, D – прямоугольная $N \times M$-матрица, по "диагонали" которой расположены сингулярные числа A. Иными словами, блочная структура матрицы D имеет вид

$$D = \begin{cases} \left[\Sigma \vdots 0\right] & \text{при} \quad N < M; \\ \Sigma & \text{при} \quad N = M; \\ \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} & \text{при} \quad N > M. \end{cases}$$

Здесь 0 обозначает прямоугольные матрицы подходящих размеров, а Σ - квадратная диагональная матрицы с сингулярными числами матрицы A на диагонали:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_{N_0} \end{bmatrix}.$$

Пусть r – целое число от 1 до N_0. Допустим, что $s_r > s_{r+1}$ (в случае $r = N_0$ достаточно потребовать $s_{N_0} > 0$). Пусть Σ_r — $N_0 \times N_0$ - матрица, которая получается из Σ заменой диагональных элементов s_j с индексами $j > r$ на нули. Введём в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned} D_r &= \begin{cases} \left[\Sigma_r \vdots 0\right] & \text{при} \quad N < M; \\ \Sigma_r & \text{при} \quad N = M; \\ \begin{bmatrix} \Sigma_r \\ 0 \end{bmatrix} & \text{при} \quad N > M, \end{cases} \\ A_r &= VD_rU^*. \end{aligned}$$

Определение. Обобщённое нормальное решение системы линейных уравнений

$$A_r x = f$$

называется обобщенным нормальным r-решением системы (6), или, коротко, её r-решением.

Замечание. При $s_r = s_{r+1}$ r-решение системы (6) не определено.

Если, используя сингулярное разложение (7), определить ортогональные проекторы

$$P_r = UI_{M,r}U^*, \qquad Q_r = VI_{N,r}V^*, \tag{8}$$

то r-решение можно выразить формулой

$$x_r = P_r x$$

где x – любое решение (6) методом наименьших квадратов. Квадратные диагональные матрицы $I_{k,r}\,(k = N \vee k = M)$ в (8) имеют порядок k и ранг r. Первые r элементов на их диагоналях равны 1, остальные равны 0.

Понятие r-решения оказывается корректным, а само решение численно устойчивым, если число обусловленности матрицы

$$\mu_r(A) = \frac{s_1(A)}{s_r(A)},$$

параметр зазора в сингулярном спектре

$$d_r(A) = \frac{s_1(A)}{s_r(A) - s_{r+1}(A)}$$

и параметр несовместности системы

$$\theta_r(A, f) = \frac{\|Ax_{[r]} - f\|}{s_r\|x_{[r]}\|}$$

не слишком велики. Во всяком случае, ограничение на величину допустимых возмущений в уравнении (6) выражается в терминах безразмерных величин $\mu_r(A)$, $d_r(A)$ и $\theta_r(A, f)$ (Годунов и др., 1992, гл.3).

Отображение $f \to x_r$ определяет r-псевдообратный оператор

$$A_r^\dagger = UD_r^\dagger V^*,$$

где

$$D_r^\dagger = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Sigma_r^\dagger \\ 0 \end{bmatrix} & \text{при} \quad N < M; \\ \Sigma_r^\dagger & \text{при} \quad N = M; \\ \left[\Sigma_r^\dagger \vdots 0\right] & \text{при} \quad N > M; \end{cases}$$

$$\Sigma_r^\dagger = \begin{bmatrix} s_1^{-1} & & & & & & \\ & s_2^{-1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & s_r^{-1} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда вектор x_r может быть выражен следующим образом:

$$x_r = A_r^\dagger f.$$

2. Геометрия конечномерных подпространств гильбертова пространства

Ключевую роль при построении r-псевдообратного оператора и r-псевдорешения играют ортогональные проекторы на линейные конечномерные подпространства гильбертовых пространств, связанные с сингулярным разложением оператора A. При возмущении исходного оператора эти проекторы также претерпевают определенные возмущения, которые приводят к изменению r-псевдообратного оператора и, естественно, r-псевдорешения. Наша задача

сейчас – получить оценки, характеризующие возмущение ортогональных проекторов (или, что то же самое, соответствующих им конечномерных подпространств), связанных с сингулярным разложением компактного оператора при возмущении последнего.

Итак, пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел, а X_1, X_2 — два его N-мерных подпространства. Рассмотрим матрицу

$$G = \left[(x_i^{(1)}, x_j^{(2)})\right]_{i,j=1}^{N},$$

составленную из скалярных произведений векторов ортонормированных базисов в X_1 и X_2. Ортогональные замены базисов в X_1 и X_2 приводят к ее преобразованию $G \to VGU$ с помощью ортогональных матриц V, U. Используя теорему о сингулярном разложении матрицы G, можно подобрать V, U так, чтобы в результате получилась диагональная матрица

$$G = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_j)$$

с элементами $\sigma_j \geq 0$. Это означает, что в подпространствах X_1 и X_2 выбраны *биортогональные* базисы

$$\begin{aligned} (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) &= \sigma_j, \\ (x_i^{(1)}, x_j^{(2)}) &= 0 \text{ при } i \neq j, \end{aligned}$$

где $i, j = 1, \ldots, n$. По определению $\sigma_j = \cos\phi_j$, где $\pi/2 \geq \phi_j \geq 0$ — углы между векторами $x_j^{(1)}$ и $x_j^{(2)}$. Упорядоченный по невозрастанию набор этих углов $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ называют *серией углов* между подпространствами X_1 и X_2 (Годунов и др., 1992, гл.3), а синус максимального из них — *раствором* подпространств X_1 и X_2.

Заметим, что при $X_1 = X_2$ $\sigma_j \equiv 1, \phi_j \equiv 0$ для всех j, а при $X_1 \perp X_2$ все углы равны $\pi/2$. Количество сингулярных чисел σ_j, равных 1, совпадает с размерностью пересечения $X_1 \cap X_2$.

Раствор $\sin\phi_1$ подпространств X_1 и X_2 характеризует меру их близости. В частности, если взять два вектора

$$x = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j^{(1)} \in X_1, \qquad y = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j^{(2)} \in X_2,$$

то непосредственные вычисления дают:

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq \sqrt{1 - \sigma_1^2} = \sqrt{1 - \cos^2\phi_1} = sin\phi_1.$$

Пусть теперь Π_{X_1} и Π_{X_2} – ортогональные проекторы на подпространства X_1 и X_2. Запишем их в виде

$$\Pi_{X_1} = \sum_{j=1}^{N} (\cdot, x_j^{(1)}) x_j^{(1)}, \qquad \Pi_{X_2} = \sum_{j=1}^{N} (\cdot, x_j^{(2)}) x_j^{(2)}$$

где $\{x_j^{(1)}\}, \{x_j^{(2)}\}$ — некоторые ортонормированные базисы в этих подпространствах. Эти проекторы не зависят от выбора базисов, но однозначно определены подпространствами. За меру близости подпространств X_1 и X_2 можно взять величину $\|\Pi_{X_1} - \Pi_{X_2}\|$.

Рассматривая действие разности $\Pi_{X_1} - \Pi_{X_2}$ на векторы $x \in H$, убеждаемся, что для $x \notin X_1 + X_2$ мы получим 0. Поэтому можно ограничиться рассмотрением в качестве области определения этих проекторов конечномерного подпространства в X. Тогда получим (см. теорему 5.1 из гл. 2 книги С.К.Годунова с соавторами (1992)), что

$$\|\Pi_{X_1} - \Pi_{X_2}\| = \sin\phi_1.$$

Тем самым приходим к тому же определению раствора двух подпространств.

Ограничимся теперь подпространствами определёнными с помощью самосопряжённых операторов. Нас интересует вопрос устойчивости конечномерных инвариантных подпространств по отношению к возмущению оператора. Конечно, соответствующие оценки можно было бы получить, используя общую теорию возмущений (Като, 1972, гл.3), однако, имея в виду их обобщение на подпространства, определяемые сингулярным разложением несамосопряжёного оператора, мы предпочитаем прямой вывод, который вполне элементарен.

Итак, пусть H — гильбертово пространство, а оператор $S: H \to H$ — неотрицательный самосопряжённый вполне непрерывный с собственными числами

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots, \qquad (\lambda_j \geq 0), \tag{9}$$

и ортонормированными собственными векторами $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$. Обозначим через $U_m, \quad (m = 1, 2, \ldots)$ линейные оболочки из первых m собственных векторов

$$U_m = \{\sum_{j=1}^{m} c_j u_j, \quad c_j \in C\},$$

а через $\Pi_m = \Pi_{U_m}$ - ортогональные проекторы на эти линейные подпространства, то есть $\Pi_m H = U_m$. Оператор Π_m является суммой собственных проекторов P_j:

$$\Pi_m = \sum_{j=1}^{m} P_j, \qquad \text{где } P_j = (\cdot, u_j)u_j.$$

Пусть теперь $\widetilde{S}$ - некоторый другой вполне непрерывный самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в том же самом пространстве. Далее все объекты, связанные с этим оператором, будем снабжать сверху знаком $\sim$. Допустим, что эти два оператора близки, т.е.

$$\| S - \widetilde{S} \| \leq \delta \| S \| . \tag{10}$$

Тогда для разности их собственных значений справедлива оценка (Като, 1972, с. 365):

$$|\lambda_j - \widetilde{\lambda}_j| \leq \delta \|S\|. \tag{11}$$

Для того чтобы инвариантное подпространство $\widetilde{X}_m$ и соответствующий проектор $\Pi_{\widetilde{U}_m} = \widetilde{\Pi}_m$ были корректно определены для любого $\widetilde{S}$, удовлетворяющего неравенству (10), предположим, что в спектре S имеется достаточный зазор

$$\lambda_{m+1} < \lambda_m - 2\delta\|S\| \tag{12}$$

Тогда из неравенства (11) следует $\widetilde{\lambda}_{m+1} < \widetilde{\lambda}_m$, что и гарантирует корректность $\widetilde{\Pi}_m$.

Вводя безразмерный параметр

$$d_m = \begin{cases} \dfrac{\|S\|}{\lambda_m - \lambda_{m+1}} & \text{при} \quad \lambda_m > \lambda_{m+1} \\ \infty & \text{при} \quad \lambda_m = \lambda_{m+1} \end{cases}$$

условию (12) можно придать вид

$$2\delta d_m < 1.$$

Как было указано ранее, близость инвариантных подпространств U_m и $\widetilde{U}_m$ операторов S и $\widetilde{S}$ можно оценивать в терминах нормы разности проекторов на эти подпространства. Из этого ясно, что

$$\Pi_m - \widetilde{\Pi}_m = \Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} - \Pi_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m \tag{13}$$

где

$$\Pi_m^{\perp} = I - \Pi_m, \qquad \widetilde{\Pi}_m^{\perp} = I - \widetilde{\Pi}_m$$

– проекторы на ортогональные дополнения к U_m и $\widetilde{U}_m$, соответственно. Пусть x — произвольный вектор. Тогда очевидно, что

$$\|(\Pi_m - \widetilde{\Pi}_m)x\|^2 = \|\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} x\|^2 + \|\Pi_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m x\|^2$$

Затем, принимая во внимание неравенства

$$\begin{aligned} \|\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} x\| &\leq \|\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp}\| \, \|\widetilde{\Pi}_m^{\perp} x\|, \\ \|\Pi_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m x\| &\leq \|\Pi_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m\| \, \|\widetilde{\Pi}_m x\|, \end{aligned}$$

получим

$$\|(\Pi_m - \widetilde{\Pi}_m)x\|^2 \leq \max(\|\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp}\|^2, \|\Pi_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m\|^2) \|x\|^2. \tag{14}$$

Итак, оценка величины $\|\Pi_m - \widetilde{\Pi}_m\|$ сводится к оценке $\|\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp}\|$ и $\|\Pi_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m\|$. Эти два выражения оцениваются совершенно одинаково, поэтому здесь будет приведена оценка только для первого.

Воспользовавшись коммутируемостью оператора с собственными проекторами, получим:

$$\begin{aligned} S\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} &= \Pi_m S \widetilde{\Pi}_m^{\perp} = \Pi_m \widetilde{S} \widetilde{\Pi}_m^{\perp} + \Pi_m (S - \widetilde{S}) \widetilde{\Pi}_m^{\perp} = \\ &= \Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} + \Pi_m (S - \widetilde{S}) \widetilde{\Pi}_m^{\perp} \end{aligned}$$

Из соотношений типа $\Pi_m S \Pi_m = S \Pi_m, \quad \Pi_m^2 = \Pi_m$ получим

$$\Pi_m (S - \widetilde{S}) \widetilde{\Pi}_m = \Pi_m S \Pi_m \Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} - \Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp} \widetilde{\Pi}_m^{\perp} \widetilde{S} \widetilde{\Pi}_m^{\perp}. \tag{15}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} S_1 = \Pi_m S \Pi_m, \qquad & S_2 = \widetilde{\Pi}_m^{\perp} \widetilde{S} \widetilde{\Pi}_m^{\perp}, \\ \Phi = \Pi_m (S - \widetilde{S}) \widetilde{\Pi}_m^{\perp}, \qquad & Y = \Pi_m \widetilde{\Pi}_m, \end{aligned}$$

соотношению (15) придадим вид уравнения Сильвестра

$$S_1 Y - Y S_2 = \Phi, \tag{16}$$

Отметим очевидное неравенство $\|\Phi\| \leq \delta \|S\|$ и соотношение $\Pi_m Y = Y$, которому удовлетворяет произведение $\Pi_m \widetilde{\Pi}_m^{\perp}$. Оказывается, что, несмотря на возможное отсутствие единственности решения уравнения (16), решение Y, подчиненное этому условию, определяется однозначно.

Лемма. При $2d_m\delta < 1$ существует единственное решение уравнения (16), подчиненное условию $\Pi_m Y = Y$. Это решение удовлетворяет оценке

$$\|Y\| \le \frac{d_m\delta}{1 - d_m\delta}.$$

Доказательство. Докажем единственность. Пусть $\rho > 0$ – такое число, что $\rho\widetilde{\lambda}_{m+1} < 1 < \rho\lambda_m$. Это гарантирует $\|\rho S_2\| < 1$. Из допущения о существовании двух решений Y_1 и Y_2 уравнения (16) получим, что их разность $Y = Y_1 - Y_2$ удовлетворяет равенству $S_1 Y = Y S_2$, из которого, в свою очередь, для любого натурального n получим следующее соотношение:

$$(\rho S_1)^n Y = Y(\rho S_2)^n. \tag{17}$$

Правая часть в (17) стремится к нулю при $n \to \infty$ (Y – ограничен), поэтому $S_1 Y = 0$ и, значит, образ YH лежит в ядре S_1. Но ядра S_1 и Π_m совпадают, следовательно, $\Pi_m Y = Y = 0$.

Решение уравнения (16) может быть построено в явном виде. Для этого вновь выбираем то же самое значение ρ, что и ранее, и из уравнения Сильвестра (16) получим равенство

$$(\rho S_1)Y - Y(\rho S_2) = \rho\Phi.$$

Введём теперь в рассмотрение m-псевдообратный оператор $(\rho S_1)^\dagger$, действие которого определяется формулой

$$(\rho S_1)^\dagger = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\rho\lambda_j} P_j,$$

а P_j – одномерные собственные проекторы. Построим теперь оператор

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} ((\rho S_1)^\dagger)^{k+1} \rho\Phi(\rho S_2)^k.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что он удовлетворяет уравнению (16) и условию $\Pi_m Y = Y$ ($\Pi_m S_1^\dagger = S_1^\dagger$). Проведя почленное оценивание, имеем требуемое неравенство

$$\begin{aligned}
\|Y\| &\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho\widetilde{\lambda}_{m+1})^k}{(\rho\lambda_m)^{k+1}} \rho\|S\|\delta = \frac{\delta}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{\lambda}_{m+1}}{\lambda_m}\right)^k \|S\| = \\
&= \frac{\delta\|S\|}{\lambda_m\left(1 - \widetilde{\lambda}_{m+1}/\lambda_m\right)} = \frac{\delta\|S\|}{\lambda_m - \widetilde{\lambda}_{m+1}} \le \frac{\delta\|S\|}{\lambda_m - \lambda_{m+1} - \delta\|S\|} = \\
&= \frac{\delta\left(\|S\|/(\lambda_m - \lambda_{m+1})\right)}{1 - \delta\left(\|S\|/(\lambda_m - \lambda_{m+1})\right)} = \frac{\delta d_m}{1 - \delta d_m}
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что второй член в правой части равенства (13) оценивается той же величиной, что и первый. Отсюда имеем неравенство:

$$\|\Pi_m - \widetilde{\Pi}_m\| \le \frac{\delta d_m}{1 - \delta d_m}$$

Доказанные утверждения сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть $S : H \to H$ – самосопряженный неотрицательный вполне непрерывный оператор, $d_m < \infty$ – относительный параметр зазора в спектре S, Π_m – ортогональный проектор на инвариантное подпространство S, соответствующее m старшим собственным числам. Пусть $\widetilde{S} : H \to H$ – близкий к S самосопряженный вполне непрерывный оператор*

$$\|S - \widetilde{S}\| \le \delta \|S\|,$$

причем $d_m\delta < 1/2$. Тогда корректно определен ортопроектор $\widetilde{\Pi}_m$ на инвариантное подпрострaство $\widetilde{S}$, соответствующее его старшим m собственным значениям, и справедливо неравенство

$$\|\Pi_m - \widetilde{\Pi}_m\| \le \frac{\delta d_m}{1 - \delta d_m}.$$

Теперь рассмотрим проекторы, определяемые сингулярным разложением вполне непрерывных *несамосопряжённых* операторов.

Пусть имеется пара сепарабельных гильбертовых пространств X и Y и вполне непрерывный оператор $A : X \to Y$. Сопряженный оператор A^* действует из Y в X. Построим самосопряженный оператор $\aleph$, собственные значения которого будут определять сингулярные числа A. Для этого рассмотрим гильбертово пространство $H = X \times Y$— прямое произведение пространств X и Y, называемое иногда также прямой суммой X и Y. Элементами этого пространства являются пары $\{x, y\}$, $x \in X$, $y \in Y$, которые будем считать составными вектор-столбцами и обозначать $(x, y)^T$. Знак траспонирования используется для того, чтобы получить составные вектор-столбцы из строчек. Скалярное произведение в H определяется обычным образом:

$$\big((x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T\big) = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y.$$

Рассмотрим оператор-матрицу

$$\aleph = \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

Он определен на векторах $(x, y)^T \in H$ и является самосопряженным оператором из H в H.

Лемма. Спектр оператора $\aleph$ симметричен относительно нуля. Если $(u, v)^T$ – собственный вектор $\aleph$, соответствующий $\lambda \ne 0$, то $(u, -v)^T$ – также собственный вектор, соответствующий собственному значению противоположного знака $(-\lambda \ne \lambda)$, причем $\|u\| = \|v\|$.

Доказательство проводится прямой проверкой. Отметим, что утверждение $\|u\| = \|v\|$ получается как следствие ортогональности собственных векторов $(u, v)^T$ и $(u, -v)^T$, соответсвующих различным собственным значениям.

Ядро оператора $\aleph$ состоит из векторов $(x, y)^T$, компоненты которых x и y лежат в ядрах A и A^* соответственно:

$$\ker\aleph = \ker A \times \ker A^* = (\ker A \times 0) \oplus (0 \times \ker A^*).$$

В пространстве H специальным образом построим ортонормированный базис. Пусть

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \cdots$$

– положительная часть спектра $\aleph$, соответствующая собственным векторам

$$\aleph \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Из предыдущей леммы, проведённых рассуждений о ядрах и теоремы Гильберта-Шмидта следует, что семейство векторов

$$\left\{ \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_j \\ -v_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_k^0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v_l^0 \end{bmatrix} \right\} \tag{18}$$

образует базис в H. Из полноты этого семейства следует полнота системы

$$\left\{ \begin{bmatrix} u_j \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_k^0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \bigcup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ v_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v_l^0 \end{bmatrix} \right\}, \tag{19}$$

элементы которой являются линейными комбинациями системы векторов (18). Здесь индексом ^{0} сверху обозначены векторы, образующие базисы в ядрах A и A^*. Линейные оболочки множеств векторов, участвующих в объединении базисов, представленном соотношениями (19), лежат в ортогональных подпространствах $(X \times 0) \perp (0 \times Y)$ в H и образуют в нём базис. Стало быть, они и сами образуют базисы в $X \times 0$ и $0 \times Y$ соответственно. Тогда по теореме о сингулярном разложении компактного оператора s_j, суть его сингулярные числа, а x_j и y_j – правые и левые сингулярные векторы.

С позиции исследования устойчивости подпространств, образованных правыми и левыми сингулярными векторами A, рассмотрим инвариантные подпространства оператора $\aleph$, соответствующие симметричным частям спектра. Пусть Π_{2m} — проектор на собственное подпространство, соответствующее собственным значениям

$$\{-s_1, -s_2, \ldots, -s_m\} \cup \{s_1, s_2, \ldots, s_m\} \tag{20}$$

оператора $\aleph$. Как и раньше, предполагаем наличие зазора:

$$s_m > s_{m+1} + 2\delta\|A\|.$$

Параметр d_m здесь определяется аналогично

$$d_m = \begin{cases} \dfrac{\|A\|}{s_m - s_{m+1}} & \text{при} \quad s_m > s_{m+1}, \\ \infty & \text{при} \quad s_m = s_{m+1}. \end{cases}$$

Наличие достаточного зазора описывается тем же условием $2d_m\delta < 1$.

Инвариантное подпространство $H_{2m} = \Pi_{2m} H$ оператора A, соответствующее выделенной части спектра (20) может быть разложено в прямую сумму

$$H_{2m} = (X_m \times 0) \oplus (0 \times Y_m) \tag{21}$$

аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы о сингулярном разложении. Иными словами, подпространство X_m есть линейная оболочка правых m сингулярных векторов A, соответствующих m старшим сингулярным числам. Для краткости будем называть его *m-коядром* оператора A. Аналогично, Y_m — m-коядро оператора A^*. Это название связано с логикой введения понятий r-решения, псевдоранга и т.п.

Разложению (21) соответствует разложение проектора

$$\Pi_{2m} = \Pi_m^X + \Pi_m^Y$$

в сумму двух ортопроекторов, ортогональных друг другу. Отметим, что проектор Π_m^X, действующий в пространстве $X \times Y$, может быть отождествлён с проектором Π_{X_m}, проектирующим X на X_m. Аналогичное справедливо и для Π_m^Y.

Пусть теперь имеется еще один вполне непрерывный оператор

$$\widetilde{K} : X \to Y, \qquad \|K - \widetilde{K}\| \le \delta \|K\|.$$

Новому оператору соответствуют проекторы

$$\widetilde{\Pi}_{2m}, \quad \widetilde{\Pi}_m^X, \quad \widetilde{\Pi}_m^Y.$$

Разность проекторов $\Pi_{2m} - \widetilde{\Pi}_{2m}$ представляется в виде $\Pi_m^X - \widetilde{\Pi}_m^X + \Pi_m^Y - \widetilde{\Pi}_m^Y$, причем разности $\Pi_m^X - \widetilde{\Pi}_m^X$ и $\Pi_m^Y - \widetilde{\Pi}_m^Y$ ортогональны. Следовательно,

$$\| \left(\Pi_{2m} - \widetilde{\Pi}_{2m} \right) h\|^2 = \|(\Pi_m^X - \widetilde{\Pi}_m^X)h\|^2 + \|(\Pi_m^Y - \widetilde{\Pi}_m^Y)h\|^2.$$

Таким образом,

$$\|\Pi_m^X - \widetilde{\Pi}_m^X\| \le \|\Pi_{2m} - \widetilde{\Pi}_{2m}\|, \quad \|\Pi_m^Y - \widetilde{\Pi}_m^Y\| \le \|\Pi_{2m} - \widetilde{\Pi}_{2m}\|.$$

Иными словами, получив оценку $\|\Pi_{2m} - \widetilde{\Pi}_{2m}\|$, будем иметь оценки $\|\Pi_m^X - \widetilde{\Pi}_m^X\|$ и $\|\Pi_m^Y - \widetilde{\Pi}_m^Y\|$.

Если проанализировать доказательство теоремы 3, можно заметить, что оно легко приспосабливается к рассматриваемому случаю, хотя $\aleph$ и не является неотрицательным оператором. В результате имеем теорему:

Теорема 4. *Пусть $A : X \to Y$ — вполне непрерывный оператор, d_m — относительный параметр зазора в сингулярном спектре A, Π_{X_m} и Π_{Y_m} – ортопроекторы на m-коядра A и A^*, соответственно. Если $\widetilde{A}$ – произвольный вполне непрерывный оператор из X в Y, близкий к A,*

$$\|A - \widetilde{A}\| \le \delta \|A\|,$$

то при $2\delta d_m < 1$ корректно определены ортопроекторы $\widetilde{\Pi}_{X_m}$ и $\widetilde{\Pi}_{Y_m}$ на m-коядра $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}^*$ и справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\Pi_{X_m} - \widetilde{\Pi}_{X_m}\| &\le \frac{\delta d}{1 - \delta d}, \\ \|\Pi_{Y_m} - \widetilde{\Pi}_{Y_m}\| &\le \frac{\delta d}{1 - \delta d}. \end{aligned}$$

3. Оценки устойчивости r-решения и r-псевдообратного оператора

Если $A : X \longrightarrow Y$ есть компактный оператор, действующий из сепарабельного гильбертова пространства X в сепарабельное гильбертово пространство Y, вполне непрерывен и имеет сингулярную систему

$$\{x_j,\, y_j,\, s_j;\, j \in N\},$$

то псевдообратный к нему оператор $A^\dagger : Y \longrightarrow X$ действует по правилу:

$$A^\dagger f = \sum_{s_j \neq 0} \frac{(f, y_j)}{s_j} x_j$$

и определен на подпространстве $R(A) \oplus N(A^*)$, в то время как его r-псевдообратный

$$A_r^\dagger = A^\dagger \Pi_{Y_r}$$

определен на всем пространстве Y и действует по правилу

$$A_r^{\dagger} f = \sum_{j=1}^{r} \frac{(f, y_j)}{s_j} x_j.$$

Рассмотрим, как меняются r-решения при возмущении правой части операторного уравнения (4). Пусть $x_{[r]}^{(1)}$ и $x_{[r]}^{(2)}$ есть r-решения уравнений

$$Ax_r^{(1)} = f^{(1)}, \quad Ax_r^{(2)} = f^{(2)}$$

с одним и тем же оператором. Тогда они записываются в виде

$$x_r^{(1)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{(f^{(1)}, y_j)}{s_j} x_j\,, \qquad x_r^{(2)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{(f^{(2)}, y_j)}{s_j} x_j\,,$$

и для их разности выполняется неравенство

$$\|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}\| \le \frac{1}{s_r} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} (f^{(1)} - f^{(2)}, y_j)^2} \le \|A_r^{+}\| \|f^{(1)}) - f^{(2)}\| \tag{22}$$

Чтобы переписать неравенство (22) в относительной форме, нужна оценка снизу нормы r-решения $\|x_{[r]}^{(1)}\|$. Следуя С.К.Годунову с соавторами (1992), введем параметр несовместности, определив его формулой

$$\theta = \theta_r(A, f) = \frac{1}{s_r} \frac{\sqrt{\|f\| - \sum_{j=1}^{r} (f, y_j)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{r} \frac{(f, y_j)^2}{s_j^2}}}, \tag{23}$$

и с его помощью получим требуемое неравенство

$$\begin{aligned} \|x_{[r]}^{(1)}\|^2 &= \sum_{j=1}^{r} \frac{(f^{(1)}, y_j)^2}{s_j^2} \ge \frac{1}{s_r^2} \sum_{j=1}^{r} (f^{(1)}, y_j)^2 = \\ &= \frac{1}{s_r^2} \left(\|f\|^2 - \theta^2 s_r^2 \|x_{[r]}^{(1)}\|^2 \right), \end{aligned}$$

из которого и следует требуемая оценка снизу:

$$\|x_{[r]}^{(1)}\| \ge \frac{\|f\|}{\|A\| \sqrt{1 + \dfrac{\theta_r^2(A, f)}{\mu_r^2}}}.$$

Отметим, что нулевой вектор $x_{[r]}^{(1)}$ соответствует $\theta_r(A, f) = \infty$. Теперь, используя параметр $\theta_r(A, f)$, можно оценить относительную погрешность:

$$\begin{aligned} \frac{\|x_{[r]}^{(1)} - x_{[r]}^{(2)}\|}{\|x_{[r]}^{(1)}\|} &\le \|A\| \cdot \|A_r^{+}\| \sqrt{1 + \frac{\theta_r^2(A, f)}{\mu_r^2}} \frac{\|f^{(1)} - f^{(2)}\|}{\|f^{(1)}\|} = \\ &= \sqrt{\theta_r^2(A, f) + \mu_r^2} \frac{\|f^{(1)} - f^{(2)}\|}{\|f^{(1)}\|}. \end{aligned} \tag{24}$$

В том случае, когда возмущению подвергается не только правая часть уравнения, но и сам оператор, то есть когда имеются два уравнения

$$\begin{array}{ll} Ax = f, & \widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{f}, \\ \|A - \widetilde{A}\| \le \delta\|A\|, & \|f - \widetilde{f}\| \le \varepsilon\|f\|, \end{array} \tag{25}$$

разность двух r-решений можно представить в следующем виде

$$x_{[r]} - \widetilde{x}_r = A_r^+ f - \widetilde{A}_r^+ \widetilde{f} = (A_r^+ - \widetilde{A}_r^+)f + \widetilde{A}_r^+(f - \widetilde{f}).$$

Оценку второго слагаемого мы уже провели ((22), (24)). Теперь, в общем случае, будем дополнительно считать, что в сингулярном спектре оператора A имеется достаточный зазор, а именно:

$$2d_r\delta < 1.$$

Это условие гарантирует существование $\widetilde{A}_r^+$ для любого вполне непрерывного оператора $\widetilde{A}$, удовлетворяющего условию (25).

Для оценки разности r-решений двух уравнений в (25), построим системы линейных алгебраических уравнений, решение которых эквивалентно отысканию r-решений (25). Для этого, воспользовавшись результатами предыдущего параграфа, построим биортогональные базисы в r-коядрах A, $\widetilde{A}$, A^*, $\widetilde{A}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{llll} \xi_1, & \xi_2, & \dots & \xi_r \quad \text{– базис в } r\text{-коядре} \quad A, \\ \widetilde{\xi}_1, & \widetilde{\xi}_2, & \dots & \widetilde{\xi}_r \quad \text{– базис в } r\text{-коядре} \quad \widetilde{A}, \\ \eta_1, & \eta_2, & \dots & \eta_r \quad \text{– базис в } r\text{-коядре} \quad A^*, \\ \widetilde{\eta}_1, & \widetilde{\eta}_2, & \dots & \widetilde{\eta}_r \quad \text{– базис в } r\text{-коядре} \quad \widetilde{A}^*. \end{array} \right. \tag{26}$$

По определению, для $i, j = 1, 2, \dots, r$

$$\begin{array}{ll} (\eta_i, \widetilde{\eta}_j) = 0, & (\xi_i, \widetilde{\xi}_j) = 0 \text{ при } i \ne j, \\ (\eta_i, \widetilde{\eta}_i) = \bar{\sigma}_i, & (\xi_i, \widetilde{\xi}_i) = \sigma_i, \end{array}$$

и в соответствии с теоремой об оценке раствора подпространств (теорема 4) имеем следующие неравенства

$$\begin{aligned} \sigma_i &\ge \sigma_1 = \cos\phi_1 = \sqrt{1 - \sin^2\phi_1} \ge \sqrt{1 - \frac{d_r^2\delta^2}{(1 - d_r\delta)^2}} = \frac{\sqrt{1 - 2d_r\delta}}{1 - d_r\delta}, \\ \bar{\sigma}_i &\ge \frac{\sqrt{1 - 2d_r\delta}}{1 - d_r\delta}. \end{aligned}$$

Пусть r-решения уравнений (25) имеют следующие коэффициенты разложения по базисам (26)

$$x_{[r]} = \sum_{j=1}^{r} c_j\xi_j, \qquad \widetilde{x}_r = \sum_{j=1}^{r} \widetilde{c}_j\widetilde{\xi}_j. \tag{27}$$

Для коэффициентов $c_j, \widetilde{c}_j$ запишем системы линейных алгебраических уравнений. Для этого напомним, что r-коядро оператора A переводится этим оператором в r-коядро A^*. Это значит, что существуют коэффициенты a_{ij}, $\widetilde{a}_{ij}$, определяющие действие операторов A и $\widetilde{A}$, то есть для $j = 1, 2, \dots, r$

$$A\xi_j = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\eta_i, \qquad \widetilde{A}\widetilde{\xi}_j = \sum_{j=1}^{r} \widetilde{a}_{ij}\widetilde{\eta}_i.$$

Используя эти равенства и соотношения (27), получаем системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}c_j = d_i, \quad \sum_{j=1}^{r} \widetilde{a}_{ij}\widetilde{c}_j = \widetilde{d}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

где $d_i, \widetilde{d}_i$ – коэффициенты разложения проекций векторов f и $\widetilde{f}$ на коядра A^* и $\widetilde{A}^*$, соответственно. Эти уравнения можно записать в матричном виде

$$\aleph c = d, \qquad \widetilde{\aleph}\widetilde{c} = \widetilde{d}, \tag{28}$$

где элементы a_{ij} и $\widetilde{a}_{ij}$ матриц $\aleph$ и $\widetilde{\aleph}$ вычисляются обычным образом

$$a_{ij} = (A\xi_j, \eta_i), \qquad \widetilde{a}_{ij} = (\widetilde{A}\widetilde{\xi}_j, \widetilde{\eta}_i).$$

Получим теперь оценки квадратичного уклонения правых частей в уравнениях (28). Заметим сначала, что оно может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \|d - \widetilde{d}\|^2 &= \sum_{j=1}^{r}(d_j - \widetilde{d}_j)^2 = \|\sum_{j=1}^{r}(d_j - \widetilde{d}_j)\eta_j\|^2 = \\ &= \|\sum_{j=1}^{r} d_j\eta_j - \sum_{j=1}^{r}\widetilde{d}_j\widetilde{\eta}_j + \sum_{j=1}^{r}\widetilde{d}_j(\eta_j - \widetilde{\eta}_j)\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|d - \widetilde{d}\| &\le \|\Pi f - \widetilde{\Pi}\widetilde{f}\| + \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\widetilde{d}_i^2}\max_j\|\eta_j - \widetilde{\eta}_j\| \le \\ &\le \|(\Pi - \widetilde{\Pi})f\| + \|\widetilde{\Pi}(f - \widetilde{f})\| + \max_j\|\eta_j - \widetilde{\eta}_j\| \cdot \|\widetilde{\Pi}\widetilde{f}\|, \end{aligned}$$

где через Π, $\widetilde{\Pi}$ обозначены проекторы на r-коядра A^* и $\widetilde{A}^*$, соответственно. Согласно выбору базисов имеем представление

$$\|\eta_j - \widetilde{\eta}_j\|^2 = 2(1 - \bar{\sigma}_j) \le 2(1 - \cos\phi_1) = 4\sin^2\phi_1/2.$$

Отсюда получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \|d - \widetilde{d}\| &\le \left(\frac{d_r\delta}{1 - d_r\delta} + \epsilon + \beta\delta\right)\|f\|, \\ \text{где } \beta &= \frac{\sqrt{2}d_r}{\sqrt{1 - d_r\delta}\sqrt{1 - d_r\delta\sqrt{1 - 2d_r\delta}}} \end{aligned} \tag{29}$$

Теперь получим оценку для нормы разности матриц $\aleph$ и $\widetilde{\aleph}$. Для этого запишем действие оператора $\widetilde{\aleph}$ на $\sum p_j\widetilde{\xi}_j$. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r}\widetilde{a}_{ij}p_j\right)\widetilde{\eta}_i &= \widetilde{\aleph}\sum_{j=1}^{r}p_j\widetilde{\xi}_j = \aleph\sum_{j=1}^{r}p_j\xi_j + \\ &+ (\aleph - \widetilde{\aleph})\sum_{j=1}^{r}p_j\widetilde{\xi}_j + \aleph\sum_{j=1}^{r}p_j(\xi_j - \widetilde{\xi}_j). \end{aligned}$$

С помощью полученного выражения приходим к неравенству:

$$\|(\aleph - \widetilde{\aleph})p\| = \left[\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r}(\widetilde{a}_{ij} - a_{ij)}p_j\right)^2\right]^{1/2} \leq \|\widetilde{A} - A\| \cdot \|p\| +$$

$$+ \quad \|A\| \cdot \|p\| \left(\max_j \|\widetilde{\xi}_j - \xi_j\| + \max_j \|\widetilde{\eta}_j - \eta_j\|\right).$$

Оценивая разность $\|\widetilde{\xi}_j - \xi_j\|$ аналогично тому, как это было сделано для $\|\widetilde{\eta}_j - \eta_j\|$, получаем оценку на возмущение операторов

$$\|\aleph - \widetilde{\aleph}\| \leq (\delta + 2\beta\delta)\|A\|.$$

Отметим, что сингулярные числа матриц $\aleph$ и $\widetilde{\aleph}$ совпадают со старшими r сингулярными числами операторов A и $\widetilde{A}$ соответственно. В частности, $\|\aleph\| = \|A\|$, $\mu(\aleph) = \mu_r(A)$. Это позволяет переписать последнюю оценку в виде:

$$\|\aleph - \widetilde{\aleph}\| \leq \rho\|\aleph\|, \qquad \text{где } \rho = \delta(1 + 2\beta).$$

Для того чтобы использовать теорему об оценке решений линейных систем уравнений (см., например, книгу С.К.Годунова с соавторами (1992)), осталось только придать относительный вид неравенству (29). Для этого используем введённый ранее параметр несовместности $\theta = \theta_r(A, f)$ и с его помощью приходим к неравенству

$$\|f\|^2 = \|d\|^2 + \|Ax_{[r]} - f\|^2 = \|d\|^2 + \theta^2 s_r^2 \|x\|^2 =$$
$$= \|d\|^2 + \theta^2 s_r^2 \|\aleph^{-1}d\|^2 \leq (1 + \theta^2)\|d\|^2,$$

из которого следует оценка возмущения правой части

$$\|d - \widetilde{d}\| \leq \tau\|d\|$$

где

$$\tau = \sqrt{1 + \theta^2}\left(\epsilon + \frac{d_r\delta}{1 - d_r\delta} + \frac{\sqrt{2}d_r\delta}{\sqrt{1 - d_r\delta}\sqrt{1 - d_r\delta\sqrt{1 - 2d_r\delta}}}\right).$$

Поэтому, если обусловленность матрицы $\aleph$ не слишком велика, а именно

$$\rho\mu(\aleph) = \rho\mu_r(A) = \frac{s_1}{s_r}\rho < 1,$$

то по теореме об оценке решений хорошо обусловленных систем (28) имеем следующее неравенство для относительной погрешности решения:

$$\frac{\|c - \widetilde{c}\|}{\|c\|} \leq \mu(\aleph)\frac{(\rho + \tau)}{1 - \mu(\aleph\rho)},$$

которому удовлетворяет и разность векторов $\sum_j c_j\xi_j$ и $\sum_j \widetilde{c}_j\xi_j$. Для получения окончательной оценки разности двух векторов

$$\sum_{j=1}^{r} c_j\xi_j - \sum_{j=1}^{r} \widetilde{c}_j\widetilde{\xi}_j$$

нужно добавить слагаемое

$$\|\sum_j \widetilde{c}_j(\xi_j - \widetilde{\xi}_j)\| \leq \max_j \|\xi_j - \widetilde{\xi}_j\|\|\widetilde{x}_r\| \leq \beta\delta\|\widetilde{x}_r\|.$$

Принимая во внимание, что $\|c\| = \sqrt{\sum c_j^2}\|x_{[r]}\|$, получим итоговое неравенство

$$\begin{aligned}\|x_{[r]} - \widetilde{x}_{[r]}\| &\leq \mu(\aleph)\frac{(\rho+\tau)}{1-\mu(\aleph)\rho}\|x_{[r]}\| + \beta\delta\|\widetilde{x}_{[r]}\| \leq \\ &\leq \mu_r(A)\frac{(\rho+\tau)(1+\beta\delta)}{1-\mu_r(A)\rho}\|x_{[r]}\|.\end{aligned}$$

Сформулируем доказанное утверждение в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть $Ax = f$, $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{f}$ – два уравнения с вполне непрерывными близкими операторами и правыми частями*

$$\|A - \widetilde{A}\| \leq \delta\|A\|, \quad \|f - \widetilde{f}\| \leq \epsilon\|f\|.$$

Если в сингулярном спектре оператора A имеется зазор:

$$2d_r\delta < 1,$$

то существуют обобщенные нормальные r-решения $x_{[r]}$ и $\widetilde{x}_{[r]}$ исходных уравнений. Пусть далее определены следующие параметры:

$$\theta = \theta_r(A,f) = \frac{\|Ax_{[r]} - f\|}{s_r\|x_{[r]}\|}, \qquad \mu_r(A) = \frac{s_1}{s_r},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}d_r}{\sqrt{1-d_r\delta}\sqrt{1-d_r\delta\sqrt{1-2d_r\delta}}}, \qquad \rho = \delta(1+2\beta),$$

$$\tau = \sqrt{1+\theta^2}\left(\epsilon + \frac{d_r\delta}{1-d_r\delta} + \frac{\sqrt{2}d_r\delta}{\sqrt{1-d_r\delta}\sqrt{1-d_r\delta\sqrt{1-2d_r\delta}}}\right).$$

Если выполнено условие

$$\mu_r(A)\rho < 1,$$

то справедлива следующая оценка уклонений решений исходных уравнений

$$\frac{\|x_{[r]} - \widetilde{x}_{[r]}\|}{\|x_{[r]}\|} \leq \mu_r(A)\frac{(\rho+\tau)(1+\beta\delta)}{1-\mu_r(A)\rho)}. \tag{30}$$

Замечание. Оценки решений, предлагаемые в теореме, пока еще далеки от оценок гарантированной точности, так как:

- 1) не указан алгоритм построения r-решения,
- 2) не проверена возможность смоделировать все погрешности задачи в виде эквивалентных возмущений исходных данных.

4. Проекционный метод аппроксимации r-псевдообратного и вычисления r-псевдорешения

Определение. Последовательность $\{H_m, P_m\}$ подпространств гильбертова пространства H и соответствующих им ортогональных проекторов называется проекционно полной в $H \iff \forall f \in H\ \|f - P_m f\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть $\{X_n, P_n\}$, $\{Y_n, Q_n\}$ проекционно полные последовательности в пространствах X и Y соответственно. Проекционный метод решения операторного уравнения (4) заключается в его замене проекционным уравнением

$$Q_n A x_n = Q_n f, \quad x_n \in X_n. \tag{31}$$

Наиболее распространенной процедурой выбора проекционно полных последовательностей является выбор подпространств $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ в виде линейных оболочек:

$$X_n = \mathrm{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$$
$$Y_m = \mathrm{span}\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$$

где $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – линейно независимые полные системы элементов в пространствах X и Y соответственно, причем в качестве проекторов $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ берутся ортогональные проекторы на эти подпространства. При таком выборе X_n и Y_m образуют пухнущую систему для которой условия $\|x - P_n x\| \to 0$ и $\|f - Q_n f\| \to 0$ при $n \to \infty$ проверяются непосредственными вычислениями. Проекционное уравнение (31) при этом принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{n} (A\phi_j, \psi_k) c_k = (f, \psi_k),\ k = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

где $c_j = (x, \phi_j)$.

Изложенный метод сведения исходного операторного уравнения к системе (32) называется методом Галеркина–Петрова. При $X = Y$ и $\psi_k = \phi_k$ получим метод Бубнова–Галеркина, который для самосопряжённого оператора A эквивалентен методу Ритца. При $X \neq Y$ и $\psi_k = A\phi_k$ приходим к методу наименьших квадратов:

$$\sum_{j=1}^{n} (A^* A\phi_j, \phi_k) c_k = (A^* f, \phi_k),\ k = 1, \ldots, n.$$

Условия сходимости проекционного метода определяются следующей теоремой (см. гл.4 книги М.А.Красносельского с соавторами (1969)):

Теорема 6. *Пусть линейный оператор A действует из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y и его область определения $D(A)$ плотна в X. Пусть, далее, $\{X_n, P_n\}$ и $\{Y_n, Q_n\}$ – проекционно-полные последовательности в X и Y соответственно, пространства $\{AX_n\}$ замкнуты в Y и вместе со своими ортопроекторами Π_n также образуют проекционно-полную систему. Тогда, для того чтобы $\forall f \in Y$, начиная с некоторого $n = n_0$, существовал единственный элемент x_n, удовлетворяющий уравнению (31), и чтобы норма невязки $\|Ax_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Н.И.Польского (1962):*

$$\overline{\lim}\Theta(AX_n, Y_n) < 1, \tag{33}$$

где $\Theta(AX_n, Y_n)$ – раствор между подпространствами AX_n и Y_n.

Скорость сходимости при соблюдении этих условий характеризуется неравенствами:

$$\|f - \Pi_n F\| \leq \|Ax_n - f\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_n^2}} \|f - \Pi_n f\| \tag{34}$$

где $\theta_n = \Theta(AX_n, Y_n)$.

