S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. А.5–А.23 (2010) УДК 514.146
MSC 52B10

К ИСТОРИИ ИЗУЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

А. М. ГУРИН

Abstract. We discuss a classified problem of convex polyhedra with regular faces.

Keywords: convex polyhedra, regular faces.

Введение

Правильногранным называем ниже выпуклый многогранник, у которого все грани – возможно различные правильные многоугольники.

1. Инициатива Есауловой

В 1946 г. Л.Н. Есаулова из Ташкента прислала руководителю геометрического семинара в Ленинградском университете А.Д. Александрову письмо, в котором, перечислив возможные типы вершин правильногранных многогранников, доказала теорему: кроме 5 правильных многогранников, 13 полуправильных многогранников и двух бесконечных серий (призмы $\Pi_3, \Pi_4, \ldots$ с правильными основаниями и квадратными боковыми гранями и антипризм $A_4, A_5, \ldots$ с поясом боковых граней из правильных треугольников) может существовать лишь конечное число других правильногранных многогранников. Она приложила к письму схемы нескольких таких многогранников.

А.Д. Александров только в 1961 году передал это письмо В.А. Залгаллеру. Можно предполагать, почему А.Д. Александров вспомнил о статье через 15 лет. В 1960 году Н. Джонсон [1] опубликовал краткое сообщение о списке найденных им правильногранных многогранников, отличных от призм и антипризм. Совместно с Грюнбаумом [2] они доказали, что не все правильные

Gurin, A.M., To history of studying of convex polyhedra with regular faces.

Работа поддержана Международным Научным Фондом (грант U22000).

Поступила 3 марта 2007 г., опубликована 26 октября 2010 г.

многоугольники могут быть гранями таких многогранников. Бернал [5] указал на связь правильногранных многогранников с описанием структуры жидкости. Вероятно из доступного в СССР журнала „Природа" А.Д. Александров ознакомился со статьей [5], вспомнил о письме Есауловой и передал его Залгаллеру. Он при этом не упоминал список Джонсона.

Вторым возможным пояснением причины такой длительной задержки с публикацией работы Л.Н.Есауловой может быть передача ее на рецензию иному геометру, который дал отрицательный отзыв. В любом случаен, вопрос перечисления правильногранных многогранников назрел и проявился в едином методе - выводе типов вершин. В 1957 г. В.Г.Ашкинузе [3] применил этот метод для определения многогранников Архимеда: он предложил называть многогранник Архимедовым, если каждая вершина многогранника имеет один и тот же тип в смысле определения Есауловой. Следствием нового определения явилось открытие нового многогранника $[3, 4, 4, 4]$. Новый многогранник не является однородным, что было необходимо прежде. Судя по статье 1963 года [4] Ашкинузе дальше не стал исследовать правильногранные многогранники.

Заметим, что две бесконечные серии многогранников с правильными гранями — призмы $\Pi_3, \Pi_4, ...$ и антипризмы $A_3, A_4, ...$ содержат два правильных многогранника, тела Платона, — куб и октаэдр.

2. Метод Залгаллера

Правильногранный многогранник В.А. Залгаллер [6] называет *простым*, если его нельзя рассечь на два правильногранных многогранника плоскостью, которая пересекает поверхность этого многогранника только по его ребрам. Например, призмы $\Pi_3, \Pi_4, \ldots$ и антипризмы $A_4, A_5, \ldots$ — простые правильногранные многогранники, тогда как октаэдр A_3 можно рассечь плоскостью на две пирамиды „приложенные" друг к другу квадратными основаниями.

В работе [6] поставлена задача найти все простые правильногранные многогранники $\{M_i\}$, отличные от $\Pi_3, \Pi_4, \ldots; A_4, A_5, \ldots$. Отмечено, что после решения этой задачи нахождение всех правильногранных многогранников, отличных от призм и антипризм, не представит особых затруднений. Залгаллер наметил путь (к сожалению весьма трудоёмкий) для решения поставленной в [6] задачи. Участвуя в 1962 г. в создании 239-й математической школы в Ленинграде, он привлёк к начальному продвижению по этому пути группу школьников [7]. Опишем кратко этот путь.

Ни один искомый многогранник M_i не может иметь грань с числом вершин > 41. Такие грани могут быть только у призм и антипризм. Поэтому число типов вершин у всех $\{M_i\}$ конечно. Будем строить поверхность искомого многогранника постепенно, в виде сначала незамкнутого куска выпуклой поверхности, сложенной из твёрдых правильных граней. Начав с вершины одного из возможных типов, можно продолжать поверхность, составленную только из окружающих эту вершину граней, подклеивая в одной из вершин края этой поверхности новую грань или грани. Варианты таких подклеиваний ветвятся. К тому же построенная часть может быть изгибаемой с сохранением твёрдых граней и выпуклости. Но каждая ветвь рано или поздно обрывается по одной из двух причин. Либо наша „оболочка" замыкается, что позволяет найти один из многогранников M_i. Либо в одну из вершин края оказывается невозможным дальнейшее подклеивание.

Вот характерный случай невозможности дальнейших подклеиваний. На крае обнаруживается свободный угол φ, который при всех изгибаниях лежит в интервале $0^\circ < \varphi < 60^\circ$. Вклеивание в этот угол даже одного правильного многоугольника невозможно.

Наибольшее и наименьшее значения свободного угла φ в вершине края связаны с моментами появления на некоторых ребрах двугранных углов равных 180°. Такие экстремальные положения удается обнаружить, что позволяет находить $\min(\varphi)$ и $\max(\varphi)$. Подтвердить, что найденное положение действительно даёт $\min(\varphi)$ или $\max(\varphi)$ позволяет знаменитая лемма Коши о деформациях выпуклых многогранных углов с твёрдыми гранями; см., например, А.Д. Александров [8].

Полная реализация этого пути заняла у Залгаллера около 4 лет с привлечением компьютерной техники на многих шагах. Исследование было завершено к 1966 г. [9] и целиком опубликовано в монографии [10].

3. Список Джонсона

Американский геометр Н. Джонсон независимо от Есауловой задался тем же вопросом, причём продвинулся существенно дальше неё. Он, повидимому, действовал эвристическим путем и в [1] анонсировал в 1960 г., что кроме правильных и полуправильных многогранников, призм $\Pi_3, \Pi_5, \Pi_6, \ldots$, антипризм $A_4, A_5, \ldots$ им найдено еще 92 правильногранных многогранника. Поскольку A_3 - октаэдр, т.е. один из правильных многогранников, Джонсон предпочел не относить его к антипризмам, также, как куб Π_4 к призмам.

Полная публикация Джонсона [11] содержит список этих 92 многогранников. Каждому из них Джонсон дал наименование. В большинстве случаев наименование указывает на построение этого многогранника. Джонсон высказал в [11] предположение, что его список полон. Но он не располагал методом доказательства такой полноты. Ознакомившись с публикацией [6], Джонсон прислал Залгаллеру свою статью [11].

Сейчас рисунки всех 92 многогранников можно найти в интернете [12].

Основным результатом монографии [10] является доказательство того, что кроме призм $\Pi_3, \Pi_4, \ldots$ и антипризм $A_4, A_5, \ldots$ существует еще только 28 простых правильногранных многогранников. Они обозначены $M_1, M_2, \ldots, M_{28}$ в порядке их обнаружения в ходе доказательства этого утверждения.