Рассмотрим теперь проекционный метод построения r-решения операторного уравнения (4) с компактным оператором A. В соответствии с определением 5 его точное r-решение есть решение следующей задачи:

$$Q_r A x_{[r]} = Q_r f, \quad x_{[r]} \in P_r X = X_r$$

где $\{X_r, P_r\}$ и $\{Y_r, Q_r\}$ - линейные оболочки первых r правых и левых сингулярных векторов оператора A и соответствующие им ортогональные проекторы. При этом $\Theta(AX_r, Y_r) = \Theta(Y_r, Y_r) = 0$. Проекционный метод построения r-решения состоит в отыскании элемента $x_{[r]}^{(n)}$ из уравнения

$$Q_r^{(n)} A x_{[r]}^{(n)} = Q_r^{(n)} f, \quad x_{[r]}^{(n)} \in P_r^{(n)} X = X_r^{(n)}, \tag{35}$$

где $\{X_r^{(n)}, P_r^{(n)}\}$ и $\{Y_r^{(n)}, Q_r^{(n)}\}$ есть линейные оболочки первых r правых и левых сингулярных векторов оператора $Q_n A P_n$ и соответствующие им ортогональные проекторы. Вводя элемент $y_r^{(n)} = A x_{[r]}^{(n)}$, уравнение (35) можно переписать в виде

$$Q_r^{(n)} y_r^{(n)} = Q_r^{(n)} f, \quad y_r^{(n)} \in A X_r^{(n)}$$

или $y_r^{(n)} = \left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} Q_r^{(n)} f$, где $\widetilde{Q}_r^{(n)}$ есть сужение проектора $Q_r^{(n)}$ на подпространство $AX_r^{(n)}$.

Лемма. Оператор $\widetilde{Q}_r^{(n)}$ осуществляет взаимно однозначное отображение подпространства $AX_r^{(n)}$ на подпространство $Y_r^{(n)}$, причем $\|\widetilde{Q}_r^{(n)} - I\| \longrightarrow 0$ при условии, что $n \longrightarrow \infty$.

Пусть $\{\phi_j^{(n)}, \psi_j^{(n)}\, s_j^{(n)}\}_{j=1}^n$ – сингулярная система оператора $Q_n A P_n$. Докажем прежде всего, что векторы

$$\left\{ \frac{A\phi_1^{(n)}}{s_1^{(n)}}, \ldots, \frac{A\phi_r^{(n)}}{s_r^{(n)}} \right\}$$

образуют полную линейно независимую систему в подпространстве $AX_r^{(n)}$. В самом деле, если допустить, что существуют постоянные $c_1, \ldots, c_r$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} = 0$$

то, в силу линейности оператора $\widetilde{Q}_r^{(n)}$, имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \psi_j^{(n)} = 0,$$

то есть $\forall j \quad c_j = 0$. Отсюда легко получается следующий предельный переход:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} - \psi_j^{(n)} \right\| &= \left\| \frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} - \frac{Q_n A \phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} \right\| \leq \\ &\leq \frac{\|(I - Q_n)A\|}{s_j^{(n)}} \longrightarrow 0 \quad \text{при}\, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит, любой элемент f из $AX_n^{(r)}$ единственным образом представляется в виде разложения

$$f = \sum_{j=1}^{r} f_j \frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}},$$

откуда получим

$$\widetilde{Q}_r^{(n)} f = \sum_{j=1}^{r} f_j \psi_j^{(n)},$$

причем если $f_1 \neq f_2$, то $\widetilde{Q}_r^{(n)} f_1 \neq \widetilde{Q}_r^{(n)} f_2$. В то же время, каждый элемент из $Y_r^{(n)}$ имеет свой прообраз в $AX_r^{(n)}$, который можно представить в виде:

$$\forall f \in Y_r^{(n)} \quad f = \sum_{j=1}^{r} (f, \psi_j^{(n)}) \psi_j^{(n)},$$

откуда получаем равенство:

$$\left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} f = \sum_{j=1}^{r} (f, \psi_j^{(n)}) \frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}}.$$

Далее, $\forall f \in Y_r^{(n)}$ имеет место следующий предельный переход:

$$\begin{aligned} \| \left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} f - f \| &= \| \sum_{j=1}^{r} (f, \psi_j^{(n)}) \left(\frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} - \psi_j^{(n)} \right) \| \leq \\ &\leq \|f\| \sqrt{\sum_{j}^{r} \| (\frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{n)}} - \psi_j^{(n)} \|^2} \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

откуда следует, что $\| \left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} - I \| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, что и завершает доказательство леммы.

Если теперь воспользоваться формулой для нормы обратного оператора, приведённой на с. 197 кн. М.А.Красносельского с соавторами(1969)

$$\| \left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} \| = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_n^2}},$$

где $\theta_n = \Theta(AX_n^{(r)}, Y_n^{(r)})$ – угол раствора между подпространствами $AX_n^{(r)}$ и $Y_n^{(r)}$, получим что $\Theta(AX_n^{(r)}, Y_n^{(r)}) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то есть условие Польского (33) заведомо выполнено, начиная с некоторого n. Рассмотрим теперь поведение невязки проекционного метода при вычислении r-решения для произвольной правой части $f \in Y$:

$$\|y_r^{(n)} - Q_r f\| \leq \| \left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} Q_r^{(n)} f - Q_r^{(n)} f \| + \|Q_r^{(n)} - Q_r\| \, \|f\|. \tag{36}$$

В силу того что $\|Q_r^{(n)} - Q_r\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ (см. теорему 4), второе слагаемое в правой части (36) стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, а первое преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \| \left(\widetilde{Q}_r^{(n)}\right)^{-1} Q_r^{(n)} f - Q_r^{(n)} f \| &= \| \sum_{j=1}^{r} (f, \psi_j^{(n)}) \left(\frac{A\Phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} - \psi_j^{(n)} \right) \| \leq \\ &\leq \|f\| \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \| \frac{A\phi_j^{(n)}}{s_j^{(n)}} - \psi_j^{(n)} \|^2} \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, при любом выборе проекционно-полных последовательностей в пространствах X и Y условие Н.И.Польского для подпространств $X_r^{(n)}$ и $Y_r^{(n)}$ выполнено всегда, что обеспечивает сходимость проекционного метода вычисления r-решения по невязкам.

При расмотрении сходимости проекционного r-решения к точному учтём, что

$$A_r^{\dagger}Ax_{[r]}^{(n)} = P_r x_{[r]}^{(n)}, \quad \|A_r^{\dagger}\| = \frac{1}{s_r}, \quad \|x_{[r]}^{(n)}\| \le \frac{\|f\|}{s_r^{(n)}}. \tag{37}$$

Тогда имеем следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|x_{[r]}^{(n)} &- x_{[r]}\| = \|(P_r^{(n)} - P_r)x_{[r]}^{(n)} + P_r x_{[r]}^{(n)} - x_{[r]}\| \le \\ \le \|P_r^{(n)} &- P_r\|\,\|x_{[r]}^{(n)}\| + \|A_r^{\dagger}Ax_{[r]}^{(n)} - A_r^{\dagger}f\| \le \\ \frac{1}{s_r^{(n)}}\|P_n^{(r)} &- P_r\|\,\|f\| + \|A_r^{\dagger}\|\,\|Ax_{[r]}^{(n)} - Q_r f\|, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|x_{[r]}^{(n)} - x_{[r]}\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то есть проекционное r-решение при любом выборе проекционно полных последовательностей $\{X_n, P_n\}$, $\{Y_n, Q_n\}$ сходится к точному при n стремящемся к бесконечности.

Таким образом, мы можем сформулировать теорему:

Теорема 7. *Если $\{X_n, P_n\}$ и $\{Y_n, Q_n\}$ есть проекционно полные последовательности в пространствах X и Y соответственно, то при $n \longrightarrow \infty$ векторы $x_{[r]}^{(n)} \longrightarrow x_{[r]}$ в норме пространства X.*

Следствие. Если $\{X_n, P_n\}$ и $\{Y_n, Q_n\}$ есть пухнущая система проекционно полных подпространств в пространствах X и Y соответственно, то при $n \longrightarrow \infty$ имеем, что $\|A_r^{\dagger} - (A_n)_r^{\dagger}\| \longrightarrow 0$, где $(A_n)_r^{\dagger}$ есть r-псевдообратный для A_n.

Сходимость проекционного r-решения к точному можно получить и на основании Теоремы 5. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если $\{X_n, P_n\}$, $\{Y_n, Q_n\}$ – проекционно полные последовательности, и оператор $A_n = Q_n A P_n$, то $\|A_m - A\| \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$.

Действительно, в этом случае

$$\|A_m - A\| = \|Q_m A P_m - A\| \le \|(Q_m - I)A\| + \|A(I - P_m)\|. \tag{38}$$

Докажем, что каждое слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю при $m \longrightarrow \infty$. Действительно, если $\|(Q_m - I)A\|$ не стремится к нулю, то существует последовательность u_m, подчинённая условиям $\|u_m\| = 1$ и $\|(Q_m - I)Au_m\| \ge \delta > 0$ для всех m. Не ограничивая общности, пользуясь компактностью A , можно считать, что $Au_m \longrightarrow y$. Тогда

$$\|(Q_m - I)Au_m\| \le \|(Q_m - I)y\| + \|(Q_m - I)(Au_m - y)\|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $m \longrightarrow \infty$ в силу сильной сходимости проекционной полноты последовательности $\{Y_n, Q_n\}$, а второе – из условия $Au_m \longrightarrow y$.

Во втором слагаемом в правой части неравенства (38) допущения

$$\|u_m\| = 1, \ \|A(P_m - I)u_m\| \ge \delta > 0$$

вновь ведут к противоречию, поскольку последовательность $(P_m - I)u_m$ сходится слабо к нулю в силу проекционной полноты последовательности $\{X_n, P_n\}$ и, следовательно, переводится компактным оператором A в сильно сходящуюся к нулю последовательность. Лемма доказана.

Если теперь компактный оператор $A_n = Q_n A P_n$ рассматривать как возмущение компактного оператора A, то сходимость проекционного r-решения

следует из теоремы 5. При этом получим не только факт сходимости, но и оценки, характеризующие относительные уклонения проекционного r-решения от точного. Итак, выбор произвольных проекционно полных последовательностей $\{X_n, P_n\}$, $\{Y_n, Q_n\}$ в пространствах X и Y обеспечивает возможность аппроксимации r-псевдообратного оператора и нахождения r-решения с любой наперед заданной точностью.

Список литературы

[1] С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.П. Кирилюк, В.И. Костин, *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*, Новосибирск: Наука, 1992.

[2] К. Иосида, *Функциональный анализ*, М.: Мир, 1967.

[3] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ*, 2-е изд., перераб. и доп., М.: Наука, 1977.

[4] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М.: Мир, 1972.

[5] М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко и др., *Приближенное решение операторных уравнений*, М.: Наука, 1969.

[6] Н.И. Польский, *Проекционные методы в прикладной математике*, Докл. АН СССР, **143**:4 (1962), 254–259.

[7] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1986.

[8] И.И. Ценг, *Обобщенные обратные для неограниченных операторов между унитарными пространствами*, Докл. АН СССР, **67** (1949а), 431–434.

[9] И.И. Ценг, *Свойства и классификация обобщенных обратных для замкнутых операторов*, Докл. АН СССР, **67** (1949б), 607–610.

[10] И.И. Ценг, *Виртуальные решения и обобщенные обратные*, Успехи математических наук, **11** (1956), 213–215.

[11] M. Zuhair Nashed, *Aspects of Generalized Inverses in Analysis and Regularization*, Generalized Inverses and Applications, Ed. M. Zuhair Nashed, Academic Press: New York-San Francisko-London, 1976a, 193–244.

[12] M. Zuhair Nashed, *Perturbations and Approximations for Generalized Inverses and Linear Operator Equations*, Generalized Inverses and Applications, Ed. M. Zuhair Nashed, Academic Press: New York-San Francisko-London, 1976b, 325–396.

[13] M. Zuhair Nashed, G. F. Votruba, *A Unified Theory of Generalized Inverses*, Generalized Inverses and Applications, Ed. M. Zuhair Nashed, Academic Press: New York-San Francisko-London, 1976, 1–110.

Приложение А. О необходимости условия Н.И. Польского

Как было отмечено, сходимость проекционного r-решения к точному обеспечивается за счет того, что для подпространств $AX_r^{(n)}$ и $Y_r^{(n)}$ условие Н.И. Польского выполнено всегда. Для того, чтобы подчеркнуть ключевую роль этого условия при обосновании возможности применения проекционных методов в данном приложении произведено построение примера, демонстрирующего расхождение по невязкам при применении проекционного метода в случае его невыполнения.

Пусть проекционно полные последовательности $\{X_n, P_n\}$ и $\{Y_n, Q_n\}$ в пространствах X и Y таковы, что $\overline{\lim}\theta_n = 1$, где $\theta_n = \Theta(AX_n, Y_n)$ есть раствор между подпространствами AX_n и Y_n. Тогда, даже если система линейных алгебраических уравнений (32) разрешима для всех $n \geq N_0$, отсюда не следует, что $\forall f \in Y \quad \|Ax_n - f\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, где $x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j \in X_n$ есть решение проекционного уравнения (31), которое мы перепишем в виде

$$Q_m(Ax_n - f) = 0,\ x_n \in X_n. \tag{39}$$

Покажем, что в этом случае существует элемент $f \in Y$, для которого $\overline{lim}\|Ax_n - f\| = \infty$.

Обозначим $y_n = Ax_n$, тогда уравнение (39) примет вид

$$Q_n y_n = Q_n f, \quad y_b \in Y_n. \tag{40}$$

То, что уравнение (39) разрешимо для всех $f \in Y$ начиная с некоторого N_0, означает, что сужение оператора проектирования Q_n на пространство AX_n – оператор $\widetilde{Q}_n$ – осуществляет взаимно-однозначное отображение AX_n на Y_n и, следовательно, имеет ограниченный обратный. В то же время, по определению раствора между двумя подпространствами $\|\widetilde{Q}_n\| = \sqrt{1 - \theta_n 2} = \lambda_n$, причем существуют элементы $u_n \in AX_n$ и $w_n \in Y_n$ такие, что $\widetilde{Q}_n u_n = \lambda_n$ и $\widetilde{Q}_n^{-1} w_n = \dfrac{1}{\lambda_n} u_n$. Тот факт, что $\overline{\lim}\theta_n = 1$ означает, что существует подпоследовательность n_k такая, что $\lambda_{n_k} \longrightarrow 0$. В дальнейшем, для упрощения выкладок, отождествим эту подпоследовательность с исходной.

Построение элемента f будем производить с помощью принципа вложенных шаров. А именно, построим последовательность вложенных шаров

$$B_1(\xi_1, \varrho_1) \supset \ldots \supset B_n(\xi_n, \varrho_n) \supset B_{n+1}(\xi_{n+1}, \varrho_{n+1}) \supset \ldots$$

с центрами в точках ξ_j и радиусами ϱ_j и укажем подпоследовательность m_n такую, что $\forall y \in B_n(\xi_n, \varrho_n)$ выполняется неравенство $\|\widetilde{Q}_{m_n}^{-1} Q_{m_n} y\| \geq n$.

Шар $B_1(\xi_1, \varrho_1)$ возьмем с центром в точке $\xi_1 = a\lambda_1 w_1$, где $a > 1$. Тогда

$$\forall y \in B_1(\xi_1, \varrho_1)\widetilde{Q}_1^{-1} Q_1 y = au_1 + \tilde{Q}_1^{-1} Q_1(y - \xi_1)$$

и, в силу непрерывности оператора $\widetilde{Q}_1^{-1} Q_1$ и выбора $a > 1$, существует ϱ_1 такое, что $\|\widetilde{Q}_1^{-1} Q_1 y\| \geq 1$ для всех элементов шара. Пусть первые n таких шаров уже построены. Построим теперь шар $B_{n+1}(\xi_{n+1}, \varrho_{n+1})$ и укажем номер m_{n+1} такой, что $\|\widetilde{Q}_{m_{n+1}}^{-1} Q_{m_{n+1}} y\| \geq n + 1$ для всех элементов этого шара. Пусть m_0 номер, на котором достигается $\sup_{m > m_n} \|\widetilde{Q}_m^{-1} \xi_n\|$. Заметим, что если $\sup_{m > m_n} \|\widetilde{Q}_m^{-1} \xi_n\| = \infty$, то в качестве искомого элемента f можно взять ξ_n.

Возьмем теперь $\xi_{n+1} = \xi_n + \frac{1}{2}\varrho_n w_m$. Очевидно, что $\forall m \quad \xi_{n+1} \in B_n(\xi_n, \varrho_n)$. Далее,

$$\|\widetilde{Q}_m^{-1} Q_m(\xi_{n+1} + y)\| = \|\widetilde{Q}_m^{-1} Q_m(\xi_n + \frac{\varrho_n}{2} w_m + y)\| =$$

$$= \|\widetilde{Q}_m^{-1} Q_m \xi_n + \frac{\varrho_n}{2\lambda_m} u_m + \widetilde{Q}_m^{-1} Q_m y\| \geq \frac{\varrho_n}{2\lambda_m} - \beta_n - \frac{\|y\|}{\lambda_m}$$

и потребуем теперь, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\varrho_n}{2\lambda_m} - \beta_n > n + 2$$

то есть

$$\lambda_m \leq \frac{\varrho_n}{2(n + 2 + \beta_n)}. \tag{41}$$

Очевидно, что m_{n+1}, обеспечивающее выполнение неравенства (41), найдётся в силу того, что $\lambda_m \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$. И теперь берем $\varrho_{n+1} = \min(\lambda_{m_{n+1}}, \frac{1}{2}\varrho_n)$.

Таким образом, мы построили шар $B_{n+1}(\xi_{n+1}, \varrho_{n+1}$ и указали номер $m_{n+1} > m_n$ такой, что $\forall y \in B_{n+1}(\xi_{n+1}, \varrho_{n+1}) \quad \|\widetilde{Q}_{m_{n+1}}^{-1} Q_{m_{n+1}} y\| \geq n + 1$. Теперь остается только заметить, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\xi_n, \varrho_n) \neq \oslash$ и в качестве искомого f можно взять произвольный элемент этого пересечения. Тогда существует подпоследовательность m_n такая, что $\|y_{m_n} - f\| = \|\widetilde{Q}_{m_n}^{-1} f - f\| \geq \|\widetilde{Q}_{m_n}^{-1} Q_{m_n} f\| - \|f\| \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$.

Чеверда Владимир Альбертович, Костин Виктор Иванович
Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН,
пр. академика Коптюга 3,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: cheverdava@ipgg.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.283–С.289 (2010)

УДК 511.3
MSC 13A99

АППРОКСИМАЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

В.Г. ЧЕРЕДНИЧЕНКО

Abstract. The problem of the rational functions approximation is considered.

Keywords: approximation, rational functions

1. Введение

Задача интерполяции рациональными функциями сводится, как известно, к линейной системе алгебраических уравнений. Однако эта система затруднительна, как для качественного анализа проблемы, так и для численной реализации [1]. Автором [2, 3, 4] дано аналитическое решение классической задачи основанное на алгебре полиномов (рациональных дробей). Здесь даётся применение этих результатов для аппроксимационных проблем.

Введём полиномы Q_m, P_n степеней не больше m, n соответственно, а так же рациональную функцию

$$R^{m,n}(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}.$$

Задача R**.** Пусть m, n — неотрицательные целые числа, $m+n=N$, $N \geq 1$ фиксировано. Заданы пары комплексных чисел

$$(z_k,\ w_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N+1,$$

z_k - всегда различны. Найти рациональные функции

$$R^{m,N-m}(z), \quad m = N, N-1, \ldots, 0$$

Cherednichenko, V.G.,
© 2010 Чередниченко В.Г.
Поступила 9 июля 2010 г.

по условиям

$$R^{m,N-m}(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N+1. \tag{1}$$

Другими словами строится цепь рациональных функций (диагональ Паде)

$$\frac{Q_N}{P_0}, \frac{Q_{N-1}}{P_1}, \ldots, \frac{Q_1}{P_{N-1}}, \frac{Q_0}{P_N}, \tag{2}$$

каждая из которых решает, естественно, одну и ту же интерполяционную задачу; при $m = N$ имеем классический полиномиальный интерполянт Q_N.

Нетрудно показать единственность решения задачи R при каждом, но существует решение не всегда.

Обозначим

$$\Omega_{N+1}(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{N+1}). \tag{3}$$

Полиномы Ω_{N+1}, Q_N содержит всю информацию о задаче R, строим по ним полиномы $H_N = Q_N$, $N_{N-1}, \ldots, H_0$:

$$\frac{\Omega_{N+1}}{H_N} = A^{(1)} + \frac{H_{N-1}}{H_N}, \quad \frac{H_N}{N_{N-1}} = A^{(2)} + \frac{H_{N-2}}{N_{N-1,\ldots}}, \quad \frac{H_2}{H_1} = A^{(N)} + \frac{H_0}{H_1}, \tag{4}$$

здесь $A^{(k)}$ - полиномы первой степени. Каждый шаг в этом процессе — алгоритм Евклида.

Утверждение 1. [2] Числитель Q_m искомой рациональной функции в (2) определяется формулой

$$Q_m = (-1)^{N-m} H_m, \quad m = N-1, N-2, \ldots, 0,$$

полиномы H_m задаются соотношениями (4).

Утверждение 2. [2] Знаменатель P_{N-m} искомой рациональной функции в (2) определяется как решение задачи полиномиальной интерполяции

$$P_{N-m}(z_k) = \frac{Q_m(z_k)}{Q_N(z_k)}, \quad z_k \in I_{N-m+1}, \quad m = N-1, \quad N-2 < \ldots, 0,$$

I_{N-m+1} – произвольная выборка без повторов из $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ в количестве $(N - m + 1)$ точек.

Замечание. Можно считать, что $w_k \neq 0$, в противном случае, т.е. если $Q_N(z_{\overline{k}}) = 0$ при некотором $\overline{k}$, то $Q_N(z) = (z - z_{\overline{k}})Q_{N-1}(z)$ и размерность задачи уменьшается.

С учетом этого строим полином $P_N(z)$:

$$P_N(z_k) = \frac{1}{w_k} = \frac{1}{Q_N(z_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N+1$$

и условие (1) записываем в виде

$$\frac{P_{N-m}(z_k)}{Q_m(z_k)} P_N(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N+1.$$

Теперь полиномы P_{N-m} определяются согласно утверждению 1, полином Q_N в (4) заменяем на P_N.

Утверждение 3. Интерполянт Q_1/P_{N-1} в цепи (2) явно находится из формулы

$$\frac{\Omega_{N+1}}{P_N} = Q_1 - \frac{P_{N-1}}{P_N}. \tag{5}$$

Более того, если

$$\Omega_{N+1} = x^{N+1} + a_1 x^N + \ldots, \quad P_N = b_0 x^N + b_1 x^{N-1} + \ldots, \tag{6}$$

то

$$Q_1(x) = \frac{1}{b_0} x + \frac{1}{b_0}\left(a_1 - \frac{b_1}{b_0}\right), \tag{7}$$

$$-a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{N+1}. \tag{8}$$

Предполагается ещё один подход к решению интерполяционной задачи. Заметим, что интерполянт Q_1/P_{N-1} в цепи (2) можно найти используя полином Q_Nи согласно утверждению 1, но операцию деления многочленов приходится произвести несколько раз.

Утверждение 4. Пусть $m \geq n$ и

$$\frac{Q_m(\xi_k)}{P_n(\xi_k)} = w_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-n,$$

тогда имеем представление

$$\frac{Q_m(z)}{P_m(z)} = T_{m-n}(z) + \frac{(z-\xi_0)(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_{m-1})Q_{n-1}(z)}{P_n}, \tag{9}$$

причем

$$T_{m-n}(\xi_k) = w_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-n. \tag{10}$$

Это есть обобщение (или аналог) записи интерполяционного полинома Ньютона, позволяющее понизить размерность задачи.

Пример. Найти интерполянт $R^{2,2} = Q_2/P_2$, если

z_k	1	0	2	3	4
w_k	0	- 1/2	1/2	8/11	5/6

Так как $R^{2,2}(1) = 0$, то $Q_2(z) = (z-1)Q_1(z)$ и

$$\frac{(z_k-1)Q_1(z_k)}{P_2(z_k)} = w_k, \quad \frac{P_2(z_k)}{Q_1(z_k)} = \frac{z_k - 1}{w_k}, \quad z_k = 0, 2, 3, 4.$$

На основании утверждения 4 получаем

$$\frac{P_2(z)}{Q_1(z)} = T_1(z) + \frac{z(z-2)\cdot P_0}{Q_1(z)}$$

Для $T_1(z)$ имеем: $T_1(0) = 2$, $T_1(2)$, т.е. $T_1 \equiv 2$.
Для нахождения Q_1 используем z_3, z_4:

$$Q_1(3) = 4, \quad Q_1(4) = 5,$$

т.е. $Q_1 = z + 1$. Тем самым $Q_2 = z^2 - 1$, $P_2 = z^2 + 2$.

Итак, имеется два эффективных способа решения задачи R минуя систему линейных уравнений.

Применим приведенные результаты для построения аппроксимационных процессов.

Пусть функция $f(x)$ задана в узлах $x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}, n \geq 1$. Количество узлах и их расположение определяются целями аппроксимации. Таковыми могут быть, например,

1. Приближение $f(x)$ рациональными функциями на некотором интервале $[a, b]$.

2. Отыскание корня (корней) уравнения $f(x) = 0$.

3. Аналитическое продолжение (экстраполяция) функции $f(x)$ с конечного числа точек.

Аппроксимации будем строить тремя способами.

Схема 1. Исходя из начальных данных $(x_k, f(x_k))$ $k = 1, 2, \ldots, n+1$ строим интерполянт $Q_1^{(n-1)}/P_{n-1}$. К имеющимся узлам добавляем новый узел x_{n+2}, равный корню линейного уравнения $Q_1^{(n-1)}(x) = 0$, далее находим $Q_1^{(n)}$ и т.д.

Схема 2. Узел z_{n+1} заменяем на x_{n+2}, который находим тем же способом.

Схема 3. К исходным узлам добавляем сразу несколько узлов, например, середины отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Реализуем приведенные схемы.

Согласно (7)

$$x_{n+2} = \frac{b_1}{b_0} - a_1, \tag{11}$$

b_0, b_1 — коэффициенты при старших степенях полинома $P_n(x)$:

$$P_n(x_k) = 1/f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, n+1; \tag{12}$$

$-a_1$ – сумма узлов x_k.

Используя запись Ньютона интерполяционного полинома

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) = \lambda_{n+1}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \tag{13}$$

$$P_{n-1}(x) = \lambda_1 + \lambda_2(x - x_1) + \ldots + \lambda_2(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в представлениях (6), (13) получаем

$$b_0 = \lambda_{n+1},\ b_1 = \lambda_n + \lambda_{n+1}(-x_1 - x_2 - \ldots - x_{n+1}),$$

поэтому (11) принимает вид

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}. \tag{14}$$

Утверждение 5. Для функции $f(x)$ и узлов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ приближение x_{n+2} и к корню уравнения $f(x) = 0$ вычисляется по (14), где λ_{n+1}, λ_n – коэффициенты при старших степенях интерполяционного полинома P_n в (12).

Утверждение 6. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — последовательные целые числа, функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1, x_4]$, $f(\xi) = 0$, $x_1 < \xi < x_4$. Тогда коэффициенты λ_k интерполяционного полинома Ньютона построенного на $\left(x_k, z_k = \frac{1}{f(x_k)}\right)$ $k = 1, 2, 3, 4$ определяются по схеме [3]:

$$\begin{array}{lllll}
z_1 & & & & \lambda_1 = z_1 \\
 & z_2 - z_1 & & & \\
z_2 & & z_3 - 2z_2 + z_1 & & \lambda_2 = z_2 - z_1 \\
 & z_3 - z_2 & & z_4 - 3z_1 + 3z_2 + z_1 & \\
z_3 & & z_4 - 2z_3 + z_2 & & \lambda_3 = \frac{z_3 - 2z_2 + z_1}{2} \\
 & z_4 - z_3 & & & \\
z_4 & & & & \lambda_4 = \frac{z_4 - 3z_3 + 3z_2 - z_1}{6}
\end{array}$$

Приближение x_5 к корню ξ и оценка имеют вид

$$x_5 = x_4 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = x_4 + \frac{3(z_3 - 2z_2 + z_1)}{z_4 - 3z_3 + 3z_2 - z_1},\quad |x_5 - \xi| \le \frac{|f(x_5)|}{m}$$

$m = \min |f'(x)|$, x изменяется между ξ и x_5.
Для трех узлов x_1, x_2, x_3 приближение x_4 и оценка имеют вид

$$x_4 = x_3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = x_3 + \frac{\lambda_2(z_2 - z_1)}{z_3 + 2z_2 + z_3}, \quad |x_4 - \xi| \le \frac{|f(x_4)|}{m}.$$

Приведенная оценка — следствие теоремы Лагранжа о конечном приращении.

Пример. $f = x^3 - 10$, $x_k = 0, 1, 2, 3$, тогда $x_4 = 35/17 = 2,0588$, $x_5 = 725/338 = 2,144970$.

Пример. $f = x \cdot 2^x - 1$, $x_k = 0, 1, 2, 3$, тогда $\lambda_3 = -10/7$, $\lambda_4 = -97/161$, $x_5 = 3 - 230/97 = 61/97 = 0,6289$ $|\xi - x_5| < 9,03 : (m = 1)$.

Вернемся к (14), именно, выявим зависимость λ_{n+1} от λ_{n+1}. Из (13) получим

$$\lambda_{n+1} = \frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{\Omega_n(x)}, \quad x = x_{n+1}. \tag{15}$$

Пусть, в частности, $f(x) = Q_S(x)$ — полином степени s, тогда

$$\lambda_{n+1} = \frac{1 - Q_S P_{n-1}(x)}{Q_S(x)\Omega_n(x)}, \quad x = x_{n+1}. \tag{16}$$

Читатель обращается в нуль при $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а значит делится без остатка $h\Omega_n$, результат обозначим через T_{S-1}:

$$\frac{1 - Q_S \cdot P_{n-1}(x)}{\Omega_n(x)} = T_{S-1}(x), \tag{17}$$

тем самым

$$\lambda_{n+1} = \frac{T_{S-1}(x_{n+1})}{Q_S(x_{n+1}}, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{\lambda_n Q_S(x_{n+1})}{T_{S-1}(x_{n+1})} \tag{18}$$

Если $x_n \to \gamma$ при $n \to \infty$, то γ – корень уравнения $Q_S(x) = 0$, это следует из (18).

Пример. $Q_3 = x^3 + q$, из $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, x_4 – произвольная пока точка.

В данном случае

$$\lambda_1 = \frac{1}{q}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q(1+q)}, \quad \lambda_3 = \frac{4 - 3q}{q(1+q)(18+q)} \tag{19}$$

$$P_2 = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x(x-1) = \lambda_3 x^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)x + \lambda_1,$$

$$\lambda_4 = \frac{T_2(x_4)}{Q_3(x_4)}, \quad T_2 = \frac{1 \pm Q_3(x)P_2(x)}{\Omega_3(x)} =$$

$$= -\lambda_3 x^2 - (\lambda_2 + 2\lambda_3)x - (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3).$$

Формула (14) принимает вид

$$x_5 = x_4 + \frac{\lambda_3 Q_3(x_4)}{T_2(x_4)},$$

а в общем случае

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{\lambda_3 Q_3(x_{n+1})}{T_2(x_{n+1})}, \quad n \ge 3 \tag{20}$$

Если произвести сложение в правой части, то коэффициент при старшей степени (третьей, в данном случае) обратится в нуль:

$$x_{n+2} = h(x_{n+1}), \quad n \ge 3, \tag{21}$$

$$h(x) = \frac{-(\lambda_2 + 2\lambda_3)x^2 - (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3)x + \lambda_3 q}{-\lambda_3 x^2 - (\lambda_2 + 2\lambda_3)x - (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3)}. \tag{22}$$

Итак, узлы x_1, x_2, x_3 использованы для построения функции $h(x)$, т.е. для организации итерационного процесса, узел x_3 — начальное приближение к корню уравнения $x^2 + q = 0$. Используя (20) получаем

$$h(x) = \frac{7qx^2 - (q^2 - 6q)x + (4 - 3q)q}{-(4 - 3q)x^2 + 7qx - (q^2 - 6q)}. \tag{23}$$

Если, к примеру $q = -10$, то

$$h(x) = \frac{35x^2 + 80x + 170}{17x^2 + 35x + 80}, \quad h'(x) = 45\left(\frac{-3x^2 - 4x + 10}{(17x^2 + 35x + 80)^2}\right),$$

а если ещё $x = x_4 = 3$, то $x_5 = h(x_4) = 725/338$. Для всех x $|h'(x)| < 1$, что гарантирует сходимость итерационного процесса (22).

Наконец, если $x_4 = 3$ — начальное приближение к корню уравнения $x^3 + y = 0$, то $x_5 = h(x_4)$ - первое приближение:

$$\sqrt[3]{-q} \approx \frac{6q^2 - 85q}{q^2 - 54q + 36}, \quad q < 0$$

Обозначая $-q = t$, получаем

$$\sqrt[3]{t} \approx \frac{6t^2 + 85t}{t^2 + 54t + 36}, \quad t \geq 0. \tag{24}$$

Заметим, что в узлах $t = 0, 1, 8, 27$ имеем точное равенство.

Рассмотрим уравнение

$$Q_3 \equiv x^3 + px + q = 0, \tag{25}$$

к которому сводится произвольное уравнение третьей степени. При $p \geq 0$ имеется один действительный корень, а при $p < 0$ три корня. В качестве узлов возьмём точки 0, 1, 2, 3. Тогда

$$\Omega_4 = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Построим интерполянт Q_1/P_2 для Q_3 используя утверждение 1. Имеем

$$\frac{\Omega_4}{Q_3} = (x - 6) + \frac{H_2}{Q_3}, \quad H_2 = (11 - p)^2 x^2 + (6p - 6 - q)x + 6q,$$

$$\frac{Q_3}{H_2} = \frac{1}{11 - p}x + \frac{6p - 6 - q}{(11 - p)^2} + \frac{ax + b}{H_2},$$

$$a = p - \frac{6q}{11 - p} + \left(\frac{6p - 6 - q}{11 - p}\right)^2, \quad b = q + \frac{6q(6p - 6 - q)}{(11 - p)^2}.$$

Корень уравнения $Q_1(x) = 0$ обозначим через x_5:

$$x_5 = x_5(p,\ q) = \frac{-q(p^2 + 14p + 85 - 6q)}{p^3 + 14p^2 + 49p + q^2 - 54q + 36 - 6pq}. \tag{26}$$

Утверждение 7. Приближение x_5 к действительному корню уравнения (26) построенное на узлах $x_k = 0, 1, 2, 3$ задается формулой (27).

Список литературы

[1] Дж. Бейкер, П. Грейвс–Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, Москва, 1986.
[2] В.Г. Чередниченко, *Рациональная интерполяция, аналитическое решение*, Сибирский математический журнал, **43**:1 (2002), 188–193.
[3] V.G. Cherednichenko, *Rational apporoximation and analytical continuation from a finite number of points*, J. Jll-Posed Problems, **14**:7 (2006), 643–649.
[4] Viktor G. Cherednichenko, *Appromation by rational fuctions. Applicable Analysis*, International Journal, **87**:10 (2008), 1289–1295.
[5] А.П. Мишина, И.В. Проскуряков, *Высшая алгебра*, СМБ, Наука, Москва, 1965.

Виктор Григорьевич Чередниченко
630090, Новосибирск, Россия

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.290–С.306 (2010)

УДК 519.63
MSC 76D55

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

И.С. ВАХИТОВ

Abstract. Inverse extremum problem of identification of the diffusion coefficient in an elliptic equation of convection-diffusion-reaction is formulated. The solvability of this problem is proved, the application of Lagrange principle is justified and the optimality system is constructed for specific cost functional. The numerical algorithm based on Newton-method of nonlinear optimization and finite-element discretization of linear elliptic problems is developed and realized on computer. The results of numerical experiments are discussed.

Keywords: inverse problem, diffusion coefficient, Newton's method.

Сформулирована обратная экстремальная задача восстановления старшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения, исследована ее разрешимость, обосновано применение принципа неопределенных множителей Лагранжа и построена система оптимальности для конкретного функционала качества. Исследована единственность и устойчивость решения экстремальной задачи. Разработан и реализован численный алгоритм на основе метода Ньютона, проведены вычислительные эксперименты.

Vakhitov, I.S., Inverse problem of identification of diffusion coefficient in convection-diffusion-reaction equation.

© 2010 Вахитов И.С.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-98518-р_восток_а), НШ-2810.2008.1 ДВО РАН (грант 09-I-П29-01).

Поступила 29 ноября 2009 г.

1. Введение

В последнее время все большее внимание привлекают к себе обратные и некорректные задачи. К таким задачам приводят попытки решения различных физических проблем с помощью методов математического моделирования. К указанным задачам относят задачи идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов, входящих в рассматриваемые модели.

Исследования коэффициентных обратных задач часто сводится к исследованию соответствующих экстремальных задач при определенном выборе функционала качества. Это позволяет применять для их решения хорошо развитые методы условной оптимизации. Цикл работ [1–7] посвящен теоретическому и численному исследованию обратных экстремальных задач для нелинейных моделей тепломассопереноса. Задача восстановления старшего коэффициента рассматривается в работах [8, 9]. Работы [10–12] посвящены исследованию эллиптических уравнений и идентификации старшего коэффициента для одномерного уравнения. Отметим также работы [13, 14], в которых исследуются задачи восстановления младшего коэффициента для уравнения конвекции-диффузии-реакции и разрабатываются численные алгоритмы их решения на основе квазиньютовского и градиентного методов соответственно.

2. Постановка прямой задачи

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ. Рассмотрим в Ω задачу нахождения концентрации φ загрязняющего вещества из соотношений

$$-\mathrm{div}(\lambda\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + \kappa\varphi = f,\ \varphi(x,y)|_\Gamma = \psi. \tag{1}$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – коэффициент диффузии, зависящий от точки $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\kappa \equiv \kappa(\mathbf{x}) \geq 0$ – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, $f(\mathbf{x})$ – плотность объемных источников, $\psi(\mathbf{x})$ – заданная на Γ функция.

При теоретическом анализе краевой задачи (1) и обратной экстремальной задачи для (1) будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо границу Γ, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$. Через $\|\cdot\|_s$ и $|\cdot|_s$ будем обозначать норму и полунорму в $H^s(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $L^2_+(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : q \geq 0\}$. Через $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим оператор следа, через $R_\gamma : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ – непрерывный правый обратный оператор к γ, с которым выполняется соотношение $\gamma \circ R_\gamma\psi = \psi$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Введем пространство $T = H^1_0(\Omega) \equiv \eta \in H^1(\Omega) : \eta = 0$ на Γ. T – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрикса–Пуанкаре́ $|\eta|_1^2 \geq \delta_1\|\eta\|_1^2\ \forall\eta \in T, \delta_1 = \mathrm{const} > 0$. Через $T^* \equiv H^{-1}(\Omega)$ обозначим пространство, двойственное к T относительно пространства $L^2(\Omega)$. Положим $\mathbf{Z} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{u} = 0\}$. Введем билинейные формы $a, a_\lambda, c_\mathbf{u}(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, где

$$a_\lambda(\varphi,\eta) = \int_\Omega \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\eta d\mathbf{x},\ c_\mathbf{u}(\varphi,\eta) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta) = \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi)\eta d\mathbf{x},$$

$$a(\varphi,\eta) = a_\lambda(\varphi,\eta) + c_\mathbf{u}(\varphi,\eta) + (\kappa\varphi,\eta). \tag{2}$$

Будем использовать следующие формулы Грина:

$$(\Delta\varphi,\eta) = -(\nabla\varphi,\nabla\eta) + \langle \partial\varphi/\partial n,\eta\rangle_\Gamma \,\forall\varphi,\eta\in H^1(\Omega), \tag{3}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta) = -(\mathbf{u}\cdot\nabla\eta,\varphi) + (u_n,\varphi\eta)_\Gamma, u_n = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\;\forall\mathbf{u}\in\mathbf{Z},\varphi,\eta\in H^1(\Omega). \tag{4}$$

Будем предполагать, что выполняются условия:
(i) $\Gamma\in C^{0,1}$, $f\in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}\in\mathbf{Z}$, $\psi\in H^{1/2}(\Gamma),\kappa\in L^2_+(\Omega)$;
(ii) $\lambda\in\Lambda=\{\lambda:\lambda\in H^2(\Omega),\lambda\geq\lambda_{min}>0\}$.

Легко проверить [7], что при выполнении условий в (i), (ii) на $\mathbf{u}$, λ и κ для форм, введенных в (2), выполняются следующие соотношения для всех $\varphi,\eta\in H^1(\Omega)$:

(5)
$$|a_\lambda(\varphi,\eta)| = |\int_\Omega \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\eta d\mathbf{x}| \leq \gamma_0\|\lambda\|_2|\varphi|_1|\eta|_1 \leq \gamma_0\|\lambda\|_2\|\varphi\|_1\|\eta\|_1,\ \gamma_0=\text{const},$$

$$|(\kappa\varphi,\eta)| \leq \|\kappa\|\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}\|\eta\|_{L^4(\Omega)} \leq \gamma_2\|\kappa\|\|\varphi\|_1\|\eta\|_1, \tag{6}$$

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta)| \leq \gamma_1\|\mathbf{u}\|_1\|\varphi\|_1\|\eta\|_1, \tag{7}$$

$$\|\varphi\|_Q\leq\gamma_3\|\varphi\|_1,\ |(\varphi,\eta)_Q|\leq\|\varphi\|_Q\|\eta\|_Q\leq\gamma_3^2\|\varphi\|_1\|\eta\|_1,\ \gamma_3=\text{const}, \tag{8}$$

$$a_\lambda(\varphi,\varphi)=\int_\Omega\lambda|\nabla\varphi|^2d\mathbf{x}\geq\lambda_{min}\int_\Omega|\nabla\varphi|^2d\mathbf{x}=\lambda_{min}|\varphi|_1^2\geq\lambda_{min}\delta_1\|\varphi\|_1^2,\ \forall\varphi\in T$$

$$c_{\mathbf{u}}(\varphi,\varphi)\equiv(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\varphi)=0\;\forall\varphi\in T,\ \mathbf{u}\in\mathbf{Z},(\kappa\varphi,\varphi)\geq0\;\forall\varphi\in T,\kappa\in L^2_+(\Omega),$$

$$a(\varphi,\varphi)=a_\lambda(\varphi,\varphi)+c_{\mathbf{u}}(\varphi,\varphi)+(\kappa\varphi,\varphi)\geq\lambda_{min}\delta_1\|\varphi\|_1^2\;\forall\varphi\in T.$$

Здесь γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 – некоторые константы, зависящие от Ω. Из этих соотношений вытекает, что форма $a(\cdot,\cdot)$ непрерывна на $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ и T-коэрцитивна с константой $\lambda_*=\lambda_{min}\delta_1$, так что выполняются неравенства

$$|a(\varphi,\eta)|\leq(\gamma_0\|\lambda\|_2+\gamma_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_2\|\kappa\|)\|\varphi\|_1\|\eta\|_1, \tag{9}$$

$$a(\eta,\eta)\geq\lambda_*\|\eta\|_1^2\quad\forall\varphi,\eta\in H^1(\Omega)\times T.$$

Умножим уравнение в (1) на функцию $h\in T$ и проинтегрируем по Ω. Используя формулы Грина (3), (4) и обозначения (2) приходим к слабой формулировке задачи (1). Она заключается в нахождении функции $\varphi\in H^1(\Omega)$ из условий

$$a(\varphi,h)=(f,h),\ \varphi|_\Gamma=\psi. \tag{10}$$

Слабым решением задачи (1) назовем функцию $\varphi\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (10). Из теоремы Лакса-Мильграма вытекает с учетом (9) следующая лемма:

Лемма 1. *При выполнении условий (i), (ii) существует единственное решение $\varphi\in H^1(\Omega)$ задачи (10), и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_1\leq M_\varphi\equiv\frac{1}{\lambda_*}[\|f\|+(\lambda_*+\gamma_0\|\lambda\|_2+\gamma_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_2\|\kappa\|)C_\gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}]. \tag{11}$$

Здесь C_γ – константа, входящая в теорему о следах.

Поставим в соответствие задаче (10) оператор, представляющий собой пару

$$(A,\gamma) : X \to Y, \quad X = H^1(\Omega), \quad Y = (T^*, H^{1/2}(\Gamma)), \tag{12}$$

состоящую из оператора $A : H^1(\Omega) \to T^*$, действующего по формуле

$$\langle A\varphi, \eta\rangle_{T^*\times T} = a(\varphi,\eta)\ \forall\varphi \in H^1(\Omega), \quad \eta \in T, \tag{13}$$

и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Из свойств непрерывности и коэрцитивности формы a вытекает, что сужение оператора $A|_T : T \to T^*$ оператора A на T является изоморфизмом.

Рассмотрим свойства оператора (12). Он линеен и непрерывен в силу линейности и непрерывености операторов A и γ. Кроме того, из леммы 1 вытекает, что оператор (12) обратим и сюръективен. В таком случае из теоремы Банаха о существовании обратного оператора следует, что оператор (12) непрерывно обратим и осуществляет изоморфизм. Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда: 1) билинейная форма $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывна и T – коэрцитивна с константой λ_*; 2) для любой функци $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ и справедлива оценка (11); 3) оператор (12) осуществляет изоморфизм.*

3. Постановка и разрешимость задачи идентификации. Необходимые условия оптимальности

Рассмотрим задачу идентификации для модели (1), в которой кроме концентрации φ неизвестным является также коэффициент диффузии λ. В качестве дополнительной информации о решении будем использовать значения φ_d концентрации φ в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Решение рассматриваемой задачи можно свести к решению экстремальной задачи при определенном выборе функционала качества $\tilde{I}$. В качестве управления выберем функцию λ, которую будем искать в некотором множестве K, удовлетворяющему условию

(iii) $K \subset \Lambda$ – непустое выпуклое замкнутое множество.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\varphi,\lambda) = \frac{\mu_0}{2}\tilde{I}(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|_2^2. \tag{14}$$

здесь $\tilde{I} : X \to \mathbb{R}$ – функционал качества, определяемый формулой

$$\tilde{I}(\varphi) = \|\varphi - \varphi_d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi_d|^2 d\mathbf{x} \equiv \int_\Omega r(\varphi - \tilde{\varphi}_d)^2 d\mathbf{x}, \tag{15}$$

μ_0, μ_1 – неотрицательные константы, а λ – искомое усправление. $\varphi_d \in L^2(Q)$ – заданная функция, $r = \chi_Q$ – характеристическая функция множества Q, $\tilde{\varphi}_d \in L^2(\Omega)$ – функция, равная φ_d в Q и 0 вне Q. Из [7] вытекает следующая лемма:

Лемма 2. *Функционал $\tilde{I}$ слабо полунепрерывен снизу.*

Рассматривая функционал J на решениях задачи (1), запишем ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (10), в виде $F(\varphi,\lambda) = 0$. Здесь оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \equiv X \to Y \equiv T^* \times H^{1/2}(\Gamma)$ действует по формулам

$$\langle F_1(\varphi,\lambda),\eta\rangle = \langle A\varphi,\eta\rangle - (f,\eta) \equiv a(\varphi,\eta) - (f,\eta) \quad F_2(\varphi,\lambda) = \varphi|_\Gamma - \psi \ \ \forall\eta \in T. \tag{16}$$

С учетом введенных обозначений перепишем сформулированную выше задачу идентификации в виде следующей экстремальной задачи:

$$J(\varphi,\lambda)\to\inf,\ \ F(\varphi,\lambda)=0,\ \ (\varphi,\lambda)\in H^1(\Omega)\times K. \tag{17}$$

Введем множество $Z_{ad}=\{(\varphi,\lambda)\in X\times K:\ F(\varphi,\lambda)=0,\ J(\varphi,\lambda)<\infty\}$ допустимых пар (φ,λ) для задачи (17).

Теорема 2. *Пусть $I: X\to\mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества и выполняются условия (i), (iii), причем множество Z_{ad} не пусто. Тогда задача (17) имеет по крайней мере одно решение $(\varphi,\lambda)\in H^1(\Omega)\times K$.*

Доказательство. Обозначим через $(\varphi_m,\lambda_m)\in Z_{\rm ad}$, $m\in\mathbb{N}\equiv\{1,2,\ldots\}$, минимизирующую последовательность для функционала J, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty}J(\varphi_m,\lambda_m)=\inf_{(\varphi,\lambda)\in Z_{ad}}J(\varphi,\lambda)\equiv J^*.$$

В случае, когда множество K ограничено, справедлива оценка

$$\|\lambda_m\|_2\le c_1\ \forall m\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

Здесь и ниже c_1 – некоторая константа, не зависящая от m. В случае, когда множество K неограничено, эта оценка также выполняются в силу условия неотрицательности функционала J и условия $\mu_1>0$ входящего в (iii).

Из (18) и теоремы 1 вытекает, в свою очередь, что $\|\varphi_m\|_1\le c_2$. Из этой оценки и (18) вытекает в силу свойства слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивных банаховых пространствах, что существуют слабые пределы $\lambda^*\in H^2(\Omega)$, $\varphi^*\in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{\varphi_m\}$, причем в силу компактности вложений

$$H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega),\gamma H^1(\Omega)\subset L^p(\Gamma)\text{ при любом }p<4,\ H^2(\Omega)\subset L^\infty(\Omega) \tag{19}$$

можно считать, что $\varphi_m\to\varphi^*$ слабо в $H^1(\Omega)$, $\varphi_m\to\varphi^*$ сильно в $L^4(\Omega)$, $\varphi_m|_\Gamma\to\varphi^*|_\Gamma$ сильно в $L^2(\Gamma)$ при $m\to\infty$, $\lambda_m\to\lambda^*$ слабо в $H^2(\Omega)$, $\lambda_m\to\lambda^*$ сильно в $L^\infty(\Omega)$. Поскольку K является выпуклым замкнутым множеством в гильбертовом пространстве $H^2(\Omega)$, то оно замкнуто и в слабой топологии. Это означает, что $\lambda^*\in K$. Так как $\gamma\varphi_m=\psi_m$, то из свойства непрерывности оператора следа γ вытекает, что $\gamma\varphi^*=\psi^*$ и, следовательно, $F_2(\varphi^*,\lambda^*)=0$.

Покажем, что $F_1(\varphi^*,\lambda^*)=0$, т.е. что

$$a_{\lambda^*}(\varphi^*,\eta)+c_{\mathbf{u}}(\varphi^*,\eta)+(\kappa\varphi^*,\eta)-(f,\eta)=0\ \forall\eta\in T. \tag{20}$$

Для этого заметим, что λ_m и φ_m при каждом $m\in\mathbb{N}$ удовлетворяют тождеству

$$\langle F_1(\varphi_m,\lambda_m),\eta\rangle_{T^*\times T}\equiv a_{\lambda_m}(\varphi_m,\eta)+c_{\mathbf{u}}(\varphi_m,\eta)+(\kappa\varphi_m,\eta)-(f,\eta)=0\ \forall\eta\in T. \tag{21}$$

Ясно, что все линейные слагаемые в левой части (21) переходит при $m\to\infty$ в соответствующие линейные слагаемые в (20).

Покажем, что $a_{\lambda_m}(\varphi_m,\eta)\to a_{\lambda^*}(\varphi^*,\eta)$ при $m\to\infty$. Имеем

$$|(\lambda^*\nabla\eta,\nabla\varphi_m-\nabla\varphi^*)|+|(\lambda_m-\lambda^*,\nabla\varphi_m\cdot\nabla\eta)|. \tag{22}$$

Так как $\lambda^*\in L^\infty(\Omega)$, то первое слагаемое в правой части (22) стремится к нулю при $m\to\infty$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (22). Уже указывалось, что $\lambda_m \to \lambda^*$ сильно в $L^\infty(\Omega)$. Так как $\nabla\varphi^* \in L^2(\Omega), \nabla\eta \in L^2(\Omega)$, то $\nabla\varphi^* \cdot \nabla\eta \in L^1(\Omega)$. С учетом этого, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$|(\lambda_m - \lambda^*, \nabla\varphi^* \cdot \nabla\eta)| \le \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi^* \cdot \nabla\eta\|_{L^1(\Omega)} \to 0$$

при $m \to \infty$, $\forall \eta \in H^1(\Omega)$.

Это значит, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$. Кроме того, так как функционал J слабо полунепрерывен снизу в силу леммы 2, то имеем

$$J^* = \lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) = \overline{\lim_{m\to\infty}} J(\varphi_m, u_m) \ge J(\varphi^*, u^*) \ge J^*.$$

Теорема доказана.

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (17). Для этого воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых экстремальных задачах [15].

Обозначим через $Y^* = T \times H^{-1/2}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$, двойственное пространство к пространству $Y = T^* \times H^{1/2}(\Gamma)$. Положим $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \ge 0\}$. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [15] введем в рассмотрение множитель Лагранжа (σ_0, y^*), где $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+$, $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^*$, причем элемент $\eta \in T$ имеет смысл "сопряженной" концентрации, и лагранжиан $L : H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R}_+ \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$L(\varphi, \lambda, f, \sigma_0, \eta, \zeta) \equiv \sigma_0 J(\varphi, \lambda) + \langle y^*, F(\varphi, \lambda)\rangle_{Y^*\times Y}, \tag{23}$$

где

$$\langle y^*, F(\varphi, \lambda)\rangle_{Y^*\times Y} = \langle F_1(\varphi, \lambda), \eta\rangle_{T^*\times T} + \langle \zeta, F_2(\varphi, \lambda)\rangle_\Gamma \tag{24}$$

Из линейности оператора F и выпуклости множества K вытекает следующая лемма:

Лемма 3. *Множество $F(\varphi, K) = \{\lambda \in K : F(\varphi, \lambda) \in Y\}$ является выпуклым подмножеством в Y для всех $\varphi \in X$.*

Так как оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda) \equiv (\hat A, \gamma) : X \to Y$ – изоморфизм, то из [7, 15] следует

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий теоремы 2 пара $(\hat\varphi, \hat\lambda) \in H^1(\Omega) \times K$ является элементом, на котором достигается локальный минимум в задаче (17). Тогда существует единственный множитель Лагранжа $(\sigma_0, y^*) = (1, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times T \times H^{-1/2}(\Gamma)$ такой, что справедливо уравнение Эйлера – Лагранжа*

$$\langle L'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda, \hat f, \sigma_0, \eta, \zeta), \tau\rangle = 0 \ \forall \tau \in H^1(\Omega), \tag{25}$$

и выполняется принцип минимума

$$\langle L'_\lambda(\hat\varphi, \hat\lambda, 1, \eta, \zeta), \lambda - \hat\lambda\rangle \ge 0 \ \forall \lambda \in K. \tag{26}$$

В силу (23) имеем при $\sigma_0 = 1$, что

$$\langle L'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda, 1, \eta, \zeta), \tau\rangle = \langle J'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda), \tau\rangle + \langle y^*, F'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda)\tau\rangle. \tag{27}$$

Ясно также, согласно определению производной Гато от функционала $J(\varphi, \lambda)$ в направлении τ, что

$$\langle J'_\varphi(\hat\varphi, \hat\lambda), \tau\rangle = (\mu_0(\hat\varphi - \varphi_d), \tau) \ \forall \tau \in H^1(\Omega). \tag{28}$$

Используя линейность оператора A, выводим далее, что производная оператора $F_1(\cdot,\lambda): X \to T^*$ по φ определяется формулой

$$\langle F'_{1\varphi}(\hat{\varphi},\hat{\lambda})\tau,\eta\rangle = \langle \hat{A}\tau,\eta\rangle = a_{\hat{\lambda}}(\tau,\eta) + c_{\mathbf{u}}(\tau,\eta) + (\kappa\tau,\eta)\ \forall\tau\in X, \eta\in T. \tag{29}$$

Аналогично, в силу свойств оператора γ имеем

$$\langle \zeta, F'_{2\varphi}(\hat{\varphi},\hat{\lambda})\tau\rangle = \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma\ \forall\tau\in X. \tag{30}$$

Из (23), (29), (30) следует, что

$$\langle y^*, F'_\varphi(\hat{\varphi},\hat{\lambda})\tau\rangle_{Y^*\times Y} = \langle F'_{1\varphi}(\hat{\varphi},\hat{\lambda})\tau,\eta\rangle_{T^*\times T} + \langle\zeta, F'_{2\varphi}(\hat{\varphi},\hat{\lambda})\tau\rangle_\Gamma =$$

$$= \langle\hat{A}\tau,\eta\rangle_{T^*\times T} + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma \equiv a_{\hat{\lambda}}(\tau,\eta) + c_{\mathbf{u}}(\tau,\eta) + (\kappa\tau,\eta) + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma\ \forall\tau\in X. \tag{31}$$

Из (31) вытекает, что уравнение (25) эквивалентно тождеству

$$\langle\hat{A}\tau,\eta\rangle_{T^*\times T} + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma = -\langle J'_\varphi(\hat{\varphi},\hat{\lambda}),\tau\rangle_{X^*\times X}\ \forall\tau\in X \tag{32}$$

для пары (η,ζ), имеющему в подробной записи вид

$$a_{\hat{\lambda}}(\tau,\eta) + c_{\mathbf{u}}(\tau,\eta) + (\kappa\tau,\eta) + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma = -\mu_0(\hat{\varphi}-\varphi_d,\tau)_Q\ \ \forall\tau\in X. \tag{33}$$

Рассмотрим сужение тождества (33) на пространство T. Будем иметь

$$a_{\hat{\lambda}}(\tau,\eta) + c_{\mathbf{u}}(\tau,\eta) + (\kappa\tau,\eta) = -\mu_0(\hat{\varphi}-\varphi_d,\tau)_Q\ \ \forall\tau\in T. \tag{34}$$

Используя формулы Грина (3), (4), выводим, что

$$\int_\Omega \lambda\nabla\tau\cdot\nabla\eta d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathrm{div}(\lambda\nabla\eta)\tau d\mathbf{x},\ \ \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\tau\eta d\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\eta\tau d\mathbf{x}.$$

Используя эти формулы, перепишем (34) в виде

$$\int_\Omega \left[-\mathrm{div}(\hat{\lambda}\nabla\hat{\eta}) - \mathbf{u}\cdot\nabla\hat{\eta} + \kappa\hat{\eta}\right]\tau d\mathbf{x} = \int_\Omega \mu_0(\hat{\varphi}-\varphi_d)\tau d\mathbf{x}\ \forall\tau\in T.$$

Отсюда ясно, что первый множитель Лагранжа $\hat{\eta}$ является слабым решением краевой задачи

$$-\mathrm{div}(\hat{\lambda}\nabla\hat{\eta}) - \mathbf{u}\cdot\nabla\hat{\eta} + \kappa\hat{\eta} = -\mu_0\chi_Q(\hat{\varphi}-\varphi_d)\ \text{в}\ \Omega,\ \hat{\eta}|_\Gamma = 0. \tag{35}$$

тогда как множитель ζ определяется по η формулой $\zeta = -\hat{\lambda}\partial\eta/\partial n$.

Обратимся теперь к принципу минимума (26). Нетрудно показать, что производная L'_λ определяется соотношением

$$< L'_\lambda(\hat{\varphi},\hat{\lambda},1,\hat{\eta},\hat{\zeta}),\lambda >= (\mu_1\hat{\lambda},\lambda)_2 + (\lambda\nabla\hat{\varphi},\nabla\hat{\eta})\ \ \forall\lambda\in K, \hat{\eta}\in T.$$

В таком случае из (26) приходим к следующему вариационному неравенству:

$$(\mu_1\hat{\lambda},\tilde{\lambda}-\hat{\lambda})_2 + ((\tilde{\lambda}-\hat{\lambda})\nabla\hat{\varphi},\nabla\hat{\eta}) \geq 0\ \forall\tilde{\lambda}\in K. \tag{36}$$

Ниже на (33) формально будем ссылаться как на “сопряженную” задачу. Подчеркнем, что прямая задача (10), сопряженная задача (33) и неравенство (36) представляют собой систему оптимальности, описывающую необходимые условия минимума для задачи (17).

4. Единственность решения задачи идентификации

Основываясь на анализе системы оптимальности для задачи (17), установим достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость ее решения. С этой целью обозначим через $M_\varphi(\lambda)$ правую часть оценки (11) и предположим, что выполняется условие

$$\sup_{\lambda\in K} M_\varphi(\lambda) \le M_\varphi^0 = \text{const} < \infty. \tag{37}$$

Условие (37) заведомо выполняется в силу (11), если K ограничено или $\psi = 0$.

Предположим, что существуют два решения (φ_1, λ_1) и $(\varphi_2, \lambda_2) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (17). В силу теоремы 1 и (37) для φ_i справедливы оценки

$$\|\varphi_i\|_1 \le M_\varphi^0,\ i = 1, 2. \tag{38}$$

Обозначим через $(1, \eta_i, \zeta_i), i = 1, 2$ отвечающие указанным решениям множители Лагранжа. Полагая $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, вычтем соотношения (10), записанные для (φ_2, λ_2), из этих же соотношений (10), записанных для (φ_1, λ_1). Используя равенство

$$(\lambda_1\varphi_1, \eta) - (\lambda_2\varphi_2, \eta) = (\lambda_2\varphi, \eta) + (\lambda\varphi_1, \eta), \tag{39}$$

получим

$$(\lambda_2\nabla\varphi, \nabla h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\kappa\varphi, h) = -(\lambda\nabla\varphi_1, \nabla h)\ \forall h \in T,\ \varphi|_\Gamma = 0. \tag{40}$$

Полагая $h = \varphi$ и используя (7), (8), (38), получаем, что

$$\lambda_*\|\varphi\|_1^2 \le (\lambda_2\nabla\varphi_1, \nabla\varphi) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi) + (\kappa\varphi, \varphi) \le \gamma_0\|\lambda\|_2 M_\varphi^0\|\varphi\|_1.$$

Отсюда приходим к следующей оценке для $\|\varphi\|_1$:

$$\|\varphi\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*}\gamma_0 M_\varphi^0\|\lambda\|_2. \tag{41}$$

Обратимся далее к тождеству (33), где положим $\hat\eta = \eta_i$, $\hat\lambda = \lambda_i, \tau = \eta_i$. Учитывая, что $\eta_i|_\Gamma = 0$, получим

$$a_{\lambda_i}(\eta_i, \eta_i) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\eta_i, \eta_i) + (\kappa\eta_i, \eta_i) = -\mu_0(\varphi_i - \varphi_d, \eta_i)_Q, i = 1, 2. \tag{42}$$

Используя (8), (38), выводим, что

$$\lambda_*\|\eta_i\|_1^2 \le \mu_0\gamma_3(\gamma_3\|\varphi_i\|_1 + \|\varphi_d\|_Q)\|\eta_i\|_1 \le \mu_0\gamma_3(\gamma_3 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q)\|\eta_i\|_1. \tag{43}$$

Из (43) приходим к следующей оценке для η_i:

$$\|\eta_i\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*}\mu_0\gamma_3(\gamma_3 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q),\ i = 1, 2. \tag{44}$$

Вычтем тождество (42), записанное для $(\varphi_2, \lambda_2, \eta_2)$, из этого же тождества, записанного для $(\varphi_1, \lambda_1, \eta_1)$ Учитывая соотношения вида (33), получим

$$(\lambda_2\nabla\tau, \nabla\eta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \eta) + (\kappa\tau, \eta) = -(\lambda\nabla\tau, \nabla\eta_1) - \mu_0(\varphi, \tau)_Q.$$

Полагая здесь $\tau = \eta$, будем иметь

$$(\lambda_2\nabla\eta, \nabla\eta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\eta, \eta) + (\kappa\eta, \eta) = -(\lambda\nabla\eta, \nabla\eta_1) - \mu_0(\varphi, \eta)_Q. \tag{45}$$

Из (45) выводим с учетом (7), (8), что

$$\lambda_*\|\eta\|_1^2 \le \gamma_0\|\lambda\|_2\|\eta_1\|_1\|\eta\|_1 + \mu_0\gamma_3^2\|\varphi\|_1\|\eta\|_1.$$

Используя оценки (41), (44), отсюда приходим к следующей оценке для η:

$$\|\eta\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*^2}\mu_0\gamma_0\gamma_3(2\gamma_3 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q)\|\lambda\|_2. \tag{46}$$

Обратимся теперь к неравенству (36). Полагая $\tilde\lambda = \lambda_1$ в неравенстве (36), записанном при $\hat\lambda = \lambda_2, \hat\varphi = \varphi_2, \hat\eta = \eta_2$, и $\tilde\lambda = \lambda_2$ в этом же неравенстве при $\hat\lambda = \lambda_1, \hat\varphi = \varphi_1, \hat\eta = \eta_1$, будем иметь

$$\mu_1(\lambda_2,\lambda)_2 + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\eta_2) \ge 0, \;\; -\mu_1(\lambda_1,\lambda)_2 - (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta_1) \ge 0.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$-\mu_1(\lambda,\lambda)_2 \ge (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta_1) - (\lambda\varphi_2, \nabla\eta_2),$$

что эквивалентно следующему неравенству

$$\mu_1\|\lambda\|_2^2 \le -(\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\eta_1) + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\eta_2) = -(\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\eta) - (\lambda\varphi, \nabla\eta_1). \tag{47}$$

Используя (8), (38) и (46), из (47) приходим к соотношению

$$\mu_1\|\lambda\|_2^2 \le M_*\|\lambda\|_2^2, \; M_* = \frac{1}{\lambda_*^2}\mu_0\gamma_0^2\gamma_3 M_\varphi^0(3\gamma_3 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q),$$

которое перепишем в виде

$$(\mu_1 - M_*)\|\lambda\|_2^2 \le 0. \tag{48}$$

Предположим, что выполняется условие

$$\mu_1 \ge M_* = \frac{1}{\lambda_*^2}\mu_0\gamma_0^2\gamma_3 M_\varphi^0(3\gamma_3 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q). \tag{49}$$

Тогда из (48) вытекает, что $\lambda = 0$, а из (41) получаем, что $\|\varphi\|_1 = 0$. Это означает единственность решения задачи (17). Тем самым доказана

Лемма 4. *Пусть в дополнение к условиям (i),(iii) $\varphi_d \in L^2(Q)$ – задана функция, $\mu_0 > 0$, $K \subset \Lambda$ – непустое выпуклое замкнутое множество и пусть выполняются условие (49). Тогда решение $(\varphi,\lambda) \in H^1(\Omega)\times K$ задачи (17) единственно.*

5. Численный алгоритм решения задачи идентификации на основе метода Ньютона. Результаты численных экспериментов.

В дополнение к условиям (i)-(iii) будем считать, что экстремум достигается во внутренней точке множества K. В этом случае неравенство (36) системы оптимальности переходят в равенство. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\kappa\varphi, h) = (f, h) \;\; \forall h \in T, \; \varphi|_\Gamma = \psi,$$

$$(\lambda\nabla\tau, \nabla\eta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \eta) + (\kappa\tau, \eta) = -\mu_0(\varphi - \varphi_d, \tau) \;\; \forall\tau \in H^1(\Omega), \; \eta|_\Gamma = 0, \tag{50}$$

$$(\mu_2\lambda, p)_2 + (\nabla\varphi\cdot\nabla\eta, p) = 0 \; \forall p \in H^2(\Omega).$$

Перепишем систему (50) в виде операторного уравнения

$$\Psi(\varphi,\eta,\lambda) = 0, \tag{51}$$

где оператор $\Psi : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times K \to \mathbb{R}^3$ определяется соотношениями (50).

Для решения уравнения (50) применим итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона для решения нелинейных уравнений. Он состоит из следующих этапов:

(1) Полагаем $n = 0$. Выбираем некоторое начальное приближение $\varphi_n, \eta_n, \lambda_n$.
(2) Вычисляем $(\bar{\varphi}, \bar{\eta}, \bar{\lambda})$ как решение уравнения

$$\Psi'(\varphi_n, \eta_n, \lambda_n)[\bar{\varphi}, \bar{\eta}\,\bar{\lambda}] = -\Psi(\varphi_n, \eta_n, \lambda_n). \tag{52}$$

(3) Пересчитываем значения искомых величин по формулам

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \bar{\varphi},\ \eta_{n+1} = \eta_n + \bar{\eta},\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \bar{\lambda}. \tag{53}$$

(4) Проверяем условия выхода из цикла. Если условия не выполняются, то полагаем $n = n + 1$ и переходим к этапу 2.

Обсудим результаты численных экспериментов, полученные в результате решения рассматриваемой задачи идентификации в модельных случаях. Программная реализация осуществлялась на персональном компьютере PIV-2200 с использованием среды инженерных и научных расчетов *FreeFem++*.

Согласно концепции квазиреального эксперимента сначала численно решалась прямая задача, при заданных функциях f, ψ и заданном коэффициенте $\lambda = \lambda_d$. В результате расчетов определялись значения $\varphi_d(x, y)$ решения прямой задачи. Затем решалась задача восстановления коэффициента λ уравнения (1), в которой в качестве дополнительной информации о решении в подобласти $Q_d \subset \Omega$ использовалась функция φ_d.

В соответствии с описанным алгоритмом выбиралось начальное приближение λ_0, затем на каждом итерационном шаге находилось решение φ_n краевой задачи (1) путем решения соответствующей задачи (10) при заданном приближении λ_{n-1}. Далее на этом же итерационном шаге решалась сопряженная задача (35) с использованием найденных значений решения φ_n прямой задачи, этого же приближения λ_{n-1} и значений заданной функции φ_d. Далее, в соответствии с этапами предложенных алгоритмов находилось новое приближение λ_n для λ. Затем осуществлялся переход на новый итерационный шаг либо происходил выход из итерационного цикла. В последнем случае за решение принималась пара (φ_n, λ_n), вычисленная на последнем итерационном шаге.

При проведении расчетов удобно перейти в исходной и сопряженной краевой задачах к безразмерным переменным с помощью соотношений

$$\tilde{x} = \frac{x}{l},\ \tilde{y} = \frac{y}{l},\ \tilde{u} = \frac{u}{U},\ \tilde{v} = \frac{v}{U},\ \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\Phi},\ \tilde{\kappa} = \frac{l^2\kappa}{\lambda_{min}},\ \tilde{f} = \frac{l^2 f}{\Phi\lambda_{min}},\ \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{min}}.$$

Здесь λ_{min} – минимальное значение, которое принимает коэффициент диффузии, U – характерный размер скорости течения, Φ – характерное значение концентрации, $\tilde{\kappa}$ – безразмерная функция, имеющая смысл безразмерной скорости объемной химической реакции первого порядка, $\tilde{\lambda}$ – безразмерная функция, являющаяся коэффициентом диффузии. Подставляя их в уравнения (1), (35) и отбрасывая для простоты знак волны "˜", приходим к следующим уравнениям:

$$-\mathrm{div}(\lambda\nabla\varphi) + \mathrm{Pe}\ \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + \kappa\varphi = f,$$

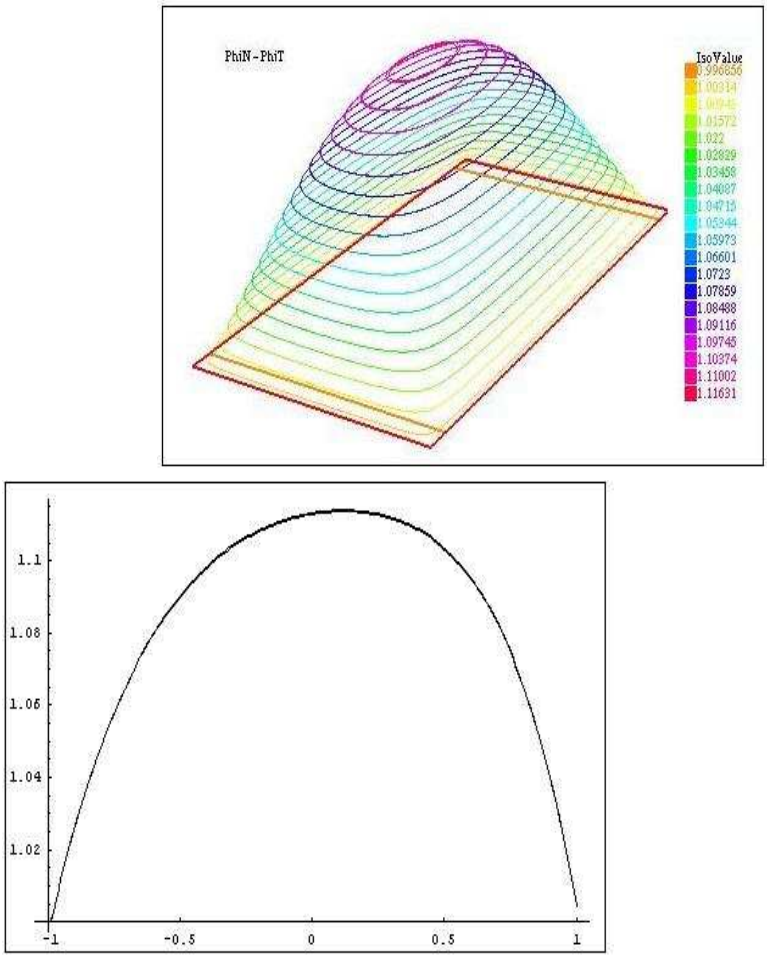
$$-\mathrm{div}(\lambda\nabla\eta) - \mathrm{Pe}\ \mathbf{u}\cdot\nabla\eta + \kappa\eta = -\mu_0\chi_Q(\varphi - \varphi_d).$$

Здесь число $\mathrm{Pe} = lU/\lambda_{min}$ является безразмерным параметром, который характеризует меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости

вещества к диффузионному переносу. В качестве значений исходных данных были выберы следующие:

$$\mathbf{u} = (0.1; 0.02),\ f(x,y) = cos(x) + cos(y),\ (x,y) \in \Omega,\ \mathrm{Pe} = 10.$$

В качестве области Ω был выбран прямоугольник $[-1,1] \times [0,1]$, подобласть Q либо совпадала со всей областью Ω, либо выбиралась как прямоугольник $[-l,l] \times [0,1]$ для заданного $l \in (0,1)$. Начальное приближение $\lambda_0 = 14$ выбиралось для первого теста и $\lambda_0 = 12$ – для второго теста.



а) значения функций φ_n и φ_d б) сечение функций φ_n и φ_d плоскостью $y = 0.5$

Рис. 1. *Примеры восстановления функций φ_n и φ_d для теста 2 при* $n = 4$.

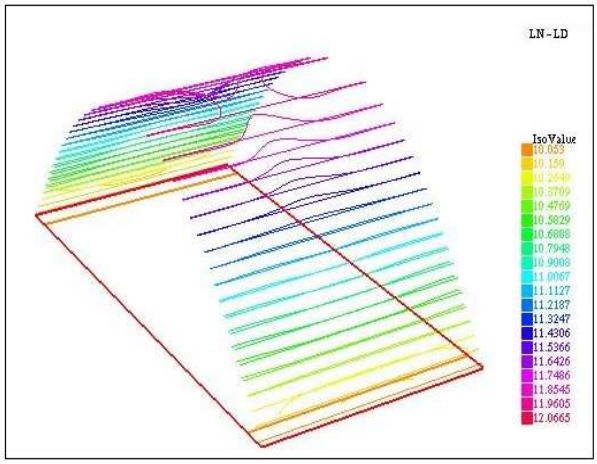
Был проведен ряд вычислительных экспериментов по идентификации старшего коэффициентов уравнения в (1), в которых искомый коэффициент являлся постоянной величиной, функцией, зависящей от одной переменной x или y, а также функцией, зависящей от двух переменнных x и y. Ниже мы представим результаты и анализ вычислительных экспериментов по восстановлению искомого параметра λ для тестов, в которых точное значение восстанавливаемого

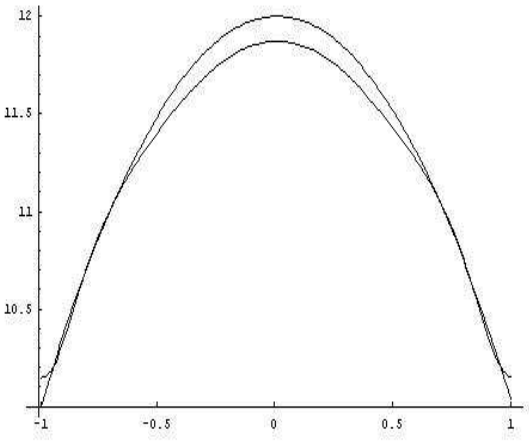
параметра λ определялось соответственно формулами

$$\lambda_T^{(1)}(x,y) = 10, \quad \lambda_T^{(2)}(x,y) = 10 + 2(x-1)(x+1).$$

Точность решения задачи определялась при помощи относительных погрешностей

$$E_1 = \frac{\|\varphi - \varphi_d\|_Q}{\|\varphi_d\|_Q} \text{ и } E_2 = \frac{\|\lambda - \lambda_d\|}{\|\lambda_d\|}.$$





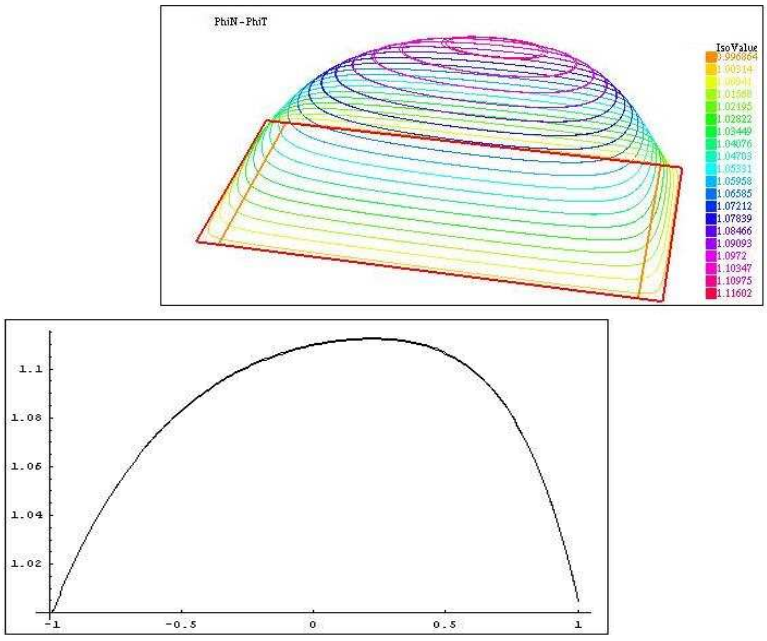
а) значения функций λ_n и λ_T б) сечение функций λ_n и λ_T плоскостью $y = 0.5$

Рис. 2. *Примеры восстановления λ_n и λ_T для теста 2 при $n = 4$.*

В качестве критерия остановки использовалось одно из следующих условий:

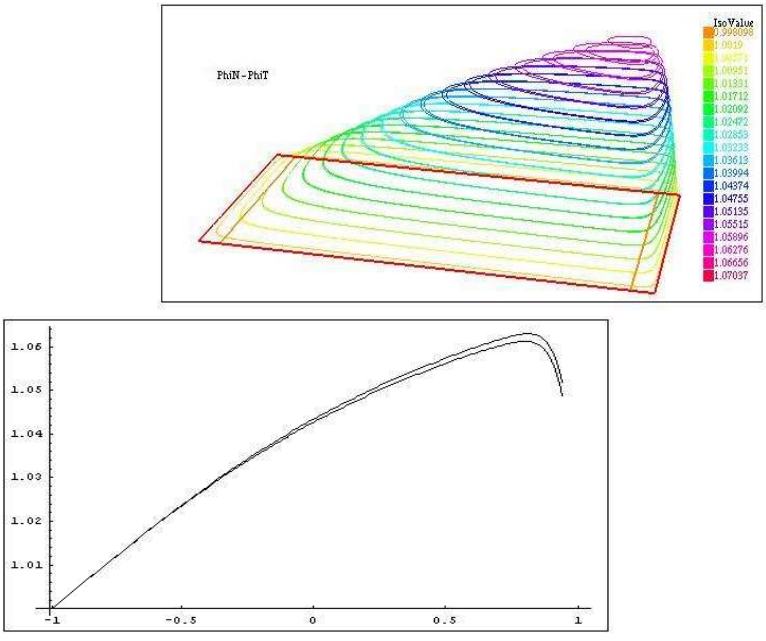
$$|E_1| < 10^{-10},\ |(E_1)_n - (E_1)_{n-1}| < 10^{-12},\ |E_1| > 10^5.$$

Применение алгоритмов, основанных на методе Ньютона, позволяет получить приближенное решение с достаточно высокой точностью, но при условии, что начальное приближение выбрано достаточно близко к точному решению. На рис. 1 и 2 представлены примеры восстановления функций φ и λ. для теста 2. В качестве начального приближения λ_0 в этом случае было выбрано число 12. Заданная точность было достигнута за 4 итерации.



а) значения функций φ_n и φ_d б) сечение функций φ_n и φ_d плоскостью $y = 0.5$

Рис. 3. *Примеры восстановления функций φ_n и φ_d для теста 2 при $n = 5$.*



а) значения функций φ_n и φ_d б) сечение функций φ_n и φ_d плоскостью $y = 0.5$

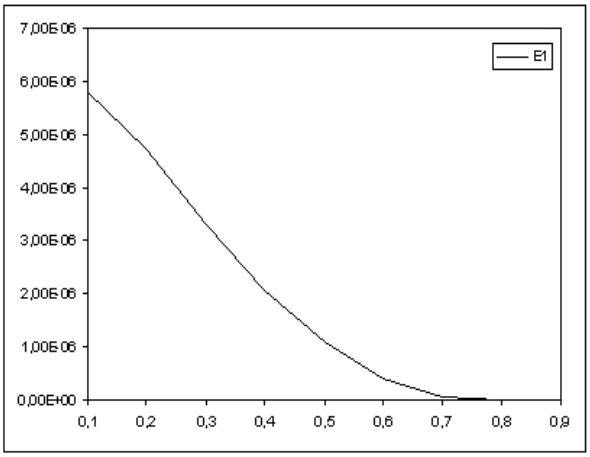
Рис. 4. *Примеры восстановления функций φ_n и φ_d для теста 2 при $n = 7$.*

На рис. 1.а представлен трехмерный график для функций φ_n и φ_d. Видно, что графики этих функций практически совпадают. На рисунке 1.б показан график сечения данных функций плосткостью $y = 0.5$. Опять замечаем, что

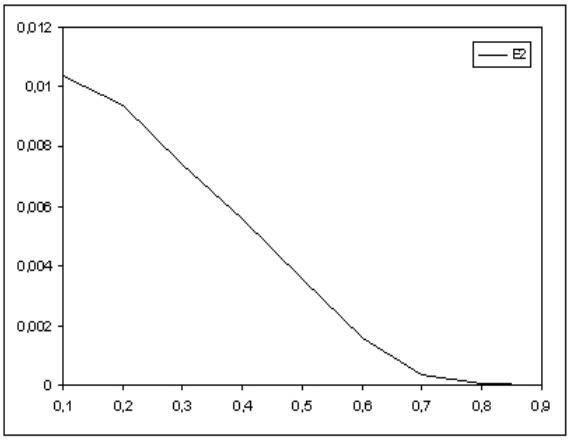
графики функций совадают. На рис. 2 показаны аналогичные графики для функций λ_n и λ_T.

На рис. 3 и 4 представлены примеры восстановления искомых функций при различных значениях числа Пекле. На рис.3 изображен график для значение данного пааметра $Pe = 10$, в то время как на рис.4 аналогичный график для $Pe = 100$. Указанные графики подтверждают, что для б*о*льшего значения числа Пекле увеличивается влияние конвективного слагаемого исходного уравнения.

Большое влияние на точность решения оказывает размер подобласти Q_d. На рис. 5 показаны зависимости относительнх погрешностей от значений параметра l для второго теста. Ясно, что больше информации о решении мы используем для восстановления, тем лучшую точность мы можем получить. В случае, когда подобласть Q_d занимает только 10% области Ω, качественно восстановить значения искомой функции не удается. Если же подобласть Q_d занимает 90% области, то точность практически такая же, как в случае совпадения Q_d со всей Ω.

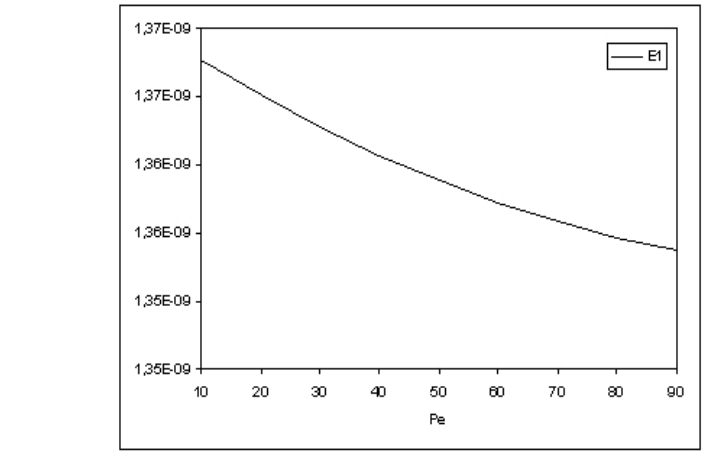


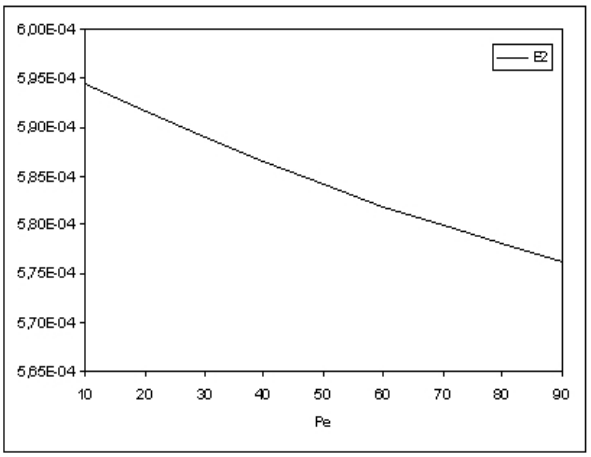
а) E_1



б) E_2

Рис. 5. *Зависимость относительной погрешности от размеров подобласти* Q_d.





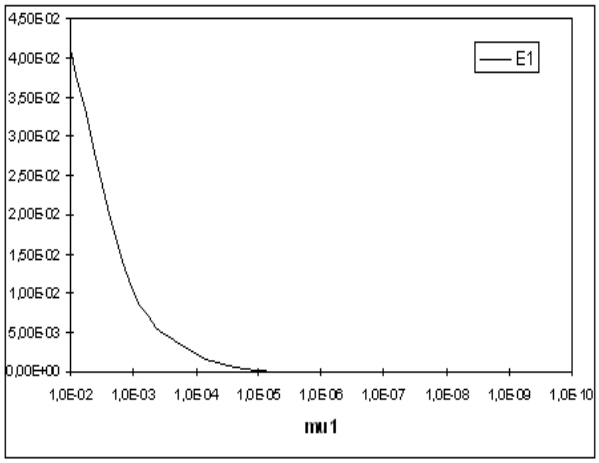
а) E_1

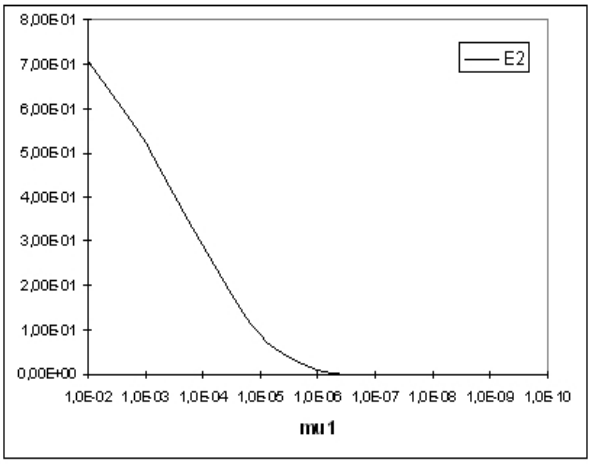
б) E_2

Рис. 6. *Зависимость относительной погрешности от параметра Pe.*

На рис. 6 проиллюстрирована зависимость относительных погрешностей от параметра Pe на примере второго теста. На рис. 6.а показан график относительной погрешности E_1 , а на рис. 6.б – график для относительной погрешности E_2. Из графика видно, что увеличение параметра Pe приводит к некоторому улучшению точности.

Изменение же параметра μ_1 оказывает куда более существенное влияние на точность восстановления. С уменьшением значения параметра μ_1 просходит улучшение точности восстановления. Уменьшается как относительная погрешность E_1 , так и относительная погрешность E_2.





а) E_1 б) E_2

Рис. 7. *Зависимость относительной погрешности от параметра* μ_1 .

Из рис. 7 видно, что для получения достаточно высокой точности следует использовать значения параметра μ_1, не больше 0.01. Также не следует использовать слишком маленькие ($< 10^{-10}$) значения данного параметра. В этом случае алгоритм расходится и восстановить значения функций не удается.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-2810.2008.1, РФФИ-"Дальний Восток" (проект 09-01-98518-р_восток_а), и гранта Дальневосточного отделения РАН (проект 09-I-П29-01).

Список литературы

[1] Г.В. Алексеев, *Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса*, Сиб. мат. журн., **42**:5 (2001), 971–991.

[2] C.V. Alekseev, E.A. Adomavichus, *Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **9**:5 (2001), 435–468.

[3] Г.В. Алексеев, *Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса*, Ж. выч. матем. и мат. физ., **42**:3 (2001), 380–394.

[4] Г.В. Алексеев, *Единственность и устойчивость в коэффициентных обратных экстремальных задачах для стационарной модели массопереноса*, Докл. АН, **416**:6 (2007), 750–753.
[5] Г.В. Алексеев, *Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса*, Журн. вычисл. матем. матем. физики, **47**:6 (2007), 1055–1076.
[6] Г.В. Алексеев, О.В. Соболева, Д.А. Терешко, *Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса*, Прикл. мех. техн. физ., **49**:4 (2008), 24–35.
[7] Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко, *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости*, Владивосток: Дальнаука, 2008.
[8] Runsheng Yang, Yunhua Ou, *Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations*, ANZIAM J., **49**:2 (2007), 271–279.
[9] Guy Chavent, Karl Kunisch, *The output least squares identifiability of the duffusion coefficient from an H^1-observation in a 2-D elliptic equation*, ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, **8** (2002), 423–440.
[10] B. Aksoylu, H.R. Beyer, *Results on the diffusion equation with rough coefficients*, SIAM J. Math. Anal., 2008.
[11] Li Gongsheng, Yao De, Yang Fugui, *An inverse problem of identifying source coefficient in solute transportation*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **16** (2008), 51–63.
[12] I. Dimov, P. Lalov, *Direct and inverse problems for the linear convective duffusion equation govering migration of the ground water pollution*, ANNUAL of the University of Mining and Geology, **48**, Part III, 2005.
[13] K. Ito, K. Kunisch, *Estimation of the convection coefficient in elliptic equations*, Inverse Problems, **14** (1997), 995–1013.
[14] Г.В. Алексеев, Е.А. Калинина, *Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции*, Сиб. журн. индустр. матем., **11**:1 (2007), 3–16.
[15] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, М.: Наука, 1974.

Илья Сергеевич Вахитов
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7,
690041, г. Владивосток, Россия
E-mail address: iv7180@gmail.com

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.307–С.321 (2010)

УДК 519.633
MSC 65M06

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДА В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СКВАЖИНЕ

В.Г. РОМАНОВ, С.И. КАБАНИХИН, М.А. ШИШЛЕНИН

Abstract. We investigate mathematical model of subnanosecond electromagnetic probe in axially symmetrical borehole. We apply finite-difference method for numerical solution. Numerical results are presented and discussed.

Keywords: Maxwell equations, nanosecond probe, numerical methods.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследована математическая модель субнаносекундного электромагнитного зонда в осесимметричной скважине (рис. 1).

Проведен математический анализ модели, включающий в себя источник, антенну, условия склейки на границах раздела сред. Для компонент поля в цилиндрической системе координат получены уравнения второго порядка, условия склейки, формулы пересчета для компонент электромагнитного поля.

Romanov, V.G., Kabanikhin S.I. and Shishlenin M.A., Investigation of mathematical model of electromagnetic probe in axially symmetrical borehole.