Сами по себе многогранники $M_1, \ldots, M_{28}$ не новы. Два из них (тетраэдр и куб) содержатся среди правильных многогранников; 9 — среди полуправильных; остальные 17 фигурируют в списке Джонсона. На рис. 1–18 изображены эти семнадцать многогранников и антипризма A_{10}. Обратим внимание на то, что у многогранников $M_1, \ldots, M_{28}$ гранями служат только n-угольники с $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$.

Архимедовы и платоновы многогранники удобно обозначать типом их вершин, указывая числа сторон граней, прилегаемых к вершине. Например, $[3, 3, 3]$ — тетраэдр, $[4, 4, n]$ — призма с n-угольным основанием. Названия и обозначения В.А.Залгаллера и Н.Джонсона (Johnson N.W.) простых многогранников см. в следующей таблице.

Тетраэдр	M_1	Tetrahedron	$[3,3,3]$
Четырехугольная пирамида	M_2	Square pyramid	J_1
Пятиугольная пирамида	M_3	Pentagonal pyramid	J_2
Трехскатный купол	M_4	Triangular cupola	J_3
Четырехскатный купол	M_5	Square cupola	J_4
Пятискатный купол	M_6	Pentagonal cupola	J_5
Трижды отсеченный икосаэдр	M_7	Tridiminished icosahedron	J_{63}
Двойная серпоротонда	M_8	Bilunabirotunda	J_{91}
Пятискатная ротонда	M_9	Pentagonal rotunda	J_6
Усеченный тетраэдр	M_{10}	Truncated tetrahedron	$[3,6,6]$
Усеченный куб	M_{11}	Truncated cube	$[3,8,8]$
Усеченный додекаэдр	M_{12}	Truncated dodecahedron	$[3,10,10]$
Трижды отсеченный ромбоикосаэдр	M_{13}	Tridiminished rhombicosidodecahedron	J_{83}
Дважды противоположно отсеченный ромбоикосаэдр	M_{14}	Parabidiminished rhombicosidodecahedron	J_{80}
Додекаэдр	M_{15}	Dodecahedron	$[5,5,5]$
Усеченный октаэдр	M_{16}	Truncated octahedron	$[4,6,6]$
Усеченный кубооктаэдр	M_{17}	Great rhombicuboctahedron	$[4,6,8]$
Усеченный икосододекаэдр	M_{18}	Great rhombiicosidodecaheron	$[4,6,10]$
Усеченный икосаэдр	M_{19}	Truncated icosahedron	$[5,6,6]$
Уплощенная треугольная клиноротонда	M_{20}	Triangular hebesphenorotunda	J_{92}
Уплощенная большая клинокорона	M_{21}	Hebesphenomegacorona	J_{89}
Клинокорона	M_{22}	Sphenocorona	J_{86}
Большая клинокорона	M_{23}	Sphenomegacorona	J_{88}
Опоясанный двухклинник	M_{24}	Disphenocingulum	J_{90}
Плоскосный двухклиноид	M_{25}	Snub disphenoid	J_{84}
Плосконосый куб	M_{26}	Snub cube	$[3,3,3,3,4]$
Плосконосый додекаэдр	M_{27}	Snub dodecahedron	$[3,3,3,3,5]$
Плосконосая квадратная антипризма	M_{28}	Snub square antiprism	J_{85}

О метрических данных восьми более сложных из 28 многогранников M_i появилась публикация Тимофеенко [13].

В [10] приведен список Джонсона с русским переводом названий, указано какие из них являются простыми, а для составных указано, как они складываются из простых.

Вторым основным результатом монографии [10] является теорема о полноте списка Джонсона. Она сформулирована в [10] на стр.18 и сопровождена только совсем кратким указанием на путь доказательства, которое мы ниже поясним.

4. Примечание

Допустим, что трехгранный угол образован плоскими углами правильных n-угольника, m-угольника и k-угольника. Через $A(n, m, k)$ обозначим величину двугранного угла при ребре, противолежащему n-угольнику. В [10] приведена полезная для дальнейших исследований таблица значений $A(n, m, k)$ и ряд равенств для некоторых сумм этих значений.

В издании [10] немало опечаток. Одна даже в упомянутой таблице. Часть опечаток исправлена в английском переводе [14]; часть была отмечена в работах Б. Иванова [15] и Ю. Пряхина [16], там же приведены дополнительные тождества для сумм функций $A(n, m, k)$. Отметим замеченные опечатки, не исправленные в переводе [14].

место	напечатано	следовало
стр.7, №10 в списке	$M_2 + A_4$	$M_2 + A_4 = M_7 + 2M_3$
стр.11, табл., кон. строки 3	$108°$	$138°$
стр.13, формула (1)	$A(a, 180° - b, 180° - c)$	$A(180° - a, 180° - b, c)$
стр. 16, строка 11	$\geq 180°$	$> 180°$
стр. 19, строка 5 снизу	case 5	case 8
стр. 19, строка 2 снизу	$\angle DCE$	$\angle DCE = 0$
стр. 26, строка 15	EK, EK	EH, EH
стр. 27, Fig. 58	$ABCDD$	$ABCDE$
стр. 27, строка 1 снизу	regular-faced	semiregular
стр. 32, строка 6 снизу	$> 60°$	$> 150°$
стр. 43, строка 3	$> 180°$	$= 180°$
стр. 56, строка 15 снизу	U	S
стр. 60, строка 4 снизу	SHY'	$SH'Y'$
стр. 62, строка 1	0	$180°$
стр. 78, последняя строка	UE	UF
стр. 81, строка 7	$D'H'$	$D'H$

В декабре 1969 года Мартин Берман из Питсбурга (США), сотрудник исследовательского физического института, направил В.А. Залгаллеру письмо, в котором сообщил, что он с коллегами последовательно проверяли доказательства по переводу [14] монографии [10], встречали опечатки, но не нашли смысловых ошибок, и, проверив более трети, решили верить результату в целом. Он приложил к письму таблицу важнейших значений $A(n, m, k)$, пересчитанную ими с 8 до 13 значащих цифр. В расположенной ниже таблице это число увеличено до 16. Причём система компьютерной алгебры Maple целочисленные значения функции $A(n, m, k)$ нашла без округлений.