© 2010 Романов В.Г., Кабанихин С.И., Шишленин М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08-01-00312, интеграционного проекта СО РАН "Теоретические основы принципиально новой технологии зондирования в нефтегазовых скважинах с использованием субнаносекундных электромагнитных импульсов" и Федеральной Целевой Программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

Поступила 10 февраля 2010 г.

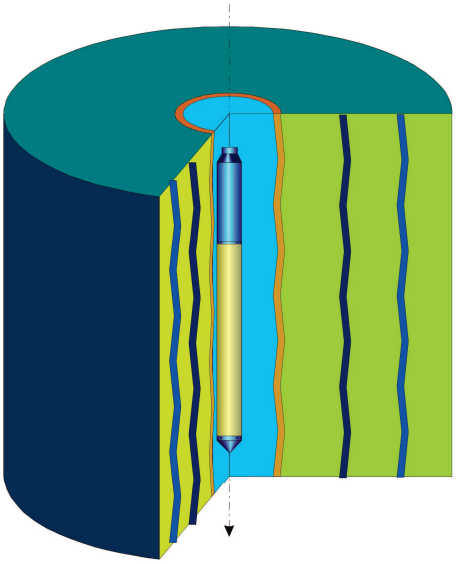


Рис. 1. Осесимметричная модель

Разработан конечно-разностный алгоритм определения компонент электромагнитного поля в цилиндрической системе координат. Проведен цикл расчетов по исследованию численной устойчивости алгоритма, по проверке соответствия результатов математического моделирования физическим представлениям о распространении электромагнитных волн в субнаносекундном диапазоне. Построен, исследован и протестирован алгоритм численного решения прямой задачи, основанный на методе конечных разностей. Была проведена серия тестовых расчетов, подтвердившая численную устойчивость алгоритма (расчеты проводились для разных шагов дискретизации, а результаты расчетов сравнивались в контрольных точках). Был проведен физический анализ результатов расчетов, показавший соответствие рассчитанного электромагнитного поля основным физическим характеристикам (время прихода возмущения в заданную точку, отражения от границ раздела и т.п.).

Проведены тестовые расчеты по исследованию чувствительности электромагнитного поля по отношению к изменениям параметров вмещающей среды и зоны проникновения. Показано, что возрастание диэлектрической проницаемости приводит к монотонному изменению амплитуды отраженного сигнала, что позволяет наметить способ определения диэлектрической проницаемости по амплитуде отраженного сигнала.

2. Уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат

Запишем систему уравнений Максвелла [1]:

$$\varepsilon \mathbf{E}_t + \sigma \mathbf{E} + j = \mathrm{rot}\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$-\mu \mathbf{H}_t = \mathrm{rot}\mathbf{E} \tag{2}$$

в цилиндрической системе координат. Здесь $\varepsilon = \varepsilon_a \varepsilon_0$, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_a = 8.854187817 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, магнитная постоянная $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2.

Введем систему координат равенствами $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$ и соответствующие компоненты векторов электрической и магнитной напряженности

$$E_r = E_1\cos\varphi + E_2\sin\varphi, \quad E_\varphi = -E_1\sin\varphi + E_2\cos\varphi, \quad E_z = E_3,$$
$$H_r = H_1\cos\varphi + H_2\sin\varphi, \quad H_\varphi = -H_1\sin\varphi + H_2\cos\varphi, \quad H_z = H_3.$$

При этом

$$E_1 = E_r\cos\varphi - E_\varphi\sin\varphi, \quad E_2 = E_r\sin\varphi + E_\varphi\cos\varphi, \quad E_3 = E_z,$$
$$H_1 = H_r\cos\varphi - H_\varphi\sin\varphi, \quad H_2 = H_r\sin\varphi + H_\varphi\cos\varphi, \quad H_3 = H_z.$$

Обозначим

$$j_r = j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi, \quad j_\varphi = -j_1\sin\varphi + j_2\cos\varphi, \quad j_z = j_3.$$

Выведем уравнения для компонент поля в цилиндрической системе. Воспользуемся вначале векторным уравнением (1). Умножая первую компоненту этого равенства на $\cos\varphi$, а вторую на $\sin\varphi$, находим, что

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r + j_r &= \Big(\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}\Big)\cos\varphi + \Big(\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1}\Big)\sin\varphi = \\ &= \Big(\frac{\partial H_z}{\partial x_2}\cos\varphi - \frac{\partial H_z}{\partial x_1}\sin\varphi\Big) + \Big(\frac{\partial H_1}{\partial z}\sin\varphi - \frac{\partial H_2}{\partial z}\cos\varphi\Big) = \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Аналогично, умножая первую компоненту этого равенства на $-\sin\varphi$, а вторую на $\cos\varphi$, находим, что

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma E_\varphi + j_\varphi &= -\Big(\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}\Big)\sin\varphi + \Big(\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1}\Big)\cos\varphi \\ &= \Big(\frac{\partial H_1}{\partial z}\cos\varphi + \frac{\partial H_2}{\partial z}\sin\varphi\Big) - \Big(\frac{\partial H_z}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial H_z}{\partial x_2}\sin\varphi\Big) \\ &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}.\end{aligned}$$

Преобразуем теперь третью компоненту равенства (1) следующим образом

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + j_z &= \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(H_r\sin\varphi + H_\varphi\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_2}(H_r\cos\varphi - H_\varphi\sin\varphi) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(H_r\sin\varphi + H_\varphi\cos\varphi)\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}(H_r\sin\varphi + H_\varphi\cos\varphi)\Big(-\frac{\sin\varphi}{r}\Big) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}(H_r\cos\varphi - H_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi}(H_r\cos\varphi - H_\varphi\sin\varphi)\Big(\frac{\cos\varphi}{r}\Big) = \\ &= \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

Вторая серия формул, использующая равенство (2), совершенно симметрична первой. В итоге, система уравнений Максвелла в цилиндрической системе

координат имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t}+\sigma E_r+j_r=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},\\
&\varepsilon\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}+\sigma E_\varphi+j_\varphi=\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r},\\
&\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}+\sigma E_z+j_z=\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\Big),\\
&-\mu\frac{\partial H_r}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z},\\
&-\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r},\\
&-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\Big(\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\Big).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Полагаем, что $\mathbf{H}|_{t<0}=0$, $\mathbf{E}|_{t<0}=0$.

Если решение системы не зависит от φ, то система распадается на две независимых подсистемы

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t}+\sigma E_r+j_r=-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},\\
&\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}+\sigma E_z+j_z=\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r},\\
&-\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}+\sigma E_\varphi+j_\varphi=\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r},\\
&-\mu\frac{\partial H_r}{\partial t}=-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z},\\
&-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

В дальнейшем полагаем $j_r=0$ и рассматриваем только систему (4) в предположении, что в рассматриваемой области параметры среды постоянны. Компонента H_φ удовлетворяет уравнениям

$$
\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}+\frac{\partial j_z}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2},
\tag{6}
$$

$$
H_\varphi|_{t<0}=0.
\tag{7}
$$

Остальные компоненты системы (4) находятся интегрированием по t. Подходящие для этого формулы имеют вид

$$
\varepsilon\frac{(\partial E_r\mathrm{e}^{\sigma_0 t})}{\partial t}=-\mathrm{e}^{\sigma_0 t}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},
\tag{8}
$$

$$
\varepsilon\frac{\partial(E_z\mathrm{e}^{\sigma_0 t})}{\partial t}+j_z\mathrm{e}^{\sigma_0 t}=\mathrm{e}^{\sigma_0 t}\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r},
\tag{9}
$$

в которых $\sigma_0 = \sigma/\varepsilon$. Отсюда находим

$$E_r(r,z,t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\sigma_0(\tau-t)}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}d\tau, \tag{10}$$

$$E_z(r,z,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\sigma_0(\tau-t)}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - j_z\Big)d\tau. \tag{11}$$

В предположении, что носитель j_z локализован внутри первого цилиндрического слоя, для функции H_φ имеем нелокальные по времени граничные условия

$$[H_\varphi]_{r=r_k} = 0, \quad \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\sigma_0(\tau-t)}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\Big)d\tau\right]_{r=r_k} = 0, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

которые выражают непрерывность компонент поля H_φ и E_z при переходе через границы разрывов коэффициентов ε и σ. Кроме того, при $r = 0$ имеем условие $H_\varphi|_{r=0} = 0$, которое удобно использовать при численном решении уравнения (8). Доказательство последнего факта проводится использованием преобразования Фурье по переменным z и t (см. пункт 2.1), а также следует из соображений гладкости функций H_1, H_2 при $r = 0$. Если $H_\varphi|_{r=0} \neq 0$, то H_1, H_2 не будут непрерывными функциями x_1, x_2 в окрестности точки $r = 0$, а будут иметь разные пределы по лучам $\varphi = \mathrm{const}$.

Для малых цилиндров, размещенных на оси скважины $D_k = \{(r,z)|\, r \in [0,r_0], z \in [a_k,b_k]\}$, $k = 1,2$, граничные условия имеют вид

$$[H_\varphi]_{r=r_0} = 0, \quad \Big[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\sigma_0(\tau-t)}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\Big)d\tau\Big]_{r=r_0} = 0, \quad z \in [a_k,b_k], \tag{13}$$

$$[H_\varphi]_{z=a_k} = 0, \quad \Big[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\sigma_0(\tau-t)}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}d\tau\Big]_{z=a_k} = 0, \quad 0 \le r \le r_0, \quad k = 1,2, \tag{14}$$

$$[H_\varphi]_{z=b_k} = 0, \quad \Big[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\sigma_0(\tau-t)}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}d\tau\Big]_{z=b_k} = 0, \quad 0 \le r \le r_0, \quad k = 1,2. \tag{15}$$

2.1. **Вывод граничных условий.** Преобразование Фурье системы (4) по переменным t и z приводит к равенствам

$$(i\varepsilon\omega + \sigma)\tilde{E}_r = -\mathrm{i}\lambda\tilde{H}_\varphi,$$

$$(i\varepsilon\omega + \sigma)\tilde{E}_z + \tilde{j}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r},$$

$$-\mathrm{i}\mu\omega\tilde{H}_\varphi = \mathrm{i}\lambda\tilde{E}_r - \frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial r}.$$

Отсюда

$$\tilde{E}_r = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{\mathrm{i}\varepsilon\omega + \sigma}\tilde{H}_\varphi, \quad \tilde{E}_z = \frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon\omega + \sigma}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r} - \tilde{j}_z\Big). \tag{16}$$

Функция $\tilde{H}_\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r}\Big) + (k^2 - \lambda^2)\tilde{H}_\varphi = \frac{\partial \tilde{j}_z}{\partial r}, \tag{17}$$

где $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \mathrm{i}\mu\sigma\omega$, и соотношениям

$$[\tilde{H}_\varphi]_{r=r_k} = 0, \quad \Big[\frac{1}{i\varepsilon\omega + \sigma}\frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r}\Big]_{r=r_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что уравнение (17) является неоднородным уравнением Бесселя. Любое его ограниченное решение выражается через функции Бесселя первого порядка от аргумента $\sqrt{k^2 - \lambda^2}r$ и поэтому $\tilde{H}_\varphi \to 0$ при $r \to 0$. Отсюда следует, что $H_\varphi \to 0$ при $r \to 0$. Из формул (16) следует также, что $\tilde{E}_r \to 0$ при $r \to 0$ и $E_r \to 0$ при $r \to 0$.

3. Численное решение задачи в цилиндрической системе координат

Рассмотрим следующую задачу:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial j_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\Big) + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2}, \tag{18}$$

$$H_\varphi|_{t=0} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \qquad H_\varphi|_{r=0} = 0; \tag{20}$$

$$H_\varphi|_{z=l_z} = 0; \qquad H_\varphi|_{r=l_r} = 0. \tag{21}$$

Здесь размеры расчетной области $l_z = 3$ м. и $l_r = 3$ м.

Источник задается в виде стороннего тока

$$j_z(z, r, t) = \frac{\varepsilon_a}{2a}V'(t)\theta(a - |z|)\theta(a - r),$$

где форма импульса задается формулой

$$V(t) = \mathrm{e}^{-\frac{(t-t_0)^2}{t_1^2}}.$$

Здесь $a = 0.025$ м – радиус источника, $t_1 = 0.5$ нс, $t_0 = 4t_1$.

Таким образом

$$g(z, r, t) := \frac{\partial j_z}{\partial r} = -\frac{\varepsilon_a}{2a}V'(t)\theta(a - |z|)\delta(a - r).$$

Рассмотрим конечно-разностную постановку задачи (18)–(21). Пусть N_z – число разбиений по оси z, N_r – число разбиений по оси r. Обозначим шаг сетки $h_z = l_z/N_z$, $h_r = l_r/N_r$, а шаг по времени h_t выбирается в зависимости от числа Куранта.

Введем сеточные функции $u_{ij}^k = H_\varphi(ih_z, jh_r, kh_t)$. Тогда

$$\varepsilon_{ij}\mu\frac{u_{ij}^{k+1}-2u_{ij}^k+u_{ij}^{k-1}}{h_t^2}+\sigma_{ij}\mu\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k-1}}{2h_t}+g_{ij}^k=$$

$$=\frac{u_{i+1j}^k-2u_{ij}^k+u_{i-1j}^k}{h_z^2}+\frac{u_{ij+1}^k-2u_{ij}^k+u_{ij-1}^k}{h_r^2}+\frac{1}{jh_r}\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij-1}^k}{2h_r}-\frac{u_{ij}^k}{(jh_r)^2},$$

$$i=\overline{1,N_z-1},\ j=\overline{1,N_r-1},\ k=\overline{1,N_t};$$

$$u_{ij}^0=0,\quad u_{ij}^1=0,\qquad i=\overline{0,N_z},\ j=\overline{0,N_r};$$

$$u_{i0}^k=0,\qquad i=\overline{0,N_z},\ k=\overline{0,N_t};$$

$$u_{1j}^k=u_{0j}^k+\frac{h_z^2}{2}\left[\varepsilon_{0j}\mu\frac{u_{0j}^{k+1}-2u_{0j}^k+u_{0j}^{k-1}}{h_t^2}+\sigma_{0j}\mu\frac{u_{0j}^{k+1}-u_{0j}^{k-1}}{2h_t}+g_{0j}^k-\right.$$

$$\left.-\frac{u_{0j+1}^k-2u_{0j}^k+u_{0j-1}^k}{h_r^2}-\frac{1}{jh_r}\frac{u_{0j+1}^k-u_{0j-1}^k}{2h_r}+\frac{u_{0j}^k}{(jh_r)^2}\right],$$

$$j=\overline{1,N_r-1},\ k=\overline{1,N_t};$$

$$u_{N_zj}^k=0,\qquad j=\overline{0,N_r},\ k=\overline{0,N_t};$$

$$u_{iN_r}^k=0\qquad i=\overline{0,N_z},\ k=\overline{0,N_t}.$$

3.1. **Однородное поле.** Значение H_φ при $z=0.8$ и при $z=1.5$ м измерялось при $r=a$, где $a=0.025$ м радиус источника.

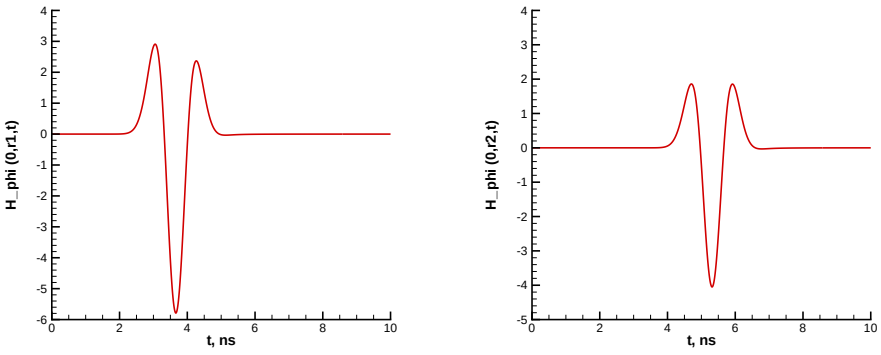


Рис. 2. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

На рисунках 2–13 время наблюдения $t=10$ нс. На рисунках 14–15 время наблюдения $t=15$ нс. Параметры для каждого рисунка приведены в таблице.

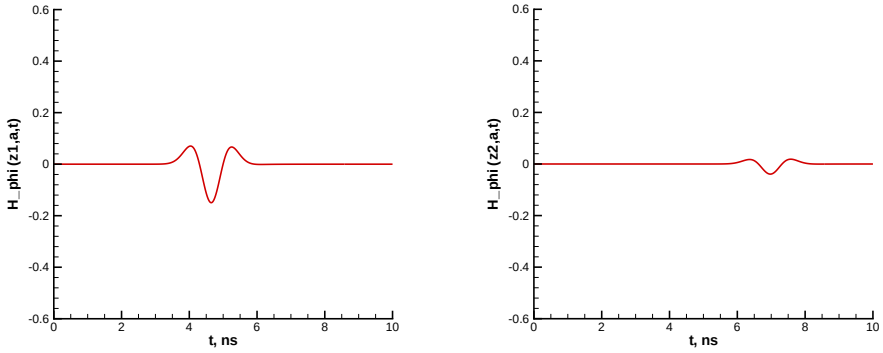


Рис. 3. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

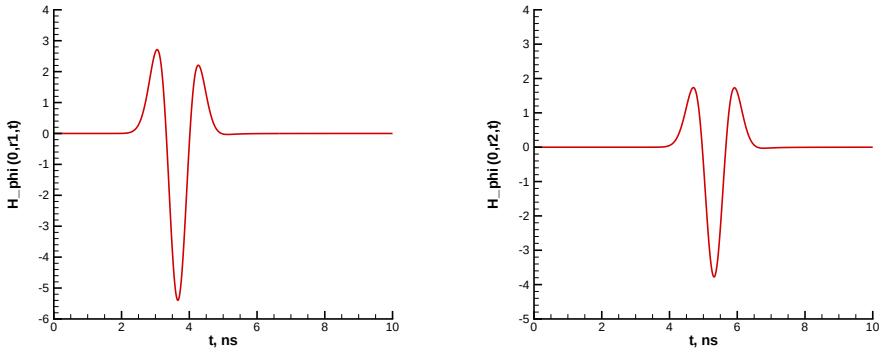


Рис. 4. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

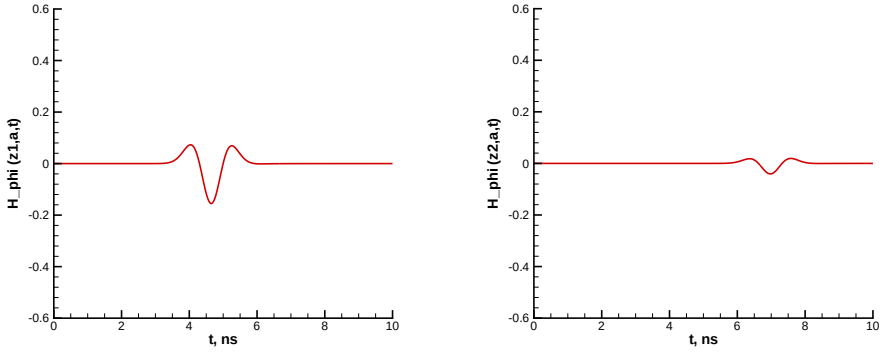


Рис. 5. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

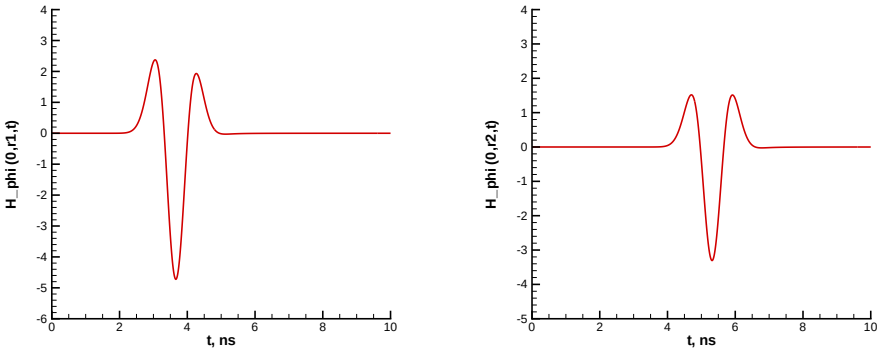


Рис. 6. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

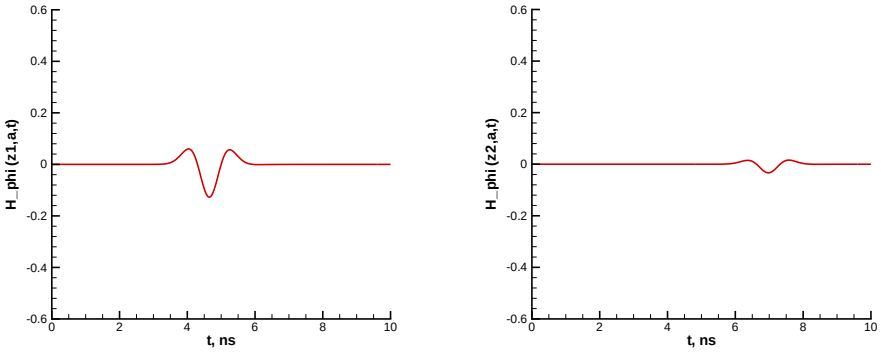


Рис. 7. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

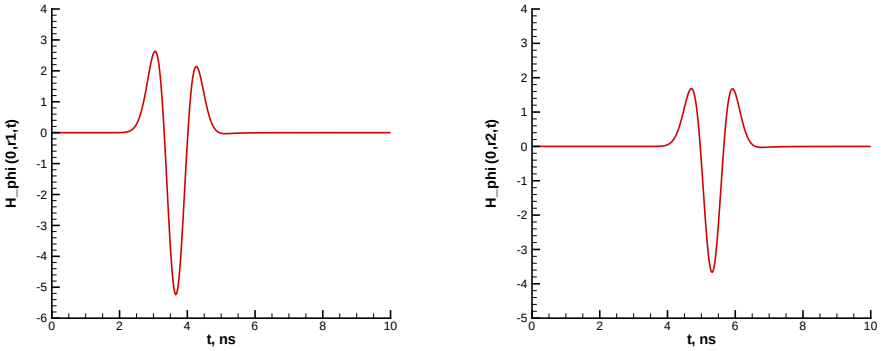


Рис. 8. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

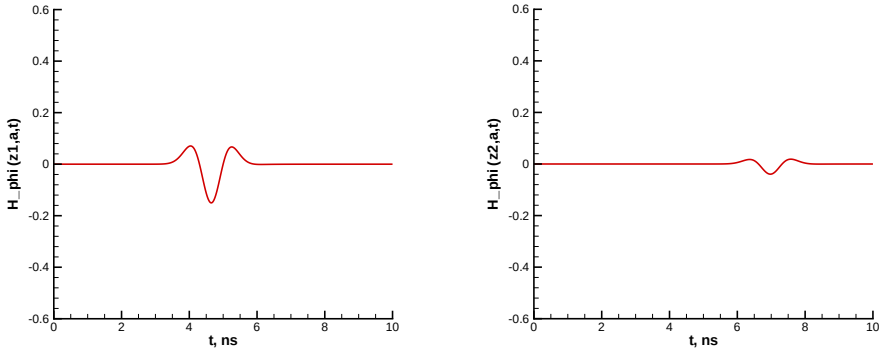


Рис. 9. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

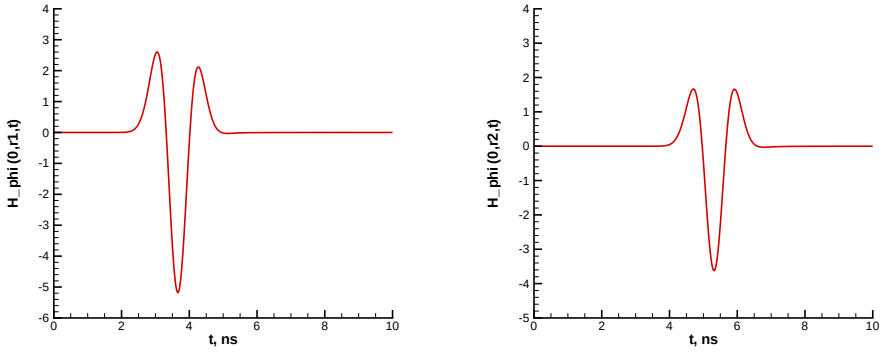


Рис. 10. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

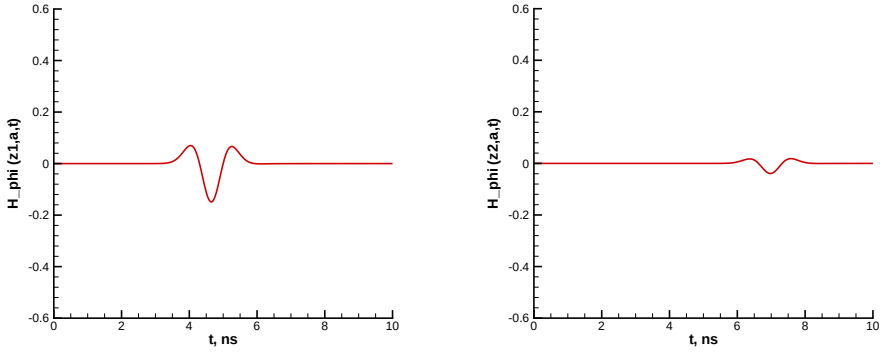


Рис. 11. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

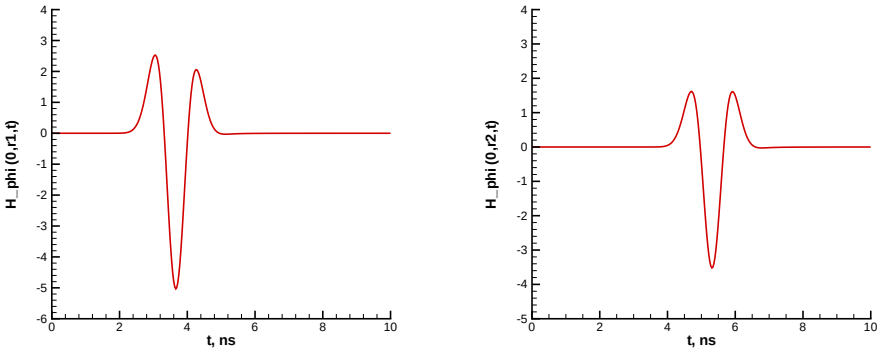


Рис. 12. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

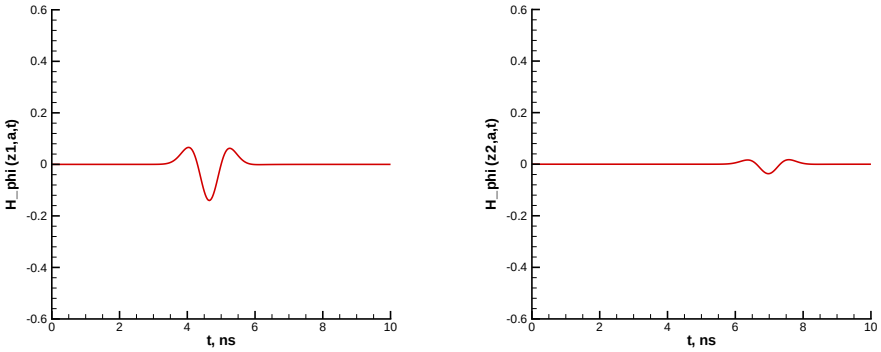


Рис. 13. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

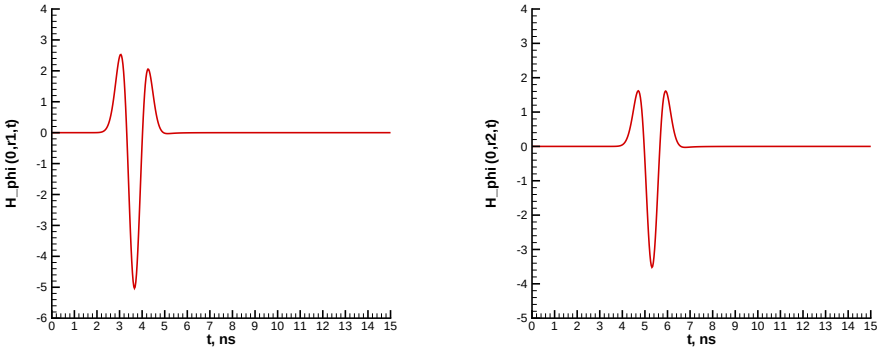


Рис. 14. $H_\varphi(0, 0.5\text{ м}, t)$, $H_\varphi(0, 1\text{ м}, t)$

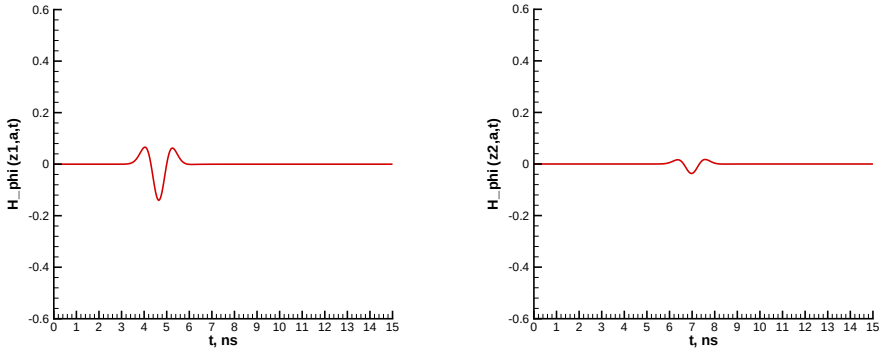


Рис. 15. $H_\varphi(0.8\text{ м}, a, t)$, $H_\varphi(1.5\text{ м}, a, t)$

Рисунки	h_z, м	h_r, м	h_t, нс	$\epsilon_{\text{отн}}$	σ	Время наблюдения, нс
2–3	0.0033	0.0033	0.0714	1	0	10
4–5	0.0025	0.0025	0.05537	1	0	10
6–7	0.002	0.002	0.03999	1	0	10
8–9	0.0025	0.001	0.02	1	0	10
10–11	0.002	0.00083	0.02	1	0	10
12–13	0.0025	0.0009	0.02498	1	0	10
14–15	0.0025	0.0009	0.02498	1	0	15

3.2. **Неоднородное поле. Одна граница,** $r_1 = 0.1$ **м. Отклик среды.** Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025$ м, $h_r = 0.00083$ м, $h_t = 0.004615$ нс.

Абсолютное значение в точке минимума = 2.831824

Рассмотрена среда со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases};$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases}.$$

Замечание. Рисунки для всех неоднородных полей выводились нормированными по максимальному абсолютному значению.

3.3. **Неоднородное поле. Одна граница,** $r_1 = 0.1$ **м. Отклик среды.** Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025$ м, $h_r = 0.00083$ м, $h_t = 0.004615$ нс.

Абсолютное значение в точке минимума = 2.819306

Рассмотрена среда со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases};$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.01, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases}.$$

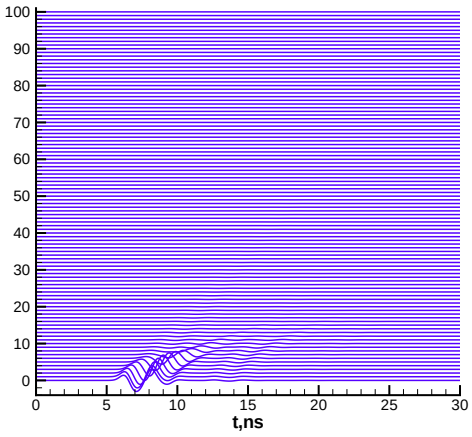


Рис. 16. Пример 3.2. Одна граница $r_1 = 0.1$ м. Аномальное поле. $H_{\varphi(2)}(z,a,t) - H_{\varphi(1)}(z,a,t)$

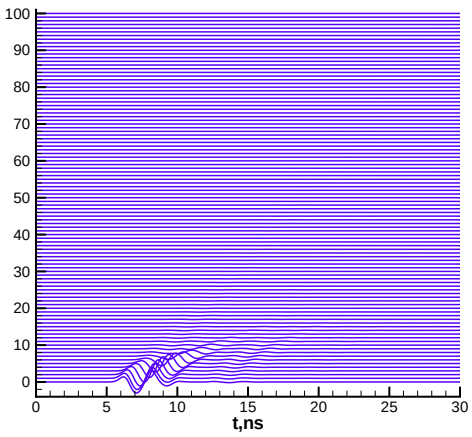


Рис. 17. Пример 3.3. Одна граница $r_1 = 0.1$ м. Аномальное поле. $H_{\varphi(2)}(z,a,t) - H_{\varphi(1)}(z,a,t)$

3.4. **Неоднородное поле. Одна граница,** $r_1 = 0.1$ **м. Отклик среды.** Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025$ м, $h_r = 0.00083$ м, $h_t = 0.004615$ нс.

Абсолютное значение в точке минимума $= 1.024501$

Рассмотрена среда со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 40, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases};$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.006, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases}.$$

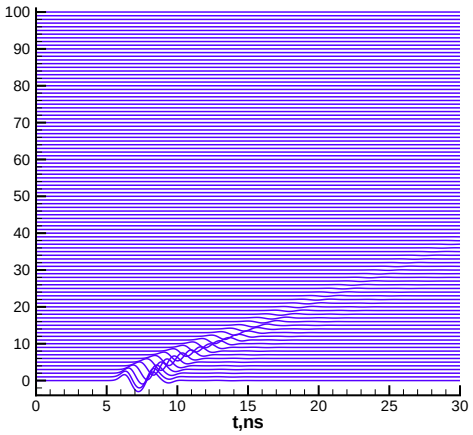


Рис. 18. Пример 3.4. Одна граница $r_1 = 0.1$ м. Аномальное поле. $H_{\varphi(2)}(z, a, t) - H_{\varphi(1)}(z, a, t)$

3.5. **Неоднородное поле. Одна граница, $r_1 = 0.1$ м. Отклик среды.** Время наблюдения 30 нс.

$h_z = 0.0025$ м, $h_r = 0.00083$ м, $h_t = 0.004615$ нс.

Абсолютное значение в точке минимума = 1.021403

Рассмотрена среда со следующими параметрами

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \varepsilon_2 = 5, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases};$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & z \in [0, 0.1] \text{ м} \\ \sigma_2 = 0.01, & z \in (0.1, 3] \text{ м} \end{cases}.$$

3.6. **Выводы.** Численные расчеты показали, что абсолютное значение максимума аномального поля зависит не только от ε при фиксированном σ, но и от σ при фиксированном ε.

3.7. **Время расчета.** Программа запускалась на рабочей станции с 4-х ядерным процессором Intel Quad Q8200 (2.33 GHz) и 8Gb оперативной памяти.

Время расчета для рисунков 8–9 составляет 2428 сек ($\approx$ 40 минут).

Время расчета для рисунков 10–11 составляет 4149 сек ($\approx$ 70 минут).

Время расчета для рисунков 14–15 составляет 2799 сек ($\approx$ 47 минут).

Время расчета для неоднородного поля с одной границей (рис. 16) составляет 7471 сек ($\approx$ 125 минут).

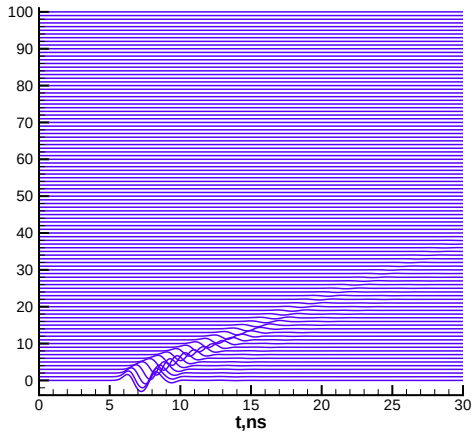


Рис. 19. Пример 3.5. Одна граница $r_1 = 0.1$ м. Аномальное поле. $H_{\varphi(2)}(z, a, t) - H_{\varphi(1)}(z, a, t)$

Список литературы

[1] В.Г. Романов, С.И. Кабанихин, *Обратные задачи геоэлектрики*, Мир, Москва, 1972.

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru

Сергей Игоревич Кабанихин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ksi52@mail.ru

Максим Александрович Шишленин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.322–С.342 (2010)

УДК 519.68
MSC 65J20

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Г.М. Курамшина

Abstract. Inverse vibrational problem is to find the molecular force field parameters on a base of experimental data (IR and Raman spectra, electron diffraction, etc.). It can be formulated as nonlinear ill-posed problem problem in the finite-dimensional spaces. New regularized numerical methods for solving inverse vibrational problem within the variety of physical models in different sets of generalized coordinates including Cartesian ones have been developed. Software package SPECTRUM have been created and applied for data processing and investigation of different molecules, the regularized force constants of nitrogen-containing molecules have been using for organizing a database on molecular parameters.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, regularization, inverse vibrational problem, force constants, Cartesian coordinates, database, nitrogen-containing compounds.

1. Введение

Колебательные спектры (ИК поглощения и комбинационного рассеяния), обладающие очень высокой специфичностью и являющиеся уникальной физической характеристикой вещества, широко используются для идентификации индивидуальных химических соединений и анализа сложных смесей веществ.

Kuramshina, G.M., Inverse vibrational problem.

© 2010 Курамшина Г.М.

Данная работа выполнена с финансовой поддержкой грантов РФФИ 08-03-00415а, и № 08-01-97028-р_поволжье.

Любой физический структурный эксперимент, к которому относится и колебательная спектроскопия, т.е., его ход, цели и результаты можно представить общей схемой, показанной на рис. 1.

Сначала решается прямая экспериментальная задача физического метода, т.е. регистрируется проявление U (спектр или дифракционная картина, др.). Далее, если известна теория взаимодействия между объектом $\boldsymbol{Z}$ и воздействием $\boldsymbol{I}$ и построена разумная параметрическая модель рассматриваемого явления, т.е. известен оператор $\boldsymbol{A}$, то можно решить прямую математическую задачу, т.е. получить теоретические величины проявления $\boldsymbol{U}$. Наиболее важным для исследователя является задача определения из экспериментальных проявлений U некоторых свойств объекта (силового поля, структуры, др.) объекта Z, фактически некоторых параметров, моделирующих объект. Таким образом, всегда возникает необходимость решения обратных задач [1].

Возникающая при рассмотрении данных колебательной спектроскопии обратная задача нахождения по экспериментальным данным параметров силового поля молекулы [2] относится к важнейшим задачам структурной химии.

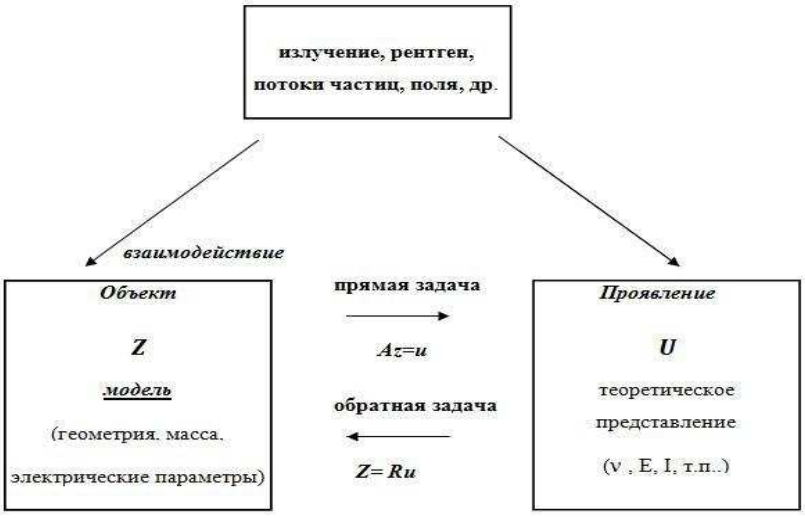


Рис. 1. Общая схема структурного эксперимента

2. Колебания молекул. Задачи восстановления силового поля молекулы по экспериментальным данным.

В квантовой механике уравнение для движения электронов в поле ядер, фиксированных в некоторой конфигурации имеет вид

$$\left(\frac{1}{2m}\sum_k \widehat{\vec{p}}_k^{\,2} + U\right)\Psi = V\Psi,$$

в котором потенциальная энергия молекулы U и волновые функции ψ зависят от координат ядер как от параметров. Функция $V(q_1,\ \ldots\ ,\ q_n)$называется адиабатическим потенциалом или *силовым полем* молекулы.

В первом порядке теории возмущений необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial V}{\partial q_k}\Big|_{\{\vec{R}^0\}} = 0.$$

Этого можно достичь выбором конфигурации $\left\{\vec{R}^0\right\}$ - она должна соответствовать минимуму функции V, т.е. представлять собой равновесную конфигурацию.

Во втором порядке теории возмущений получается задача на собственные значения для колебательного движения ядер

$$\left[\frac{1}{2}\sum_{k,l}\bar{G}_{kl}\widehat{p}_k\widehat{p}_l + \frac{1}{2}\sum_{k,l}F_{kl}q_kq_l\right]\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

где $F_{kl} = \partial^2 V/\partial q_k \partial q_l$, причем обе матрицы $\bar{G}$и F рассчитаны в конфигурации $\left\{\vec{R}^0\right\}$. Матрицу F называют матрицей силовых постоянных, а $\bar{G}$ - матрицей кинематических коэффициентов (в дальнейшем будем ее обозначать просто G). Если сделать замену переменных $q = LQ$ (матрица L составлена из собственных векторов матрицы GF), то в уравнении (1) обе квадратичные формы можно привести к каноническому виду. Новые координаты Q_1, ..., Q_n называют *нормальными* координатами. Если воспользоваться общепринятой нормировкой $L\tilde{L} = G$, $\tilde{L}FL = \Lambda$, то вместо (1) получим уравнение

$$\left[\frac{1}{2}\sum_{k}\left(P_k^2 + \lambda\ Q_k^2\right) - E\right]\Psi = 0. \tag{2}$$

Уравнение (3.45) распадается на k независимых уравнений гармонических осцилляторов, каждый из которых имеет уровни энергии

$$E_{\upsilon k} = \hbar\omega_k(\upsilon_k + 1/2), \tag{3}$$

где колебательные квантовые числа υ_k =0, 1, ...; $\omega_k = \sqrt{\lambda_{\,k}}$, а числа $\lambda_{\,k}$ являются собственными значениями матрицы GF. Колебательная энергия зависит от всех колебательных квантовых чисел. Излучаемые (поглощаемые) основные частоты в соответствии с правилом отбора $\Delta\upsilon_k = \pm 1$ равны ω_k. Переходы между уровнями, соответствующие различным $\Delta\upsilon_k \neq 0$, будут давать обертонные и составные (при нескольких $\upsilon_{k'} \neq 0$) частоты. Собственные функции уравнения (2) выражаются произведением собственных функций гармонических осцилляторов

$$\Psi = \Psi_{\upsilon_1}(Q_1)...\Psi_{\upsilon_n}(Q_n).$$

С точностью до нормировки $\Psi_\upsilon(Q) = e^{-x^2/2}H_\upsilon(x)$, где $x = Q\sqrt{\omega/h}$, а $H_\upsilon(x)$-полиномы Эрмита.

Итак, частоты колебательных спектров определяются собственными числами матрицы GF.

$$GFL = L\Lambda. \tag{4}$$

Уравнение (4) в теории колебательных спектров называется уравнением анализа нормальных колебаний. В классической механике для анализа колебаний получается аналогичное уравнение.

Некоторые свойства матриц G и F

Кинетическая энергия движения ядер, связанная с изменением конфигурации, может быть записана как $-\sum\limits_i \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\Delta\vec{R}_i},\frac{\partial}{\partial\Delta\vec{R}_i}\right)$, где скобки обозначают скалярное произведение. Переходя к координатам $\{q_1,\ \ldots\ ,\ q_n\}$ получаем выражение

$$\frac{1}{2}\sum_{k,l}\widehat{p}_k\left(\sum_i\frac{1}{M_i}\left(\frac{\partial q_k}{\partial\vec{R}_i},\frac{\partial q_i}{\partial\vec{R}_i}\right)\right)\widehat{p}_l.$$

Элементы матрицы G могут следует взять производные в равновесной конфигурации, и тогда

$$G_{kl}=\sum_i\frac{1}{M_i}\left(\vec{B}_{ki},\vec{B}_{li}\right),\ \text{где}\ \vec{B}_{ki}=\left(\partial q_k\Big/\partial\vec{R}_i\right)\Big|_{\{\vec{R}^0\}}\ . \tag{5}$$

Таким образом, если известен набор геометрических параметров для равновесной конфигурации молекулы, то матрица G может быть вычислена из чисто геометрических соотношений. Формулы для расчета элементов матриц $\vec{B}$ и G приводятся во многих руководствах по теории колебаний молекул.

В декартовых координатах матрица G представляет собой диагональную матрицу, элементами которой являются обратные массы атомов:

$$G_r=diag\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\};\quad \varepsilon_i=\frac{1}{m_i}; \tag{6}$$

m_i – масса i-того I=1,2, …, N; N – число атомов в молекуле.

Матрица G обладает следующими свойствами:

а) она положительно (в случае зависимых координат – неотрицательно) определена;

б) элементы g_{ij}=0, если i-я и j-я координаты q соответствуют изменениям геометрии структурных фрагментов, не имеющих общих атомов;

в) если есть зависимые координаты, то компоненты собственных векторов, отвечающие нулевым собственным значениям матрицы G, являются коэффициентами линейной зависимости между координатами. Матрица G имеет ранг r, равный числу независимых координат и, соответственно, (n-r) нулевых собственных значений (по числу зависимых координат).

Что касается матрицы силовых постоянных F, она является характеристикой силового поля $V(q_1,\ \ldots\ ,\ q_n)$, получаемого из уравнения на собственные значения (1). Полное определение силового поля – задача практически недостижимая, поскольку свойства спектров связаны лишь с некоторыми характеристиками $V(q)$. Основное свойство силового поля $V(q)$ заключается в том, что положение его минимума определяет равновесную конфигурацию ядер молекулы, а частоты малых колебаний молекулы (в гармоническом приближении) могут быть найдены по матрице F .

Матрица F также положительно определена, все ее диагональные члены положительны, что соответствует минимуму потенциальной энергии.

Основное уравнение анализа нормальных координат (4) позволяет решить:

прямую задачу – определения частот нормальных колебаний (диагональную матрицу Λ, состоящую из квадратов частот колебаний) и их форм (векторов амплитуд L) по известной матрице кинематических коэффициентов G и заданной матрице силовых постоянных F,

обратную задачу – определения силового поля (матрицы силовых постоянных F) при заданной матрице G и известных экспериментальных частотах.

Уравнение (1) может быть также переписано в виде

$$F = \tilde{C}G^{-1/2}\Lambda G^{-1/2}C, \tag{7}$$

где C – матрица простых вращений, имеюшая общий вид
(8)

$$C^k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & \cos\varphi_{ij}^{(k)} & & & & & \sin\varphi_{ij}^{(k)} & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & -\sin\varphi_{ij}^{(k)} & & & & \cos\varphi_{ij}^{(k)} & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрица F может быть выражена через параметры, зависящие от угла вращения. Из уравнения (7) ясно, что одному и тому же набору частот Λ могут соответствовать разные матрицы F, отличающиеся углом вращения. Таким образом, задача расчета силового поля молекулы имеет неединственное решение.

Рассматриваемая задача обладает и другими неприятными свойствами, а именно – решение задачи может вообще отсутствовать в рамках гармонической модели. Это может произойти в случае нахождения матрицы силовых постоянных для двух изотопомеров молекулы (например, “легкой” и дейтерированной молекул), когда в расчете используются два набора частот изотопомеров, которые могут оказаться несовместными в рамках гармонической модели. И, кроме того, решение задачи может быть неустойчивым по отношению к погрешностям входных данных.

Математически формализованные задачи восстановления силовых полей молекул по экспериментальным данным представляются в виде нелинейного операторного уравнения

$$AF = \Lambda \tag{9}$$

где $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$ (**n** - число обобщенных координат) - матрица силовых постоянных,

образованная вторыми производными потенциальной энергии по обобщенным координатам в точке равновесия, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}^l$ - набор всех доступных экспериментальных данных (вектор, составленный из квадратов экспериментальных частот колебаний молекулы и ее изотопомеров, а также известных молекулярных постоянных таких, как кориолисовы постоянные, постоянные центробежного искажения, средние амплитуды колебаний и др.), число которых равно $\boldsymbol{l}$.

Оператор $\boldsymbol{A}$, определяемый массами ядер и равновесной конфигурацией молекулы, сопоставляет каждой симметричной положительно определенной матрице $\boldsymbol{F}$ набор вычисляемых величин, отвечающих этим экспериментальным данным. Зависимости частот колебаний, а также кориолисовых постоянных, постоянных центробежного искажения и др., составляющих правую часть уравнения (9) от элементов матрицы $\boldsymbol{F}$, разнородны, нелинейны, не независимы, а также при использовании данных, полученных с погрешностью, могут быть и несовместны. Несовместность может присутствовать и, как следствие, недостаточности имеющейся информации при построении более сложной модели (учитывающей, например, ангармоничность колебаний). Эта недостаточность приводит в большинстве случаев и к невозможности выделения единственного решения уравнения (9). Наконец, полученное решение может быть неустойчиво относительно малых возмущений входных данных. Таким образом, рассматриваемая задача относится к классу так называемых *некорректно поставленных обратных задач*, т.е. для нее не выполняются все три условия корректности Адамара (разрешимость задачи, единственность решения, устойчивость решения по отношению к ошибкам входных данных). Эти трудности хорошо известны спектроскопистам, поскольку задача определения матрицы силовых постоянных $\boldsymbol{F}$ из уравнения (9) практически всегда оказывается либо недоопределенной, либо несовместной, либо недоопределенной и несовместной одновременно.

Для преодоления произвола в расчете силовых постоянных очень важно использовать устойчивые методы решения обратной колебательной задачи, приводящие к получению устойчивых решений с некоторыми заданными свойствами. Такие решения могут быть получены с использованием подходов, развиваемых в теории некорректно поставленных задач [1]. Именно этот аппарат был использован в наших работах для решения обратных задач колебательной спектроскопии в различных постановках, учитывающих специфику широко используемых моделей силовых полей [2]–[14].

Несмотря на неблагоприятные математические свойства, данная задача привлекала внимание многих исследователей, так как знание силовых постоянных позволяет достаточно просто оценить колебательный спектр молекулы и рассчитать термодинамический свойства вещества. Особенно это оказывается удобным при необходимости оценок термодинамических свойств неустойчивых и лабильных соединений. Для проведения таких расчетов и создаются базы по силовым постоянным.

В подобных базах данных по молекулярным силовым постоянным лежит эмпирическое правило переносимости силовых постоянных. В свою очередь это правило основывается на известных постулатах классической теории строения молекул.

Первые молекулярные силовые поля были получены из чисто эмпирических расчетов, которые выполнялись с использованием независимых систем внутренних координат, что в свою очередь затрудняло перенос силовых постоянных в рядах родственных молекул. Как правило, при формулировании модели силового поля и формировании списка силовых постоянных для переноса в ряду соединений близкого строения был необходим ряд ограничений – число силовых постоянных должно было быть не очень большим (в общем случае это верхний или нижний треугольник симметрической матрицы, включающий в

себя *n(n+1)/2* величин). Поэтому вводились разного рода предположения, например, о малости постоянных взаимодействия между удаленными фрагментами, критерием удаленности обычно выступало число атомов между рассматриваемыми фрагментами (т.н. порядок окружения), о равенстве силовых постоянных отвечающих фрагментам, имеющим одинаковое первое окружение и т.д.. Использование независимых систем обобщенных координат означает, что для тех блоков матрицы силовых постоянных, которые относятся к молекулярному фрагменту групп =ХУ$_2$, - ХУ$_3$, циклов и т.п., формально необходимо в матрице силовых постоянных поддерживать не локальную симметрию данной функциональной группы, а учитывать наличие линейных зависимостей между силовыми постоянными. На практике это достаточно сложно реализуемая задача, поэтому, как правило, в моделях силовых полей при эмпирических расчетах ограничивались учетом локальной симметрии без учета линейных зависимостей.

В подходе, развитом в наших работах [8]–[12], реализованы модели, в которых сформулированы и формализованы ряд как явных, так и неявных модельных соображений относительно характера силовых полей, которые широко используются в т.н. анализе нормальных колебаний спектроскопии (например, свойство переносимости силовых постоянных в рядах родственных соединений.). Нами предложено все необходимые модельные предположения принимать во внимание с помощью априорного выбора некоторой матрицы $\boldsymbol{F}^0$, полученной либо из расчетов для родственных или модельных молекул, или каким-либо иным путем (например, из квантовомеханических расчетов [10]–[12]) и заданным множеством априорных ограничений $\boldsymbol{D}$ на искомую матрицу $\boldsymbol{F}$. Множество $\boldsymbol{D}$ определяет вид искомой матрицы в рамках выбранной модели (т.е. определяет положение нулей и соотношения величин диагональных и недиагональных элементов в матрице $\boldsymbol{F}$, равенство ряда постоянных и т.п.). Если мы не имеем никаких априорных сведений о виде решения, то полагаем $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Z}$.

На основе этой формализации был предложен принцип отбора единственного решения из множества решений в рамках теории регуляризации А.Н. Тихонова, сформулированный в смысле близости решения к некоторому данному элементу (матрице силовых постоянных) $\boldsymbol{F}^0 \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяющему всем априорным предположениям о модельных характеристиках решения. В случае несовместности обратной задачи (это может быть в случае использования частот изотопомеров или другой дополнительной информации, ведущей к несовместности в рамках гармонической модели) можно ставить задачу поиска матрицы $\boldsymbol{F}$, для которой расстояние от $\boldsymbol{AF}$ до Λ (в произвольных единицах) является минимальным, т.е. поиска так называемого псевдорешения задачи (если $\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{Z}$, т.н. квазирешения). В случае неединственности и псевдо(квази)решения необходимо поступать так же, как и в случае неединственности решения - т.е. выбирать из всех возможных псевдо(квази)решений то, которое является ближайшим к заданной матрице $\boldsymbol{F}^0$ (нормальное псевдо(квази)решение).

Приходим к следующей формулировке обратной задачи, приняв во внимание сформулированный выше принцип отбора решения.

Предположим, что имеем уравнение (1) и оператор $\boldsymbol{A}$, который сопоставляет некоторой симметричной и положительно определенной матрице $\boldsymbol{F}$ набор

квадратов колебательных частот молекулы (возможно включая частоты изотопомеров), а также средние амплитуды колебаний, кориолисовы постоянные и т.п. величины, получаемые из эксперимента. Размерность вектора определяется числом известных экспериментальных данных. Так как симметричная матрица $\boldsymbol{F}$ определяется $\boldsymbol{n(n+1)/2}$ элементами, можно рассматривать неизвестные силовые постоянные как вектор из пространства размерности $\boldsymbol{n(n+1)/2}$. Тогда оператор $\boldsymbol{A}$ действует из евклидова пространства $\boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$ в эвклидово пространство $\boldsymbol{R}^l$. В обоих пространствах введем следующие нормы:

$$\|F\| = \left(\sum_{k=1}^{l} f_k^2\right)^{1/2} ; \quad \|\Lambda\| = \left(\sum_{k=1}^{l} l_k^2 \rho_k\right)^{1/2} , \tag{10}$$

где $\rho_k > 0$ - веса; $\boldsymbol{f}_k$ и λ_k элементы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{Z}$.

Оператор $\boldsymbol{A}$ является непрерывным для всех рассматриваемых задач. Уравнение (9) может иметь неединственное решение, либо вообще никакого решения, из-за ангармоничности частот колебаний.

Предположим, что известна некоторая матрица $\boldsymbol{F}^0$ (вектор размерности $\boldsymbol{n(n+1)/2}$). Необходимо найти нормальное псевдо(квази)решение уравнения (1), т.е. решить задачу:

требуется найти

$$F_n = \arg\min \|F - F_0\| , \; F \in \{F : F \in D, \; \|AF - \Lambda\| = \mu\}, \tag{11}$$

где $\mu = \inf \|AF - \Lambda\| , \; F \in D$.

Элемент $\boldsymbol{F}^0 \in \boldsymbol{D}$ может быть определен из априорных соображений о виде решения (как указывалось выше, с привлечением данных квантовомеханического расчета и других идей, например, о переносимости силовых постоянных в ряду сходных фрагментов разных молекул), а $\boldsymbol{D}$ является замкнутым множеством априорных ограничений на силовые постоянные.

Если ограничений нет, то $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$.

В практических задачах нам неизвестны точный вид ни вектора, ни оператора $\boldsymbol{A}$. Имеется только вектор Λ_δ , определенный из экспериментальных данных как $\|\Lambda - \Lambda_\delta\|$, ($\delta > \boldsymbol{0}$ - экспериментальная ошибка: $\|\Lambda - \Lambda_\delta\| \leqslant \delta$) и оператор $\boldsymbol{A}_h$, приближающий оператор $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{h} > \boldsymbol{0}$ - параметр, характеризующий близость $\boldsymbol{A}_h$ к $\boldsymbol{A}$. Погрешность оператора $\boldsymbol{A}$ связана с ошибками в экспериментальных данных о геометрических параметрах в равновесной конфигурации. Следовательно, возникает задача решения уравнения (1), когда неизвестны точный вид $\boldsymbol{A}$ и, а известны лишь их приближения $\boldsymbol{A}_h$ и δ и их ошибки η=($\boldsymbol{h}$,δ). Необходимо найти вектор $\boldsymbol{F}_\eta$, , приближающий точное нормальное псевдо(квази)решение $\boldsymbol{F}_n$.

Принимая вышесказанное во внимание, можно сформулировать следующую задачу.

Пусть дано уравнение (9): требуется найти по приближенным данным $\{\boldsymbol{A}_h, \delta, \boldsymbol{h}\}$ приближение $\boldsymbol{F}_\eta \in \boldsymbol{D}$ к решению $\boldsymbol{F}_n$ такое, что

$$F_\eta \to F_n \tag{12}$$

при $\eta \to \boldsymbol{0}$, т.е. алгоритм поиска $\boldsymbol{F}_n$ должен быть регуляризирующим по Тихонову.

Ряд других формулировок рассмотрен в [9],[14]. Там же приведены теоремы устойчивости, полученные в нашей работе [7]. Обсуждены особенности решения нелинейных некорректных задач в конечномерном случае, к которым относится и обратная колебательная задача, дана общая формулировка тихоновской схемы построения регуляризирующего алгоритма для решения основной задачи, т.е. построения по приближенным данным элемента, сходящегося к множеству нормальных решений при стремлении погрешностей оператора и входных данных к нулю.

Один из предложенных регуляризирующих алгоритмов [2] расчета силового поля молекулы основан, например, на минимизации функционала Тихонова:

$$M^{\alpha}[F] = \|A_h F - \Lambda_{\delta}\|^2 + \alpha \left\|F - F^0\right\|^2, \tag{13}$$

где α - параметр регуляризации, выбираемый в процессе минимизации по обобщенному принципу невязки [1]. Второй член в (13) называется стабилизатором функционала.

Минимизация $M^{\alpha}[F]$ осуществляется на заданном множестве априорных ограничений $\boldsymbol{D}$ и находится так называемое нормальное решение (или нормальное псевдорешение, если задача несовместна), которое воспроизводит экспериментальные данные в пределах заданной погрешности δ с учетом возможной несовместности и является ближайшей (в смысле выбранной метрики) к матрице $\boldsymbol{F}^0$. Множество априорных ограничений $\boldsymbol{D}$ может быть сформулировано в виде различных ограничений на величины силовых постоянных (некоторые силовые постоянные $\boldsymbol{f}_{ij}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{n}_{ij} \leqslant \boldsymbol{f}_{ij} \leqslant \boldsymbol{m}_{ij}$; $\boldsymbol{f}_{ij}=\boldsymbol{f}_{kl}$, и т.д.). Также возможен и полезен в ряде случаев совместный расчет силового поля для ряда родственных молекул [2],[3].

3. Модели силовых полей молекул

Очевидно, что потенциал $V(q)$может быть моделирован различным образом. Например, можно представить себе молекулу, состоящей из шариков, соединенных пружинками (механическая модель). В этом случае параметрами будут служить коэффициенты жесткости пружинок. В более сложной модели можно добавить пружинки между пружинками и т.п. (чтобы учесть нецентральность сил). Лучшие модели основаны на ряде положений, извлекаемых из опыта:

(1) Валентные связи имеют (для каждой пары атомов) примерно постоянную длину, и потенциал для них более “жесткий”, чем для прочих структурных параметров.
(2) Взаимодействие валентно не связанных атомов существенно слабее (обычно моделируется эмпирическими потенциалами, описывающими взаимодействие свободных атомов).
(3) Для каждого атома существуют “идеальные” валентные углы; отклонение их от этих значений требует затраты энергии.

Простейшим приближением является *модель центрально-силового поля*, в котором силы, действующие на ядра атомов, направлены вдоль прямых, их соединяющих, и зависят только от межъядерных расстояний. Следующая по сложности – *модель валентных сил*, в которой рассматриваются силы, препятствующие отклонению от равновесных значений межатомных расстояний между валентно-связанными атомами, а также валентных углов и кручению

атомов вокруг связей. Точность модели валентных сил, хотя и имеющей больший физический смысл, также как и 1-й модели, в целом неудовлетворительна, что можно проиллюстрировать на примере простейшей молекулы H_2O, для которой обе упомянутые модели эквивалентны, поскольку валентный угол H-O-H однозначно определяется межатомными расстояниями H-H и H-O. Не удается подобрать такое диагональное силовое поле, которое бы удовлетворительно воспроизводило колебательный спектр молекулы воды. Однако, если принять используемые в модели валентных сил предположения о том, какие изменения равновесной конфигурации молекулы наиболее существенно влияют на ее энергию, то матрица силовых постоянных в естественных координатах должна быть близка к диагональной. То есть в матрицу F можно включить некоторые сравнительно малые недиагональные члены. Такую модель называют *модифицированным валентно-силовым полем.*

Какие именно недиагональные элементы матрицы силовых постоянных должны быть включены в рассмотрение, определяется, как физическими соображениями, так и выбранной моделью. Например, для удаленных структурных фрагментов молекулы можно пренебречь соответствующими недиагональными элементами в матрице силовых постоянных. Существование характеристических частот колебаний некоторых групп атомов (например, фрагментов CH_2, CH_3, NO_2 и др.) указывает на малость недиагональных членов матрицы F, описывающих взаимодействие этих колебаний с колебаниями остальной части молекулы. Можно также предположить, что силовые постоянные такого фрагмента будут близки по величинам для родственных соединений. Свойство силовых постоянных мало меняться при переносе соответствующего фрагмента из молекулы в молекулу определяет переносимость силовых постоянных.

Можно совсем не накладывать ограничений на элементы матрицы F. Получающаяся *модель общего гармонического силового поля* по сути дела перестает быть моделью, так как единственным допущением остается применимость адиабатического приближения и связанная с ней гармоничность колебаний. При этом любые наборы линейно независимых координат приводят к эквивалентным результатам.

Заметим, что матрица силовых постоянных в независимых координатах, как и вообще адиабатический потенциал, определена в принципе однозначно, поэтому при наличии достаточного объема экспериментальных данных (или возможности достаточно точного теоретического расчета) введение перечисленных модельных представлений не является необходимым. Однако в подавляющем большинстве случаев объем экспериментальной информации недостаточен для определения единственной матрицы силовых постоянных, что приводит к широкому использованию модельных представлений.

Можно использовать зависимую систему обобщенных координат, например, полную систему естественных координат, когда рассматриваются все изменения валентных связей и валентных углов, а также необходимые для адекватного описания молекулы т.н. неплоские координаты (выхода связи из плоскости, крутильные и т.д.). В этом случае в задании матрицы F возникает некий произвол, который можно использовать для специального моделирования матрицы.

В предложенных нами постановках обратных задач повышение устойчивости задачи и точности получаемых приближенных решений может быть достигнуто [11]:

а) за счет использования всех доступных экспериментальных данных;

б) за счет удачного выбора матрицы $\boldsymbol{F}^0$;

в) за счет удачного выбора множества априорных ограничений $\boldsymbol{D}$ (выбор модели силового поля).

Особое значение при использовании устойчивых (регуляризирующих) алгоритмов при расчетах силовых полей многоатомных молекул в рассматриваемых подходах (в частности, при известных данных квантовомеханического расчета) приобретает выбор модели силового поля и выбор вида априорных ограничений на величины силовых постоянных.

Физически обусловленные ограничения могут либо сужать множество матриц $\boldsymbol{F}$, на которых ищется решение обратной задачи, либо задавать принцип отбора из множества допустимых решений. Неудачный же их выбор приводит лишь к возрастанию меры несовместности и получению решений, не имеющих физического смысла.

В предложенной постановке особое значение приобретает выбор матрицы $\boldsymbol{F}^0$ стабилизатора, поскольку именно она в существенной мере определяет получаемое решение. Эмпирические расчеты силовых полей многоатомных молекул традиционно использовали в качестве начальной матрицу $\boldsymbol{F}^0$, составленную из известных величин силовых постоянных для близких по строению соединений. В настоящее время все чаще для получения предварительных сведений о строении и колебательном спектре молекулы используются квантовомеханические данные, причем в последние годы открылись новые возможности для повышения теоретического уровня расчета, в том числе учета электронной корреляции как в рамках теории возмущений (MP2, MP3 и т.д. [15],[16]), так и в рамках подходов с использованием теории функционала плотности [17],[18]. Не обсуждая здесь известные проблемы, связанные с неточностями приближений и значительных упрощений, которые приходится использовать при квантовомеханических расчетах сложных молекулярных систем, а также отсутствием серьезных теоретических работ по анализу используемых приближений при расчетах силовых полей, тем не менее, следует признать, что массовые неэмпирические расчеты и расчеты с использованием функционала плотности создают практическую базу для создания единообразного подхода к интерпретации данных колебательной спектроскопии.

Учитывая важность сведений о существенных особенностях внутримолекулярных взаимодействий и потенциальной поверхности молекулы, получаемых в неэмпирических расчетах, нами был предложен подход, который гарантирует получение решения, сохраняющего эти важнейшие свойства квантовомеханического расчета. Этот подход, основан на совместном использовании неэмпирических результатов и всех доступных экспериментальных данных в рамках регуляризирующей процедуры определения силовых полей молекул [10] Предложенный подход был применен нами для расчета молекулярных силовых полей при совместной обработке экспериментальных и квантовомеханических данных [10]–[14], при этом возникла концепция *регуляризованного квантовомеханического силового поля* (**РКМСП**) и сформулированы новые постановки обратных задач. Квантовомеханические результаты используются в регуляризирующей процедуре путем включения теоретической матрицы силовых постоянных $\boldsymbol{F}^0$ в функционал (13). Таким образом, получаемое решение является

ближайшим по норме к квантовомеханическому силовому полю, воспроизводя экспериментальные частоты в пределах заданной погрешности (в случае нахождения нормального решения) или наилучшим образом приближая экспериментальные частоты (нормальное псевдорешение).

В рамках предложенного подхода реализована регуляризирующая процедура для расчета эмпирических масштабирующих поправок квантовомеханической матрицы $\boldsymbol{F}$ в различных приближениях. Техника коррекции квантовомеханических силовых полей с помощью т.н. масштабирующих множителей Пулаи [19] широко используется в настоящее время и эти множители могут рассматриваться, как род априорных ограничений на величины силовых постоянных, входящих во множество D , имеющего в этом случае вид:

$$D = \{F : F = BF^0B\} \tag{14}$$

где $\boldsymbol{B}$ представляет собой диагональную (с неотрицательными элементами) матрицу масштабирующих множителей [19],[20]. Множество ограничений $\boldsymbol{D}$ и в этом случае может включать все указанные выше соображения о виде матрицы $\boldsymbol{F}$ (например, равенство нулю ряда постоянных, ограничения на величины масштабирующих множителей и т.п.). Однако совершенно очевидно, что введение априорных ограничений, предложенных Пулаи, не позволяет сделать задачу отыскания силового поля корректной, что, к сожалению, не понимается многими авторами. При рассмотрении задачи даже для одной молекулы введение подобных ограничений не приводит к возможности выделения единственного решения. Тем не менее, использование матрицы Пулаи может быть рассмотрено, как моделирование силового поля молекулы специальным образом, которое является частным случаем предложенного нами общего подхода, т.е. и в этой модели можно применить регуляризирующие алгоритмы для отыскания приближений к нормальному псевдорешению на множестве ограничений вида (14). Очевидно, что при замене матрицы силовых постоянных общего вида (в рамках той или иной модели гармонического силового поля) на матрицу специального вида, например, матрицу Пулаи (14), суть обратной задачи (в данном случае определения неотрицательных коэффициентов $\boldsymbol{B}$) и ее математические свойства не меняются. Эта задача точно так же, как и обратная колебательная задача в стандартном виде, является некорректно поставленной, а следовательно требует для своего решения специальных (устойчивых) алгоритмов.

Все постановки задач, которые были рассмотрены нами в случае эмпирических расчетов силовых полей [2]–[7], реализуемы и в этом случае, и получаемое решение, воспроизводя экспериментальные данные в пределах данной погрешности и являясь ближайшим по норме к квантовомеханическому расчету, сохраняет его важнейшие особенности, связанные с относительными величинами силовых постоянных, отнесением частот, картиной распределения потенциальной энергии, и т.д..

Нами также разработан регуляризирующий алгоритм для расчета масштабирующих множителей в декартовых координатах [21]. В этом случае с формальной точки зрения масштабирование по-прежнему описывается уравнением (14), однако, матрица $\boldsymbol{B}$ не является диагональной. Основной особенностью матрицы силовых постоянных в декартовых координатах является зависимость

от положения молекулы и ее ориентации и физически значимые матрицы силовых постоянных должны удовлетворять ряду условий. Матрица силовых постоянных в декартовых координатах состоит из субматриц размерности 3x3, соответствующих каждому атому:

$$F = \begin{pmatrix} f_{(11)} & f_{(12)} & \cdots & f_{(1N)} \\ f_{(21)} & f_{(22)} & \cdots & f_{(2N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{(N1)} & f_{(N2)} & \cdots & f_{(NN)} \end{pmatrix}$$

N - число атомов в молекуле. Условия независимости матрицы силовых постоянных от положения молекулы и ее ориентации имеют следующий вид (см. [9],[14],[22]):

$$\sum_{i=1}^{N} f_{(ij)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} V_i f_{(ij)} = 0, \quad j = 1, 2, ..., N \tag{15}$$

где

$$V_i = \begin{pmatrix} 0 & -R^0_{iz} & R^0_{iy} \\ R^0_{iz} & 0 & -R^0_{ix} \\ -R^0_{iy} & R^0_{ix} & 0 \end{pmatrix},$$

а $R^0_{ix}, R^0_{iy}, R^0_{iz}$ - декартовы компоненты для равновесного положения i-того атома Уравнения (15) обеспечивают независимость элементов матрицы F от поступательного и вращательного движений молекулы как целого.

При масштабировании матрицы F в декартовых координатах можно предположить, что матрица F^0 a priori удовлетворяет условиям (15). Однако, это не означает, что и масштабированная матрица также удовлетворяет этим условиям. Для выполнения условий (15)необходимо ввести следующие дополнительные ограничения на матрицу масштабирующих коэффициентов B:

1) Матрица B должна состоять из субматриц размерности 3×3, каждая из которых умножена на свой набор множителейs:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11}E\beta_{12}E...\beta_{1N}E \\ \beta_{21}E\beta_{22}E...\beta_{2N}E \\ ..... \\ \beta_{N1}E\beta_{N2}E...\beta_{NN}E \end{pmatrix}$$

2) Величины факторов β_{ij} ($i, j, = 1, \ldots, N$) должны удовлетворять условиям

$$\beta_{ij} = \beta_{ji};$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_{1i} = \sum_{i=1}^{N} \beta_{2i} = ... = \sum_{i=1}^{N} \beta_{Ni} = S = \text{const}. \tag{16}$$

Если имеются дополнительные ограничения, связанные с симметрией молекулы, они также должны быть учтены. В целом матрица B содержит $N(N$-$1)/2$+1 независимых параметров, так как все диагональные элементы могут быть представлены в виде

$$\beta_{ii} = S - \sum_{j \neq i} \beta_{ij}.$$

Таким образом, при решении обратной задачи нахождения масштабирующих множителей в декартовых координатах мы используем операторное уравнение

(9) и рассмотренные выше постановки решения обратных задач, а множество априорных ограничений D включает в себя также условия (14) и (15).

4. Программная реализация

Бурное развитие эффективных численных методов для квантовохимических расчетов достаточно сложных молекулярных структур (в том числе с учетом корреляции электронов) позволило перейти к массовым расчетам разнообразных молекулярных систем и к появлению т.н. модельной химии [23]. То есть, появилась возможность проведения на одном уровне теории расчетов для большого числа молекул и, таким образом, возможность для сопоставления данных не только с экспериментальными данными, но и между собой. В области расчетов колебательных спектров это означало, что можно анализировать теоретические молекулярные силовые постоянные и на основе этого анализа вырабатывать модели силовых полей, которые могли бы эффективно использоваться для предсказаний неизученных соединений, что и было предложено в наших работах. Кроме того теоретические данные позволили не только обнаружить какие-либо признаки, характерные для матриц силовых постоянных тех или иных соединений или классов соединений, но также и понять природу различий между ними, а структурными параметрами. Особенно удобно это оказалось при использовании полной системы естественных координат в рамках концепции РКМСП, в которой используется принцип отбора по близости по норме к заданной квантовомеханической матрице силовых постоянных.

Для сохранения возможности использования зависимых координат в случае работы с данными квантовомеханического расчета нами были предложены и реализованы описанные в [9] два варианта преобразования квантовомеханической матрицы силовых постоянных из декартовых координат в зависимую систему внутренних координат.

Первый вариант преобразования предусматривает получение матрицы силовых постоянных в зависимых естественных координатах, являющейся нормальной относительно некоторой заданной матрицы (частным случаем такого преобразования является получение канонической матрицы, единственной из всего класса матриц, имеющей ранг, равный 3N-6). Во втором варианте в результате преобразования получается матрица, имеющая минимальную недиагональную норму (соответствующая предположению о сосредоточении энергии межатомных взаимодействий в основном в диагональных членах матрицы силовых постоянных). При преобразовании этих матриц, воспроизводящих точно теоретические частоты и формы колебаний, к независимым координатам получается одна и та же матрица. Различия в матрицах, получаемых при обоих вариантах перехода от декартовых координат в зависимые естественные, концентрируются в части матриц, относящейся к тем угловым координатам, для которых есть линейная зависимость. Модель матрицы с минимальной недиагональной нормой, на наш взгляд соответствует традиционным представлениям о виде матриц силовых постоянных.

Имеющийся при этом некоторый произвол в выборе матрицы в естественных координатах может быть использован для специального моделирования матрицы силовых постоянных.

На основе этих и ряда других регуляризирующих алгоритмов решения задач колебательной спектроскопии и структурной химии создан комплекс программ

СПЕКТР [4],[9],[14]. В комплексе используются современные высокоэффективные и быстродействующие алгоритмы на основе теории регуляризации, позволяющие одновременно минимизировать до десятков тысяч параметров. Наряду с реализацией общего подхода в соответствии с идеями теории регуляризации, в программном комплексе сохранена возможность сужения множества определяемых параметров путем наложения жестких ограничений, часто применяемых в практике спектральных и структурных расчетов.

В данный комплекс программ также включен ряд сервисных программ (для анализа симметрии молекулярной структуры, подготовки входного файла для решения колебательных задач, визуализации молекулярной структуры и др.), также представляющие собой оригинальные разработки авторов комплекса программ.

Главными отличительными чертами пакета являются:

(1) Возможность применения различных систем координат (в том числе декартовых, естественных, зависимых и независимых);
(2) Использование строгого анализа симметрии;
(3) Широкое применение данных квантовомеханических расчетов;
(4) Возможность обработки разнообразных комбинаций экспериментальных данных в рамках единой программы;
(5) Поддержка разнообразных представлений решения (в том числе и параметрических);
(6) Возможность специального моделирования решения – введение попарных равенств силовых элементов в различных молекулах, наложения нулевых ограничений на некоторые элементы, совместный расчёт родственных соединений и т.п.;
(7) Автоматизация расчёта с элементами экспертной поддержки.

На основе комплекса программ СПЕКТР нами начато создание базы данных по молекулярным постоянным азотсодержащих соединений. Быстрый прогресс и широкое распространение квантовомеханических расчетов многоатомных молекул не могут, в силу известных ограничений, связанных с размерностями задач, полностью заменить эмпирические расчеты, являющиеся иногда единственной возможностью оценки силовых постоянных громоздких молекулярных систем. Накопление данных о силовых постоянных необходимо как для предсказаний спектров неисследованных соединений и оценки термодинамических свойств веществ, так и для создания и развития адекватных физических моделей, проясняющих характер и распределение внутримолекулярных сил.

Поскольку число известных соединений очень велико и далеко не для всех соединений имеются исследования молекулярных спектров, создание единой библиотеки данных по строению и колебательным спектрам для всех классов веществ является неосуществимой задачей. В прагматическом плане более актуальным является создание развитых баз спектральных данных по определенным классам или группам соединений, которые включают в себя не только известные экспериментальные данные, но и при необходимости дают возможность теоретического анализа рассматриваемых систем, например, анализа нормальных колебаний и/или расчета термодинамических функций. Для решения двух последних задач требуется наличие соответствующих сведений по геометрическим параметрам структуры и молекулярным силовым полям. При этом используемые силовые постоянные должны обладать гарантированными

свойствами переносимости в рядах родственных соединений. Расчет силовых постоянных производится с использованием экспериментальных данных о колебательных спектрах, причем в последнее десятилетие, как правило, все больше и больше опирается на результаты квантовохимических расчетов, которые сами по себе становятся неотъемлемой частью спектрального эксперимента.

В качестве объектов выбраны модельные аналоги (имитаторы) природных соединений – структурных компонентов нуклеиновых кислот, а также некоторых новых производных пиридоксаля, выступающих в качестве коферментов в процессах метаболизма аминокислот. Создание базы данных позволяет анализировать ряды соединений с целью нахождения специфических спектральных характеристик, которые могут служить в качестве аналитических признаков для идентификации веществ в различных средах, на основе которых возможно исследовать тонкие взаимодействия, возникающие в ДНК, и анализировать пути сложных биологических взаимодействий на новом уровне понимания. Известно, что особенности структур азотистых соединений могут обеспечить не только хранение и передачу генетической информации в результате комплементарного взаимодействия двух цепей молекулы ДНК, но и изменение наследственных свойств, вследствие таутомерных и молекулярно-ионных превращений. Особый интерес в этом ряду представляет гуанин, являющийся одним из важных фрагментов ДНК с самым низким потенциалом ионизации среди пуриновых и пиримидиновых оснований, и т.о. выступающий в качестве отличной мишени для окисления. Поскольку ДНК in vivo сильно гидратирована и окружающие молекулы воды играют важную роль в образовании трехмерной структуры ДНК, в базу данных включаются и результаты квантовохимического моделирования влияния среды на спектральные характеристики рассматриваемых систем в рамках различных моделей сольватации с варьированием полярности растворителей и при изменении степени гидратации.

Основные требования, которым должна удовлетворять современная база данных по спектральным постоянным многоатомных молекул для того, чтобы представлять собой полезный и эффективный инструмент для проведения как прикладных, так и фундаментальных исследований, следующие [24]:

(1) ограничение по кругу объектов, включаемых в БД по классам соединений и по тем или иным дополнительным критериям;
(2) наличие обширной картотеки эталонных ИК-спектров поглощения,

полученных в условиях регистрации, приближенных к реальным условиям существования данного вещества с достаточным разрешением;

(1) наличие банка данных по силовым постоянным и геометрическим параметрам

молекул для возможной оперативной оценки теоретических колебательных спектров молекулы и расчета термодинамических свойств вещества;

(1) возможность унификации выбора систем обобщенных координат и моделей

силовых полей, используемых при решении колебательных задач;

5. использование устойчивых численных методов для получения силовых постоянных, обладающих свойством переносимости в рядах родственных соединений, с целью последующего включения рассчитанных величин в БД;

(1) наличие квантовохимических данных, соответствующих определенному уровню теории (или ряду таких уровней в рамках т.н. модельной химии) и обеспечивающих достаточное надежное предсказание свойств молекул рассматриваемых классов;
(2) возможность идентификации смеси веществ.

Основой системы является разработанный ранее [4],[9],[14] комплекс программ, включающий в себя программу-оболочку, собственно базу данных по молекулярным постоянным, поисковый модуль, программы для анализа нормальных колебаний молекулы и расчета молекулярных силовых полей, термодинамических свойств веществ, комплекс программ для распознавания образов, ряд сервисных программ и программ визуализации, средства подготовки и отображения отчетных материалов и модуль экспертной поддержки. Комплекс создан с использованием среды программирования Microsoft Developer Studio; программирование выполнено на языке C++ с помощью компилятора Microsoft Visual C++ с использованием технологии MFC (Microsoft Foundation Classes). В данном комплексе программ заложена возможность общения с существующими (или новыми) базами данных в стандарте SQL (структурированный язык запросов). Это дает возможность подключения практически любой стандартной реляционной базы данных, как в локальном, так и в сетевом варианте. Программная оболочка поддерживает анализ и импорт данных из стандартных выходных файлов широко используемых программ квантовомеханических вычислений (в том числе GAUSSIAN, GAMESS, Природа). Поддерживаются также стандартные форматы представления спектральных данных (форматы ASP и JDX). Данный комплекс программ специально адаптирован для задач создаваемой информационной системы с учетом специфики рассматриваемых молекулярных структур.

БД имеет сложную архитектуру, включающую в себя не только информационную базу (экспериментальные, расчетные, модельные и справочные данные по колебательным спектрам включаемых в БД соединений), но и комплекс вычислительных программ для решения разнообразных задач молекулярной спектроскопии. Таким образом, база данных гибридного строения сочетает в себе статический справочный блок и динамическую часть или информационно-вычислительную интегрированную систему. Комплекс программ, включает в себя:

- программу-оболочку
- собственно базу данных по молекулярным постоянным
- поисковый модуль
- программы для анализа нормальных колебаний молекулы и расчета молекулярных силовых полей
- программы для расчета термодинамических свойств веществ
- комплекс программ для распознавания образов
- ряд сервисных программ и программ визуализации
- средства подготовки и отображения отчетных материалов
- модуль экспертной поддержки.

Программная оболочка поддерживает анализ и импорт данных из стандартных выходных файлов широко используемых программ квантовомеханических вычислений (в том числе GAUSSIAN, GAMESS, Природа). Поддерживаются

также стандартные форматы представления спектральных данных (форматы ASP и JDX).

Информационная база структурирована по различным кластерам: экспериментальные данные, теоретические данные, литературные (справочные) данные по строению, колебательным спектрам, силовым полям и другим молекулярным постоянным, а также физико-химическим свойствам индивидуальных веществ и хранится в специально разработанных таблицах “молекула” и “вещество”, помещенных в блок “Вещество”. Справочные данные общего характера (характеристика химических и физико-химических свойств различных классов соединений, включенных в БД и другая технологическая, экологическая и т.п.) хранятся в блоке “Документы”. Таким образом, информационная система состоит из нескольких разделов, представленных ниже на рис. 2. Основой динамической части информационно-вычислительной интегрированной системы является созданный ранее комплекс программ ”СПЕКТР” [4],[9],[14].

Первый шаг при создании базы данных регуляризированным силовым постоянным азотсодержащих соединений – выбор группы молекул с заданным фрагментом, которые должны содержать необходимые связи и топологию, наиболее часто встречающуюся в подобных соединения из основных рядов азосоединений, в том числе содержащих группы, из которых возможен “синтез” фрагментов нуклеиновых кислот и соединений, являющихся коферментами в их метаболизме, такие как пиразин, пиридин, пиримидин, пурин и др. Для этой группы молекул на ряде теоретических уровне1 (HF, MP2, методы DFT) с рядом базисных наборов различной полноты (/6-31G*, 6-31+G**, 6-311++G**, корреляционно-ориентированные базисы и др.) проведены квантовомеханические расчеты, выполнена оптимизация структур с учетом возможной поворотной изомерии и расчет гармонических силовых полей. Теоретические данные по оптимизированным структурам, их энергиям, гармоническим силовым полям (в декартовых координатах) и гармоническим частотам колебаний и экспериментальные частоты колебаний помещаются в базу данных в виде таблиц. Имеющиеся экспериментальные спектры приводятся в виде текстовых таблиц в специальных форматах, а также в виде рисунков.

В отдельных таблицах приводятся квантовомеханические силовые поля. преобразованные во внутренние координаты. Пользователь имеет возможность, используя встроенный динамический блок, выполнить расчеты как прямой колебательной задачи (анализ нормальных координат), так и обратной колебательной задачи для выбранной молекулярной системы и получить в выходном файле соответствующий блок с силовыми постоянными во внутренних координатах, которые могут использоваться для дальнейших расчетов родственных систем, а также входить в таблицы силовых постоянных, классифицированных по типам валентных связей, валентных углов и т.п.

На рис. 3 показан пример графического представления в базе данных теоретических результатов по оптимизации геометрии молекулы одного их таутомеров молекулы тимина (5-метилурацила). Визуализация структуры выполнена с помощью программы ChemCraft [8].

В таблице 1 показан пример представления теоретических силовых постоянных для той же молекулярной системы.

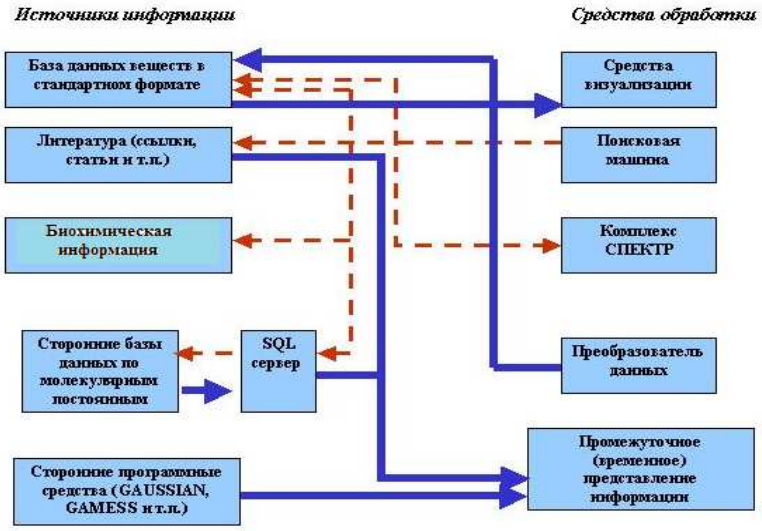


Рис. 2. Общая схема БД по молекулярным постоянным азот-содержащих соединений.

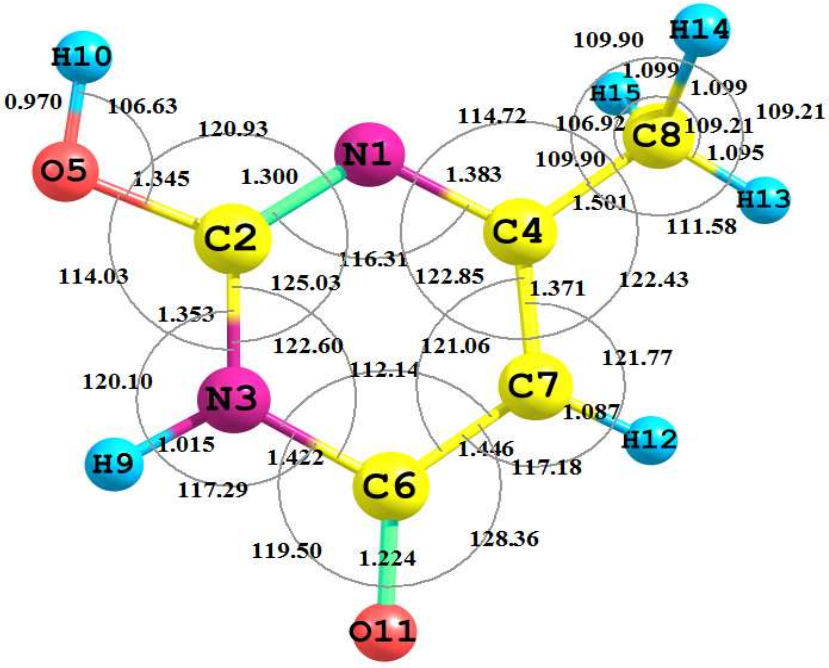


Рис. 3. Оптимизированная (B3LYP/aug-cc-pVDZ) структура молекулы тимина.

№ коорд.	Координата	Индексы атомов	Силовая постоянная	Индексы координаты
1	qOH-1	5 10	8.0043	1-1
2	qNH-1	3 9	7.1425	2-2
3	qCH-1	7 12	5.6813	3-3
4	qCH-2	8 13	5.3405	4-4
5	qCH-3	8 14	5.2070	5-5
6	qCH-4	8 15	5.2070	6-6
7	qCO-1	6 11	12.1752	7-7
8	qCN-1	1 2	8.2548	8-8
9	qCO-2	2 5	6.8151	9-9
10	qCN-2	2 3	6.4716	10-10
11	qCC-1	4 7	6.9529	11-11
12	qCN-3	1 4	5.4793	12-12
13	qCN-4	3 6	4.2534	13-13
14	qCC-2	6 7	4.9138	14-14
15	qCC-3	4 8	4.7462	15-15

Таблица 1. Теоретические (B3LYP/aug-cc-pVDZ) силовые постоянные (в мдин/Å) для координат растяжения валентных связей молекулы тимина.

Список литературы

[1] A.N. Tikhonov, A.S. Leonov, and A.G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems*, Chapman & Hall, London, 1997. (А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, М.: Наука, 1995).

[2] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, А.Г. Ягола, *ДАН СССР*, **261**:5 (1981), 1104–1106.

[3] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, А.Г. Ягола, *Теорет. и эксперим. хим*, **20**:1 (1984), 69–75.

[4] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, *Вестн. Моск. ун-та*, сер. 2, химия, **26**:4 (1985), 354–358.

[5] И.В. Кочиков И.В., Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, А.Г. Ягола, *ДАН СССР*, **283**:4 (1985), 850–854.

[6] И.В. Кочиков И.В., Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, *Ж. физ. хим*, **61**:4 (1987), 865–877.

[7] И.В. Кочиков И.В., Г.М. Курамшина, А.Г. Ягола, *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, **27**:11 (1987), 1651–1661.

[8] Доставалова А.С., И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, А.Г. Ягола, *ДАН СССР*, **315**:6 (1990), 1368–1373.

[9] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, А.Г. Ягола, *Обратные задачи колебательной спектроскопии*, Изд-во Моск. Ун-та, 1993.

[10] G.M. Kuramshina , F. Weinhold, I.V. Kochikov, A.G. Yagola, Yu. A. Pentin, *J. Chem. Phys.*, **100**:2 (1994), 1414–1424.

[11] Г.М. Курамшина, А.Г. Ягола, *Ж. Структ. Хим.*, **38**:2 (1997), 221–239.

[12] G.M. Kuramshina, F. Weinhold, *J. Mol. Struct.*, **410-411** (1997), 457–462.

[13] I.V. Kochikov, G.M. Kuramshina, A.G. Yagola, *Surveys on Mathematics for Industry*, **8** (1998), 63–94.

[14] A.G. Yagola, I.V. Kochikov, G.M. Kuramshina, Yu.A. Pentin, *Inverse Problems of Vibrational Spectroscopy*, VSP, Zeist, The Netherlands, 1999.

[15] C. Møller, M.S. Plesset, *Phys. Rev.*, **46** (1934), 618–622.

[16] E. Frisch, M.J. Frisch, *Gaussian 98 User's Reference*, Gaussian, Inc., Pittsburgh PA, 1998.

[17] A.D. Becke, *J. Chem. Phys.*, **98** (1993), 5648–5652.