Двугранные углы встречающихся трехгранных углов

n,m,k	$A(n,m,k)$	$A(m,k,n)$	$A(k,n,m)$
$(3,3,3)$	$70^\circ31'43,6057158335''$	$70^\circ31'43,6057158335''$	$70^\circ31'43,6057158335''$
$(4,3,3)$	$109^\circ28'16,394284166''$	$54^\circ44'8,19714208324''$	$54^\circ44'8,19714208324''$
$(4,4,3)$	90°	90°	60°
$(4,4,4)$	90°	90°	90°
$(5,3,3)$	$138^\circ11'22,866375197''$	$37^\circ22'38,5253063389''$	$37^\circ22'38,5253063389''$
$(5,4,3)$	$110^\circ54'18,566812401''$	$79^\circ11'15,6589311419''$	$58^\circ16'57,0921187404''$
$(5,4,4)$	108°	90°	90°
$(5,5,3)$	$100^\circ48'44,341068858''$	$100^\circ48'44,341068858''$	$63^\circ26'5,81576251924''$
$(5,5,4)$	$108^\circ57'38,555574921''$	$108^\circ57'38,555574921''$	$96^\circ3'36,61031249682''$
$(5,5,5)$	$116^\circ33'54,184237481''$	$116^\circ33'54,184237481''$	$116^\circ33'54,184237481''$
$(6,4,3)$	$125^\circ15'51,802857917''$	$70^\circ31'43,6057158335''$	$54^\circ44'8,19714208324''$
$(6,4,4)$	120°	90°	90°
$(6,5,3)$	$114^\circ48'3,9631075435''$	$94^\circ30'47,6356448751''$	$65^\circ11'56,0368924565''$
$(6,5,4)$	$121^\circ43'2,9078812596''$	$110^\circ54'18,566812401''$	$100^\circ48'44,341068858''$
$(6,5,5)$	$131^\circ10'29,484548665''$	$124^\circ14'53,136450149''$	$124^\circ14'53,136450149''$
$(6,6,3)$	$109^\circ28'16,394284166''$	$109^\circ28'16,394284166''$	$70^\circ31'43,6057158335''$
$(6,6,4)$	$125^\circ15'51,802857917''$	$125^\circ15'51,802857917''$	$109^\circ28'16,394284166''$
$(6,6,5)$	$142^\circ37'21,474693661''$	$142^\circ37'21,474693661''$	$138^\circ11'22,866375197''$
$(8,4,3)$	$144^\circ44'8,1971420832''$	$54^\circ44'8,19714208324''$	45°
$(8,4,4)$	135°	90°	90°
$(8,5,3)$	$132^\circ8'17,9873304104''$	$85^\circ49'45,5935299409''$	$65^\circ15'18,9340968676''$
$(8,5,4)$	$138^\circ1'48,3051562484''$	$115^\circ54'49,126271378''$	$108^\circ57'38,555574921''$
$(8,5,5)$	$152^\circ32'23,043222578''$	$141^\circ40'3,2831897878''$	$141^\circ40'3,2831897878''$
$(8,6,3)$	$127^\circ33'5,7704608497''$	$103^\circ50'10,177725323''$	$76^\circ9'49,82227467669''$
$(8,6,4)$	$144^\circ44'8,1971420832''$	135°	$125^\circ15'51,802857917''$
$(8,8,3)$	$125^\circ15'51,802857917''$	$125^\circ15'51,802857917''$	90°
$(10,4,3)$	$159^\circ5'41,4331875985''$	$37^\circ22'38,5253063389''$	$31^\circ43'2,90788125962''$
$(10,4,4)$	144°	90°	90°
$(10,5,3)$	$142^\circ37'21,474693661''$	$79^\circ11'15,6589311419''$	$63^\circ26'5,81576251924''$
$(10,5,4)$	$148^\circ16'57,092118740''$	$121^\circ43'2,9078812596''$	$116^\circ33'54,184237481''$
$(10,6,3)$	$138^\circ11'22,866375197''$	$100^\circ48'44,341068858''$	$79^\circ11'15,6589311419''$
$(10,6,4)$	$159^\circ5'41,4331875985''$	$148^\circ16'57,092118740''$	$142^\circ37'21,474693661''$
$(10,8,3)$	$138^\circ3'12,4912449496''$	$126^\circ28'24,997938232''$	$99^\circ59'3,83459061962''$
$(10,10,3)$	$142^\circ37'21,474693661''$	$142^\circ37'21,474693661''$	$116^\circ33'54,184237481''$

5. Полнота списка Джонсона

Исходным является полный список простых правильногранных многогранников:

$$\Pi_3, \Pi_4, \ldots; A_4, A_5, \ldots; M_1, \ldots, M_{28}. \tag{1}$$

Чтобы получить список всех правильногранных многогранников, составленных из двух простых, рекомендуется трактовать многогранники списка (1) как телесные. И прикладывать их по два по равным граням. При этом отбрасывать все случаи, когда на контуре той грани, по которой происходит прикладывание, появляется ребро с нарушением выпуклости или происходит распрямление смежных граней. Обнаружению невыпуклостей способствует таблица двугранных углов при рёбрах, приведенная в [10] на стр.33-35 и уточненная выше, а обнаружению распрямления смежных граней в одну (что лишает многоугольник правильности) способствуют равенства, приведенные в [10] на стр. 27–28.

Может показаться, что подлежит рассмотрению бесконечное количество различных парных прикладываний многогранников друг к другу из списка (1). Это затруднение снимают следующие четыре замечания.

1) Любое прикладывание друг к другу двух антипризм или антипризмы и призмы ведет к нарушению выпуклости.

2) Любое прикладывание друг к другу двух призм влечет либо невыпуклость, либо распрямление смежных граней. За единственным исключением. Если приложить две призмы Π_3 боковыми гранями так, чтобы оси этих призм оказались скрещивающимися прямыми, то обнаруживается составленный из двух простых правильногранный многогранник, который обозначается

$$\Pi_3 + \Pi_3' \tag{2}$$

Он фигурирует в списке Джонсона под №26.

3) Из двух предыдущих замечаний следует, что прикладывать к многогранникам бесконечных серий списка (1) остается только многогранники $M_1, \ldots, M_{28}$. Но у последних имеются только n-угольные грани с $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Поэтому при поиске правильногранных многогранников, составленных из двух простых, достаточно сохранить только призмы и антипризмы с номерами $3, 4, 5, 6, 8, 10$. (У остальных и по боковым граням невозможны прикладывания без нарушения выпуклости.)

4) Среди многогранников M_i, $i = 1, 2, \ldots, 28$, многогранники $M_{16}, \ldots, M_{19}$ и $M_{23}, \ldots, M_{28}$ утрачивают выпуклость при прикладывании к ним любого из многогранников списка (1).

Итак, при дальнейшем поиске правильногранных многогранников, составленных из двух простых, можно заменить список (1) следующим (укороченным) списком:

$$\Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_8, \Pi_{10}, A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}, M_1, \ldots, M_{15}, M_{19}, M_{20}, M_{22}. \tag{3}$$

Из списка (3) прикладывания к призмам многогранников M_i порождают без нарушения выпуклости и распрямления граней ТОЛЬКО многогранники:

$$\Pi_3 + M_1, \Pi_3 + M_2, \Pi_4 + M_2, \Pi_5 + M_2, \Pi_5 + M_3, \tag{4}$$

$$\Pi_6 + M_2, \Pi_6 + M_4, \Pi_8 + M_5, \Pi_{10} + M_6, \Pi_{10} + M_9. \tag{5}$$

Прикладывания к антипризмам многогранников M_i аналогично порождают ТОЛЬКО многогранники:

$$A_4 + M_2, A_5 + M_3, A_6 + M_4, A_8 + M_5, A_{10} + M_6, A_{10} + M_9. \tag{6}$$

Прикладывания двух ОДИНАКОВЫХ многогранников M_i аналогично порождают ТОЛЬКО правильный многогранник $2M_2$, полуправильные многогранники M_4+M_4', M_9+M_9' и еще многогранники:

$$2M_1, 2M_3, 2M_4, 2M_5, M_5+M_5', 2M_6, M_6+M_6', 2M_9. \tag{7}$$

Прикладывания двух РАЗНЫХ многогранников M_i аналогично порождают ТОЛЬКО многогранники:

$$M_{22}+M_2, M_{15}+M_3, M_{14}+M_6, M_{14}+M_6', M_{13}+M_6, M_{13}+M_6', \tag{8}$$

$$M_{12}+M_6, M_{11}+M_5, M_{10}+M_4, M_9+M_6, M_9+M_6', M_7+M_1, M_7+M_3. \tag{9}$$

Все многогранники (2),(4)–(9) содержатся в списке Джонсона.