[18] C. Lee, W. Yang, R.G. Parr, *Phys. Rev.*, **37** (1988), 785–789.

[19] P. Pulay, G. Fogarasi, G. Pongor, J.E. Boggs, A. Vargha, *J. Am. Chem. Soc.*, **105** (1983), 7037–7047.
[20] I.V. Kochikov, G.M. Kuramshina, A.V. Stepanova, A.G. Yagola, *Вычислительные методы и программирование*, **5** (2004), 285–290.
[21] I.V. Kochikov, G.M. Kuramshina, A.V. Stepanova, *Int. J. Quant. Chem.*, **109**:1 (2009), 28–33.
[22] I.V. Kochikov, G.M. Kuramshina, Yu. A. Pentin, A.G. Yagola, *J. Mol. Struct.*, **272** (1992), 13–33.
[23] J.B. Foresman, A.E. Frish, *Exploring chemistry with electronic structure methods: a guide to using Gaussian*, Gaussian Inc, 1995.
[24] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Л.М. Самков, Д.А. Шарапов, С.А. Шарапова, *Вычислительные методы и программирование*, **6** (2005), 83–87.
[25] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Л.М. Самков, Д.А. Шарапов, С.А. Шарапова, *Вычислительные методы и программирование*, **7** (2006), 111–116.
[26] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Л.М. Самков, Д.А. Шарапов, С.А. Шарапова, *Вычислительные методы и программирование*, **8** (2007), 70–73.
[27] *ChemCratft*, (Version 1.5), *http://www.chemcraftprog.com.*

Гульнара Маратовна Курамшина
Химический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова
119991, Москва, Россия
E-mail address: kuramshi@phys.chem.msu.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"
Часть I, стр. С.343–С.361 (2010)

УДК 519.6
MSC 65J20

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

А.Г. Ягола

Abstract. In the paper, general approaches for solving ill-posed problems are described. It is shown how apriori information can be used for constructing regularizing algorithms and error estimation.

1. Корректно и некорректно поставленные задачи

Ниже будут изложены основные понятия теории так называемых некорректных (или некорректно поставленных) задач и численные методы их решения при наличии различной априорной информации. Для простоты будут рассмотрены сначала только линейные уравнения в нормированных пространствах, хотя, разумеется, все аналогичные определения могут быть введены и для нелинейных задач в более общих метрических (и даже топологических) пространствах.

В качестве основного объекта рассматривается операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Требуется найти решение операторного уравнения z, соответствующее заданной неоднородности (или правой части уравнения) u.

Такое уравнение является типичной математической моделью для многих физических, так называемых обратных, задач, если предполагать, что искомые физические характеристики z не могут быть непосредственно измерены, а в

Yagola, A.G., Ill-posed problems with apriori information.

© 2010 Ягола А.Г.

Работа поддержана РФФИ (грант № 09-01-00586-а).
Поступила 1 октября 2010 г., опубликована 31 декабря 2010 г.

результате эксперимента могут быть получены только данные u, связанные с z с помощью оператора A.

Французским математиком Ж. Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые мы рассмотрим на примере записанного операторного уравнения. Задача решения операторного уравнения называется корректно поставленной (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

(1) решение существует $\forall u \in U$;
(2) решение единственно;
(3) если $u_n \to u$, $Az_n = u_n$, $Az = u$, то $z_n \to z$.

Условие 2) обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимно однозначным (инъективным). Условия 1) и 2) означают, что существует обратный оператор A^{-1}, причем его область определения $D(A^{-1})$ (или множество значений оператора A, $R(A)$) совпадает с U. Условие 3) означает, что обратный оператор A^{-1} является непрерывным, т.е. "малым" изменениям правой части u соответствуют "малые" изменения решения z. Более того, Ж. Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении практических задач. Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к изучению и численному решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений Z. Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи. Задачи могут быть некорректно поставленными при одном выборе нормы и корректно поставленными при другом.

Многочисленные обратные (в том числе и некорректные) задачи можно найти в различных областях физики. Так, астрофизик не может активно воздействовать на процессы, происходящие на далеких звездах и галактиках, ему приходится делать заключения о физических характеристиках весьма удаленных объектов по их косвенным проявлениям, доступным измерениям на Земле или вблизи Земли (на космических станциях). Прекрасные примеры некорректных задач можно найти в медицине, прежде всего, нужно отметить вычислительную (или компьютерную) томографию. Хорошо известны приложения некорректных задач в геофизике (на самом деле, легче и дешевле судить о том, что делается под поверхностью Земли, решая обратные задачи, чем заниматься бурением глубоких скважин), радиоастрономии, спектроскопии, ядерной физике и т.д., и т.п.

Хорошо известным примером некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Пусть оператор A имеет вид;

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s) z(s)\, ds = u(x), \quad x \in [c,d].$$

Пусть ядро интегрального оператора $K(x,s)$ — функция, непрерывная по совокупности аргументов $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, а решение $z(s)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тем самым, можно рассматривать оператор A как действующий в следующих пространствах: $A : C[a,b] \to C[c,d]$. Покажем, что в этом случае задача решения интегрального уравнения является некорректно

поставленной. Для этого нужно проверить условия корректности постановки задачи:

1) Существование решения для любой непрерывной на $[c,d]$ функции$u(x)$. На самом же деле, это не так: существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет.

2) Единственность решения. Это условие выполняется в том и только в том случае, если ядро интегрального оператора замкнуто.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = C\,[c,d]$. Если ядро интегрального оператора замкнуто, то обратный оператор существует, однако область его определения не совпадает с $C\,[c,d]$.

3) Устойчивость решения. Это означает, что для любой последовательности $u_n \to \bar{u}$ $(Az_n = u_n,\ A\bar{z} = \bar{u})$ последовательность $z_n \to \bar{z}$. Устойчивость эквивалентна непрерывности обратного оператора A^{-1} при условии, что обратный оператор существует. Легко показать, что в данном случае это не так.

Интегральный оператор A является вполне непрерывным при действии из $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$, при действии из $C[a,b]$ в $L_2[c,d]$ и при действии из $C[a,b]$ в $C[c,d]$. Хорошо известно, что оператор, обратный к вполне непрерывному оператору, не может быть непрерывным.

Поскольку задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в указанных пространствах некорректно поставлена, то даже при очень малых ошибках в задании $u(x)$ решение может либо отсутствовать, либо как угодно сильно отличаться от искомого точного решения.

Итак, вполне непрерывный инъективный оператор обладает обратным оператором, который не является непрерывным (ограниченным). Более того, при действии в бесконечномерных банаховых пространствах множество значений вполне непрерывного оператора не является замкнутым. Поэтому как угодно близко к неоднородности $u(x)$, для которой решение операторного уравнения существует, найдется неоднородность, для которой решение отсутствует.

Некорректность постановки математической задачи может быть связана с ошибкой в задании оператора. Простейший пример дает задача отыскания нормального псевдорешения системы линейных алгебраических уравнений и возникающая при этом неустойчивость, связанная с ошибками задания матрицы.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$Ax = b, \quad x \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A:\ R^n \to R^m.$$

Система может и не иметь решений. Гаусс и Лежандр в начале XIX века ввели метод наименьших квадратов, а именно, вместо решения СЛАУ предложили минимизировать квадратичный функционал (невязку):

$$\Phi(x) = ||Ax - b||^2 = (A^*Ax, x) - 2 \cdot (A^*b, x) + (b, b),$$

A^* – сопряженная (транспонированная) матрица. Поскольку матрица A^*A неотрицательно определена, то $\Phi(x)$- выпуклый функционал. Для выпуклого функционала задача отыскания $\min\limits_{x \in R^n} \Phi(x)$ эквивалентна отысканию стационарной точки, т.е. решения уравнения $\Phi'(x) = 0$. Легко видеть, что

$$\Phi'(x) = 2\,(A^*Ax - A^*b), \qquad \Phi''(x) = 2\,A^*A \geqslant 0.$$

Из равенства градиента нулю получается система линейных алгебраических уравнений с квадратной неотрицательно определенной матрицей (система нормальных уравнений):

$$A^*Ax = A^*b$$

В конечномерном случае легко доказать, что для любого вектора b система нормальных уравнений всегда имеет решение (для исходного же уравнения это не обязательно), которое называется псевдорешением системы $Ax = b$. Псевдорешение может быть неединственным (если определитель $\det(A^*A) = 0$; если же $\det(A^*A) \neq 0$, то псевдорешение единственно). Множество псевдорешений образует аффинное (или линейное) подпространство и является выпуклым и замкнутым.

Если же система $Ax = b$ имеет решение, то оно совпадает с решением системы $A^*Ax = A^*b$. В этом случае $\min\limits_{x\in R^n} \Phi(x) = \mu{=}0$. Если же $\min\limits_{x\in R^n} \Phi(x) = \mu{>}0$, система $Ax = b$ не имеет решений, но, как уже указывалось выше, имеет псевдорешение (возможно, неединственное). Число μ обычно называется мерой несовместности системы $Ax = b$.

Определение 1. *Нормальное псевдорешение x_n системы $Ax = b$ – это псевдорешение с минимальной нормой, что является решением задачи отыскания минимума* $\min\limits_{x:A^*Ax=A^*b} ||x||$.

Легко показать, что нормальное псевдорешение существует и единственно. Поэтому можно поставить задачу: дан вектор b, которому можно поставить в соответствие нормальное псевдорешение x_n. Оператор A^+, который осуществляет это соответствие, является линейным и называется псевдообратным к оператору A: $x_n = A^+b$. Если существует единственное решение исходной системы $Ax = b$ для любого вектора b, то $A^+ = A^{-1}$. Если существует единственное решение задачи $A^*Ax = A^*b$ для любого вектора b (т. е. оператор A^*A обратим), то $A^+ = (A^*A)^{-1} \cdot A^*$. В общем случае выражение для A^+ имеет вид: $A^+ = \lim(A^* \cdot A + \alpha \cdot E)^{-1} \cdot A^*$ при $\alpha \to 0 + 0$.

Если вместо вектора b задан вектор $\tilde{b}$: $\|\tilde{b} - b\| \leqslant \delta$, $\delta \geqslant 0$, и $x_n = A^+b$, $\tilde{x}_n = A^+\tilde{b}$, то $\|\tilde{x}_n - x_n\| \leqslant \|A^+\| \cdot \delta$ (это доказывает устойчивость решения по правой части). Тем самым, задача отыскания нормального псевдорешения корректно поставлена, если удается точно построить псевдообратный оператор. Однако задача построения псевдообратного оператора A^+ может быть некорректно поставленной, а поэтому задача отыскания $x_n = A^+b$ может быть неустойчивой по отношению к ошибкам A^+.

Пример. Пусть система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что существует бесконечно много решений системы, а $(1/2,\ 1/2)$ – ее нормальное решение.

В данном случае $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть имеется ошибка в матрице

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad \varepsilon \neq 0,$$

Такая приближенная система имеет единственное решение $x_\varepsilon = 0$, $y_\varepsilon = 1$, которое не зависит от ε. Более того, при $\varepsilon \to 0$ нет сходимости к нормальному псевдорешению $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Предполагая наличие ошибок во всех четырех элементах матрицы, легко построить примеры сходимости "приближенных" решений к различным векторам при стремлении погрешностей задания элементов к нулю.

Если изменить вектор b и рассмотреть систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases},$$

то она не имеет решения, хотя нормальное псевдорешение получается таким же: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Легко построить примеры неустойчивости его отыскания.

Задачу решения операторного уравнения иногда удобно рассматривать как задачу вычисления значений неограниченного и не всюду определенного оператора A^{-1}: $z = A^{-1}u$. В таком виде обычно рассматривается задача дифференцирования: $z(x) = \frac{du}{dx}$. Очевидно, что если оператор дифференцирования рассматривать как действующий из пространства $C[0,1]$ в $C[0,1]$, то задача вычисления значений этого оператора является некорректно поставленной, поскольку не выполняются первое и третье условия корректности. Если же рассматривать этот оператор как действующий из пространства $C^{(1)}[0,1]$ в $C[0,1]$, то задача вычисления значений этого оператора является корректно поставленной.

2. Понятие регуляризирующего алгоритма

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A – линейный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. В 1963 г. А. Н. Тихонов дал знаменитое определение регуляризирующего алгоритма (РА), которое лежит в основе современной теории некорректно поставленных задач.

Определение 2. *Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\delta, u_\delta) \equiv R_\delta(u_\delta)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами:*

(1) *$R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображает $(0, +\infty) \times U$ в Z;*
(2) *для любого $z \in Z$ и для любого $u_\delta \in U$ такого, что $Az = u$, $\|u - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, $z_\delta = R_\delta(u_\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} z$.*

Задача решения уравнения первого рода называется регуляризируемой, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм. Непосредственно из определения следует, что если существует хотя бы один РА, то их существует бесконечно много.

В настоящее время все математические задачи можно разделить на следующие классы:

(1) корректно поставленные задачи;
(2) некорректно поставленные регуляризируемые задачи;

(3) некорректно поставленные нерегуляризируемые задачи.

Понятно, что корректно поставленные задачи являются регуляризируемыми, поскольку можно положить $R_\delta(u_\delta) = A^{-1}$. Отметим, что знание $\delta > 0$ в этом случае необязательно.

Далеко не все некорректно поставленные задачи можно регуляризировать, причем это часто зависит от выбора пространств Z, U. Л. Д. Менихес построил пример интегрального оператора с непрерывным замкнутым ядром, действующего из пространства $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$, обратная задача для которого (т.е. решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода) является нерегуляризируемой. Это связано со свойствами пространства $C[0,1]$. Ниже будет показано, что если пространство Z гильбертово, а оператор A ограниченный и инъективный, то задача решения операторного уравнения первого рода является регуляризируемой. Этот результат справедлив и для некоторых банаховых пространств, но не для всех. В частности, пространство $C[0,1]$ к таким банаховым пространствам не относится.

Можно дать эквивалентное определение регуляризирующего алгоритма и регуляризируемости операторного уравнения. Пусть задан оператор (отображение) $R_\delta(u_\delta)$, причем $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображает $(0, +\infty) \times U$ в Z. Погрешность решения операторного уравнения в точке $z \in Z$с помощью оператора $R_\delta(u_\delta)$ при условии, что правая часть u задана с погрешностью $\delta > 0$, определяется как

$$\Delta(R_\delta,\, \delta,\, z) = \sup_{u_\delta \in U:\, ||u_\delta - u|| \leqslant \delta,\; Az = u} || \, R_\delta u_\delta - z \, || \, .$$

Оператор $R_\delta(u_\delta)$ называется регуляризирующим оператором, если для любого $z \in Z \quad \Delta(R_\delta,\, \delta,\, z) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$. Легко видеть, что данное определение эквивалентно данному выше.

Аналогично можно дать определение регуляризирующего алгоритма для задачи вычисления значений оператора (см. конец предыдущего параграфа), т.е. для задачи вычисления значений отображения G: $D(G) \to Y$, $D(G) \subseteq X$ при условии, что аргумент задан с погрешностью (X, Y – метрические или нормированные пространства). Разумеется, задача решения операторного уравнения при условии, что A – инъективный оператор, может рассматриваться как задача вычисления значений оператора A^{-1}.

Огромное значение имеет ответ на следующий очень важный вопрос, можно ли решить некорректную задачу, т.е. построить регуляризирующий алгоритм, не зная погрешность δ.

Если задача корректна, то устойчивый метод, очевидно, можно построить и без знания δ. Так, в случае решения операторного уравнения $z_\delta = A^{-1}u_\delta \to z = A^{-1}u$ при $\delta \to 0$. В случае некорректных задач это невозможно. Приведенная ниже теорема принадлежит А. Б. Бакушинскому и была им доказана для задачи вычисления значений оператора. Аналогичная теорема имеет место и для решения операторного уравнения.

Теорема 1. *Если для вычислений значений оператора G на множестве $D(G) \subseteq X$ существует регуляризирующий оператор, не зависящий от δ (явно), то существует продолжение G на X, которое непрерывно на $D(G) \subseteq X$.*

Итак, построение регуляризирующих алгоритмов, не зависящих явно от погрешности, возможно только для задач, корректных на своей области определения.

Следующим свойством некорректно поставленных задач является невозможность оценить погрешность решения, даже если известна погрешность задания правой части операторного уравнения или погрешность задания аргумента в задаче вычисления значений оператора. Этот принципиально важный результат был также впервые доказан А. Б. Бакушинским для решения операторного уравнения.

Теорема 2. *Пусть*

$$\Delta(R_\delta,\, \delta,\, z) = \sup_{u_\delta \in U:\, ||u_\delta - u|| \leqslant \delta,\; Az = u} || \, R_\delta u_\delta - z \, || \leqslant \varepsilon(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$$

для любого $z \in D \subseteq Z$. Тогда сужение обратного оператора на множество AD: $A^{-1}\big|_{AD \subseteq U}$ непрерывно на AD.

Таким образом, равномерная по z оценка погрешности решения операторного уравнения на множестве $D \subseteq Z$ возможна только в том случае, когда обратный оператор непрерывен на AD. Данная теорема справедлива и для нелинейных операторных уравнений, причем в метрических пространствах.

Из определения регуляризирующего алгоритма легко следует, что, если есть хотя бы один регуляризирующий алгоритм, то их может быть сколько угодно. Выбрать же тот, который дает наименьшую ошибку, или сравнивать алгоритмы, сравнивая ошибки полученных приближенных решений, при решении некорректных задач, невозможно при отсутствии априорной информации, которая фактически преобразует такие задачи в корректные. Примеры будут рассмотрены ниже.

Регуляризирующие алгоритмы для операторных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах в случае, если обратный оператор не ограничен, нельзя сравнивать и по скорости сходимости приближенного решения к точному при стремлении погрешности входных данных к нулю. Этот важный результат принадлежит В. А. Винокурову.

В заключение параграфа приведем определение регуляризирующего алгоритма в случае, если и оператор может быть задан с ошибкой, т.е. вместо оператора A дан линейный ограниченный оператор $A_h : Z \to U$, такой, что $\|A_h - A\| \leqslant h, \quad h \geqslant 0$. Для краткости пара погрешностей δ, h записывается как $\eta{=}(\delta,\, h)$.

Определение 3. *Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\eta, u_\delta, A_h) \equiv R_\eta(u_\delta, A_h)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами:*

1) $R_\eta(u_\delta, A_h)$ определен для любых $\delta > 0$, $h \geqslant 0$, $u_\delta \in U$, $A_h \in L(Z,U)$, и отображает $(0, +\infty) \times [0, +\infty) \times U \times L(Z,U)$ в Z;

2) для любого $z \in Z$, для любого $u_\delta \in U$ такого, что $Az = u$, $||u - u_\delta|| \leqslant \delta$, $\delta > 0$ и для любого $A_h \in L(Z,U)$ такого, что $||A_h - A|| \leqslant h, \quad h \geqslant 0$, $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \underset{\eta \to 0}{\to} z$.

Здесь $L(Z,U)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Z в U, с нормой, определяемой обычным образом.

Аналогично можно дать определение регуляризирующего алгоритма в случае, когда операторное уравнение рассматривается только на множестве $D \subseteq Z$, т.е. имеется априорная информация о том, что точное решение $z \in D \subseteq Z$.

Невозможность построения регуляризирующих алгоритмов, не зависящих явно от h, для решения некорректно поставленных СЛАУ с приближенно заданной матрицей была впервые отмечена А. Н. Тихоновым.

3. Некорректные задачи на компактах

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A – линейный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\overline{z}$ – точное решение операторного уравнения, $A\overline{z} = \overline{u}$, $\overline{u}$ — точная правая часть и задана приближенная правая часть u_δ такая, что $||\overline{u} - u_\delta|| \leqslant \delta,\ \delta > 0$.

Множество $Z_\delta = \{z_\delta : ||Az_\delta - u_\delta|| \leqslant \delta\}$ является множеством приближенных решений операторного уравнения. Для линейных некорректных задач

$$\operatorname{diam} Z_\delta = \sup\{||\ z_1 - z_2\ ||\colon\ z_1, z_2 \in Z_\delta\} = \infty$$

для любого $\delta > 0$, поскольку обратный оператор A^{-1} не ограничен.

Возникает вопрос: нельзя ли использовать дополнительную априорную информацию для того, чтобы сузить множество приближенных решений, а еще лучше получить корректную задачу. А. Н. Тихонову принадлежит следующая идея: если известно, что множество решений является компактом, то задача решения операторного уравнения корректна при условии, что приближенная правая часть операторного уравнения также принадлежит образу компакта. Для доказательства этого утверждения А. Н. Тихонов применил следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть инъективный непрерывный оператор A действует: $D \in Z \to AD \in U$, где Z, U - нормированные пространства, D – компакт. Тогда обратный оператор A^{-1} непрерывен на AD.*

Теорема верна и для нелинейных операторов. Таким образом, решение операторного уравнения на компакте является корректной задачей при условии, что приближенная правая часть принадлежит AD. Эта идея позволила М.М. Лаврентьеву ввести понятие задачи, корректной по Тихонову (предполагается существование множества корректности, на котором задача становится корректной), а В.К. Иванову дать определение квазирешения некорректной задачи.

Приведенная выше теорема неприменима, если $u_\delta \notin R(A)$. Поэтому необходимо ее обобщить.

Определение 4. *Элемент $z_\delta \in D$такой, что $z_\delta = \arg\min\limits_{z \in D} ||Az - u_\delta||$, называется квазирешением операторного уравнения на компакте D*

$$\Big(z_\delta = \arg\min_{z \in D} ||Az - u_\delta||$$

означает, что

$$||Az_\delta - u_\delta|| = \min\{||Az - u_\delta|| :\ z \in D\}\Big).$$

Квазирешение существует, но возможно не единственно. Тем не менее, для любого квазирешения имеет место сходимость к точному решению: $z_\delta \to \overline{z}$ при $\delta \to 0$. При этом знание δ не обязательно. Если же погрешность δ известна, то

1) в качестве приближенного решения может быть взят любой элемент $z_\delta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $||Az_\delta - u_\delta|| \leqslant \delta$ (δ-квазирешение);

2) можно найти погрешность приближенного решения, решив экстремальную задачу:

найти $\max \|z - z_\delta\|$ по всем $z \in D$, удовлетворяющим неравенству: $||Az - u_\delta|| \leqslant \delta$ (очевидно, что точное решение удовлетворяет данному неравенству).

Таким образом, задача отыскания квазирешения практически не отличается от корректной. Не выполняется, вообще говоря, только условие единственности квазирешения.

Если же и оператор A задан с погрешностью, то понятие квазирешения вводится, как и выше, заменой оператора A на оператор A_h.

Определение 5. *Элемент $z_\eta \in D$ такой, что $z_\eta = \arg\min\limits_{z \in D} ||A_h z - u_\delta||$, называется квазирешением операторного уравнения на компакте D.*

В качестве же приближенного решения может быть выбран любой элемент $z_\eta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $||Az_\eta - u_\delta|| \leqslant \delta + h \ || \ z_\eta \ ||$ (η-квазирешение).

Если Z и U – гильбертовы пространства, то многие численные методы отыскания квазирешений для линейных операторных уравнений основаны на том, что функционал невязки $||Az - u_\delta||^2$ является выпуклым и дифференцируемым. Если D – выпуклый компакт, то нахождение квазирешения - задача выпуклого программирования. Записанные выше неравенства, определяющие приближенные решения на компактах, могут быть использованы в качестве критериев остановки минимизации функционала невязки. Задача отыскания погрешности найденного приближенного решения является нестандартной задачей выпуклого программирования, поскольку при решении этой задачи требуется найти максимум, а не минимум выпуклого функционала.

Хорошо известны множества корректности, которые часто встречаются в прикладных задачах. Прежде всего, если известно, что точное решение принадлежит конечно-параметрическому семейству функций, то ставится задача отыскания параметров, которая может быть корректной и в том случае, если задача без этой априорной информации является некорректной.

Если в операторном уравнении неизвестной является функция $z(s)$, $s \in [a, b]$, о которой известно, что она является монотонной и ограниченной, то этой информации оказывается достаточно для выделения компакта в пространстве $L_2[a, b]$. Для отыскания квазирешения после перехода к конечно-разностной аппроксимации могут быть применены известные методы квадратичного программирования, например, метод проекции сопряженных градиентов или метод условного градиента. Аналогичный подход применим и при наличии априорной информации о том, что точное решение является ограниченной и выпуклой, или монотонной и выпуклой, или имеющей заданное число максимумов и минимумов функцией. В этих случаях возможно отыскание и погрешности приближенного решения.

4. Некорректные задачи в случае истокопредставимости решения

Пусть линейный оператор A инъективный, непрерывный и отображает $Z \to U$; Z, U – нормированные пространства. Пусть также имеется следующая априорная информация, которая встречается при решении многих физических задач. Известно, что точное решение $\overline{z}$ для уравнения $\overline{u} = A\overline{z}$ представимо в виде $B\overline{v} = \overline{z}$, $\overline{v} \in V$; $B: V \to Z$; B – инъективный, вполне непрерывный оператор; V – гильбертово пространство. Предполагается, что известны u_δ – неточная правая часть такая, что $||\overline{u} - u_\delta|| \leqslant \delta$, и ее погрешность $\delta > 0$.

Ниже рассматривается метод расширяющихся компактов, идея и обоснование которого принадлежит В.К. Иванову и И.Н. Домбровской.

Сначала номер итерации полагается $n{=}1$ и определяется замкнутый шар в пространстве V: $\overline{S_n}(0) = \{v : ||v|| \leqslant n\}$. Его образ при действии оператора B $Z_n = B\overline{S_n}(0)$ является компактом, поскольку B- вполне непрерывный оператор, а V – гильбертово пространство. Далее отыскивается $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} ||Az - u_\delta||$, где u_δ – заданная неточная правая часть $||\overline{u} - u_\delta|| \leqslant \delta,\ \delta > 0$. Существование минимума гарантируется постановкой задачи – компактностью Z_n и непрерывностью A. Если $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} ||Az - u_\delta|| \leqslant \delta$, тогда процесс прекращается, полагается $n(\delta) = n$, а в качестве приближенного решения выбирается любой элемент

$$z_{n(\delta)} :\ z_{n(\delta)} \in B(\overline{S_{n(\delta)}}(0)) \quad \text{и} \quad || Az_{n(\delta)} - u_\delta \,|| \leqslant \delta.$$

Если же $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} ||Az - u_\delta|| > \delta$, то нужно расширять компакт, для чего n увеличивается на единицу, процесс повторяется.

Теорема 4. *Описанный выше процесс сходится:* $n(\delta) < +\infty$. *Существует* $\delta_0 > 0$ *(которое, вообще говоря, зависит от* $\overline{z}$*) такое, что* $n(\delta) = n(\delta_0) \quad \forall \delta \in (0,\ \delta_0]$. *Приближенное решение* $z_{n(\delta)}$ *сходится к точному решению* $\overline{z}$ *при* $\delta \to 0$.

Из сказанного выше понятно название метода. Оказывается, этот метод допускает возможность построения так называемой апостериорной оценки погрешности, т.е. существует функция $\chi(u_\delta, \delta)$ такая, что $\chi(u_\delta, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, и $\chi(u_\delta, \delta) \geqslant || \ z_{n(\delta)} - \bar{z} \ ||$ по крайней мере, при достаточно малых $\delta > 0$. В качестве апостериорной оценки погрешности можно взять

$$\chi(u_\delta, \delta) = \max\{|| \ z_{n(\delta)} - z \ ||:\ z \in Z_{n(\delta)},\ || \ Az - u_\delta \ || \leqslant \delta\}.$$

Апостериорная оценка погрешности не является оценкой погрешности в полном смысле слова, построение оценки погрешности решений некорректно поставленных задач невозможно. Однако при достаточно малых $\delta > 0$ (а именно $\forall \delta \in (0,\ \delta_0]$) апостериорная оценка погрешности является оценкой погрешности решения некорректной задачи при наличии априорной информации об истокопредставимости.

Данный подход легко обобщается на случаи, когда операторы A и B заданы с погрешностями, а также на нелинейные некорректные задачи с условием истокопредставимости.

Разработаны численные методы решения линейных некорректных задач при условии истокопредставимости, в том числе и построения апостериорной оценки погрешности. Использование последовательности натуральных чисел в качестве радиусов шаров в пространстве V не обязательно. Может быть взята

любая монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел.

5. Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов

Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов был впервые предложен А. Н. Тихоновым. Ниже будет описан регуляризирующий алгоритм Тихонова, основанный на минимизации сглаживающего функционала (или функционала Тихонова).

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A – линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Предполагается, что точное решение $\bar{z} \in D \subseteq Z$, где D – замкнутое выпуклое множество такое, что $0 \in D$. Множество D определяется известными априорными ограничениями; если ограничений нет, то $D{=}Z$. В этом параграфе ограничения могут быть не столь сильными, как в предыдущих разделах, и применение метода квазирешений или метода расширяющихся компактов, вообще говоря, невозможно. Тем не менее, рекомендуется при решении практических задач включать все известные ограничения в постановку обратной задачи. К таким ограничениям относятся типичные для очень многих физических задач условия неотрицательности, ограниченности сверху и снизу заданными константами и многие другие.

Пусть точное значение правой части уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ неизвестно, но задано ее приближение u_δтакое, что $||\overline{u} - u_\delta|| \leqslant \delta$, и погрешность $\delta > 0$. Пусть оператор A также задан с ошибкой, т.е. задан линейный ограниченный оператор $A_h : \ Z \to U$; $||A_h - A|| \leqslant h$; и погрешность $h \geqslant 0$. Для краткости пара погрешностей обозначается $\eta = (\delta, h)$. Задача построения регуляризирующего алгоритма состоит в следующем: требуется по набору данных $\{u_\delta, A_h, \eta\}$ построить приближенное решение $z_\eta \in D$ такое, что $z_\eta \to \overline{z}$ при $\eta \to 0$, или $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \in D$, $z_\eta \to \overline{z}$ при $\eta \to 0$, где $R_\eta(u_\delta, A_h)$ – регуляризирующий алгоритм.

А. Н. Тихонов предложил следующий подход к построению регуляризирующих алгоритмов. Вводится функционал (функционал Тихонова):

$$M^\alpha[z] = ||A_h z - u_\delta||^2 + \alpha \cdot ||z||^2,$$

$\alpha > 0$ – параметр регуляризации, и ставится экстремальная задача: найти $\min\limits_{z \in D} M^\alpha[z]$. При условиях, сформулированных в начале параграфа, существует единственный элемент $z_\eta^\alpha = \arg\min\limits_{z \in D} M^\alpha[z]$.

Численные методы отыскания элемента, на котором функционал Тихонова достигает минимального значения при фиксированном значении параметра регуляризации, основаны, в основном, на двух следующих подходах: 1) Если ограничений нет ($D{=}Z$), то необходимым и достаточным условием минимума является обращение в нуль градиента. Таким образом, получается уравнение Эйлера для функционала Тихонова: $(M^\alpha[z])' = 0$. После перехода к конечно-разностной аппроксимации полученная СЛАУ решается на компьютере. Для

ряда задач специального вида возможно применение различных преобразований, упрощающих решение получившейся СЛАУ. Так, для уравнений типа свертки (задача, часто встречающаяся при обработке изображений), в том числе и многомерных, успешно применяется быстрое дискретное преобразование Фурье. 2) При наличии ограничений и при их отсутствии могут применяться прямые методы минимизации функционала Тихонова (метод сопряженных градиентов с ограничениями или без, метод Ньютона и др.).

Если ограничения отсутствует, то задача отыскания экстремали функционала Тихонова сводится к решению уравнения

$$A_h^* A_h z + \alpha z = A_h^* u_\delta.$$

В случае положительно определенного самосопряженного оператора A и равенства $Z = U$ регуляризированное приближение может находиться из уравнения

$$Az + \alpha z = u_\delta$$

(метод М. М. Лаврентьева).

Для построения РА необходимо определить способ выбора параметра регуляризации α. Параметр регуляризации при решении некорректно поставленных задач должен явно зависеть от погрешностей. В противном случае, в соответствии с теоремами А. Б. Бакушинского и А. Н. Тихонова, могут решаться только корректные задачи. Как показывают простые примеры, известные методы выбора параметра регуляризации "L-кривой" и "generalized cross-validation" (GCV) (обобщенной перекрестной проверки), в которых параметр регуляризации не зависит явно от погрешностей задания правой части и оператора, не только не могут быть применены для решения некорректно поставленных задач, но и дают неверные результаты при решении простейших корректных задач.

Методы выбора параметра регуляризации условно подразделяются на априорные и апостериорные. Первый априорный способ выбора был предложен А. Н. Тихоновым. Некоторое обобщение приведено ниже. Пусть задана скорость убывания параметра регуляризации: а) $\alpha(\eta) \underset{\eta\to 0}{\to} 0$; б) $\frac{(\delta+h)^2}{\alpha(\eta)} \underset{\eta\to 0}{\to} 0$, то есть $\alpha(\eta) \to 0$ медленнее, чем $(\delta+h)^2$. В этом случае можно доказать, что $z_\eta^{\alpha(\eta)} \underset{\eta\to 0}{\to} \bar{z}$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Практическое применение априорных способов выбора параметра регуляризации вызывает большие затруднения, поскольку при решении прикладных задач необходимо найти приближенное решение при фиксированном уровне погрешностей. В качестве примера апостериорного способа ниже описан обобщенный принцип невязки (ОПН), предложенный и обоснованный А. В. Гончарским, А. С. Леоновым, А. Г. Яголой. ОПН является обобщением принципа невязки В.А. Морозова, разработанного для случая точного заданного оператора ($h = 0$).

Определение 6. *Мерой несовместности операторного уравнения с приближенными данными на множестве $D \subset Z$ называется*

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z\in D} \|A_h z - u_\delta\|$$

Очевидно, что $\mu_\eta = 0$, если $u_\delta \in \overline{A_h D}$.

Лемма 1. *Если* $\|u_\delta - \overline{u}\| \leqslant \delta,\ \overline{u} = A\overline{z},\ \overline{z} \in D,\ \|A - A_h\| \leqslant h,$ *то*

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \xrightarrow[\eta\to 0]{0} .$$

Если мера несовместности вычисляется с погрешностью $k \geqslant 0$, согласованной с погрешностями h, то вместо $\mu_\eta(u_\delta, A_h)$ известно $\mu^k_\eta(u_\delta, A_h)$, удовлетворяющее неравенствам:

$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \leqslant \mu^k_\eta(u_\delta, A_h) \leqslant \mu_\eta(u_\delta, A_h) + k; \quad \kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Определение 7. *Функция параметра регуляризации* $\alpha > 0$*:*

$$\rho^k_\eta(\alpha) = \left\|A_h z^\alpha_\eta - u_\delta\right\|^2 - (\delta + h\left\|z^\alpha_\eta\right\|)^2 - (\mu^k_\eta(u_\delta, A_h))^2$$

называется обобщенной невязкой.

Следующий способ выбора параметра регуляризации называется обобщенным принципом невязки. Пусть условие

$$||\ u_\delta\ ||^2 > \delta^2 + (\mu^\kappa_\eta(u_\delta, A_h))^2$$

не выполнено; тогда в качестве приближенного решения выберем $z_\eta = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\rho^\kappa_\eta(\alpha^*) = 0$, или

$$\left\|A_h z^{\alpha^*}_\eta - u_\delta\right\|^2 = (\delta + h\left\|z^{\alpha^*}_\eta\right\|)^2 + (\mu^k_\eta(u_\delta, A))^2.$$

В этом случае приближенное решение $z_\eta = z^{\alpha^*}_\eta$ определяется единственным образом. Можно доказать, что $z_\eta \underset{\eta\to 0}{\to} \overline{z}$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Для отыскания корня обобщенной невязки необходимо знать следующие ее свойства:

1. $\rho^\kappa_\eta(\alpha)$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$.
2. $\lim \rho^\kappa_\eta(\alpha) = ||\ u_\delta\ ||^2 - \delta^2 - (\mu^\kappa_\eta(u_\delta, A_h))^2$ при $\alpha \to +\infty$.
3. $\lim \rho^\kappa_\eta(\alpha) \leqslant -\delta^2$ при $\alpha \to 0 + 0$.

Из условий 1)-3) в случае, если $||\ u_\delta\ ||^2 > \delta^2 + (\mu^\kappa_\eta(u_\delta, A_h))^2$, сразу же следует существование корня обобщенной невязки, который может быть найден с использованием известных численных методов отыскания корней монотонных непрерывных функций (например, метод секущих).

Для того чтобы выяснить, какое же решение выбирается в соответствии с ОПН, необходимо рассмотреть следующую экстремальную задачу, которая называется обобщенным методом невязки (ОМН):

Найти $\inf \|z\|,\ z \in \left\{z :\ z \in D,\ \|A_h z - u_\delta\|^2 \leqslant (\delta + h\|z\|)^2 + (\mu^k_\eta(u_\delta, A_h))^2\right\}$.

Теорема 5. *Пусть* $A,\ A_h$ *– линейные ограниченные операторы из* Z *в* U*;* D *– замкнутое выпуклое множество, содержащее точку 0,* $D \subseteq Z$*;* $\|A - A_h\| \leqslant h,\ \|u_\delta - \overline{u}\| \leqslant \delta,\ \overline{u} = A\overline{z},\ \overline{z} \in D$*. Тогда обобщенный принцип невязки и обобщенный метод невязки эквивалентны, т.е. решение операторного уравнения, выбранное в соответствии с ОПН, и решение экстремальной задачи ОМН совпадают.*

Если рассматривать множество

$$\{z:\ z\in D,\ \|A_hz-u_\delta\|^2\leqslant(\delta+h\,\|z\|)^2+(\mu_\eta^k(u_\delta,A_h))^2\}$$

как множество приближенных решений операторного уравнения с приближенными данными (точное решение $\bar z$ является элементом этого множества в силу условий теоремы), то в соответствии с ОПН выбирается приближенное решение с минимальной нормой. В частности, если в качестве пространства Z рассматривается пространство $W_2^1[a,b]$ (норма в этом пространстве определяется

$$\|z\|=\left\{\int\limits_a^b z^2(s)ds+\int\limits_a^b(z'(s))^2ds\right\}^{1/2},$$

в определение нормы входит производная), то говорят, что выбирается наиболее гладкое решение.

В случае наличия априорной информации о близости решения к заданному элементу z_0 легко адаптировать ОПН на случай отыскания приближенного решения, ближайшего (по норме) к z_0. Для этого достаточно заменить искомое решение на z-z_0, преобразовав соответствующим образом правую часть уравнения.

Существуют многочисленные модификации ОПН. Так, можно отказаться от вычисления меры несовместности и рассматривать обобщенную невязку в виде:

$$\rho_\eta^k(\alpha)=\left\|A_hz_\eta^\alpha-u_\delta\right\|^2-(\delta+h\left\|z_\eta^\alpha\right\|)^2.$$

В этом случае, однако, не гарантируется существование положительного корня обобщенной невязки. В случае его отсутствия приближенное решение находится как $z_\eta=\lim z_\eta^\alpha$ при $\alpha\to0+0$. При этом ОПН и соответствующий ОМН, вообще говоря, не эквивалентны.

ОПН не может быть применен непосредственно к решению несовместных задач (отыскания их псевдорешений или нормальных псевдорешений). Тем не менее, его можно модифицировать и для этого случая. Для этого необходимо изменить вид обобщенной невязки и использовать оценку сверху меры несовместности, предложенную А. М. Левиным. Он же разработал и численные методы вычисления этой оценки. Нужно заметить, что задача вычисления меры несовместности может быть некорректно поставленной. Так, пусть дано одно алгебраическое уравнение с одной неизвестной: $0\cdot x=1$. Очевидно, что мера несовместности равна 1. Однако, как угодно малое изменение "оператора", т.е. коэффициента при неизвестной, приводит к тому, что мера несовместности становится равной нулю. Оценка А. М. Левина имеет вид:

$$\hat\mu_\eta=\inf(\delta+h\ ||\ z\ ||+||\ A_hz-u_\delta\ ||),\ z\in D.$$

Пусть $\bar z\in D$ – точное псевдорешение операторного уравнения $Az=u$ на множестве D, соответствующее неоднородности $\bar u$, т.е. $||\ A\bar z-\bar u\ ||=\bar\mu$, где $\bar\mu=\inf||\ Az-\bar u\ ||$, $z\in D$. Справедлива

Лемма 2. *$\hat\mu_\eta\geqslant\bar\mu$, $\hat\mu_\eta\to\bar\mu$ при $\eta\to0$.*

Обобщенная невязка, предназначенная решения для как совместных, так и несовместных некорректных задач, имеет вид:

$$\hat\rho_\eta^k(\alpha)=\left\|A_hz_\eta^\alpha-u_\delta\right\|^2-(\delta+h\left\|z_\eta^\alpha\right\|+\hat\mu_\eta^k(u_\delta,A_h))^2.$$

Здесь предполагается, как и ранее, что оценка сверху меры несовместности вычисляется с погрешностью $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. ОПН формулируется следующим образом. Пусть условие $||\ u_\delta\ || > \delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ не выполнено; тогда в качестве приближенного решения выберем $z_\eta = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$, или

$$\left\| A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta \right\| = \delta + h \left\| z_\eta^{\alpha^*} \right\| + \hat{\mu}_\eta^k(u_\delta, A_h).$$

В этом случае приближенное решение $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$ определяется единственным образом. Можно доказать, что $z_\eta \underset{\eta\to 0}{\to} \bar{z}$, где $\bar{z} \in D$ – точное псевдорешение. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному псевдорешению). Понятно, что изложенный метод может быть применен и для разрешимых задач.

6. Нелинейные некорректные задачи

Теоретическое обобщение изложенных выше результатов может быть перенесено и на случай, когда оператор A нелинейный. В случае точно заданного оператора также может быть введено понятие квазирешения и приближенного решения на компакте. В случае приближенно заданного оператора A_h определение квазирешения не претерпевает изменений, однако для определения приближенного решения необходимо ввести функцию, описывающую степень близости операторов. Обычно в случае приближенно заданного оператора A_h степень его близости к оператору A определяется параметром $h \geqslant 0$ и функцией $\psi(h, z) \geqslant 0$ такой, что

$$\|A_h z - Az\| \leqslant \psi(h, z), \quad \psi(h, z) \to 0$$

монотонно по h при $h \to 0$, при выполнении определенных, зависящих от конкретной задачи свойств по второму аргументу. В линейном случае обычно $\psi(h, z) = h\|z\|$. Наибольшую сложность вызывает минимизация функционала невязки, поскольку в этом случае этот функционал, вообще говоря, не выпуклый. К сожалению, нет общих рекомендаций, как решать эту задачу. Каждый раз должно проводиться отдельное исследование.

Метод расширяющихся компактов в случае нелинейности оператора A исследуется полностью аналогично линейному случаю и допускает обобщение на случай операторов, заданных с ошибками.

А. Н. Тихонов применил вариационный подход, основанный на минимизации сглаживающего функционала, и для решения нелинейных некорректных задач. В этом случае, однако, даже при решении некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах недостаточно предполагать только непрерывность и инъективность оператора A. Необходимо требовать либо усиленную непрерывность оператора A (слабо сходящиеся последовательности в пространстве Z оператор A преобразует в сильно сходящиеся последовательности в пространстве U), либо использовать схему с тремя пространствами (схему компактного вложения): $V \to Z \to U$. Оператор $A : Z \to U$ является непрерывным; пространство V вкладывается в пространство Z, причем оператор вложения B вполне непрерывен. Далее рассматривается функционал Тихонова

$$M^\alpha[v] = ||A_h B v - u_\delta||^p + \alpha \cdot ||v||^2,$$

а интерес представляет $z = Bv$. Такая схема была применена А. Н. Тихоновым в его первых работах по теории регуляризации для пространств $V = W_2^1[a, b]$, $Z = C[a, b]$, $U = L_2[c, d]$. В дальнейшем А. Б. Бакушинский доказал, что при построении РА для линейных некорректных задач достаточно использовать два пространства.

Выбор параметра регуляризации в соответствии с апостериорными принципами потребовал определения не только его значения, но и выбора определенной экстремали, в связи с тем, что функции параметра регуляризации (например, обобщенная невязка) могут быть разрывными, а экстремали неединственными. В линейном случае при условиях, сформулированных выше, экстремаль функционала Тихонова определяется единственным образом. Эти вопросы исследованы в работах А. В. Гончарского, А. С. Леонова, А. Г. Яголы.

В нелинейном случае, возможны РА типа ОМН. При этом также требуется либо усиление требований к оператору, либо использование схемы компактного вложения. Результат об эквивалентности ОПН и ОМН, справедливый в линейном случае, в нелинейном случае, вообще говоря, неверен.

7. Итеративные и другие методы

Из-за небольшого объема статьи не имеет смысла описывать все возможные подходы к построению РА. Они могут быть изложены в рамках единой схемы поточечной аппроксимации обратного оператора и согласования параметра, определяющего аппроксимацию, с погрешностью входных данных.

В случае если известно (или может быть вычислено) спектральное разложение оператора, возможно применение методов “спектральной срезки”, т.е. согласование используемых в вычислениях “высоких частот” с погрешностью задания входных данных.

Для СЛАУ разработаны регуляризированные варианты метода сингулярного разложения, согласовывающие отбрасываемые минимальные сингулярные числа с погрешностями задания матрицы и правой части. Интерес представляет метод минимальной псевдообратной матрицы, предложенный А. С. Леоновым, в котором из множества псевдообратных матриц, соответствующих заданной приближенной матрице и ее погрешности, выбирается матрица, имеющая минимальную норму, после чего отыскивается приближенное нормальное псевдорешение СЛАУ.

В работах М. М. Лаврентьева, О. М. Алифанова, А. Б. Бакушинского, Г. М. Вайникко, В. В. Васина, Х. Энгла и других авторов предложены и развиты так называемые итеративные методы решения некорректных задач. Для этих методов параметром регуляризации является номер итерации, и должно быть сформулировано правило остановки, согласующее число итераций с погрешностью входных данных. Простейший пример итеративного метода дает метод простой итерации. Пусть пространства Z и U гильбертовы, причем $Z = U$, оператор A – самосопряженный, неотрицательно определенный, вполне непрерывный, $\|A\| < 1$, и уравнение $Az = u$ разрешимо. Тогда уравнение можно переписать в виде $z = z - (Az - u)$ и, задав начальное приближение $z^{(0)}$, организовать итерационный процесс, который называется методом простой итерации: $z^{(k+1)} = z^{(k)} - (Az^{(k)} - u)$. Процесс сходится к нормальному решению операторного уравнения. Если $\|A\| \geqslant 1$, то предварительно следует

ввести нормирующий множитель. Если исходное уравнение переписать в виде:

$$Az + \beta z = \beta z + u, \quad \beta > 0,$$

то $z = (A+\beta I)^{-1}(\beta z+u)$, где I – единичный оператор, то далее можно записать итерационный процесс: $z^{(k+1)} = (A+\beta I)^{-1}(\beta z^{(k)}+u)$, который называется неявной итерационной схемой. Она обладает свойством сходимости к нормальному решению операторного уравнения и при невыполнении условия $\|A\| < 1$, Если оператор A не является самосопряженным и неотрицательно определенным, то для построения итерационных процессов, описанных выше, уравнение нужно предварительно преобразовать к виду $A^*Az{=}A^*u$. В случае приближенно заданных входных данных, если задача некорректно поставлена, должны быть сформулированы правила остановки (например, по невязке или по обобщенной невязке). Описанные выше два итерационных процесса относятся к линейным итерационным процессам. К нелинейным итерационным процессам, применяемым для решения некорректных задач, относятся обобщения методов наискорейшего спуска, минимальных невязок и другие. В соответствии с принципом итеративной регуляризации многие классические методы, предназначенные, в основном, для минимизации функционала невязки (метод Ньютона, метод сопряженных градиентов и другие) с помощью введения регуляризирующих поправок могут быть преобразованы в РА.

Использование априорной информации при построении итеративных регуляризирующих алгоритмов исследовано в работах В. В. Васина. Этому вопросу посвящена его статья в данном издании.

Ниже приводится список литературы, состоящий из некоторых основных монографий и учебников, посвященных теории и численным методам решения некорректно поставленных задач и освещающих их различные разделы.

8. Приложения в физике

Первые приложения автора для решения прикладных задач в физике (совместно с А. М. Черепащуком и А. В. Гончарским) были связаны с интерпретацией кривых блеска двойных затменных систем. Ниже приводится список некоторых основных публикаций по применению методов регуляризации (отыскание квазирешений на компактах, вариационный подход, метод расширяющихся компактов) для численного решения обратных задач в различных разделах физики (астрофизика, колебательная спектроскопия, электронная микроскопия, акустика, исследование полимерных систем, ядерная физика).

Список литературы

[1] О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев, *Экстремальные методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1988.

[2] А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский, *Итеративные методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1989.

[3] А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский, *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[4] Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников, *Итерационные процедуры в некорректных задачах*. М.: Наука, 1986.

[5] В.В. Васин, А.Л. Агеев, *Некорректные задачи с априорной информацией*. Екатеринбург, Наука, 1993.

[6] В.В. Васин, И.И. Еремин, *Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения*, Екатеринбург, УрО РАН, 2005.

[7] А.М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, М.: Изд-во МГУ, 1994.
[8] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, М.: Наука, 1978.
[9] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.
[10] М.М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
[11] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, М.: Наука, 1980.
[12] М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев, *Линейные операторы и некорректные задачи*, М.: Наука, 1991.
[13] В.А. Морозов, *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач*, М.: Наука, 1987.
[14] Ю.С. Осипов, Ю.С. Васильев, М.М. Потапов, *Основы метода динамической регуляризации*, М.: Изд-во МГУ, 1999.
[15] А.Н. Тихонов, Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1979.
[16] А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола, *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*, М.: Наука, 1983.
[17] А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола, *Численные методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1990.
[18] А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, М.: Наука, 1995.
[19] А.М. Федотов, *Некорректные задачи со случайными ошибками в данных*, Новосибирск: Наука, 1990.
[20] H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996.
[21] C.W. Groetsch, *Inverse problems in the mathematical sciences*, Braunschweig, Vieweg, 1993.

б) Астрофизика

[22] А.В. Гончарский, А.М. Черепащук, А.Г. Ягола, *Численные методы решения обратных задач астрофизики*, М.: Наука, 1978.
[23] А.В. Гончарский, А.М. Черепащук, А.Г. Ягола, *Некорректные задачи астрофизики*, М.: Наука, 1985.
[24] E. Koptelova, E. Shimanovskaya, B. Artamonov, M. Sazhin, A. Yagola, V. Bruevich, O. Burkhonov, *Image reconstruction techique and optical monitoring of the QSO 2237+0305 from Maidanak Observatory in 2002-2003*, Monthly Notices of Royal Astronomical Society, **356** (2005), 323–330.

в) Колебательная спектроскопия

[25] И.В. Кочиков, Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин, А.Г. Ягола, *Обратные задачи колебательной спектроскопии*, М.: Изд-во МГУ, 1993.
[26] I.V. Kochikov, Yu.D. Tarasov, G.M. Kuramshina, V.P. Spiridonov, A.G. Yagola, T.G. Strand, *Regularizing algorithm for determination of equilibrium geometry and harmonic force field of free molecules from joint use of electron diffraction, vibrational spectroscopy and ab initio data with application to benzene*, J. Molec. Structure, **445** (1998), 243–258.

г) Электронная микроскопия

[27] В.Д. Русов, Ю.Ф. Бабикова, А.Г. Ягола, *Восстановление изображений в электронно-микроскопической авторадиографии поверхности*, М.: Энергоатомиздат, 1991, 1–216.
[28] Э.И. Рау, Р.А. Сеннов, К.Ю. Дорофеев, А.Г. Ягола, Ю. Лиу, Дж. Пханг, Д. Чан, *Основные принципы катодолюминисцентной микротомографии с использованием конфокальной зеркальной оптики*, Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, **10** (2002), 85–92.

д) Акустика

[29] Н.Н. Николаева, С.В. Ручкин, М.Н. Рычагов, А.Г. Ягола, *Численное моделирование задачи двумерной реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости*, Вычислительные методы и программирование, **6** (2005), 9–16.

е) Исследование полимерных систем

[30] Д.В. Зотьев, С.М. Усманов, Э.Д. Шакирьянов, А.Г. Ягола, *Решение обратной задачи самодиффузии в сложных полимерных системах при наличии априорной информации*, Вычислительные методы и программирование,**6** (2005), 249–252.

ж) Ядерная физика

[31] N.N. Nikolaeva, M.N. Rychagov, A.G. Yagola, *Error estimation in applied inverse problems*, In "5th International Conference on Inverse Problems in Engineering:Theory and Practice", Ed. D. Lesnic, **III**:5 (2005), Leeds University Press, Leeds, UK, 1–7.

Анатолий Григорьевич Ягола

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет

119991, Москва, Воробьевы горы

E-mail address: yagola@yahoo.com

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.362–С.379 (2010)

УДК 519.622, 553.982
MSC 65J20

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБВОДНЕННОСТИ И ДЕБИТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ

С.И. КАБАНИХИН, А.Н. ЧЕРЕМИСИН, М.А. ШИШЛЕНИН

Abstract. We investigate direct and inverse problems for vertical well. Flow rate and watering are found from additional measurements of pressure and temperature. Numerical results are presented.

Keywords: vertical well, flow rate, watering, inverse problems

1. Аннотация

В работе рассматриваются прямая и обратная задачи для вертикальной фонтанной скважины. Прямая задача состоит в определении давления и температуры двухфазного потока по стволу скважины по известной температуре и давлению на глубине (в забое скважины), обратная задача заключается в определении дебита (количество жидкости поступающей из пласта в скважину) и обводненности (процентное содержание воды в общем объеме жидкости) по измеренным в некоторой точке скважины давлению и температуре, считая, что давление и температура в забое известны. В работе предложен алгоритм решения прямой и обратной задач. Проведен цикл расчетов прямой задачи

Kabanikhin S.I., Cheremisin A.N. and Shishlenin M.A., Finite element method for Helmholtz equation.

© 2010 Кабанихин С.И., Черемисин А.Н., Шишленин М.А.

Работа С. И. Кабанихина выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 08-01-00312.

Работа М. А. Шишленина выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429).

Поступила 2 сентября 2008 г.

для заданного диапазона искомых параметров обратной задачи. Получены линии уровня для давления и температуры как функций дебита и обводненности. Проведенные расчеты позволили описать классы эквивалентности решений обратной задачи в пределах заданной погрешности измерений. Приведены результаты расчетов решения обратной задачи для трех примеров.

Keywords: обыкновенные дифференциальные уравнения, численные методы, фонтанная скважина, обратная задача

2. Введение

Извлечение нефти из скважин производится либо за счет естественного фонтанирования под действием пластового давления, либо путем использования одного из механизированных способов подъема жидкости. Обычно в начальной стадии разработки действует фонтанная добыча, а по мере ослабления фонтанирования скважину переводят на механизированный способ.

Одной из важных задач диагностики состояния скважины является оперативное определение изменения дебита скважины и обводненности. В данной работе предложен алгоритм оценивания указанных параметров, основанный на численном моделировании прямой задачи, состоящей в определении давления P (МПа) и температуры T (°C) по стволу вертикальной фонтанной скважины по заданной температуре и давлению в забое скважины.

Методы расчета прямой задачи для фонтанной скважины основаны на решении уравнений тепломассопереноса. Для расчета теплофизических свойств водонефтегазовой смеси используются данные о стандартных характеристиках и компонентном составе нефтегазовой смеси, эмпирических корреляций и др.

По классификации, введенной в [1], используемая нами система уравнений относится к механистической модели среды, учитывающей эффект проскальзывания и структуру течения (кольцевую, пробковую или пузырьковую). Кольцевая структура течения возникает в случае большого газосодержания и больших расходов. В этом случае газ будет идти с большей скоростью по центру скважины, а жидкость течет по стенкам. В случае пробковой структуры, в зависимости от газосодержания и расхода, газ будет скапливаться не в виде отдельных пузырьков, а в виде пробок (течение разделено на секции: газ, жидкость). Пузырьковая структура возникает в случае небольшого газосодержания: газ содержится в жидкости в виде пузырьков.

Предлагаемый алгоритм решения прямой задачи позволяет получить распределение давления и температуры по стволу скважины, с учетом структуры течения и глубины разгазирования. В алгоритме используются аналитические формулы расчета теплофизических свойств нефти, дифференциальные уравнения тепломассопереноса для двухфазных смесей, а также полуэмпирические формулы для расчета структуры потока (пузырьковая, пробковая или кольцевая) в зависимости от газосодержания.

Дифференциальные уравнения тепломассопереноса решаются численно от забоя $Z = Z_0$ до устья скважины $Z = 0$.

В обратной задаче требуется определить дебит Q_l (количество жидкости поступающего из пласта в скважину) и обводненность S_w (отношение количества воды к количеству жидкости) по измеренным в некоторой точке скважины $Z = Z_1$ давлению и температуре.

Важность решения прямой и обратной задачи для двухфазного потока (жидкость и газ) в скважине определяется тем, что в настоящее время только в России эксплуатируется около ста тысяч скважин. Установка специального оборудования, позволяющего осуществлять постоянный мониторинг работы скважин, процесс очень сложный и дорогостоящий. Однако, можно попытаться реализовать мониторинг, если использовать входящие в стандартный набор телеметрии погружного насоса датчики давления и температуры, а также установленные практически на каждой скважине датчики, измеряющие давление и температуру.

Проведен цикл расчетов прямой задачи для заданного диапазона искомых параметров. Получены линии уровня для давления и температуры как функций искомых параметров. Численные расчеты позволили описать классы эквивалентности решений обратной задачи, то есть, множества пар Q_l и S_w, для которых давление и температура почти совпадают. Это позволило выделить линии уровня для постоянных значений давления и температуры и построить набор палеток, который может быть использован при решении обратной задачи.

3. Постановка прямой и обратной задачи

Рассмотрим процесс прохождения жидкости снизу-вверх по стволу скважины от забоя до устья. Математическая модель распределения давления и температуры по стволу скважины описывается двумя нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (однофазный и двухфазный поток).

Если давление P больше давления дегазации 9 МПа, то жидкость состоит из смеси воды и нефти (однофазный поток), и система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\,10^{-6}\, g\,\rho_l \;-\; i_{fr}, \quad z \in [Z_0, Z_d), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{10^3}{C_l \rho_l}\,\alpha_{lt}\big(T+273\big)\frac{\partial P}{\partial z} + 10^3\,\frac{i_{fr}}{C_l\,\rho_l} - \frac{\pi D_i K_\tau}{G\,C_l}\big(T - T_\Gamma\big), \quad z \in [Z_0, Z_d). \tag{2}$$

Здесь Z_d – точка, в которой давление опускается до уровня дегазации $P(Z_d) = 9$ МПа (точка дегазации).

Если при подъеме жидкости давление $P(z)$ становится меньше давления дегазации 9 МПа, в жидкости появляются пузырьки газа (двухфазный поток) и система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\,10^{-6}\, g\,\rho \;-\; i_{fr}, \quad z \in (Z_d, Z_1], \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial z} = \Bigg\{ &\frac{10^3}{C_{gl}\big(\rho_l(1-\beta_g)+\rho_g\beta_g\big)}\Big[\alpha_{lt}(1-\beta_g)\big(T+273\big)+\beta_g\Big]\frac{\partial P}{\partial z} - \\ &-\frac{\pi D_i K_\tau}{G\,C_{gl}}\big(T-T_\Gamma\big) - \frac{G_{og}L_{\rm p}}{G\,C_{gl}}\,\frac{\partial}{\partial P}\Big(\frac{\rho_g\beta_g}{\rho_o(1-\beta_g)+\rho_g\beta_g}\Big)\frac{\partial P}{\partial z} + \\ &+10^3\,\frac{i_{fr}(1-\beta_g)}{C_{gl}(1-\varphi_g)\big(\rho_l(1-\beta_g)+\rho_g\beta_g\big)}\Bigg\}\Big/\end{aligned} \tag{4}$$

$$/\left\{1+\frac{G_{og}L_{\rm p}}{G\,C_{gl}}\frac{\partial}{\partial T}\Big(\frac{\rho_g\beta_g}{\rho_o(1-\beta_g)+\rho_g\beta_g}\Big)\right\},\quad z\in(Z_d,Z_1].$$

Для решения прямой задачи к системе (1)–(4) добавляем данные Коши

$$P|_{z=Z_0}=P_0,\qquad T|_{z=Z_0}=T_0 \tag{5}$$

и условие непрерывности

$$[P]_{z=Z_d}=0,\qquad [T]_{z=Z_d}=0. \tag{6}$$

В **прямой задаче** (1)–(6) требуется восстановить распределение давления и температуры по стволу скважины.

Описание постоянных и функций, входящих в правую часть уравнений (1)–(4) приведены в Приложении 1.

В данной работе мы исследуем такие значения постоянных и функций, входящих в правую часть (1)–(4), при которых давление $P(z)$ достигает давления дегазации в некоторой внутренней точке скважины $z=Z_d\in(0,2000)$.

Анализ уравнений (1)–(4) показывает, что несмотря на нелинейность, возможность появления малых величин в знаменателях и существенное изменение вида правой части уравнений (2) и (4) после прохождения точки дегазации $z=Z_d$, задача (1)–(6) корректна в окрестности точного решения [2]. Численные расчеты подтвердили это свойство, которое позволяет построить алгоритм решения обратной задачи.

Обратная задача. Предположим, что в скважине на глубине $Z_1\in(0,2000)$ установлены датчики измеряющие давление и температуру

$$P|_{z=Z_1}=P_1,\quad T|_{z=Z_1}=T_1. \tag{7}$$

Обратная задача (1)–(7) заключается в определении количества жидкости Q_l поступающей из пласта в скважину (дебит) и её обводненности S_w по дополнительной информации (7). Искомые величины входят в исходную систему (1)–(4) (см. Приложение 2) следующим образом. Во-первых, от Q_l и S_w зависят следующие характеристики течения: массовый расход водонефтегазовой смеси G (см. правую часть формулы (10)), расход воды Q_w (см. правую часть формулы (11)) и массовый расход нефтегазовой смеси G_{og} (см. правую часть формулы (12)). Во-вторых, через эти характеристики явно определяется расходное содержание воды β_w (см. формулу (13) для однофазного потока и формулу (15) для двухфазного потока) и скорость смеси W (см. формулу (14) для однофазного потока и формулу (16) для двухфазного потока). В-третьих, функции $\beta_w(P)$ и $W(P)$ определяют все остальные характеристики потока. Несмотря на то, что зависимость измеряемых величин от искомых параметров достаточно сложна, корректность задачи в окрестности точного решения позволяет оценить интервалы изменения Q_l и S_w при изменениях P_1 и T_1.

4. Основные параметры расчетной скважины

Основной проблемой при численном моделировании изменения давления и температуры в скважине является учёт и детальное описание максимального количества факторов, влияющих на давление и температуру.

Предполагалось, что скважина вертикальна, ее глубина 2000 м, диаметр $D_i=0.2$ м. Плотность нефти в пласте $\rho_{or}=800$ кг/м^3, температура пласта $T_r=90$ °C, молекулярная масса пластовой нефти $M_o=137$, плотность нефти наверху $\rho_{ot}=825$ кг/м^3, объемный коэффициент для нефти $b_o=1.15$,

удельная теплоемкость нефти $C_o = 2$ кДж/кг, плотность газа растворенного в нефти $\rho_{go} = 400$ кг/м^3, вязкость газа $\mu_g = 0.03$ мПа с, скрытая теплота растворения газа в нефти $L_p = 0.005$ ккал/моль, газ метан, удельная теплоемкость газа $C_g = 2.4$ кДж/кг, молекулярная масса газа $M_g = 16$, плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $C_w = 4.2$ кДж/кг, поверхностное натяжение воды на границе с воздухом $\alpha_{wa} = 0.072$ Н/м, ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с^2, геотермический градиент Г равен 3 °C на 100 м, средний коэффициент теплопередачи $k_\tau = 0.11$.

5. Результаты расчетов прямой задачи

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(4) запишем в сокращенном виде:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}z} = \vec{G}(z, \vec{u}), \quad z \in (Z_0, Z_1). \tag{8}$$

Здесь $\vec{u} = (P(z), T(z))$ – вектор-функция. Давление и температура в забое заданы:

$$\vec{u}|_{z=Z_0} = (P_0, T_0), \qquad Z_0 = 2000 \text{ м}, \quad P_0 = 12 \text{ МПа}, \quad T_0 = 90 \text{ °C}. \tag{9}$$

Система (8) с начальными данными (9) решается по схеме Адамса 4-го порядка:

$$\frac{\vec{u}_1 - \vec{u}_0}{h} = \vec{G}_0;$$
$$\frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_1}{h} = \vec{G}_1 + \frac{1}{2}\nabla\vec{G}_1;$$
$$\frac{\vec{u}_3 - \vec{u}_2}{h} = \vec{G}_2 + \frac{1}{2}\nabla\vec{G}_2 + \frac{5}{12}\nabla^2\vec{G}_2;$$
$$\frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{h} = \vec{G}_n + \frac{1}{2}\nabla\vec{G}_n + \frac{5}{12}\nabla^2\vec{G}_n + \frac{3}{8}\nabla^3\vec{G}_n, \qquad n = 3, N-1.$$

Здесь $\vec{G}_n = (P(z_n), T(z_n))$, $z_n = 2000 - nh$,

$$\nabla\vec{G}_n = \vec{G}_n - \vec{G}_{n-1},$$
$$\nabla^2\vec{G}_n = \vec{G}_n - 2\vec{G}_{n-1} + \vec{G}_{n-2},$$
$$\nabla^3\vec{G}_n = \vec{G}_n - 3\vec{G}_{n-1} + 3\vec{G}_{n-2} - \vec{G}_{n-3},$$

шаг $h = 1$ м, $N = 1173$. Расчет ведется от точки скважины $Z_0 = 2000$ м до точки $Z_1 = 817$ м.

Рассмотрим сначала случай, когда $Q_l = 50$ т/сут, $S_w = 99\%$ и $G_{F0} = 1$. При таком выборе параметров по скважине течет вода и давление при подъеме падает максимально быстро. Результаты расчетов показали, что в этом случае на глубине -817 м давление в скважине падает до 0.5 МПа. В дальнейшем будем считать, что датчики давления и температуры расположены именно на этой глубине.

Основной целью серии расчетов прямой задачи являлось подтверждение корректности задачи в окрестности точного решения и выявление характера зависимости измеренных величин $P(Z_1)$ и $T(Z_1)$ от искомых параметров Q_l и S_w. Устойчивость решения прямой задачи относительно малых вариаций Q_l и S_w теоретически следует из того, что система (1)–(6) сводится к операторному

уравнению Вольтерра второго рода с ограниченно Липшиц-непрерывным ядром [2]. Однако зависимость ядра от Q_l и S_w настолько сложна, что необходимо было провести серию численных экспериментов, подтверждающих наличие данного свойства у дискретной модели.

Один из результатов расчетов представлен на рис. 1, на котором выведены графики зависимости давления (слева) и температуры (справа) в точке наблюдения $Z_1 = 817$ м.

Расчеты проводились до глубины 817 м при различных значениях параметров: Q_l изменялось от 50 до 500 т/сут, S_w изменялось от 1% до 99%.

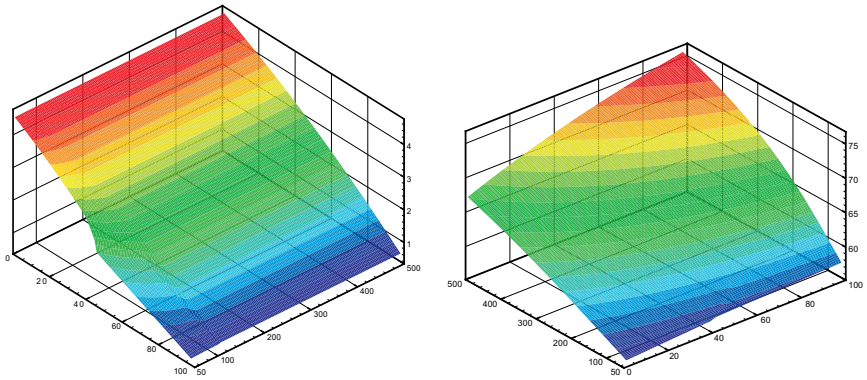


Рис. 1. Зависимость давления МПа (слева) и температуры °C (справа) на глубине 817 м при изменении $Q_l \in (50, 500)$ т/сут, $S_w \in (1\%, 99\%)$

На рис. 1 видно, что, во-первых, изменение дебита жидкости Q_l от 50 до 100 т/сут влияет на давление. Дальнейшее изменение Q_l давления меняет слабо. Во-вторых, давление зависит от изменения обводненности S_w при любом значении дебита Q_l. На изменение температуры оказывают влияние оба параметра Q_l и S_w.

Решение прямой задачи позволяет построить линии уровня для давления и температуры (рис. 1). Видно, что если зафиксировать один из параметров (например, давление), то данному значению давления может соответствовать целый набор значений дебита Q_l и обводненности S_w.

Проведенный анализ изменений дебита жидкости Q_l и обводненности S_w показал, что в окрестности 0.01 МПа и 0.1 °C для фиксированных значений давления и температуры решение обратной задачи неоднозначно.

6. Результаты расчетов обратной задачи

В **обратной задаче** требуется определить количество жидкости поступающей из пласта в скважину (дебит) Q_l и отношение количества воды к количеству нефти (обводненность) S_w, из соотношений (1)–(6) по измеренным давлению и температуре P_1 и T_1 на глубине $Z_1 = 817$ м.

В численных экспериментах данные для обратной задачи вычислялись при трех различных значениях газового фактора $G_{F0} = 1,\ 10,\ 100$, при расходе жидкости $Q_l = 100$ т/сут и обводненности $S_w = 90\%$.

Расчеты прямой задачи показали, что $P_1 = 0.6698$ МПа и $T_1 = 60.8887°$C когда $G_{F0} = 1$, $P_1 = 0.6749$ МПа и $T_1 = 60.8888°$C, если $G_{F0} = 10$ и $P_1 = 0.7227$ МПа и $T_1 = 60.8898°$C в случае $G_{F0} = 100$.

Определение значения расхода жидкости и обводненности при заданном газовом факторе по изменениям давления и температуры проводилось на четырех примерах:

Пример 1. Давление P_1 и температура T_1 не изменились.

Пример 2. Увеличивались давление $P_1 + 0.2$ МПа и температура $T_1 + 5°$C.

Пример 3. Увеличивалось давление $P_1 + 0.2$ МПа и температура T_1 не изменилась.

Пример 4. Давление в забое падало $P_0 - 0.1$ МПа, температура возрастала $T_1 + 7°$C.

Во всех четырех примерах предполагалось, что измерение данных проводилось при двух различных уровнях погрешности **I** (0.25 МПа и 2.5°C) и **II** (0.025 МПа и 0.25°C).

На рис. 2–5 слева направо показаны множества решений обратной задачи при трех различных значениях газового фактора $G_{F0} = 1$, 10, 100. Горизонтальная ось соответствует изменению обводненности S_w, вертикальная ось соответствует изменению дебиту жидкости Q_l. Множество решений обратной задачи заключены внутри соответствующих криволинейных областей. Точности **I** соответствует внешний контур рисунка, точности **II** – внутренний контур.

На рис. 2 видно, что при уменьшении уровня погрешности измерений множество решений обратной задачи уменьшается. При этом точное решение $Q_l = 100$ т/сут и $S_w = 90\%$ попадает внутрь обеих областей.

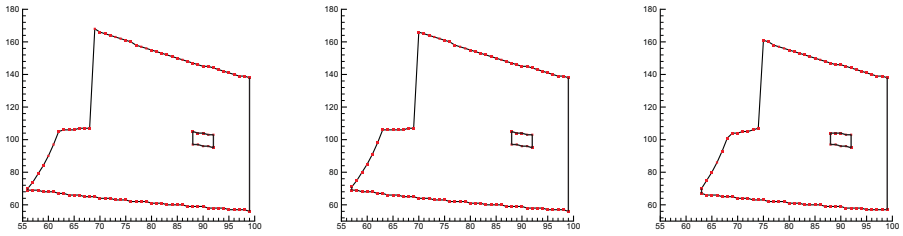


Рис. 2. Пример 1.

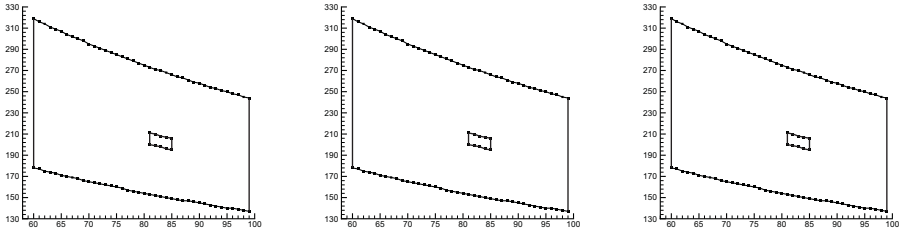


Рис. 3. Пример 2.

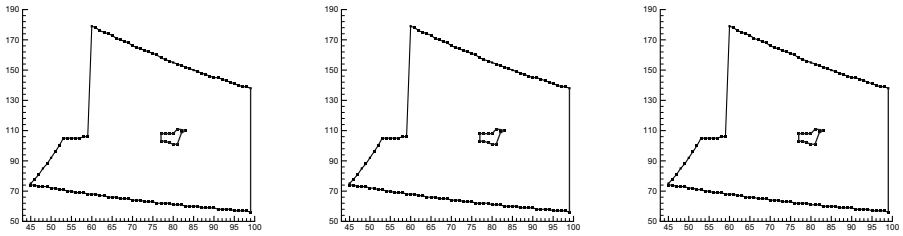


Рис. 4. Пример 3.

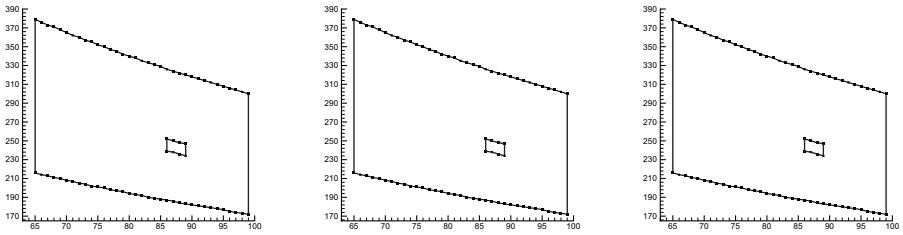


Рис. 5. Пример 4.

7. Заключение

Проведен анализ зависимости температуры и давления на поверхности от изменения дебита Q_l и обводненности S_w в пласте.

Показано, что при заданном уровне погрешности измерений, обратная задача может иметь множество решений, которые сосредоточены в секторе пересечения соответствующих линий уровня. Таким образом, некорректность задачи (а именно, не единственность решения) хотя и является непреодолимой, однако множество решений может быть локализовано в определенном секторе.

Построенные алгоритмы могут быть применимы для решения обратных задач в более общих постановках: определение газового фактора G_{F0} и дебита Q_l по заданной обводненности S_w; определение газового фактора G_{F0} и обводненности S_w по известному дебиту Q_l по измеренным в некоторой точке давлению и температуре.

Отметим, что изложенный алгоритм может быть обобщен также на случай наклонной скважины, наличия погружного насоса и др.

Замечание 1. *В силу сильной нелинейной зависимости данных обратной задачи от искомых параметров, полученные результаты имеют локальный характер, т. е. метод позволяет оценивать относительно небольшие изменения искомых параметров.*

Авторы выражают благодарность В. А. Чеверде за ценные замечания.

8. Приложение 1. Описание функций и констант, входящих в систему (1)–(4)

Движение жидкости по скважине зависит от очень многих факторов. Учет этой зависимости производится на основе эмпирических формул и включает в себя большое количество характеристик нефти, газа, воды, структурных и теплофизических свойств смеси.

В приложении 1 и 2 приведены формулы, которые использовались в численных расчетах.

В правую часть уравнения (2) и (4) входит температура окружающих пород, которая определяется по формуле

$$T_\Gamma(z) = T_r - \Gamma(z)\, z.$$

Здесь T_r – температура пласта, $\Gamma(z)$ – геотермический градиент.

Определим вязкость нефти, которая в дальнейшем влияет на вязкость смеси

$$\mu_o(T) = -\frac{17}{60}T + \frac{57}{2}.$$

Плотность газа, учитывая предположения на модель скважины (см. пункт 4), определяется по формуле

$$\rho_g(P,T) = 2051\,\frac{P}{T+273}.$$

Газовый фактор (отношение полученного из месторождения через скважину количества газа в м^3, приведенного к атмосферному давлению и температуре 20 °C, к количеству добытой за то же время нефти в м^3 при том же давлении и температуре) определяется по формуле через начальное значение газового фактора в забое скважины G_{F0}:

$$G_F(P) = \begin{cases} G_{F0}, & P > 9 \text{ МПа} \\ \frac{G_{F0}}{9}P, & P \le 9 \text{ МПа} \end{cases}.$$

Плотность нефти

$$\rho_o(P) = \rho_{go}\,\frac{22.4\,\rho_{ot} + M_g G_F(P)}{22.4\,\rho_{go} + M_g G_F(P)},$$

где M_g – молекулярная масса газа.

Термический коэффициент расширения воды α_{wt}

$$\alpha_{wt}(T) = 10^{-4}\Big(0.44\,T^{0.637} - 0.8\Big),$$

Предполагаем, что термический коэффициент расширения нефти α_{ot} вычисляется через α_{wt} по формуле:

$$\alpha_{ot}(T) = 2\alpha_{wt}(T).$$

Вязкость воды

$$\mu_w(T) = \exp\Big(\frac{1641.2}{T+273} - 5.5908\Big).$$

Поверхностное натяжение вода-газ

$$\alpha_{wg}(P) = 10^{-1.19+0.01P}.$$

Поверхностное натяжение нефть-газ

$$\alpha_{og}(P,T) = 10^{-1.58-0.05P} - 72 \cdot 10^{-6}(T-32).$$

Поверхностное натяжение нефть-вода вычисляется через уже определенное поверхностное натяжение вода-газ и нефть-газ по формуле

$$\alpha_{ow}(P,T) = \alpha_{wg}(P) - \alpha_{og}(P,T).$$

Число молей ν определяется по следующей формуле

$$\nu(P,T) = \frac{k}{k+1},$$

где k задается таблицей в зависимости от давления в МПа и от температуры в °C [6]:

Значения k						
МПА	10 °C	24 °C	38 °C	65 °C	93 °C	121 °C
0.068	245	270	300	330	370	390
0.102	165	180	190	220	235	250
0.136	120	135	150	165	180	190
0.204	80	88	99	110	120	125
0.34	50	55	59	65	72	76
0.68	25	27	29	32	35	38
2.04	9	9.5	10.5	11.5	12	13
3.401	5.6	6	6.5	7	7.6	8
6.803	3.4	3.5	3.6	3.9	4.2	4.4
13.605	2.1	2.15	2.2	2.3	2.4	2.5

Введем следующее ограничение на число молей ν

$$\nu(P,T) \le \frac{G_F(P) M_o \rho_{g0}}{\rho_o(P) M_g + G_F(P) M_o \rho_{g0}}.$$

Здесь $\rho_{g0} = \rho_g(0.1, 20)$ – плотность газа на поверхности при давлении 0.1 МПа и температуре 20 °C.

9. Приложение 2. Характеристики течения

Выпишем формулы, по которым вычислялись характеристики течения, не меняющиеся при однофазном и двухфазном течении.

Массовый расход водонефтегазовой смеси определяется по формуле

$$G = 1.16 \cdot 10^{-5} \Big(Q_l (1 - S_w)\, b_o\, \rho_{or} + Q_l\, S_w\, \rho_w \Big), \tag{10}$$

где Q_l – дебит, S_w – обводненность, b_o – объемный коэффициент для нефти, ρ_{or} – плотность нефти в пласте, ρ_w – плотность воды.

Расход воды определяется через Q_l и S_w:

$$Q_w = 1.16 \cdot 10^{-5}\, Q_l\, S_w. \tag{11}$$

Массовый расход нефтегазовой смеси определяется по формуле

$$G_{og} = G - Q_w\, \rho_w. \tag{12}$$

9.1. **Однофазный поток (жидкость). Расчет структурных характеристик смеси**

Расходное объемное содержание воды β_w рассчитывается по формуле:

$$\beta_w(P) = \frac{Q_w}{Q_w + \frac{G_{og}}{\rho_o(P)}}, \tag{13}$$

где $\rho_o(P)$ – плотность нефти.

Расходное объемное содержание нефти β_o рассчитывается по формуле:

$$\beta_o(P) = 1 - \beta_w(P).$$

Определим **скоростные характеристики течения**: скорость смеси

$$W(P) = \frac{4}{\pi} \frac{G}{D_i^2 \left(\rho_o(P)\,\beta_o(P) + \rho_w\,\beta_w(P)\right)} \tag{14}$$

и объемный расход жидкости

$$V_l(P) = \frac{\pi}{4} D_i^2\, W(P).$$

В зависимости от скорости смеси W и значения скоростного параметра

$$W_{scr}(T) = 0.064 \cdot 56^{\beta_w(T)} \sqrt{gD_i},$$

вязкость жидкости μ_l, истинное объемное содержание воды в жидкой фазе φ_{wl}, истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе φ_{ol}, поверхностное натяжение жидкость-газ α_{lg} определялись по следующим формулам.

В случае если $W_{scr}(T) \le W(P) < 0.487\sqrt{gD_i}$ и $\beta_w(P) \le 0.5$, вязкость жидкости равна вязкости нефти:

$$\mu_l(T) = \mu_o(T);$$

истинное объемное содержание воды в жидкой фазе имеет вид

$$\varphi_{wl}(P,T) = \frac{W(P)\beta_w(P)}{W(P) - \left(0.425 - 0.827\,\frac{W(P)}{\sqrt{gD_i}}\right)\left(4g\,\alpha_{ow}(P,T)\,\frac{\rho_w - \rho_o(P)}{\rho_o^2(P)}\right)^{0.25}};$$

истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе имеет вид

$$\varphi_{ol}(P,T) = 1 - \varphi_{wl}(P,T),$$

а поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению нефть-газ

$$\alpha_{lg}(P,T) = \alpha_{og}(P,T).$$

В случае если $W(P) < 0.487\sqrt{gD_i}$ и $\beta_w(P) \ge 0.5$ или $W(P) \le W_{scr}(P)$ и $\beta_w(P) < 0.5$, вязкость жидкости равна вязкости воды:

$$\mu_l(T) = \mu_w(T);$$

истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе определяется по формуле

$$\varphi_{ol}(P,T) = \frac{W(P)\beta_o(P)}{W(P) + \left(0.54(1.01 + \beta_w^{0.158}(P)) - \frac{W(P)}{\sqrt{gD_i}}\right)\left(4g\,\alpha_{ow}(P,T)\,\frac{\rho_w - \rho_o(P)}{\rho_w^2}\right)^{0.25}};$$

истинное объемное содержание воды в жидкой фазе имеет вид

$$\varphi_{wl}(P,T) = 1 - \varphi_{ol}(P,T),$$

а поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению вода-газ:

$$\alpha_{lg}(P) = \alpha_{wg}(P).$$

В случае если $W(P) > 0.487\sqrt{gD_i}$ и $\beta_w(P) > 0.5$, истинное объемное содержание воды равно расходному объемному содержанию воды:

$$\varphi_{wl}(P) = \beta_w(P);$$

истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе определяется по формуле

$$\varphi_{ol}(P) = 1 - \varphi_{wl}(P);$$

вязкость жидкости определяется по формуле

$$\mu_l(P,T) = \mu_w(T) \cdot 10^{3.2\left(1-\beta_w(P)\right)},$$

а поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению вода-газ:

$$\alpha_{lg}(P) = \alpha_{wg}(P).$$

В случае если $W(P) > 0.487\sqrt{gD_i}$ и $\beta_w(P) \le 0.5$, истинное объемное содержание воды равно расходному объемному содержанию воды:

$$\varphi_{wl}(P) = \beta_w(P);$$

поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению нефть-газ

$$\alpha_{lg}(P,T) = \alpha_{og}(P,T),$$

а истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе определяется по формуле

$$\varphi_{ol}(P) = 1 - \varphi_{wl}(P).$$

Для определения вязкости жидкости, введем параметр B:

$$B(P,T) = \begin{cases} \mu_w(T), & A(P) \le 1 \\ A(P)\,\mu_w(T), & A(P) > 1 \end{cases},$$

где

$$A(P) = \frac{1 + 20\,\beta_w^2(P)}{\left(\frac{8\,W(P)}{D_i}\right)^{0.48\,\beta_w(P)}}.$$

Тогда вязкость жидкости определяется по формуле

$$\mu_l(P,T) = B(P,T)\,\frac{1 + 2.9\beta_w(P)}{1 - \beta_w(P)}.$$

Определим **теплофизические свойства смеси**, входящие явно в правую часть системы (1), (2): плотность жидкостной смеси определяется по формуле

$$\rho_l(P,T) = \rho_o(P)\varphi_{ol}(P,T) + \rho_w\varphi_{wl}(P,T),$$

теплоемкость жидкостной смеси имеет вид

$$C_l(P,T) = \frac{\rho_w\varphi_{wl}(P,T)C_w(P,T) + \rho_o(P)\varphi_{ol}(P,T)C_o}{\rho_l(P,T)}$$

и термический коэффициент расширения жидкой фазы определяется по формуле

$$\alpha_{lt}(P,T) = \alpha_{ot}(T)\varphi_{ol}(P,T) + \alpha_{wt}(T)\varphi_{wl}(P,T).$$

Потери на трение, входящие в правую часть уравнения (1), определяются по формуле

$$i_{fr}(P,T) = 7.95 \cdot 10^{-6} V_l^{1.75}(P) \sqrt[4]{\frac{\mu_l(P,T)}{D_i^{4.75}}}.$$

9.2. **Двухфазный поток (жидкость и газ).** В двухфазном потоке, в отличии от однофазного, появляется газовая фаза. Поэтому расчет **структурных характеристик смеси**, проходит с учетом газовой составляющей по следующим формулам, а именно: расходное объемное газосодержание в системе газ-нефть определяется по формуле

$$\beta(P,T) = \frac{\rho_o(P)}{\rho_o(P) - \rho_g(P,T)\Big(1 - \frac{M_o}{\nu(P,T) M_g}\Big)};$$

расходное объемное содержание воды имеет вид

$$\beta_w(P,T) = \frac{Q_w}{Q_w + \frac{G_{og}}{\rho_o(P)(1-\beta(P,T)) + \rho_g(P,T)\beta(P,T)}}; \tag{15}$$

расходное объемное газосодержание определяется по формуле

$$\beta_g(P,T) = \beta(P,T)\big(1 - \beta_w(P,T)\big);$$

расходное объемное содержание нефти имеет вид

$$\beta_o(P,T) = 1 - \beta_g(P,T) - \beta_w(P,T);$$

расходное содержание воды в жидкой фазе определяется по следующей формуле

$$\beta_{wl}(P,T) = \frac{\beta_w(P,T)}{1 - \beta_g(P,T)},$$

а расходное содержание нефти в жидкой фазе имеет вид

$$\beta_{ol}(P,T) = \frac{\beta_o(P,T)}{1 - \beta_g(P,T)}.$$

Учитывая структурных характеристик смеси, введем **скоростные характеристики течения**. Скорость смеси определяется по формуле

$$W(P,T) = \frac{4}{\pi} \frac{G}{D_i^2 \left(\rho_o(P)\,\beta_o(P,T) + \rho_w\,\beta_w(P,T) + \rho_g(P,T)\,\beta_g(P,T)\right)}; \tag{16}$$

объемный расход газа

$$V_g = \frac{\pi}{4} D_i^2\, W(P,T)\, \beta_g(P,T);$$

объемный расход жидкости

$$V_l(P,T) = \frac{\pi}{4} D_i^2\, W(P,T) \left(1 - \beta_g(P,T)\right)$$

и приведенная скорость газа

$$W_{gs}(P,T) = \frac{4}{\pi\, D_i^2}\, V_g(P,T).$$

Выбор параметров в зависимости от скорости течения. Как и в однофазном потоке определим скоростной параметр

$$W_{scr}(P,T) = 0.064 \cdot 56^{\beta_{wl}(P,T)} \sqrt{g\, D_g(P,T)}. \tag{17}$$

Здесь D_g аналог внутреннего диаметра скважины D_i в зависимости от истинного объемного содержания газа φ_g:

$$D_g(P,T) = \sqrt{1-\varphi_g(P,T)}\, D_i. \tag{18}$$

Тогда скорость жидкой фазы определяется по формуле

$$W_l(P,T) = \frac{1-\beta_g(P,T)}{1-\varphi_g(P,T)} W(P,T). \tag{19}$$

Дальнейшие параметры определяются в зависимости от скорости, как и в однофазном случае.

В случае если $W_{scr} \le W_l < 0.487\sqrt{gD_g}$ и $\beta_{wl} \le 0.5$, вязкость жидкости равна вязкости нефти:

$$\mu_l(T) = \mu_o(T);$$

истинное объемное содержание воды имеет вид

$$\varphi_{wl}(P,T) = \frac{W_l(P,T)\beta_{wl}(P,T)}{W_l(P,T) - \left(0.425 - 0.827\,\frac{W_l(P,T)}{\sqrt{g\,D_g(P,T)}}\right)\left(4\,g\,\alpha_{ow}(P,T)\,\frac{\rho_w-\rho_o(P)}{\rho_o^2(P)}\right)^{0.25}};$$

истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе определяется через истинное объемное содержание воды:

$$\varphi_{ol}(P,T) = 1 - \varphi_{wl}(P,T), \tag{20}$$

а поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению нефть-газ

$$\alpha_{lg}(P,T) = \alpha_{og}(P,T). \tag{21}$$

В случае если $W_l < 0.487\sqrt{gD_g}$ и $\beta_{wl} \ge 0.5$ или $W_l \le W_{scr}$ и $\beta_{wl} < 0.5$, вязкость жидкости равна вязкости воды

$$\mu_l(T) = \mu_w(T);$$

истинное объемное содержание нефти определяется по формуле

$$\varphi_{ol}(P,T) = \tag{22}$$

(23)

$$= \frac{W_l(P,T)\beta_{ol}(P,T)}{W_l(P,T) + \left(0.54\big(1.01+\beta_{wl}^{0.158}(P,T)\big) - \frac{W_l(P,T)}{\sqrt{g\,D_g(P,T)}}\right)\left(4\,g\,\alpha_{ow}(P,T)\,\frac{\rho_w-\rho_o(P)}{\rho_w^2}\right)^{0.25}};$$

истинное объемное содержание воды определяется через истинное объемное содержание нефти в жидкой фазе :

$$\varphi_{wl}(P,T) = 1 - \varphi_{ol}(P,T),$$

а поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению вода-газ:

$$\alpha_{lg}(P) = \alpha_{wg}(P). \tag{24}$$

В случае если $W_l > 0.487\sqrt{gD_g}$ и $\beta_{wl} > 0.5$, истинное объемное содержание воды равно расходному содержанию воды в жидкой фазе:

$$\varphi_{wl}(P,T) = \beta_{wl}(P,T);$$

истинное объемное содержание нефти определяется по формуле

$$\varphi_{ol}(P,T) = 1 - \varphi_{wl}(P,T); \tag{25}$$

вязкость жидкости равна вязкости воды

$$\mu_l(P,T) = \mu_w(T)\, 10^{3.2\left(1-\beta_{wl}(P,T)\right)},$$

а поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению вода-газ:

$$\alpha_{lg}(P) = \alpha_{wg}(P). \tag{26}$$

В случае если $W_l > 0.487\sqrt{gD_g}$ и $\beta_{wl} \le 0.5$, истинное объемное содержание воды равно расходному содержанию воды в жидкой фазе:

$$\varphi_{wl}(P,T) = \beta_{wl}(P,T);$$

поверхностное натяжение жидкость-газ равно поверхностному натяжению нефть-газ:

$$\alpha_{lg}(P,T) = \alpha_{og}(P,T), \tag{27}$$

истинное объемное содержание нефти определяется по формуле

$$\varphi_{ol}(P,T) = 1 - \varphi_{wl}(P,T). \tag{28}$$

Как и в однофазном потоке, для определения вязкости жидкости, введем параметр B:

$$B(P,T) = \begin{cases} \mu_w(T), & A(P,T) \le 1 \\ A(P,T)\,\mu_w(T), & A(P,T) > 1 \end{cases}.$$

Здесь

$$A(P,T) = \frac{1 + 20\,\beta_{wl}^2(P,T)}{\left(\frac{8\,W_l(P,T)}{D_g(P,T)}\right)^{0.48\,\beta_{wl}(P,T)}}.$$

Тогда вязкость жидкости находится по формуле

$$\mu_l(P,T) = B(P,T)\,\frac{1 + 2.9\beta_{wl}(P,T)}{1 - \beta_{wl}(P,T)}.$$

В двухфазном потоке необходимо учитывать **структуру течения**: пузырьковую, пробковую и кольцевую. Структура течения определяются в зависимости от трех скоростных характеристик газа: безразмерной скорости газа, безразмерной приведенной скорости газа и приведенной скорости газа. Безразмерная скорость газа определяется по формуле:

$$W_{gd}(P,T) = \frac{4}{\pi}\,\frac{V_g(P,T)}{D_i}\sqrt{\frac{\rho_l(P,T)}{g\,\alpha_{lg}(P,T)}}. \tag{29}$$

Здесь $\rho_l(P,T)$ – плотность жидкостной смеси, имеет вид

$$\rho_l(P,T) = \rho_o(P)\varphi_{ol}(P,T) + \rho_w\varphi_{wl}(P,T). \tag{30}$$

Безразмерная приведенная скорость газа определяется по формуле

$$W_{gds}(P,T) = 75 + 84\left(\frac{W_{gd}(P,T)\,V_l(P,T)}{V_g(P,T)}\right)^{0.75}, \tag{31}$$

а приведенная скорость газа имеет вид

$$V_{gs}(P,T) = 1.75\,D_i^{2.5} + 1.25\,V_l(P,T).$$

Для **пузырьковой структуры** течения истинное газосодержание $\varphi_g(P,T)$ считается по формуле

$$\varphi_g(P,T) = \frac{V_g(P,T)}{V_g(P,T) + V_l(P,T) + 0.233\, D_i^2 \sqrt[3]{\frac{\alpha_{lg}(P,T)}{\alpha_{wa}}}}. \tag{32}$$

Здесь α_{lg} – поверхностное натяжение на границе жидкость-газ, α_{wa} – поверхностное натяжение воды на границе с воздухом.