Чтобы получить полный список правильногранных многогранников, которые можно составить из трех простых, достаточно найти лишенные невыпуклости и распрямления смежных граней прикладывая еще одного многогранника из списка (3) к многогранникам (2),(4)–(9). Для многогранника (2) таких прикладываний нет.

Для многогранников (4),(5) обнаруживается только полуправильный многогранник $M_5+\Pi_8+M_5$ и еще многогранники:

$$M_1+\Pi_3+M_1, M_2+\Pi_4+M_2, M_3+\Pi_5+M_3, \tag{10}$$

$$M_2+\Pi_6+M_2, M_4+\Pi_6+M_4, M_4+\Pi_6+M_4', \tag{11}$$

$$M_5+\Pi_8+M_5', M_6+\Pi_{10}+M_6, M_6+\Pi_{10}+M_6', \tag{12}$$

$$M_6+\Pi_{10}+M_9, M_6+\Pi_{10}+M_9', M_9+\Pi_{10}+M_9'. \tag{13}$$

Для многогранников (6) обнаруживается только правильный многогранник $M_3+A_5+M_3$ (икосаэдр) и ёще многогранники:

$$M_2+A_4+M_2, M_4+A_6+M_4, M_5+A_8+M_5, \tag{14}$$

$$M_6+A_{10}+M_6, M_6+A_{10}+M_9, M_9+A_{10}+M_9. \tag{15}$$

Для многогранников (7) таких прикладываний нет.

Для многогранников (8)–(9) обнаруживается только полуправильный многогранник $M_6+M_{14}+M_6$ и ещё многогранники:

$$\text{прямой } M_3+M_{15}+M_3, \text{косой } M_3+M_{15}+M_3, M_6+M_{14}+M_6', \tag{16}$$

$$M_6'+M_{14}+M_6', M_6+M_{13}+M_6, M_6+M_{13}+M_6', M_6'+M_{13}+M_6', \tag{17}$$

$$\text{прямой } M_6+M_{12}+M_6, \text{косой } M_6+M_{12}+M_6, \tag{18}$$

$$M_5+M_{11}+M_5, M_3+M_7+M_3=A_5+M_3. \tag{19}$$

Все многогранники (10)–(19) содержатся в списке Джонсона.

Чтобы получить полный список правильногранных многогранников, которые можно сложить из четырех простых, достаточно найти все лишенные невыпуклости и распрямления смежных граней прикладывания ещё одного многогранника из списка (3) к многогранникам (10)–(19).

Для многогранников (10)–(13) находятся только два многогранника

$$\Pi_3+3M_2, \Pi_6+3M_2. \tag{20}$$

Для многогранников (14), (15) таких прикладываний нет.

Для многогранников (16)–(19), кроме полуправильного многогранника $M_{13}+3M_6 = M_6 + M_{14} + M_6$, находятся ещё только многогранники:

(21) $M_{13} + 2M_6 + M_6' = M_6 + M_{14} + M_6', M_{13} + M_6 + 2M_6' = M_6' + M_{14} + M_6.'$

Все многогранники (20), (21) содержатся в списке Джонсона.

К многогранникам (20), (21) нельзя без нарушения выпуклости приложить ни один из многогранников списка (3).

Это завершает проверку полноты списка Джонсона.

6. Благодарности

Работа была выполнена благодаря многократной консультации и поддержке проф. В.А.Залгаллера и Международного Научного Фонда, грант U22000. Тема статьи обсуждалась также участниками международного интернет-семинара Polyhedron Discussion List, руководителем которого является Wenninger Magnus [15]. Активными участниками Polyhedron Discussion List являются, в частности, Conway John, Neil Sloane, Norman Johnson, Branko Gr'nbaum, Lee Dickey, Lem Chastain, George W.Hart, Joseph Malkevitch, Piotr Pawlikowski, Robert Webb, Richard Stratton, Andrew Weimholt, Guy Inchbald, Vince Matsko, Robert Austin, Gunnar Brinkmann, Steve Dutch.

7. Приложение

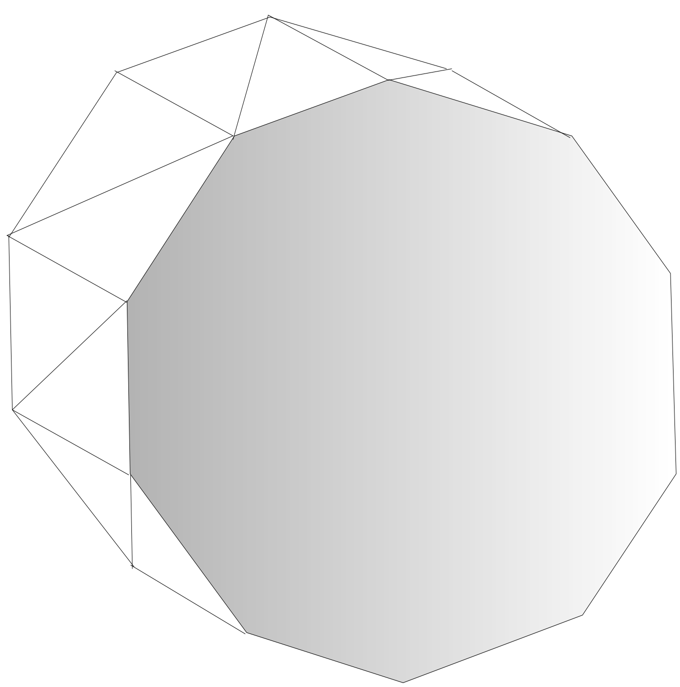

Рис. 1. Антипризма A_{10}

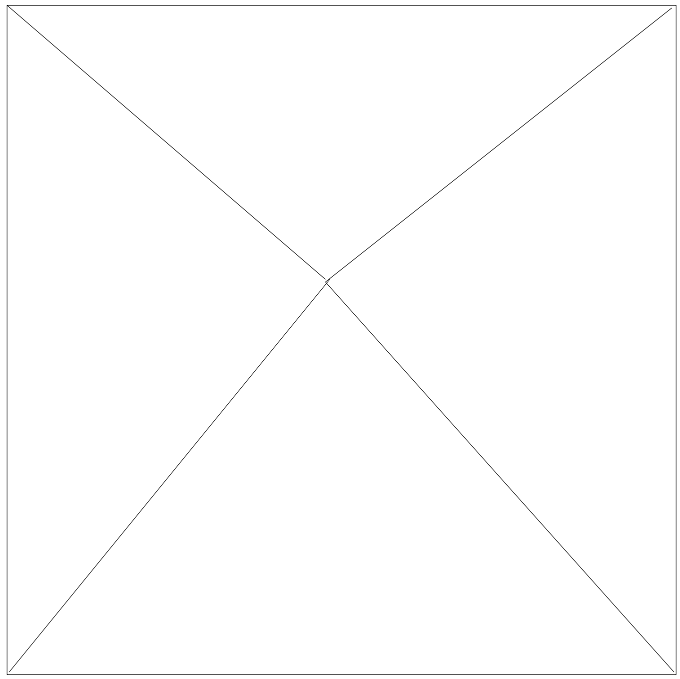

Рис. 2. Четырехугольная пирамида M_2

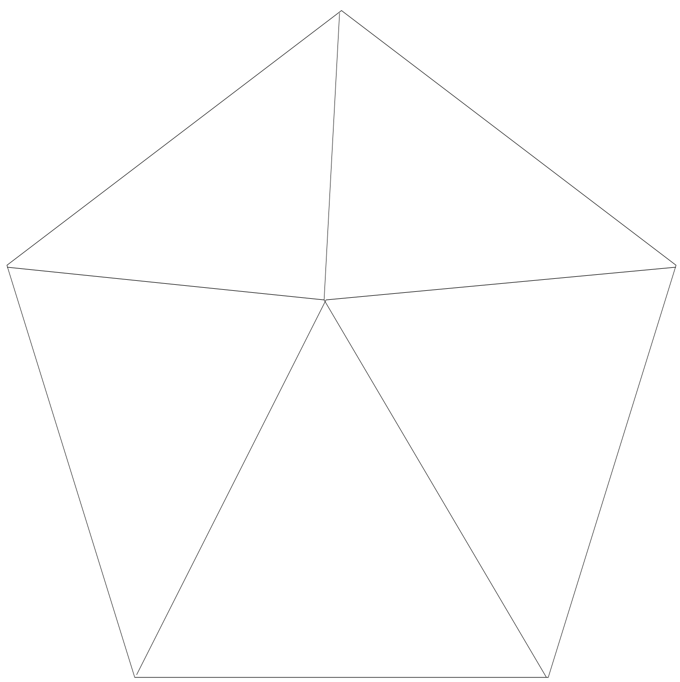

Рис. 3. Пятиугольная пирамида M_3

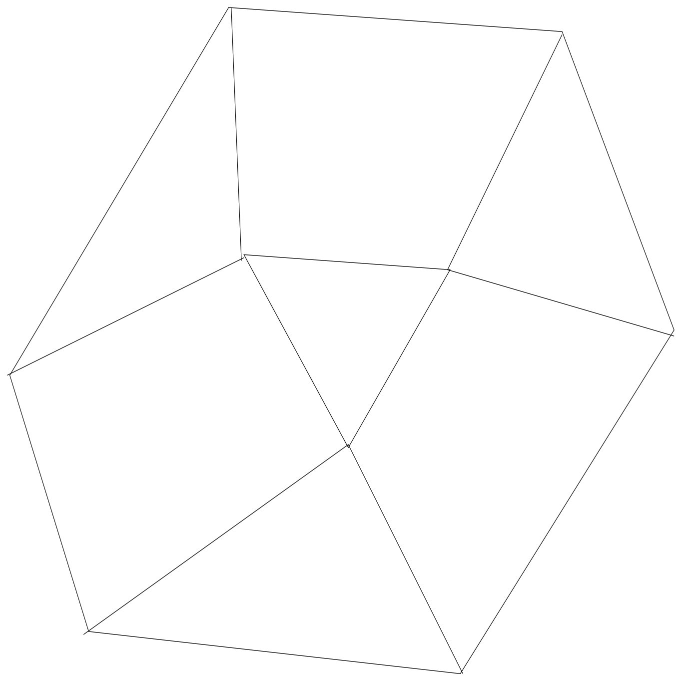

Рис. 4. Трехскатный купол M_4

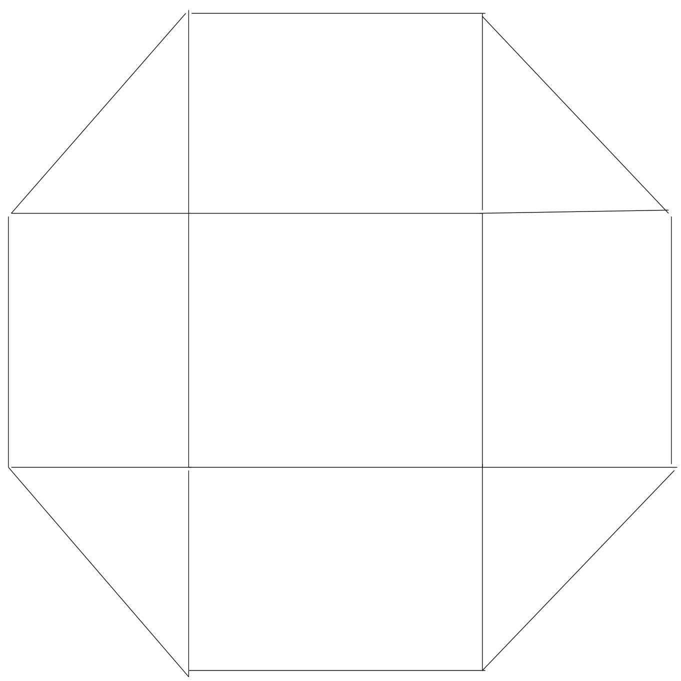

Рис. 5. Четырехскатный купол M_5

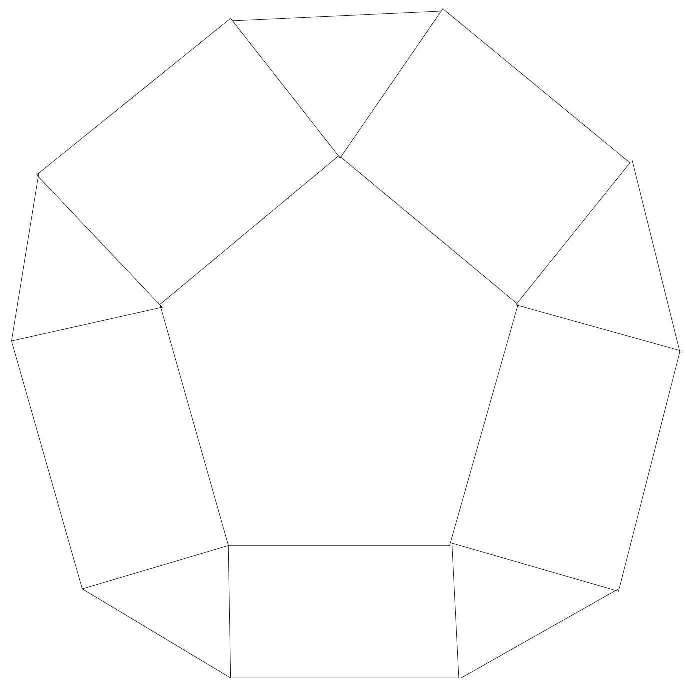

Рис. 6. Пятискатный купол M_6

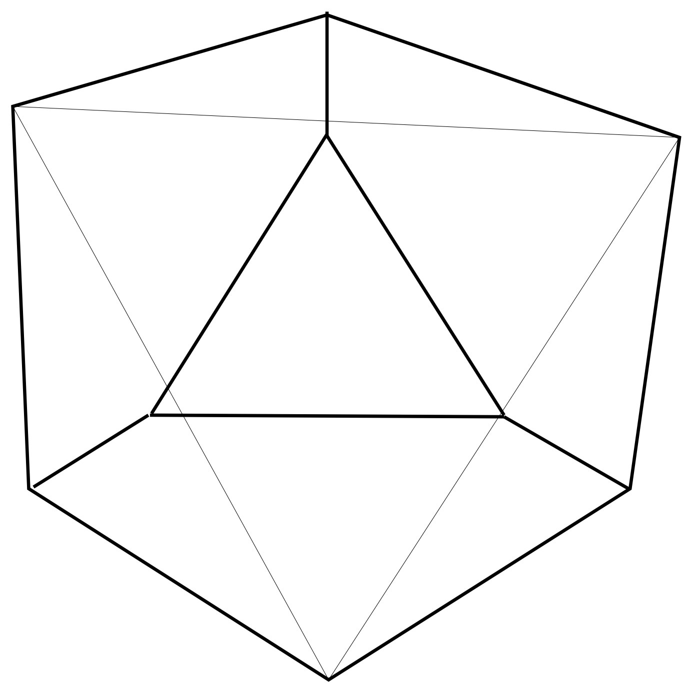

Рис. 7. Трижды отсеченный икосаэдр M_7

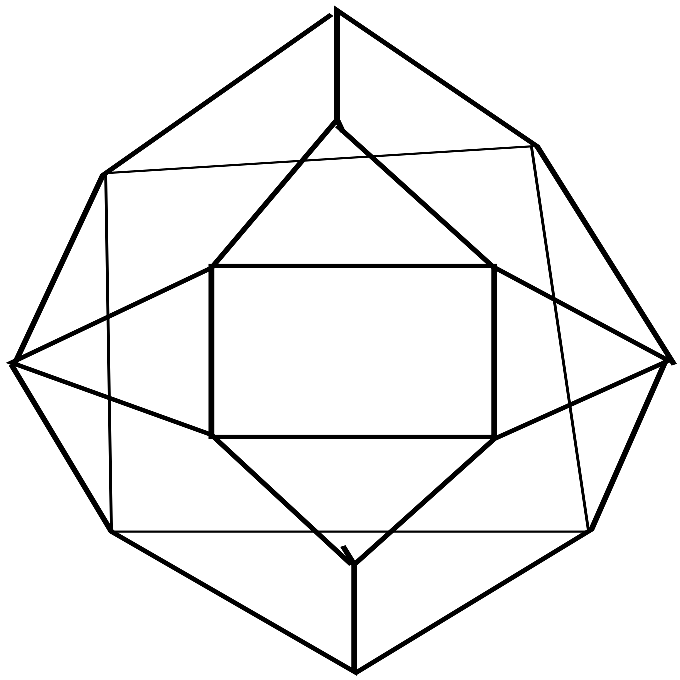

Рис. 8. Двойная серпоротонда M_8

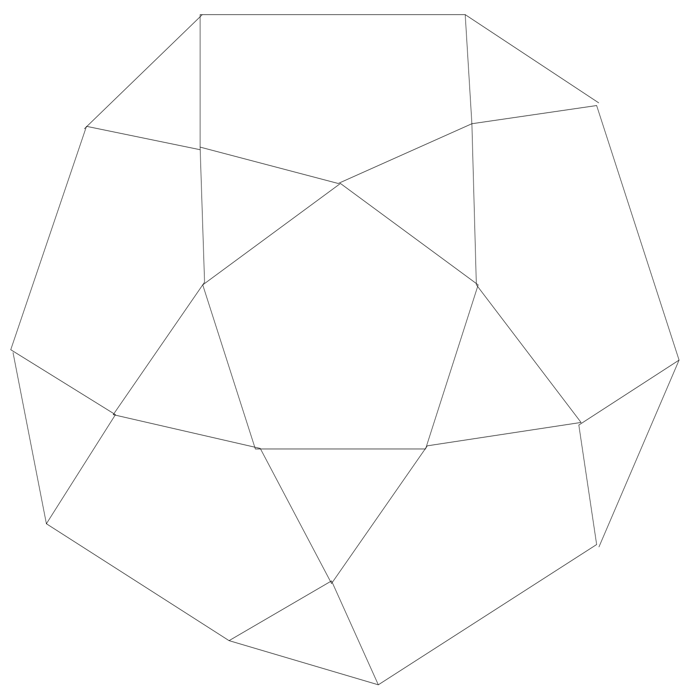

Рис. 9. Пятискатная ротонда M_9

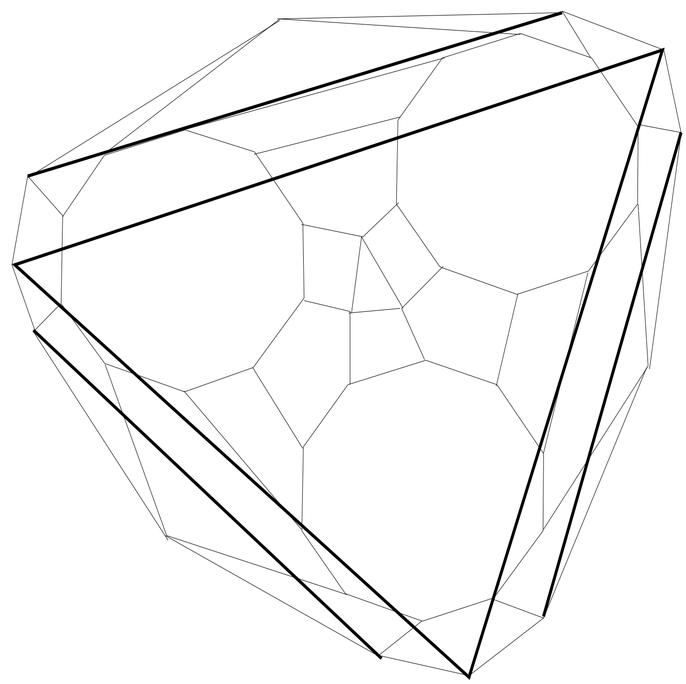

Рис. 10. Трижды отсеченный ромбоикосаэдр M_{13}

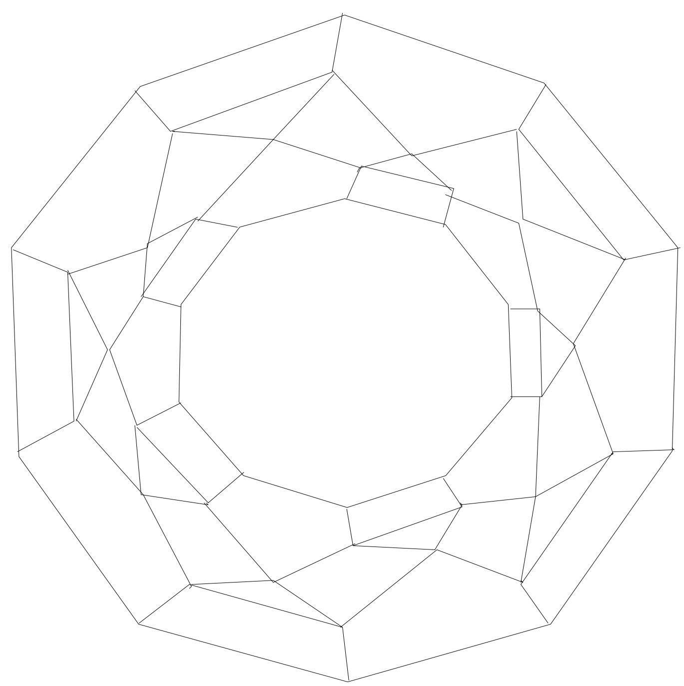

Рис. 11. Дважды противоположно отсеченный ромбоикосаэдр M_{14}

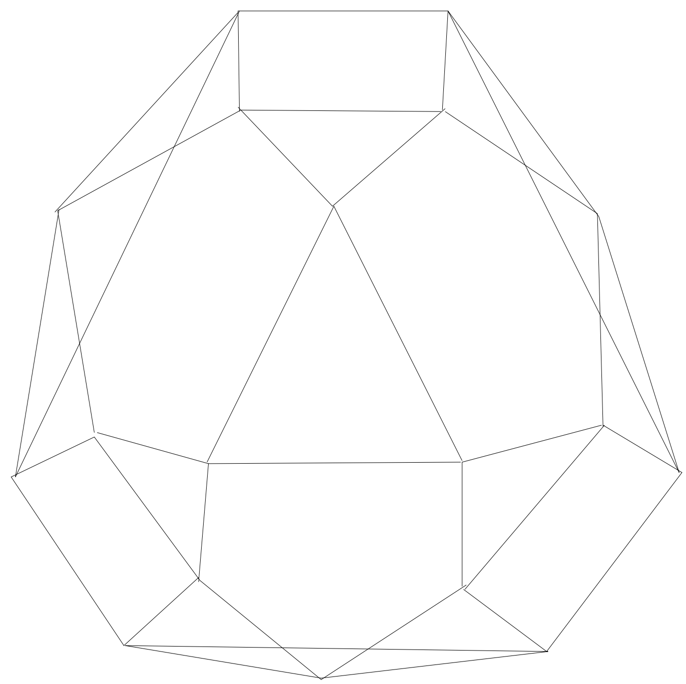

Рис. 12. Уплощенная треугольная клиноротонда M_{20}

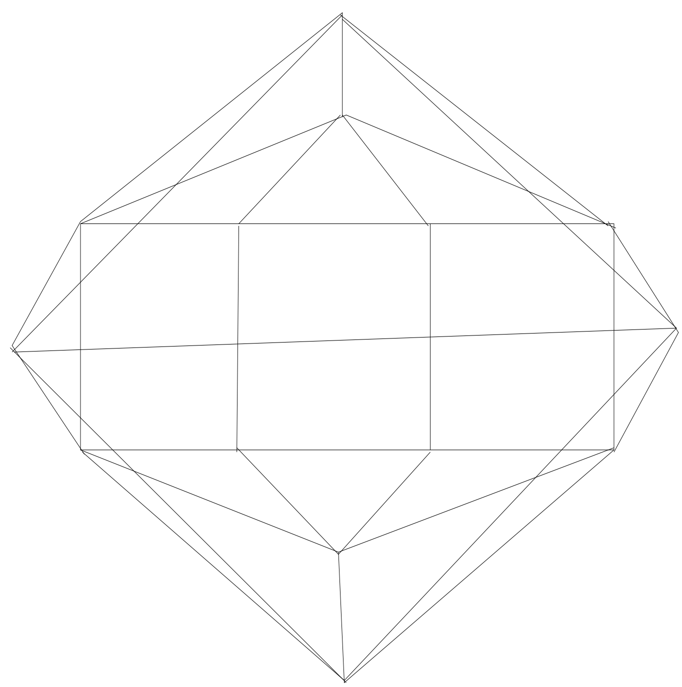

Рис. 13. Уплощенная большая клинокорона M_{21}

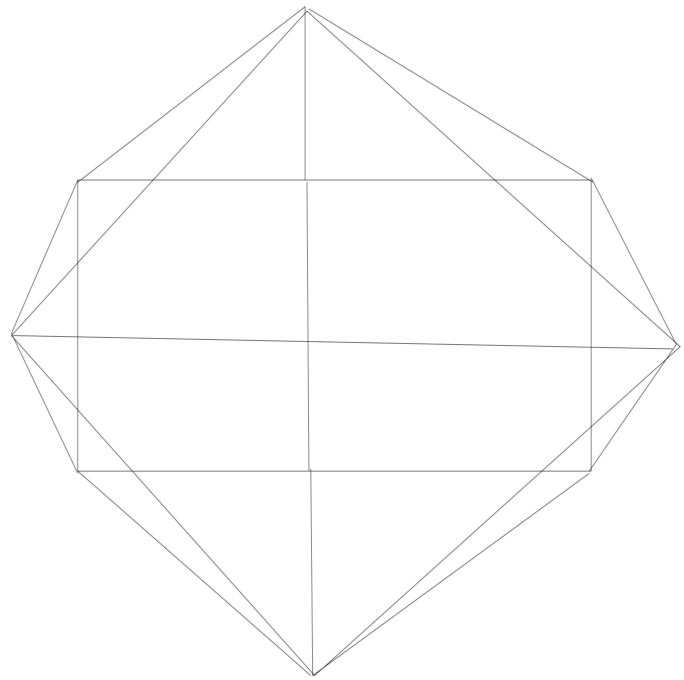

Рис. 14. Клинокорона M_{22}

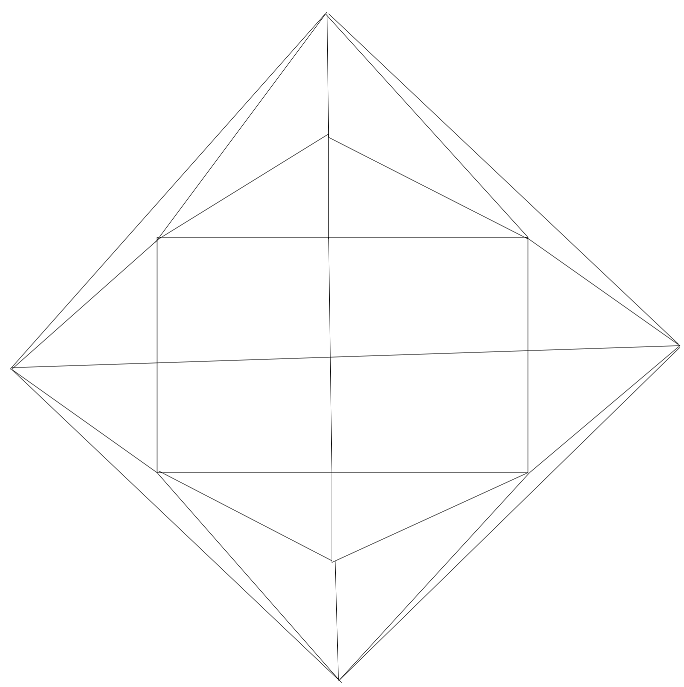

Рис. 15. Большая клинокорона M_{23}

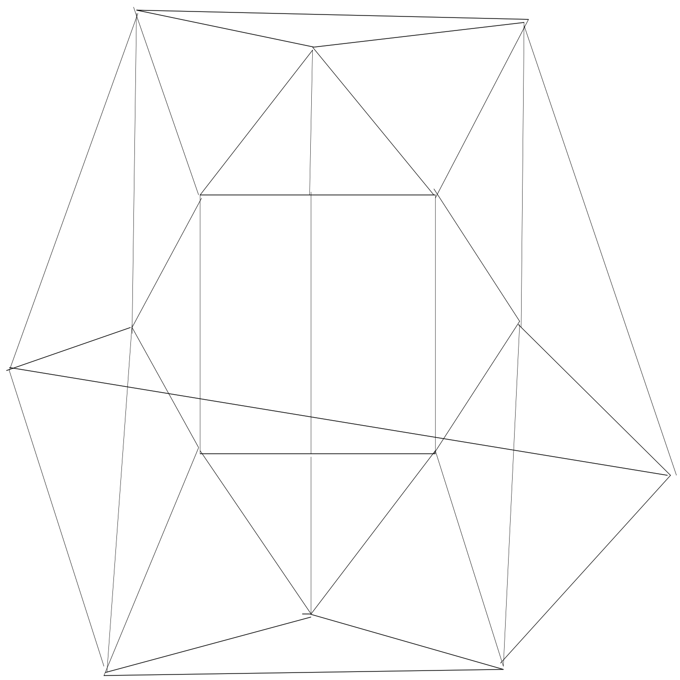

Рис. 16. Опоясанный двуклинник M_{24}

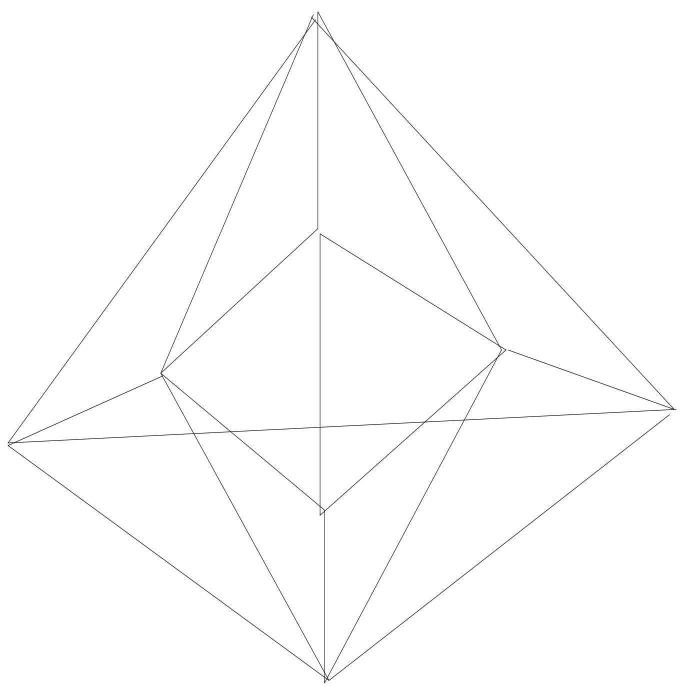

Рис. 17. Плоскосный двуклиноид M_{25}

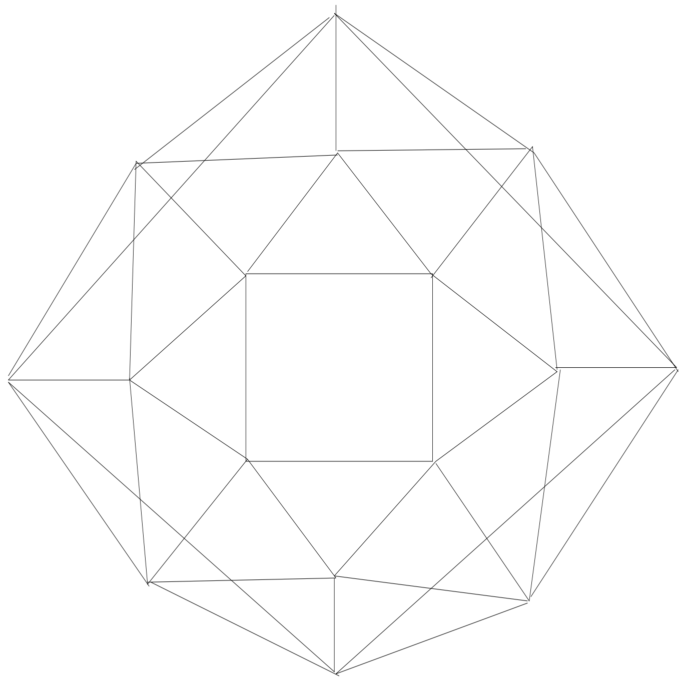

Рис. 18. Плосконосая квадратная антипризма M_{28}

Список литературы

[1] N.W.Johnson, *Convex polyhedra with regular faces (preliminary report)*, Abstract 576-157, Notices Amer. Math. Soc., **7** (1960), 952 с.

[2] B.Grunbaum, N.W.Johnson, *The faces of a regular - faces polyhedra*, J.London Math. Soc., **40** (1960), 577–586.

[3] В.Г.Ашкинузе, *О числе полуправильных многогранников*, Математическое просвещение, **1** (1957), 107–118.

[4] В.Г.Ашкинузе, *Многоугольники и многогранники*, Энциклопедия элементарной математики, кн.4, Геометрия, Гос. из-во физ.мат.лит., Москва, 1963, 382–447.

[5] J.D.Bernal, *Geometry of the Structure of Monoatomic Liquids*, Nature (London), **185**: 4706 (1960), 68–70.

[6] В.А. Залгаллер, *Правильногранные многогранники*, Вестник Ленинградского университета, **7** (1963), 5–8.

[7] В.А. Залгаллер и др., *О правильногранных многогранниках*, Вестник Ленинградского университета, **1** (1965), 150–152.

[8] А.Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Избранные труды, **2**, Новосибирск, Наука, 2007.

[9] В.А. Залгаллер, *Перечень всех выпуклых многогранников с правильными гранями*, Международный математический конгресс, Москва, 1966. Тезисы кратких научных сообщений, секция 9, М., 1966, с.28.

[10] В.А. Залгаллер В.А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. Ленинград. отд. Матем. инстит. им. В.А.Стеклова АН СССР, **2**, "Наука", 1967, 217 с.

[11] N.W.Johnson, *Convex polyhedra with regular faces*, Can. J.Math., **18**: 1 (1966), 169–200.

[12] E.W. Weinstein, http://mathworld.wolfram/....html На место многоточия .... Надо без просветов вписать название того из 92 многогранников, рисунок которого хотите увидеть. Например, получится Bilunabirotunda.html И Вы получите рисунок многогранника №91.

[13] А.В. Тимофеенко, *Несоставные многогранники, отличные от тел Платона и Архимеда*, Фундаментальная и прикладная математика, **13**, 2007.
[14] V.A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*, Semin. Steklov Math. Inst. Leningrad, N.Y., **2**, 1969.
[15] Б.А. Иванов, *Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников*, Укр. геометр. сб., Харьков, изд-во ХГУ, **10** (1971), 20–34.
[16] Ю.А. Пряхин, *О выпуклых многогранниках с правильными гранями*, Укр. геометр. сб., Харьков, изд-во ХГУ, **14** (1973), 83–88.
[17] Wenninger Magnus, *Polyhedras models*, 1968, 167 p. (перевод на русский, Веннинжер Магнус, Модели многогранников, 1971).

Алексей Михайлович Гурин
Физико-технический институт низких температур
НАН Украины им.В.И.Веркина,
пр. Ленина,47,
061103, Харьков, Украина
E-mail address: gurin@ilt.kharkov.ua