В случае если $V_g > V_{gs}$, образуется **пробковая структура** течения. Тогда истинное газосодержание рассчитывается по формуле

$$\varphi_g(P,T) = \frac{D_i \sqrt{V_g(P,T)}}{D_i \sqrt{V_g(P,T)} + 0.6023\, V_l(P,T) + 0.0942\, D_i^{1.5} \sqrt[3]{\frac{\alpha_{lg}(P,T)}{\alpha_{wa}}}}. \tag{33}$$

В случае если $W_{gd} > W_{gds}$, образуется **кольцевая структура** течения. Тогда истинное газосодержание имеет вид

$$\varphi_g(P,T) = \beta(P,T). \tag{34}$$

Алгоритм определения истинного объемного содержания газа φ_g

Замечание 2. *Параметры D_g и W_l в формуле* (18) *в* (19) *соответственно определяются через параметр φ_g. В свою очередь φ_g определяется через параметр α_{lg}, который определяется по формулам* (21)–(27) *в зависимости от D_g, W_{scr} и W_l.*

В работе реализован следующий итерационный алгоритм определения параметра φ_g:

(1) полагаем $\varphi_g = 0$;
(2) по известному параметру φ_g находим D_g, W_{scr} и W_l по формулам (18)–(19);
(3) определяем φ_{ol} по формулам в зависимости от D_g, W_{scr} и W_l по формулам (20), (22), (25) и (28);
(4) определяем ρ_l по формуле (30);
(5) находим W_{gd} по формуле (29) и W_{gds} по (31);
(6) в зависимости от структуры потока определяем φ_g по формулам (32)–(34);
(7) далее переходим снова на шаг 2.

Расчеты показали, что для определения истинного объемного содержания газа достаточно провести 5 итераций.

Определим **теплофизические свойства смеси**: теплоемкость жидкостной смеси, теплоемкость газожидкостной смеси и термический коэффициент расширения жидкой фазы, которые входят явно в правую часть системы (3), (4). Сначала определим плотность газожидкостной смеси по формуле

$$\rho(P,T) = \rho_l(P,T)\big(1 - \varphi_g(P,T)\big) + \rho_g(P,T)\varphi_g(P,T).$$

Тогда теплоемкость жидкостной смеси имеет вид

$$C_l(P,T) = \frac{\rho_w \varphi_{wl}(P,T) C_w + \rho_o(P)\varphi_{ol}(P,T) C_o}{\rho_l(P,T)};$$

теплоемкость газожидкостной смеси определяется по формуле

$$C_{gl}(P,T) = \frac{\big(1-\varphi_g(P,T)\big)\rho_l C_l + \varphi_g(P,T)\rho_g(P,T)C_g}{\rho(P,T)}$$

и термический коэффициент расширения жидкой фазы равен

$$\alpha_{lt}(P,T) = \alpha_{ot}(T)\varphi_{ol}(P,T) + \alpha_{wt}(T)\varphi_{wl}(P,T).$$

Расчет потерь на трение i_{fr}, входящих в правую часть уравнения (3), происходит в зависимости от структуры течения.

(1) В случае пузырьковой и пробковой структуры потери на трение определяются по формуле

$$i_{fr}(P,T) = 9.07\cdot 10^{-9}\frac{V_g^2(P,T)}{D_i^{5.33}} + 7.95\cdot 10^{-6}V_l^{1.75}(P,T)\sqrt[4]{\frac{\mu_l(P,T)}{D_i^{4.75}}} +$$

$$+1.08\cdot 10^{-7}\mu_l^{0.025}(P,T)\big(V_g(P,T)\,V_l(P,T)\,10^6\big)^{1.06-13(D_i-0.0381)}\frac{\sqrt[3]{V_l(P,T)}}{D_i^3}.$$

(2) В случае кольцевой структуры течения введем два дополнительных параметра: число Рейнольдса

$$Re(P,T) = 10^3\,W_{gs}(P,T)D_i\frac{\rho_g(P,T)}{\mu_g}$$

и безразмерный параметр N_l, влияющий на коэффициент трения λ и относительную шероховатость E_r:

$$N_l(P,T) = \left(\frac{\mu_l(P,T)\,W_{gs}}{10^3\alpha_{lg}(P,T)}\right)^2\,\frac{\rho_g(P,T)}{\rho_l(P,T)}.$$

В случае если $N_l \le 0.005$, относительная шероховатость находится по формуле

$$E_r(P,T) = 34\frac{\alpha_{lg}(P,T)}{\rho_l(P,T)\,D_i\,W_{gs}^2(P,T)}.$$

В случае если $N_l > 0.005$, относительная шероховатость имеет вид

$$E_r(P,T) = 174.8\frac{\alpha_{lg}(P,T)\,N_l^{0.302}(P,T)}{D_i\,\rho_l(P,T)\,W_{gs}^2(P,T)}.$$

В случае если $E_r \le 0.05$, коэффициент трения определяется по формуле

$$\lambda(P,T) = 0.067\Big(\frac{158}{Re(P,T)} + 2E_r(P,T)\Big)^{0.2}.$$

В случае если $E_r > 0.05$, коэффициент трения имеет вид

$$\lambda(P,T) = \frac{1}{4[\log(0.27\,E_r(P,T))]^4} + 0.268\,E_r^{1.75}(P,T).$$

Тогда потери на трение считаются по формуле

$$i_{fr}(P,T) = \lambda(P,T)\,\rho_g(P,T)\,\frac{W_{gs}^2(P,T)}{2D_i}10^{-6}$$

Список литературы

[1] С. М. Бикбулатов, А. А. Пашали, *Анализ и выбор методов расчета градиента давления в стволе скважины*, Нефтегазовое дело, 2005 (*http://www.ogbus.ru/authors/Bikbulatov/Bikbulatov_1.pdf*).
[2] С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009.
[3] Ш. К. Гиматудинов, *Физика нефтяного и газового пласта*, Москва, Недра, 1971.
[4] Ю. П. Желтов, *Механика нефтегазоносного пласта*, Москва, Недра, 1975.
[5] И. Т. Мищенко, *Скважинная добыча нефти*, Москва, Нефть и Газ, 2003.
[6] William D. McCain, Jr., *The Properties of Petroleum Fluids*, USA, Oklahoma, PennWell Books, 1989.

Сергей Игоревич Кабанихин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ksi52@mail.ru

Александр Николаевич Черемисин
Технологическая компания Schlumberger,
ул. Зеленая Горка, 1/10,
630060, Новосибирск, Россия
E-mail address: acheremisin@slb.com

Максим Александрович Шишленин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" Часть I, стр. С.380–С.394 (2010)

УДК 001.89

ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ (О ПЕРВОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ МОЛОДЕЖНОЙ НАУЧНОЙ ШКОЛЕ-КОНФЕРЕНЦИИ "ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ")

С.И. Кабанихин

Abstract. A short classification of inverse and ill-posed problems is presented as well as an information about the first international school-conference "Theory and Numerical Methods of Solving of Inverse and Ill-Posed Problems".

Keywords: classification of inverse and ill-posed problems

1. Введение

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН при поддержке РФФИ, НГУ, ряда институтов СО РАН, Югорского НИИИТ, компаний "Бэйкер-Хьюз", "Интел" и "Шлюмберже" провел международную молодежную научную школу-конференцию "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". Школа-конференция проходила с 10 по 20 августа 2009 года в аудиториях Института математики. В работе конференции участвовали представители Казахстана, Киргизии, Китая, США, Турции, Франции, Узбекистана, Украины и 16 городов России.

Научная программа школы-конференции включала в себя 42 пленарные 40-минутные лекции и более сорока 20-минутных докладов. Пленарные лекции прочитали академики А. Н. Коновалов и М. И. Эпов, члены-корреспонденты РАН Б. Д. Аннин, В. В. Васин (Екатеринбург), В. Г. Романов, И. А. Тайманов,

Kabanikhin, S.I. Inverse and Ill-Posed problems.
© 2010 Кабанихин С.И.
Поступила 10 сентября 2009 г.

А. М. Федотов (в соавторстве с академиком Ю. И. Шокиным), 36 докторов и 12 кандидатов наук. С научными сообщениями выступили 22 иногородних и 25 новосибирских молодых ученых. В рамках проведения школы-конференции была организована работа специальных секций — по высокопроизводительным и параллельным вычислительным алгоритмам ("Интел"), проблемам и алгоритмам томографии (ИТПМ), задачам сейсмики, геоэлектрики, индукционного каротажа (ИНГГ, "Бэйкер Хьюз", "Шлюмберже"). В работе конференции приняли участие сотрудники 69 учебных, научных и научно-производственных организаций.

В научную программу школы-конференции входили теория обратных и некорректных задач, методы регуляризации, итерационные и прямые методы решения обратных задач, численные методы решения прямых и обратных задач акустики, томографии, геоэлектрики, сейсмологии, гравиметрии, теории переноса и др.

Специальные призы за наиболее интересные лекции были присуждены д.ф.-м.н. В. С. Белоносову (ИМ) и д.ф.-м.н. В. В. Пикалову (ИТПМ), за лучшие доклады молодых ученых — к.ф.-м.н. М. А. Шишленину (ИМ) и П. А. Чистякову (Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург).

2. Что такое обратные и некорректные задачи?

Первые публикации по обратным и некорректным задачам появились в первой половине XX века. Они были связаны с исследованиями физиков (обратные задачи квантовой теории рассеяния, электродинамики, акустики), геофизиков (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областей естествознания. С появлением мощных ЭВМ область приложений обратных и некорректных задач охватила практически все научные дисциплины, в которых используются математические методы. Главные направления применения - это геофизика, астрономия, визуализация данных, медицинская и промышленная томография, дефектоскопия и дистанционное зондирование и многое другое.

В прямых задачах математической физики исследователи стремятся найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления, например, распространение звука, тепла, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и так далее. При этом свойства среды (коэффициенты уравнений), а также начальное состояние процесса (в нестационарном случае) или его свойства на границе (в случае ограниченной области и/или в стационарном случае) предполагаются известными. Однако именно свойства среды на практике часто являются неизвестными. А это означает, что необходимо ставить и решать обратные задачи, в которых требуется определить либо коэффициенты уравнений, либо неизвестные начальные или граничные условия, либо местоположение, границы и другие свойства области, в которой происходит исследуемый процесс. Эти задачи в большинстве случаев некорректны (т.е. в этих задачах нарушено хотя бы одно из трех свойств корректности - условие существования, единственности и устойчивости решения по отношению к малым вариациям данных задачи). А искомыми коэффициентами уравнений являются, как правило, плотность, электропроводность, теплопроводность и другие важные свойства исследуемой среды. Также очень часто в обратных

задачах требуется найти местоположение, форму и структуру включений, дефектов, источников (тепла, колебаний, напряжения, загрязнения) и так далее. Неудивительно, что при таком широком наборе приложений, теория обратных и некорректных задач с момента своего появления стала одной из наиболее стремительно развивающихся областей современной науки.

Основы теории обратных и некорректных задач были заложены в СССР, начиная с середины XX века. Однако в последние десятилетия по известным причинам лидерство российской школы по обратным и некорректным задачам пошатнулось. Очень много способных специалистов, в том числе молодых, уехали из страны. И если за рубежом издано уже более 11 тысяч книг, в названии которых есть слова "обратные задачи", то в России такие книги появляются все реже и реже. Правда, обнадеживающим является издание в прошлом году учебника ("Обратные и некорректные задачи", С. И. Кабанихин, СНИ, 2008) с грифом "Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки РФ для студентов вузов по специальностям "Прикладная математика и информатика", "Прикладная математика", "Механика", "Прикладная механика".

Каждый человек ежеминутно решает обратные и некорректные задачи. И решает их, как правило, быстро и эффективно (если, конечно, находится в добром здравии и ясном сознании). Возьмем, например, зрительное восприятие. Установлено, что за минуту мы фиксируем лишь конечное число точек окружающего мира. А как же тогда мы видим все? Мозг (в этой ситуации - мощный персональный компьютер) по увиденным точкам восполняет (интерполирует и экстраполирует) все, что глаз не успел зафиксировать. Ясно, что восполнить истинную картину (в общем случае - объемную и цветную) по нескольким точкам можно лишь в случае, когда она уже более-менее знакома (большинство предметов и образов мы уже видели, а иногда и касались руками). То есть, несмотря на сильную некорректность (неединственность и неустойчивость решения) задачи (восстановить по нескольким точкам наблюдаемый объект и все, что его окружает), мозг решает эту задачу довольно быстро. Почему? Он использует богатый опыт (априорную информацию). И вообще, если мы хотим понять что-то достаточно сложное, решить задачу, вероятность ошибки в которой достаточно велика, мы, как правило, приходим к неустойчивой (некорректной) задаче.

Можно сказать, что человек (особенно, склонный искать нестандартные пути решения) постоянно сталкивается с некорректными задачами. В самом деле, каждый понимает, как легко ошибиться, пытаясь восстановить прошлое по некоторым фактам настоящего (проследить мотивы и детали преступления по имеющимся уликам, понять причины зарождения и этапы развития болезни по результатам обследования и т.п.). Или заглянуть в будущее (предвидеть жизненный путь ребенка, направление развития страны и вообще какого-либо достаточно сложного процесса). Или проникнуть в зону недоступности и понять, что там происходит (исследовать внутренние органы человека, обнаружить месторождение полезных ископаемых, узнать что-либо новое о Вселенной и т.д.). В сущности, любая попытка расширить границы непосредственного (чувственного, зрительного, слухового и т.п.) восприятия окружающего мира приводит к некорректным задачам. Казалось бы, можно сказать, что, научившись решать устойчивые (корректные) задачи, математики перешли к более

сложным неустойчивым (обратным и некорректным) задачам. Но исторически это совсем не так, поскольку во все века человек был окружен некорректными задачами, и математики пытались решать такие задачи, обходясь без соответствующих терминов.

Обратные и некорректные задачи объединяет одно важное свойство — неустойчивость решения по отношению к малым ошибкам измерений данных. В большинстве интересных случаев обратные задачи являются некорректными, а некорректные задачи, как правило, можно сформулировать как обратные по отношению к некоторым прямым (корректным) задачам. Но поскольку исторически обратные и некорректные задачи формулировались и изучались довольно часто независимо и параллельно, сейчас в научной литературе используются оба этих термина.

Подводя итоги, можно сказать, что специалисты по обратным и некорректным задачам занимаются исследованием свойств и методов регуляризации неустойчивых задач. Иначе говоря, математики пытаются создавать и изучать устойчивые методы приближения неустойчивых отображений. С точки зрения линейной алгебры это означает поиск приближенных методов нахождения нормального псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольными, вырожденными или плохо обусловленными матрицами. В функциональном анализе главным примером некорректных задач является операторное уравнение $Aq = f$, в котором оператор является компактным (вполне непрерывным). В последнее время появились работы, в которых некоторые задачи математической статистики трактуются как обратные задачи теории вероятностей. С точки зрения теории информации, специалисты по обратным и некорректным задачам исследуют свойства отображений компактов с большой эпсилон-энтропией в таблицы с малой эпсилон-энтропией.

3. Об определении обратных и некорректных задач

Каждый человек ежеминутно решает *обратные и некорректные* задачи. И решает, как правило, быстро и эффективно (если, конечно, находится в добром здравии и ясном сознании). Возьмем, к примеру, зрительное восприятие. Установлено, что за минуту глаз человека фиксирует лишь конечное число точек окружающего мира. А как же тогда человек видит все? Мозг (в этой ситуации — персональный компьютер) по увиденным точкам восполняет (интерполирует и экстраполирует) все, что глаз не успел зафиксировать. Ясно, что воссоздать истинную картину (в общем случае — объемную и цветную!) по нескольким точкам можно лишь в случае, когда она хорошо знакома (большинство предметов мы уже видели, а иногда и трогали руками). То есть, несмотря на *некорректность* (*неединственность и неустойчивость*) задачи (восстановить по нескольким точкам наблюдаемый объект и все, что его окружает) мозг справляется с этой задачей довольно быстро. Почему? Он использует богатый жизненный опыт (*априорную информацию*). Достаточно мельком взглянуть на человека, чтобы понять, кто перед вами: старик или ребенок. Но если ставить перед собой задачу определения возраста человека с точностью до пяти лет, беглого взгляда, как правило, недостаточно.

Уже на примере, упомянутом в эпиграфе, видно, что рассмотрение только лишь тени Земли на поверхности Луны недостаточно для однозначного решения обратной задачи проективной геометрии (восстановления формы Земли).

Многие полагают (писал Аристотель), что Земля имеет форму барабана на основании того, что линия горизонта на закате — прямая. И Аристотель приводит еще два доказательства шарообразности (привлекая дополнительную информацию): предметы в любой точке поверхности падают вертикально (к центру тяжести), а картина звездного неба меняется при движении наблюдателя по поверхности Земли.

Вообще говоря, при желании понять что-то достаточно сложное, решить задачу, вероятность ошибки в которой велика, мы обычно приходим к *неустойчивой* (*некорректной*) задаче. Можно сказать, что человек постоянно сталкивается с некорректными задачами. В самом деле, каждый понимает, как легко ошибиться, пытаясь восстановить прошлое по некоторым фактам настоящего (воссоздать картину преступления по имеющимся прямым и косвенным уликам, выявить причины возникновения болезни по результатам обследования и т. п.); или заглянуть в будущее (предсказать стихийное бедствие или хотя бы погоду через неделю); или "проникнуть" в зону недоступности (недра Земли — геофизика, мозг человека — ЯМР-томография) и понять, что там происходит.

В сущности, любая попытка расширить границы непосредственного (зрительного, слухового и т. п.) восприятия окружающего мира приводит к некорректным задачам.

Что же такое обратные и некорректные задачи? В отличие от обратных задач, для которых нет единого строгого определения, термин "некорректная задача" означает, что задача либо *не имеет решения* (в интересующем нас классе), либо, напротив, имеет *много* решений (как минимум два), либо процедура нахождения решения *неустойчива* (т. е. при малейшей ошибке измерений полученное решение может как угодно сильно отличаться от точного). Наибольшую сложность при решении представляет собой именно третье свойство некорректных задач — неустойчивость. Поэтому под некорректными задачами часто подразумевают неустойчивые.

Для определения различных классов *обратных задач*, следует сначала договориться о том, что такое *прямая задача*. В самом деле, "обратное" бывает не иначе, как по отношению к чему-то "прямому". Рассмотрим в качестве примера задачи математической физики.

В математической физике под *прямыми задачами* обычно понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т. п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются

1) область, в которой процесс изучается;
2) уравнение, описывающее данный процесс;
3) начальные условия (если процесс нестационарный);
4) условия на границе исследуемой области.

Например, для уравнения акустики можно поставить начально-краевую прямую задачу следующим образом. В области

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{с границей} \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathbb{R}^n \text{ — евклидово пространство,} \tag{1}$$

требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения акустики

$$c^{-2}(x)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla u + h(x,t), \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u_t(x,0)=\psi(x) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=g(x,t). \tag{4}$$

Здесь $u(x,t)$ — акустическое давление; $c(x)$ — скорость распространения звука в среде; $\rho(x)$ — плотность среды; $h(x,t)$ — функция источников. Эта задача (как большинство прямых задач математической физики) корректна, т. е., однозначно разрешима и устойчива по отношению к малым вариациям данных. Данными для решения прямой задачи (1)–(4) являются область Ω, коэффициенты $c(x)$, $\rho(x)$ и функция источника $h(x,t)$ в уравнении (2), начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (3) и граничные условия $g(x,t)$ в (4).

В обратной задаче помимо $u(x,t)$ неизвестны какие-либо функции, входящие в прямую задачу. Эти неизвестные называются *решением обратной задачи*. Для их определения к заданным уравнениям (2)–(4) добавляется какая-либо дополнительная информация о решении прямой задачи — *данные обратной задачи*. (Иногда к данным обратной задачи относят и известные коэффициенты прямой — вариантов бывает очень много). Пусть, например, дополнительной информацией будет значение решения прямой задачи (2)–(4) на границе

$$u|_{\Gamma}=f(x,t). \tag{5}$$

В обратной задаче требуется по данным $f(x,t)$ определить неизвестные функции, входящие в формулировку прямой задачи. В зависимости от того, какие из функций являются неизвестными, обратные задачи математической физики можно разделить на группы. Сделаем это на рассмотренном нами примере.

Классификация по искомым функциям.

Обратная задача (2)–(5) называется *ретроспективной*, если требуется восстановить начальные условия, т.е., функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (3). Обратная задача (2)–(5) называется *граничной*, если требуется найти функцию, входящую в граничное условие (функцию $g(x,t)$). Обратная задача (2)–(5) называется *задачей продолжения*, если начальные условия (3) неизвестны, а дополнительная информация (5) и граничные условия (4) заданы только на части границы $\Gamma_1\subseteq\Gamma$ области Ω и требуется определить решение $u(x,t)$ уравнения (2) (продолжить решение внутрь области). Обратная задача (2)–(5) называется *задачей об источнике*, если требуется определить источник, т. е., функцию $h(x,t)$ из уравнения (2). Обратная задача (2)–(5) называется *коэффициентной*, если требуется восстановить коэффициенты ($c(x)$ и $\rho(x)$), входящие в основное уравнение.

Сразу же отметим, что данная классификация не является полной. Бывает так, что неизвестны и начальные, и граничные условия. Бывает, что неизвестной оказывается сама область Ω (или часть ее границы).

Классификация по дополнительной информации.

Возможны и другие (помимо начально-краевой (2)–(4)) постановки прямой задачи акустики (спектральная, рассеяния, кинематическая и т.д.), в которых требуется найти соответствующие характеристики акустического процесса (собственные частоты, отраженные волны, времена пробега волны и т.д.). Измерения этих характеристик экспериментаторами порождают новые классы обратных задач акустики.

Наиболее доступными на практике являются измерения на границе исследуемой области (5), но иногда измерительные приборы могут быть размещены внутри объекта

$$u(x_m, t) = f_m(t), \qquad m = 1, 2, \dots \tag{6}$$

(*внутренние задачи*). В ретроспективных обратных задачах (по аналогии с задачами оптимального управления) используются так называемые "финальные" наблюдения

$$u(x, T) = \hat{f}(x). \tag{7}$$

При гармоническом режиме колебаний $u(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}\bar{u}(x,\omega)$ ставятся *обратные задачи рассеяния* и дополнительная информация задается, например, в виде

$$\bar{u}(x, \omega_\alpha) = \bar{f}(x, \alpha), \quad x \in X_1, \quad \alpha \in \Omega, \tag{8}$$

где X_1 — множество точек наблюдений; $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — множество частот, на которых ведутся наблюдения. В некоторых случаях известны собственные частоты соответствующего дифференциального оператора

$$\Delta U - \nabla \ln \rho \cdot \nabla U = \lambda U$$

и различные характеристики собственных функций (*спектральные обратные задачи*). Иногда удается фиксировать в точках $\{x_k\}$ времена прихода волн, порожденных локальными источниками, сосредоточенными в точках $\{x^m\}$:

$$\tau(x^m, x_k) = \tilde{f}(x^m, x_k), \qquad x_k \in X_1, \quad x^m \in X_2.$$

В этом случае задача восстановления скорости $c(x)$ называется *обратной кинематической задачей.*

Классификация по уравнениям.

Итак, только для уравнения акустики мы получаем набор M_1 различных обратных задач в зависимости от количества и вида неизвестных функций, совокупность которых будем обозначать символом q. С другой стороны, можно получить M_2 различных вариантов обратных задач в зависимости от количества и типа измеряемых величин (дополнительной информации) — данных обратной задачи, совокупность которых будем обозначать через f. Тогда символически обратную задачу можно записать в виде операторного уравнения

$$Aq = f, \tag{9}$$

где A — оператор, действующий из пространства искомых элементов Q в пространство измеряемых величин F.

В заключение заметим, что вместо уравнения акустики мы могли бы рассмотреть уравнение теплопроводности, переноса излучения, Лапласа, Пуассона или систему уравнений Ламе, Максвелла и т. п. — скажем, M_3 различных вариантов. Но тогда только для уравнений математической физики можно определить порядка $M_1 M_2 M_3$ различных обратных задач, многим из которых посвящены целые монографии.

Замечание 1. *Разумеется, можно еще более обобщить понятие обратной задачи, поскольку иногда и сам закон (уравнение) неизвестен. В этом случае требуется по результатам опытов (наблюдений) установить закон (уравнение).*

Открытию новых законов в математической форме (уравнений) предшествует множество экспериментов, размышлений и дискуссий, и этот сложный (исторический) процесс вряд ли стоит называть решением обратной задачи. Однако, термин "обратные задачи" все чаще проникает в самые разные разделы научной литературы. Например, появляются попытки взглянуть на математическую статистику как на обратную задачу по отношению к теории вероятностей. Очень много общего можно найти между теорией обратных задач и теорией управления, распознавания образов и многими другими областями знаний. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно, например, набрать в поисковой системе www.amazon.com несколько слов, скажем "inverse problems books". В момент написания этих строк (31 мая 2007 года) упомянутая система выдала 107 книг, в названии которых есть слова "inverse problems". Причем в ссылке на каждую книгу есть совет: "see more references in this book", то есть, в каждой из ста семи книг содержится еще список ссылок. А если убрать из темы поиска слово "books", то по теме "inverse problems" система выдает уже 6687 наименований ! Однако в данном учебнике мы ограничимся лишь несколькими математическими аспектами теории обратных задач.

О структуре оператора A.

Символически прямую задачу можно записать в операторной форме

$$A_1(\Gamma, c, \rho, h, \varphi, \psi, g) = u.$$

Это означает, что оператор A_1 переводит множество *данных прямой задачи* в *решение прямой задачи* $u(x,t)$. Назовем A_1 оператором прямой задачи. В обратной задаче некоторые из данных прямой задачи неизвестны. Обозначим совокупность этих неизвестных через q, а сужение оператора A_1 на q через $\overline{A_1}$. *Оператор измерений* A_2 переводит решение прямой задачи $u(x,t)$ *в дополнительную информацию* f, например, $A_2u = u|_\Gamma$ или $A_2u = u(x_k,t)$, $k = 1,2,\ldots$ и т. п. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$Aq \equiv A_2\overline{A}_1 q = f,$$

где оператор A является результатом последовательного применения (суперпозиция) двух операторов $\overline{A_1}$ и A_2. Например, в ретроспективной обратной задаче $q = (\varphi, \psi)$, $f = u(x,T)$, $\overline{A}_1 q = u(x,t)$, $A_2\overline{A_1 q} = u(x,T)$; в коэффициентной задаче $q = (c,\rho)$, $f = u|_\Gamma$, $\overline{A}_1 q = u(x,t)$, $A_2\overline{A_1 q} = u|_\Gamma$ и т. д. Оператор прямой задачи A_1 обычно непрерывен (прямая задача корректна). Оператор измерений, как правило, также непрерывен (измерять стремятся устойчивые характеристики процесса). Суперпозиция $A_2\overline{A}_1$ обычно бывает даже слишком хорошей ($A = A_2\overline{A}_1$ в некорректных задачах чаще всего *вполне непрерывный* оператор, или другими словами, компактный оператор). Тем труднее его обращать, т. е., решать обратную задачу $Aq = f$. На простейшем примере (A — постоянное число) это означает, что чем на меньшее число A мы умножим число q, тем меньше (вообще говоря) будет ошибка (в случае приближенно заданного q):

$$A(q + \delta q) = \tilde{f},$$

т. е., оператор прямой задачи хороший. Но при решении обратной задачи по приближенным данным $\tilde{f} = f + \delta f$ ошибка $\delta q = \tilde{q} - q$

$$\tilde{q} = q + \delta q = \frac{\tilde{f}}{A} = \frac{f}{A} + \frac{\delta f}{A},$$

$$\delta q = \frac{\delta f}{A}$$

может быть очень велика, если число A достаточно мало.

Интерес к обратным и некорректным задачам возник в начале XX века. В 1902 году Ж. Адамар сформулировал понятие корректности (правильности) постановки задач для дифференциальных уравнений. Корректной по Адамару называют задачу, решение которой существует, единственно и непрерывно зависит от данных. Там же Адамар привёл пример некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). В 1943 году А. Н. Тихонов указал на практическую важность подобных задач и возможность устойчивого их решения. В пятидесятых и шестидесятых годах XX века появился ряд новых подходов, которые стали основополагающими для теории некорректных задач и привлекли к ней внимание многих математиков. С появлением мощных компьютеров интерес к обратным и некорректным задачам стал стремительно расти. К настоящему времени обратные и некорректные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую практически во все сферы математики, включая алгебру, анализ, геометрию, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т. д. В таблицах 1.1 и 1.2 даны примеры корректных и некорректных задач. Еще раз отметим, что так или иначе каждую некорректную задачу (см. правые колонки таблиц) можно сформулировать как обратную к некоторой корректной прямой задаче (соответствующие задачи из левых колонок таблиц).

С другой стороны теория обратных и некорректных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в таких как:

- физика (квантовая механика, акустика, электродинамика и т. д.);
- геофизика (сейсморазведка, электроразведка, гравиразведка, магниторазведка, каротаж, магнитотеллурическое зондирование и т. д.);
- медицина (рентгеновская томография, ЯМР-томография, УЗИ и т. д.);
- экология (диагностика состояния воздуха, воды, космический мониторинг и т. д.);
- экономика (теория оптимального управления, финансовая математика и т. д.).

Более подробные примеры приложений обратных и некорректных задач приведены в следующем разделе, а также в начале каждой главы и в разделах с соответствующими названиями.

Не вдаваясь более в детали математических определений, отметим, что в большинстве случаев *обратные* и *некорректные* задачи объединяет одно главное свойство — *неустойчивость*. В большинстве интересных случаев обратные задачи являются некорректными и, наоборот, некорректную задачу, как правило, можно свести к обратной по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче.

Подводя итоги, можно сказать, что специалисты по обратным и некорректным задачам занимаются исследованием свойств и методов регуляризации неустойчивых задач. Иначе говоря, создаются и изучаются устойчивые методы приближения неустойчивых отображений (преобразований, операций). С информационной точки зрения теория обратных и некорректных задач изучает

Корректные задачи	Некорректные задачи
Арифметика	
Умножение на малое число A $Aq = f$	Деление на малое число A $q = A^{-1}f \quad (A \ll 1)$
Алгебра	
Умножение на матрицу $Aq = f$	Решение системы $Aq = f$ в случаях, если A — плохо обусловлена, A — вырождена, A — прямоугольна
Анализ	
Интегрирование $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi)\,\mathrm{d}\xi$	Дифференцирование $q(x) = f'(x)$
Дифференциальные уравнения	
Задача Штурма — Лиувилля $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x)$, $u(0) - hu'(0) = 0$, $u(1) - Hu'(1) = 0$	Обратная задача Штурма — Лиувилля $\{\lambda_n, \|u_n\|^2\} \to q(x)$ Определение $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n, \|u_n\|\}$
Интегральная геометрия	
Определение интеграла от функции $q(x, y)$ вдоль кривой $\Gamma(\xi, \eta)$	Определение $q(x, y)$ по семейству интегралов $\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x, y)\,\mathrm{d}s = f(\xi, \eta)$
Интегральные уравнения	
Уравнения Вольтерра и Фредгольма второго рода $q(x) + \int_0^x K(x, \xi)q(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x, \xi)q(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$	Уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода $\int_0^x K(x, \xi)q(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x, \xi)q(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$

Таблица 1

отображения таблиц данных с очень малой эпсилон-энтропией в таблицы с большой эпсилон-энтропией.

4. Немного об истории

Как известно, многие математические понятия и постановки задач возникали в результате исследования тех или иных физических процессов или явлений. Тем более это справедливо для теории обратных и некорректных задач. Философское утверждение Платона о том, что человечеству в процессе познания доступны только тени на стене пещеры и эхо (данные обратной задачи), явилось предвестником решения Аристотелем задачи восстановления формы Земли по ее тени на Луне (проективная геометрия). Введение физического понятия мгновенной скорости привело И. Ньютона к открытию производной, а

Корректные задачи	Некорректные задачи
Эллиптические уравнения	
$\Delta u = 0,\ x \in \Omega$ Задачи Дирихле, Неймана, Робина (смешанная)	$\Delta u = 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ Задача Коши Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$
Параболические уравнения	
$u_t = \Delta u,\ t > 0$ 1) Задача Коши $u\|_{t=0} = f(x)$ 2) Начально-краевая задача $u_t = \Delta u,\ t > 0$ $u\|_{t=0} = 0$ $u\|_\Gamma = g(x,t)$	Задача Коши с обратным временем $-u_t = \Delta u$ $u\big\|_{t=0} = f$ Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma$ $u_t = \Delta u$ $u\big\|_{\Gamma_1} = f_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\Gamma_1} = f_2$
Гиперболические уравнения	
Задача Коши Начально-краевая задача	Задачи Дирихле и Неймана Задача Коши с данными на времениподобной поверхности
Прямые задачи	Обратные коэффициентные задачи
$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = 0 \end{cases}$ $\nabla(q(x)\nabla u) = 0,\ u\|_\Gamma = g$	$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0,t) = f(t) \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = 0,\ u(0,t) = f(t) \end{cases}$ $\nabla(q(x)\nabla u) = 0,\ u\|_\Gamma = g,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big\|_\Gamma = f$

Таблица 2

проблема неустойчивости (некорректности) задачи численного дифференцирования функции, заданной приближенно, актуальна и по сей день. Исследования лорда Рэлея по акустике побудили его поставить вопрос о возможности нахождения плотности неоднородной струны по ее звучанию (обратная задача акустики), что предвосхитило развитие сейсморазведки, с одной стороны, и развитие теории спектральных обратных задач, с другой. Изучение движения небесных тел и задачи оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки, привело А. Лежандра и К. Гаусса к переопределенным системам алгебраических уравнений и к созданию метода наименьших квадратов. О. Коши предложил метод наискорейшего спуска для нахождения минимума функции нескольких переменных. В 1948 году Л. В. Канторович обобщил, развил и применил эти идеи к операторным уравнениям в гильбертовых пространствах. В настоящее время метод наискорейшего спуска, наряду с методом сопряженных градиентов, являются одними из самых популярных

при решении некорректных задач. Стоит отметить, что Л. В. Канторович первым обратил внимание на то, что предложенный им метод сходится лишь по функционалу в случае, когда задача некорректна.

Таким образом, отдельные обратные и некорректные задачи с давних пор были объектом исследования ученых в разных областях знания. Тем не менее, математические особенности некорректных задач были сформулированы Адамаром только в начале XX века, а вместе с тем встал вопрос о целесообразности поиска единого подхода к решению таких задач. Тезис о том, что некорректных задач нет, а есть задачи плохо поставленные, одних исследователей охлаждал, а других побуждал искать новые пути к решению этих "неправильных" задач. Р. Куранту убежденность в том, что неустойчивые задачи не имеют физического смысла, не помешала решить сильно некорректную задачу восстановления функции по ее сферическим средним. С. Л. Соболев в 1953-55 гг. был научным консультантом В. К. Иванова по докторской диссертации "Исследования по обратной задаче теории потенциала", давшей теоретическое обоснование ряда обратных задач гравиразведки. Из классической теоремы Коши-Ковалевской следует, что решение широкого круга обратных и некорректных задач существует и единственно, но лишь в классе аналитических функций. Л. В. Овсянников доказал, что требование аналитичности по выводящей переменной можно существенно ослабить. В. Г. Романов, развивая метод шкал банаховых пространств Л. В. Овсянникова и Л. Ниренберга, показал, что для широкого круга обратных задач можно избавиться от условия аналитичности по двум переменным - по выводящей пространственной переменной и по временной переменной. Эти исследования открыли дорогу к изучению многомерных обратных задач геофизики, базовой моделью в которой является горизонтально-слоистая среда.

В одной статье невозможно рассказать обо всех аспектах теории обратных задач и ее приложений. Упомянем лишь два направления, существенный вклад в зарождение и развитие которых внесли ученые, работавшие в новосибирском Академгородке — В. Е. Захаров и А. Б. Шабат (метод обратной задачи рассеяния), А. С. Алексеев и С. В. Гольдин (обратные задачи геофизики). Метод обратной задачи рассеяния был применен для решения нелинейных уравнений математической физики (уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кадомцева-Петвиашвили и др.) и стимулировал новые исследования в различных областях математики и физики (спектральная теория дифференциальных операторов, классическая алгебраическая геометрия, релятивистские струны и др.). Метод обратной задачи рассеяния называют жемчужиной математической физики XX века. Результаты А. С. Алексеева и С. В. Гольдина по применению в геофизике спектральной теории обратных задач и интегральной геометрии стали теоретической основой многих геофизических методов (обратные кинематические и динамические задачи сейсмики). Отметим, что признанные успехи нынешнего поколения сибирских геофизиков во многом определены их высокой математической подготовкой на геолого-геофизическом факультете НГУ. Автору статьи посчастливилось работать на кафедре геофизики в те годы, когда там был создан творческий союз преподавателей геофизиков (С. В. Гольдин, Л. А. Табаровский, М. И. Эпов, Ю. А. Дашевский и др.) и математиков (М. М. Лаврентьев, А. С. Алексеев, В. Г. Романов, Т. А. Годунова и др.). Обсуждения о том, какую математику и в каком

объеме следует давать геофизикам, регулярно проводились на собраниях преподавателей, а споры часто напоминали дискуссии на научных конференциях. Сейчас сотрудники и выпускники этой кафедры руководят научными институтами (ИНГГ, ИВМиМГ, Югорский НИИИТ и др.), активно работают в крупных компаниях ("Шлюмберже", "Дженерал Электрик", "Интел", "Бейкер Хьюз" и др.).

Список примеров можно было бы продолжить, но отметим лишь, что всемирно признанными основоположниками теории некорректных задач являются А. Н. Тихонов, В. К. Иванов и М. М. Лаврентьев. В работах этих ученых были заложены основы теории обратных и некорректных задач. Одной из главных стала идея о том, что при исследовании некорректных задач необходимо сузить класс возможных решений. При этом важнейшую роль играет выбор множества, в котором ищется приближенное решение (множество корректности). Чаще всего это множество выбирают компактным, что дает возможность обосновать сходимость регуляризирующих алгоритмов, помогает выбрать параметр регуляризации, оценить уклонение приближенного решения от точного решения некорректной задачи. Результаты математических исследований были применены для решения ряда конкретных обратных задач геофизики, радиолокации, астрономии, медицинской томографии. За выдающиеся научные результаты в этом направлении А. Н. Тихонов и В. К. Иванов были удостоены Ленинской премии, а позднее М. М. Лаврентьев, Ю. Е. Аниконов, В. Р. Кирейтов, В. Г. Романов и С. П. Шишатский стали лауреатами Государственной премии.

С конца двадцатого века и по настоящее время в математике и во всех естественных науках наблюдается небывалый рост интереса к обратным и некорректным задачам. За очень короткий исторический отрезок времени были учреждены четыре крупных международных журнала (главным редактором одного из них, а именно "Inverse and Ill-Posed Problems", является академик М. М. Лаврентьев). Активно работают международные организации "Inverse Problems International Association" и "Society on Inverse Problems in Science and Engineering". Ежегодно в мире проходят десятки крупных конференций по различным аспектам теории и приложений обратных задач (подробности о журналах, ассоциациях и конференциях можно найти на личной интернет-странице автора статьи на сайте Института математики СО РАН).

5. Где сейчас применяются обратные задачи?

Область применений обратных задач настолько широка, что при наборе слов "обратные задачи например, в поисковой системе *www.mail.ru* даже формальный ответ впечатляет: найдено сайтов 128 507, документов 18 993 595. Ответ системы *www.google.ru* — за 0.23 секунды найдено 2 250 000 сайтов и ссылок. Поиск на английском языке в системе *http://search.yahoo.com/* дает 14 600 000 ссылок на сочетание слов "inverse problems".

Приведем лишь некоторые результаты работы (сотрудников, аспирантов и стажеров) лаборатории волновых процессов Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН. За последние 30 лет исследованы обратные задачи, возникающие в сейсморазведке, электродинамике, медицине, химии, акустике, биологии. Соавторами научных работ были сотрудники многих институтов СО РАН (ИВМиМГ, ИНГГ, ИК, ИЦиГ, ИТ), Томографического центра СО РАН,

компаний "Шлюмберже", "Бэйкер Хьюз", "Интел", а также исследователи из Австрии, Бразилии, Германии, Италии, Казахстана, Китая, США, Турции, Узбекистана, Швеции, Японии. Одной из основных целей исследования был вопрос единственности решения обратных задач. Особенно это важно для обратных задач геофизики, медицины, неразрушающего контроля. Теорема единственности решения в таких задачах позволяет ответить на вопрос, сколько и каких измерений достаточно провести для того, чтобы быть уверенным в том, что данным измерениям соответствует только один объект (например, месторождение полезных ископаемых в геофизике, или какие-либо изменения внутренних органов в медицине, или скрытое нарушение структуры в дефектоскопии).

Второй важнейший вопрос, который исследовался в лаборатории, это оценки устойчивости решения обратных задач по отношению к ошибкам измерений (без которых не обходится ни один эксперимент). Следующим этапом исследований стали численные методы решения обратных задач. Было показано, что оценки условной устойчивости решения обратных и некорректных задач позволяют оценить скорость сходимости численных методов решения обратных задач, а также найти новые правила выбора параметра регуляризации в некорректных задачах.

Не перечисляя все множество прикладных грантов и проектов, выполненных в лаборатории, отметим только, что результаты, изложенные в книге В. Г. Романова и С. И. Кабанихина "Обратные задачи геоэлектрики" (Москва, "Наука", 1991), были использованы при обосновании нового способа электроразведки (патент № 2062489). И это пример работы только одной лаборатории одного из институтов. Если же добавить в этот список все лаборатории институтов СО РАН, сотрудники которых занимаются исследованием тех или иных обратных задач, то список будет огромным.

6. Насколько полезна была школа-конференция?

Подавляющее большинство участников школы-конференции высказались за то, что эту школу следует проводить ежегодно, что они узнали много нового и полезного. Приведем несколько положений из решения конференции.

"Ввиду большого научного и образовательного значения, проведение школы-конференции необходимо поставить на регулярную основу. Учитывая, что теория и численные методы решения обратных и некорректных задач применяются практически во всех (поддающихся математизации) науках, обращаемся к руководству Сибирского Отделения РАН, НГУ и институтов физико-математического профиля с просьбой организовать учебно-научный консультационный центр "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". В задачи центра могли бы входить: консультации и помощь студентам, аспирантам, молодым ученым, всем исследователям, занимающимся изучением и применением теории обратных и некорректных задач; анализ и классификация методов исследования и численного решения практических обратных задач; разработка комплексов программ численного решения обратных и некорректных задач".

В заключение хотелось бы отметить, что в организации конференции принимали активное участие молодые ученые: зам. председателя оргкомитета к.ф.-м.н. М. А. Шишленин, ученый секретарь – аспирант ИМ А. В. Пененко, студенты НГУ Д. А. Воронов, О. И. Криворотько, Н. С. Новиков, В. А. Чембай. А

Рис. 1. Фото участников конференции

это значит, что готовится смена, способная продолжить традиции и в науке, и в организации следующих конференций.

От имени всех участников и организаторов хотелось бы выразить искреннюю благодарность дирекции ИМ СО РАН, РФФИ, руководителям институтов и организаций, поддержавших конференцию, а также лекторам, которые щедро поделились с молодыми учеными своими знаниями и опытом.

Сергей Игоревич Кабанихин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 6,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru