S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 1–13 (2010) УДК 519.17
MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (75,32,10,16)

К. С. ЕФИМОВ

Abstract. The automorphism group of a strongly regular graph with parameters $(75, 32, 10, 16)$ is studied. As an application of the obtained results, we compute the orders and fixed-point subgraphs of automorphisms for $pG_2(4, 7)$.

Keywords: strongly regular graph, automorphism.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть F — семейство графов. Граф Γ называется локально F-графом, если $[a] \in F$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в

Efimov, K.S., On automorphisms of a strongly regular graph (75,32,10,16).

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00009)и РФФИ-ГФЕН Китая (грант 10-01-91151).
Поступила 11 января 2010 г., опубликована 20 января 2010 г.

$[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1=\dots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m\ge 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X|=m$ и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X\times Y$ называется *$m\times n$-решеткой*, если $|X|=m$, $|Y|=n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Частичной геометрией $pG_\alpha(s,t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Если $\alpha=1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Если $\alpha=t$, то геометрия называется *сетью. Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α,s,t называется *псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s,t)$*.

В классе геометрий $pG_2(4,t)$ неизвестно существование геометрий в случаях $t=7$ и $t=9$. В [1] найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов псевдогеометрического графа для $pG_2(4,9)$. Там же доказано, что группа автоморфизмов точечного графа частичной геометрии $pG_2(4,9)$ действует интранзитивно на множестве его вершин. В данной работе найдены возможные автоморфизмы псевдогеометрического графа для $pG_2(4,7)$ (т.е. сильно регулярного графа с параметрами (75,32,10,16)). Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u,u^g) таких, что $d(u,u^g)=i$.

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(75,32,10,16)$, g — элемент простого порядка p из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p=3$ и $\alpha_1(g)\in\{0,30,60\}$ или $p=5$ и $\alpha_1(g)$ делится на 50;*

(2) *Ω является n-кликой, и либо $n=3$, $p=3$ и $\alpha_1(g)-6$ делится на 30, либо $n=5$, $p=7$ и $\alpha_1(g)=0$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $p=2$, m нечетно, $3\le m\le 15$, $\alpha_1(g)-2m$ делится на 10, и в случае $m=15$ пара $(\Omega,\Gamma-\Omega)$ является $(15,60,32,8,16)$-схемой;*

(4) *Ω содержит 2-лапу, $p=2$ и либо*

(i) Ω — объединение изолированной вершины и октаэдра, либо

(ii) Ω — объединение изолированной вершины и $K_{2,4}$-подграфа, либо

(iii) $|\Omega|=2t+1$, $4\le t\le 15$ или $t=17$.

Следствие 1. *Пусть Γ — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4,7)$, G — группа автоморфизмов графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|G|$ делит $2^t \cdot 3 \cdot 25$ и верно одно из утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 30, 60\}$, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 50\}$;

(2) $p = 2$ и либо

(i) $\alpha_1(g) = 0$, Ω — треугольный граф $T(6)$, каждая точка из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 точками из Ω или Ω является m-кокликой и $m \in \{5, 15\}$, либо

(ii) $\alpha_1(g) \neq 0$, Ω — объединение октаэдра и l изолированных точек, $1 \leq l \leq 11$, l нечетно или Ω — объединение изолированной точки и точечного графа для $pG_2(2,3)$.

2. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ) и неглавными собственными значениями r, s, $s < 0$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно из [2].

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(75, 32, 10, 16)$ и неглавными собственными значениями $2, -8$, Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $-8 \leq d - \frac{w(32-d)}{75-w} \leq 2$. Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 15 (не больше 5). Если C является 15-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 8 вершинами из C. Если L является 5-кликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - L$ смежна точно с 2 вершинами из L.

Лемма 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v,k,λ,μ). Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ и кратность $n - m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1.}$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [3].

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \{R_0, ..., R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$- инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g).$$

Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом, g — автоморфизм графа Γ простого порядка p и χ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности m собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p, и $m - \chi(g)$ делится на p.*

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3 и предложения 2 [5], примененного к циклической группе $\langle g\rangle$.

Лемма 4. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (75,32, 10,16). Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ содержит подграф $K_{m,n}$, то $mn \leq 64$;*

(2) *значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности 18, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/10 + 3$ и если $|g| = p$ — простое число, то $18 - \chi_2(g)$ делится на p.*

Доказательство. Если Γ содержит подграф $K_{m,n}$, то этот подграф имеет собственное значение $-\sqrt{mn}$, поэтому $mn \leq 64$.

Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(75, 32, 10, 16)$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n - m = 2$, $-m = -8$ кратностей 56, 18,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & -8 \\ 42 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 56 & 7/2 & -4 \\ 18 & -9/2 & 3 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 18 равно $\chi_2(g) = (18\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 3\alpha_2(g))/75$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = 75 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/10 + 3$.

По лемме 1.3 система уравнений

$$\begin{cases} n_1 & +(p-1)n_2 & = 18 \\ n_2 & -n_2 & = \chi_2(g) \end{cases}$$

имеет решение в неотрицательных целых числах. Вычитая из первого уравнения второе, получим требуемое.

Лемма 5. *Пусть* Γ *– сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ *– индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$*. Тогда*
$(v - N) - (kN - 2M) + (\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}) = x_0 + \sum_{i=3}^{N} \binom{i-1}{2} x_i$,
где $x_i = x_i(\Delta)$.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства:

$v - N = \sum x_i$,

$kN - 2M = \sum ix_i$ и

$\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}) = \sum \binom{i}{2} x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

Лемма 6. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(75, 32, 10, 16)$*,* U *— трехвершинный подграф из* Γ*,* Y_i *— множество вершин из* $\Gamma - U$*, смежных точно с* i *вершинами из* U*,* $y_i = |Y_i|$*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $y_0 + y_3 = 24$*, если* U *является кокликой;*

(2) $y_0 + y_3 = 9$*, если* U *является кликой;*

(3) $y_0 + y_3 = 16$*, если* U *является* 2*-путем.*

Доказательство. Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 16 вершин из $[u] \cap [w]$, по 16 вершин из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и 25 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(16 - y_3)$ вершин из Y_2, $3y_3$ вершин из Y_1 и $24 - y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0 + y_3 = 24$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 9$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1 u_2 u_3$, то Y_2 содержит $16 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_3]$, и по $10 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$, $[u_2] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $10 + y_3$ вершин из $[u_2]$, и по $5 + y_3$ вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $16 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 16$. Лемма доказана.

3. Автоморфизмы графа с параметрами (75,32,10,16)

В этом параграфе Γ — сильно регулярный граф с параметрами (75,32,10,16), g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 7. *Если* Ω *— пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 3$, $\alpha_1(g) \in \{0, 30, 60\}$*;*

(2) $p = 5$, $\alpha_1(g) \in \{0, 50\}$.

Доказательство. Так как $75 = 25 \cdot 3$, то $p \in \{3, 5\}$.

Пусть $p = 3$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 30.

Пусть $p = 5$. Из леммы 1.3 следует, что $5n_2 = 15 + \alpha_1(g)/10$, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 50. Лемма доказана.

В леммах 2.2–2.9 предполагается, что $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит вершину a. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 8. *Пусть Ω является n-кликой. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $n = 3$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) - 6$ *делится на 30;*

(2) $n = 5$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 0$.

Доказательство. Пусть Ω является n-кликой. Подсчитав число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, а также число треугольников с основанием в Ω и вершиной в $\Gamma - \Omega$, получим равенства $\sum x_i = 75 - n$, $\sum ix_i = n(33 - n)$, $\sum \binom{i}{2} x_i = \binom{n}{2}(12 - n)$.

Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \le 5$.

Пусть $n = 1$. Тогда p делит 32, поэтому $p = 2$. Противоречие с тем, что любая сдвигаемая g вершина из Γ смежна с четным числом неподвижных.

Пусть $n \ge 2$. Тогда p делит $12 - n$ и $k - \lambda - 1 = 21$. Поэтому $n \notin \{3, 5\}$.

Если $n = 3$, то $p = 3$ и $\chi_2(g) = (36 - \alpha_1(g))/10$. Далее, по лемме 1.3 имеем $3n_2 = 18 - (36 - \alpha_1(g))/10$, поэтому $\alpha_1(g) - 6$ делится на 30.

Если $n = 5$, то $p = 7$ и любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 2 вершинами из Ω. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 70, поэтому подграфы, индуцированные $\langle g \rangle$-орбитами длины 7, изоморфны. Далее, $\langle g \rangle$-орбита U длины 7 попадает в пересечение окрестностей двух вершин a, b из Ω. Если U является графом степени 4, то $\{a, b\} \cup U$ содержит 4-клику, попадающую в пересечение двух 5-клик, противоречие. Поэтому каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 7 является кокликой или семиугольником, и $\alpha_1(g) = 0$.

Лемма 9. *Пусть Ω является m-кокликой* $(m \ge 2)$. *Тогда* $p = 2$, m *нечетно,* $3 \le m \le 15$, $(\alpha_1(g) - 2m)/10$ *— нечетное число и в случае* $m = 15$ *пара* $(\Omega, \Gamma - \Omega)$ *является* $(15, 60, 32, 8, 16)$*-схемой.*

Доказательство. Для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$ и на $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$, поэтому p делит 16 и $25 - (m - 2)$. Отсюда $p = 2$, m нечетно, и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω. Из леммы 1.3 следует, что $(\alpha_1(g) - 2m)/10$ — нечетное число.

Далее, $\sum x_i = 75 - m$, $\sum ix_i = 32m$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 16\binom{m}{2}$. В случае $m = 3$ имеем $x_0 = 24, x_2 = 48$. В случае $m = 5$ имеем $x_0 + x_2 + x_4 = 70$, $2x_2 + 4x_4 = 160$, $x_2 + 6x_4 = 160$, поэтому $x_0 = 10, x_2 = 40, x_4 = 20$. В случае $m = 15$ имеем $x_8 = 60$, поэтому $(\Omega, \Gamma - \Omega)$ является (15,60,32,8,16)-схемой.

Лемма 10. *Если Ω является объединением m* $(m \ge 2)$ *изолированных клик, то Ω является кокликой.*

Доказательство. Если a, b — две несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$, поэтому $p = 2$.

Пусть a, b — смежные вершины из Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$, то p делит 21, противоречие.

Лемма 11. *Верны неравенства* $|\Omega| \le 31$*, если вершины* u, u^g *смежны,* $|\Omega| \le 41$*, если вершины* u, u^g *не смежны, и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $a \in \Omega, u \in \Gamma - (\Omega \cup [a])$ *и* $[a] \cap [u]$ *содержится в* Ω*, то* $p = 2$*;*

(2) Ω *не является сильно регулярным графом с параметрами* $(v', k', 10, 16)$ *и* $p \le 13$*;*

(3) Ω *не является сильно регулярным графом с параметрами* $(v', k', 10, 16-p)$ *или* $(v', k', 10-p, 16)$.

Доказательство. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Тогда $|X_0(\{u, u^g\}) \cup X_3(\{u, u^g\})| = 31$, если вершины u, u^g смежны и $|X_0(\{u, u^g\}) \cup X_3(\{u, u^g\})| = 41$, если вершины u, u^g смежны. Поэтому $|\Omega| \le 31$, если вершины u, u^g смежны и $|\Omega| \le 41$, если вершины u, u^g не смежны.

Пусть $a \in \Omega$ и $u \in \Gamma - (\Omega \cup [a])$. Если $[a] \cap [u] \subset \Omega$, то $|\Omega \cap [u]| \ge 16$, поэтому $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой. Далее, $|\Omega \cap [u]| = |\Omega \cap [u^{g^i}]| = 16$ для двух вершин u, u^{g^i} и $[u] \cap \Omega = [u^{g^i}] \cap \Omega$. Заметим, что $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^{g^i})| = 25$ и степень a в графе $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ равна 16.

Если $p \ge 3$, то $[u^{g^2}]$ содержит по 16 вершин из $[u] \cap [u^g]$ и из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$. Противоречие с тем, что $[a] \cap [u^{g^2}]$ содержит 16 вершин из $[u] \cap [u^g]$ и не менее 9 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 10, 16)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' - 28$ и 16 делит $k'(k' - 11)$. Поэтому $k' = 27$ и $4k' - 28$ — не квадрат.

Допустим, что $p \ge 17$. Тогда $\lambda_\Omega = 10$, $\mu_\Omega = 16$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 10, 16)$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 10, 16 - p)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 - 8p - 28$ и $16 - p$ делит $k'(k' - 11)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a \times b}$. Тогда $(a - 1)b = 16 - p$ и $(a - 2)b = 10$, поэтому $b = 6 - p$ делит 10 и $p = 5$, противоречие.

Если Ω — граф в половинном случае, то $p = 5$ и Ω имеет параметры (45,22,10,11), противоречие с тем, что $|\Omega| \le 41$.

В случае $p = 13$ число $4k' + 37$ — квадрат и 3 делит $k'(k' - 11)$, противоречие.

В случае $p = 11$ число $4k' + 5$ — квадрат и 5 делит $k'(k' - 11)$, противоречие.

В случае $p = 7$ число $4k' - 35$ — квадрат и 9 делит $k'(k' - 11)$, поэтому $k' = 29$, Ω имеет собственные значения 5 и -4, причем кратность 5 равна $3 \cdot 29 \cdot 33/81$, противоречие.

В случае $p = 5$ число $4k' - 43$ — квадрат и 11 делит $k'(k' - 11)$, поэтому $k' = 22$, противоречие.

В случае $p = 3$ число $4k' - 43$ — квадрат и 13 делит $k'(k' - 11)$, противоречие.

В случае $p = 2$ число $4k' - 40$ — квадрат и 14 делит $k'(k' - 11)$, противоречие.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 10 - p, 16)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 + 12p - 28$ и 16 делит $k'(k' - 11 + p)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a \times b}$. Тогда $(a - 1)b = 16$ и $(a - 2)b = 10 - p$, поэтому $b = p + 6$ делит 16, $p = 2$ и $\Omega = K_{3 \times 8}$. По лемме 1.1, примененной к подграфу Ω степени $d = 16$ на $w = 24$ вершинах, имеем $16 - 24 \cdot 16/71 \le 2$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' + 105$ и 16 делит $k'(k' - 4)$, противоречие.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' + 57$ и 16 делит $k'(k' - 6)$, противоречие.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' + 17$ и 16 делит $k'(k' - 8)$, противоречие.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k'$ и 16 делит $k'(k'-9)$, поэтому $k' = 25$ и $v' = 51$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 12. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $p \notin \{11, 13\}$;
(2) *если* $p = 7$, *то* Ω *является* 5-*кликой.*

Доказательство. Пусть $p = 13$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 10 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 3 или 16 вершин, причем ввиду леммы 2.5 обе возможности встречаются. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 13t$, $3 \leq t \leq 4$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 13 вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому Ω — регулярный граф степени 19 на $75 - 13t$ вершинах и $|\Omega| = 36$. Если для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит точно 3 вершины из Ω, то $|\Omega| \geq 2 + 3 + 16 \cdot 2$, противоречие. Итак, Ω — сильно регулярный граф с параметрами (36,19,10,16), противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 10 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 5 или 16 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 11t$, $3 \leq t \leq 5$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 11 вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому Ω — регулярный граф степени 21 на $75 - 11t$ вершинах и $|\Omega| = 42$, противоречие с леммой 2.5. Утверждение (1) доказано.

Пусть $p = 7$. Для смежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 3 или 10 вершин, а для несмежных вершин $c, d \in \Omega$ подграф $\Omega(c) \cap \Omega(d)$ содержит 2, 9 или 16 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 7t$, $5 \leq t \leq 10$. Заметим, что вершина из Ω смежна с $7i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$.

В случае $t = 10$ подграф Ω регулярен степени 4 на 5 вершинах, и Ω является 5-кликой.

В случае $t = 9$ имеем $|\Omega| = 12$. Пусть Ω содержит 2γ вершин степени 11. Если $\gamma = 2$, то вершины степени 4 в графе Ω образуют 8-коклику, противоречие с тем, что $|\Omega(a) \cap [b]| = 4$ для различных вершин a, b, имеющих степень 4 в Ω. Если же $\gamma = 1$, то вершины степени 4 в графе Ω образуют регулярный граф Ω_0 степени 2 на 10 вершинах, противоречие с тем, что смежные вершины из Ω_0, не лежащие в треугольнике из Ω_0 имеют точно двух общих соседей в Ω. Значит, $\gamma = 0$, Ω — регулярный граф степени 4 и $\lambda_\Omega = 3$. Отсюда Ω — объединение изолированных 5-клик, противоречие.

Если $t \leq 8$, то $|\Omega| \geq 19$. Ввиду леммы 1.6 каждая орбита $u^{\langle g \rangle}$ длины 7 является кокликой и ввиду целочисленности $\chi_2(g)$ число $|\Omega|$ делится на 5. Поэтому $|\Omega| = 40$, противоречие с тем, что для 3-коклики U из $u^{\langle g \rangle}$ имеем $x_0(U) + x_3(U) = 24$.

Лемма 13. *Верно неравенство* $p \neq 5$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 0, 5 или в 10 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 1, 6, 11 или 16 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 5t$, $11 \leq t \leq 14$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 5, 10, 15, 20, 25 или 30 вершинами из $\Gamma - \Omega$. Пусть $U = u^{\langle g \rangle}$ — орбита длины 5, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$.

Пусть $t = 11$. Тогда $|\Omega| = 20$, ввиду леммы 1.6 каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 5 является кокликой и $\chi_2(g) = 7$, противоречие с тем, что по лемме 1.3 имеем $5n_2 = 11$.

Пусть $t = 12$. Тогда $|\Omega| = 15$, $\chi_2(g) = 6-\alpha_1(g)/10$ и по лемме 1.3 имеем $5n_2 = 12 + \alpha_1(g)/10$, поэтому $\alpha_1(g) = 30$ и в Γ нет кокликовых $\langle g\rangle$-орбиты длины 5. Если U — пятиугольник, то $\sum y_i = 70$, $\sum iy_i = 150$, $\sum \binom{i}{2}y_i = 5\cdot 10+5\cdot 15 = 125$ и $y_0 + 6y_5 \leq 45$. Так как $y_0 \geq 5$, то $y_5 \leq 6$. В случае $y_5 = 6$ имеем $y_0 = 9$, $y_1 + y_2 = 55$, $y_1 + 2y_2 = 120$, противоречие. Итак, $y_5 \leq 5$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 5, не больше $12 \cdot 5$, но не меньше $15 \cdot 4$. Отсюда Ω — регулярный граф степени 12. Для вершины a из Ω подграф $\Omega - a^\perp$ является 2-кликой $\{b, c\}$ и $\Omega(a)$ содержит 10 вершин из $[b] \cap [c]$. Таким образом, Ω — прямая сумма трех пятиугольников, противоречие с тем, что для вершин a, a' из разных пятиугольников, получим $|\Omega(a) \cap [a']| = 9$.

Пусть $t = 13$. Тогда $|\Omega| = 10$, $\chi_2(g) = 4-\alpha_1(g)/10$ и по лемме 1.3 имеем $5n_2 = 14+\alpha_1(g)/10$, поэтому $\alpha_1(g) = 10$ и имеются 9 кокликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 5. Если Ω содержит вершину a степени 7, то $\Omega - a^\perp$ является 2-кликой $\{b, c\}$ и, без ограничения общности, $\Omega(a)$ содержит 6 вершин, смежных с b и 1 вершину e, смежную с c. Далее, вершина e изолирована в $\Omega(a)$ и $\Omega(a) - \{e\}$ является кокликой. Противоречие с тем, что для различных вершин $d, d' \in \Omega(a) \cap [b]$ подграф $\Omega(d) \cap [d']$ содержит точно 2 вершины. Итак, Ω — регулярный граф степени 2, противоречие с тем, что $\mu_\Omega = 1$.

Если $t = 14$, то Ω — пятиугольник. Пусть W является 2-путем из Ω, Z_i — множество вершин из $\Gamma - W$, смежных точно с i вершинами из Ω, $z_i = |Z_i|$. Тогда z_0 и z_3 делятся на 5. Противоречие с тем, что по лемме 1.6 имеем $z_0+z_3 = 16$.

Лемма 14. *Верно неравенство $p \neq 3$.*

Доказательство. Пусть $p = 3$ и $|\Omega| > 3$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 1, 4, 7 или в 10 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 1, 4, 7, 10, 13 или 16 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 3t$, $17 \leq t \leq 23$. Заметим, что вершина из Ω смежна с $3i + 2$ вершинами из Ω. Пусть $U = u^{\langle g\rangle}$ — орбита длины 3, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$.

Пусть $|\Omega| > 9$. По лемме 1.6 каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 3 является кокликой и $\chi_2(g) = 2|\Omega|/10+3$. По лемме 1.3 имеем $3n_2 = 18-\chi_2(g) = 15-2|\Omega|/9$, поэтому $|\Omega| = 27$, противоречие. Итак, $|\Omega| \in \{6, 9\}$.

Пусть $|\Omega| = 6$. Если Ω содержит 2 вершины a, b степени 5, то $\Omega(a)$ является 4-кокликой, противоречие с тем, что для различных вершин $c, c' \in \Omega$ подграф $\Omega(c) \cap [c']$ содержит точно 2 вершины. Таким образом, Ω — шестиугольник, противоречие с тем, что для антиподальных вершин a, a' получим $|\Omega(a)\cap[a']| = 0$.

Пусть $|\Omega| = 9$. Если Ω содержит вершину a степени 8, то $\Omega(a)$ содержит вершины степеней 1, 4 или 7. Подграф вершин степени 1 в $\Omega(a)$ является объединением изолированных ребер. Если $\Omega(a)$ содержит вершину степени 7, то Ω содержит точно 3 вершины степени 8, и Ω — прямая сумма 3-клики L и 5-цикла $b_1b_2...b_5$. Противоречие с тем, что $K = L \cup \{b_1, b_2\}$ является 5-кликой, и b_3 смежна с 4 вершинами из K. Итак, $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 4 или объединение изолированного ребра и октаэдра. В последнем случае для несмежных вершин b, b' из октаэдра имеем $|\Omega(b) \cap [b']| = 5$, противоречие. Для $b \in \Omega(a)$ каждая вершина из $\Omega(a)-b^\perp$ смежна точно с 3 вершинами из $\Omega(a)\cap[b]$, противоречие с тем, что $\Omega(a)-b^\perp$ — регулярный граф степени 1 на 3 вершинах.

Итак степени вершин в Ω равны 2 или 5. Пусть Ω содержит вершину a степени 5. Тогда $\Omega(a)$ содержит единственную вершину a' степени 4 и 4 вершины степени 1. Вершины c степени 1 в $\Omega(a)$ смежна с 0 или 3 вершинами из $\Omega - a^\perp$. В последнем случае $\Omega(c) - a^\perp$ — регулярный граф степени 1 на 3 вершинах, противоречие. Теперь Ω — объединением $a^\perp \cap \Omega$ и изолированного треугольника, противоречие.

Итак Ω — девитиугольник или объединение изолированных четырехугольника и пятиугольника, противоречие с тем, что число $|\Omega(a) \cap [b]|$ равно 0 или 2 для подходящих несмежных вершин a, b из Ω.

Лемма 15. *Если $p = 2$ и Ω не является кокликой, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — *объединение изолированной вершины и октаэдра;*

(2) Ω — *объединение изолированной вершины и $K_{2,4}$-подграфа;*

(3) $|\Omega| = 2t + 1$, $4 \leq t \leq 15$ *или* $t = 17$.

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Ω не является кокликой. Тогда любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках из Ω, $i \in \{0, 1, ..., 5\}$, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2j$ вершин, $j \in \{0, 1, ..., 8\}$.

Пусть $|\Omega| > 31$. Тогда $\alpha_1(g) = 0$ и по целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $|\Omega| \in \{35, 40\}$. Но в случае $|\Omega| = 40$ имеем $\chi_2(g) = 11$, противоречие с леммой 1.3.

Заметим, что любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω. Пусть X_i — число вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Заметим, что вершина из Ω смежна с $2i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с $40 - 2i$ вершинами из Ω). Если Ω содержит вершину степени $|\Omega| - 1$, то для $b \in \Omega(a)$ число $|\Omega(a) \cap [b]|$ нечетно, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 5$. Тогда Ω — пятиугольник или объединение изолированной вершины a и четырехугольника. В первом случае имеем противоречие с тем, что для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ имеем $|\Omega(a) \cap [b]| = 1$. Во втором случае $x_0 + x_2 + x_4 = 70$, $x_2 + 2x_4 = 72$ и $x_2 + 6x_4 = 40 + 96 - 4 = 132$. Поэтому $x_4 = 15$, противоречие с тем, что x_4 четно.

Пусть $|\Omega| = 7$. Тогда Ω содержит вершины степеней 0, 2 или 4. Если a — вершина степени 4 в Ω, то $\Omega - a^\perp = \{b, b'\}$ является 2-кокликой, а $\Omega(a)$ — четырехугольник или 4-коклика. В первом случае Ω — объединение изолированной вершины и октаэдра, Во втором случае Ω — объединение изолированной вершины и $K_{2,4}$-подграфа. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

4. Автоморфизмы точечного графа частичной геометрии $pG_2(4, 7)$

В этом параграфе мы докажем следствие. Пусть до конца работы Γ — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, 7)$, G — группа автоморфизмов графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что g индуцирует автоморфизм (возможно тривиальный) частичной геометрии $pG_2(7, 4)$. Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(120, 35, 10, 10)$, являющийся графом прямых геометрии $pG_2(4, 7)$.

Лемма 16. *Пусть $p = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\alpha_1(g) = 0$, то любая прямая либо содержится в Ω, либо не пересекает Ω;*

(2) *если вершины* u, u^g *смежны и* L — *прямая, проходящая через* u, u^g, *то либо*

(*i*) $|L \cap \Omega| = 1$ *и вершина из* $L \cap \Omega$ *изолирована в* Ω;

(*ii*) $|L \cap \Omega| = 3$ *и связная компонента* Ω_0 *графа* Ω, *содержащая* $L \cap \Omega$ *является точечным графом частичной геометрии* $pG_2(2, t)$, t *нечетно.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Если $\alpha_1(g) = 0$, то любая прямая либо содержится в Ω, либо не пересекает Ω. Утверждение (1) доказано.

Пусть вершины u, u^g смежны и L — прямая, проходящая через u, u^g. Тогда $|L \cap \Omega| \in \{1, 3\}$.

В случае $|L \cap \Omega| = 3$ для $a \in L \cap \Omega$ и любой g-инвариантной прямой $M \subset a^{\perp}$ имеем $|M \cap \Omega| = 3$, причем точка из $M - \Omega$ смежна с единственной точкой из $\{u, u^g\}$. Если прямая N не пересекает L и $|N \cap \Omega| = 3$, то $[u] \cap N = N - \Omega$, иначе u, u^g смежны с 2 точками из $N \cap \Omega$, точки w, w^g из $N - \Omega$ смежны с 2 точками из $L \cap \Omega$ и точка из $L - (\{u, u^g\} \cup [w])$ смежна с единственной точкой из N, противоречие.

В случае $|L \cap \Omega| = 1$ точка $a \in L \cap \Omega$ изолирована в Ω.

Пусть $|L \cap \Omega| = 3$ и Ω_0 — связная компонента графа Ω, содержащая $L \cap \Omega$ и a — такая точка из Ω_0, что $|[a] \cap \Omega|$ максимален. Тогда для $b \in \Omega_0 - a^{\perp}$ имеем $|[a] \cap \Omega(b)| = 2|[a] \cap \Omega|/3$, поэтому $|[a] \cap \Omega| = |[b] \cap \Omega|$ и Ω_0 — точечный граф частичной геометрии $pG_2(2, t)$, t нечетно.

Лемма 17. *Пусть* Δ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(120, 35, 10, 10)$, $H = \mathrm{Aut}(\Delta)$, $h \in H$ *и* χ_2 — *характера, полученный при проектировании* $\psi(H)$ *на подпространство размерности* 63, *Тогда*

$$\chi_2(h) = (5\alpha_0(h) - \alpha_1(h))/10 + 3.$$

Доказательство. Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами (120,35, 10,10). Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n - m = 5$, $-m = -5$ кратностей 56, 63 и

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 5 & -5 \\ 84 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 56 & 8 & -4 \\ 63 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 63 равно $\chi_2(h) = (21\alpha_0(h) - 3\alpha_1(h) + \alpha_2(h))/40$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(h) = v - \alpha_0(h) - \alpha_1(h)$, получим $\chi_2(h) = (5\alpha_0(h) - \alpha_1(h))/10 + 3$.

Лемма 18. *Пусть* Ω — *пустой граф. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = \alpha_1(h) \in \{0, 30, 60\}$;

(2) $p = 5$ *и либо*

(*i*) $\alpha_1(g) = \alpha_1(h) = 0$ *и* h *не имеет неподвижных точек, либо*

(*ii*) $\alpha_1(g) = 50$, $\alpha_0(h) = 5$, $\alpha_1(h) = \alpha_1(h^2) = 25$ *и* $\mathrm{Fix}(h)$ *является* 5-*кокликой.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Тогда $p \in \{3, 5\}$. Если $p = 3$, то по теореме $\alpha_1(g) \in \{0, 30, 60\}$. В этом случае g индуцирует автоморфизм h графа Δ, не имеющий неподвижных точек. Поэтому $\chi_2(h) = -\alpha_1(h))/10 + 3$ и

$\alpha_1(h)$ делится на 30. Если прямые L, L^h, L^{h^2} образуют треугольник, то их точки пересечений u, u^g, u^{g^2} также образуют треугольник. Обратно, если вершины u, u^g смежны в Γ, то они лежат на прямой L, и треугольнику u, u^g, u^{g^2} отвечает треугольник L, L^h, L^{h^2}. Итак, $\alpha_1(g) = \alpha_1(h)$.

Если $p = 5$, то по теореме $\alpha_1(g)$ делится на 50. В этом случае g индуцирует автоморфизм h графа Δ. Если h не имеет неподвижных точек, то $\chi_2(h) = -\alpha_1(h))/10+3$ и по лемме 1.3, примененной к графу Δ, число $\alpha_1(h)$ делится на 50. Заметим, что на множестве прямых нет кликовых $\langle h\rangle$-орбит, а пятиугольной орбите, в которой L смежна с L^h отвечает пятиугольная орбита, в которой u смежна с u^g, где $\{u\} = L \cap L^h$. Поэтому в Γ нет 5-кликовых орбит и $\alpha_1(g) = \alpha_1(h) = 0$.

Если h фиксирует прямую L, то для $u \in L$ орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кликой, поэтому $\alpha_1(g) = 50$. Тогда h фиксирует точно 5 прямых (отвечающих кликовым $\langle g\rangle$-орбитам), и $\alpha_1(h) = \alpha_1(h^2) = 25$.

Лемма 19. *Подграф Ω не является кликой.*

Доказательство. Пусть Ω является n-кликой. По лемме 2.3 имеем $p \in \{2, 3, 7\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\Omega = \{a\}$, противоречие с тем, что вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω.

Пусть $p = 3$. Тогда $n = 3$ и $\alpha_1(g) \in \{6, 36, 66\}$. Отсюда $\alpha_0(h) = 3$ и $\alpha_1(g) = \alpha_1(h)$. Из целочисленности $\chi_2(h)$ следует, что $\alpha_1(h)$ делится на 5, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $n = 5$ и $\alpha_1(g) = 0$. Отсюда Ω является единственной прямой из $\mathrm{Fix}(h)$. Так как $\langle g\rangle$-орбиты длины 7 являются кокликами, то $\alpha_1(h) = 0$, противоречие с целочисленностью $\chi_2(h)$.

Лемма 20. *Если $p = 2$, то верно одно из утверждений:*

(1) $\alpha_1(g) = 0$ *и либо*

(*i*) Ω *— треугольный граф $T(6)$, и каждая точка из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 точками из Ω, либо*

(*ii*) Ω *является m-кокликой и $m \in \{5, 15\}$;*

(2) $\alpha_1(g) \neq 0$ *и либо*

(*i*) Ω *— объединение октаэдра и l изолированных точек, $1 \le l \le 11$, l нечетно, либо*

(*ii*) Ω *— объединение изолированной точки и точечного графа для $pG_2(2, 3)$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$.

Допустим сначала, что $\alpha_1(g) = 0$. Тогда для любой прямой L либо $L \subset \Omega$, либо $L \neq L^h$.

В первом случае выберем такую точку a из Ω, что $|[a]\cap\Omega|$ максимален. Тогда для $b \in \Omega - a^\perp$ имеем $|[a]\cap\Omega(b)| = 2|[a]\cap\Omega|/5$, поэтому $|[a]\cap\Omega| = |[b]\cap\Omega|$ и Ω — точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, t)$, $t \in \{1, 3\}$. Так как $pG_2(4, 3)$ не существует, то Ω — треугольный граф $T(6)$ и каждая точка из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 точками из Ω.

Пусть для любой прямой L имеем $L \neq L^h$. Тогда Ω является m-кокликой, $m > 1$. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_0(g)$ делится на 5, поэтому $|\Omega| \in \{5, 15\}$.

Пусть $\alpha_1(g) \neq 0$. Допустим, что Ω является m-кокликой. Тогда $\alpha_1(g) = 4\alpha_0(h)$, $\alpha_0(h)+\alpha_1(h) = 8m$. и $\chi_2(h) = (3\alpha_0(h)-3m)/5+3$, противоречие с тем, что по лемме 1.4 число $63-\chi_2(h)$ четно.

Значит, Ω не является кокликой. Ввиду леммы 3.1 подграф Ω является объединением l изолированных вершин и точеченого графа Ω_0 частичной геометрии $pG_2(2,t)$. Поэтому имеется ровно $(t+1)^2$ прямых, пересекающих Ω по 3 точкам, и $8l+3(t+1)(7-t)$ прямых, пересекающих Ω по 1 точке.

Если $l \geq 3$ и U — тройка изолированных вершин из Ω, то по лемме 1.6 имеем $|X_(U)|+|X_3(U)| = 24$, причем $X_(U)$ содержит $(l-3)+3(t+1)$ точек из Ω и $X_3(U)$ содержит $2(t+1)^2$ точек из $\Gamma-\Omega$. Поэтому $l-3+(t+1)(2t+5) \leq 24$, $t=1$ и $l \leq 13$. Но в случае $l=13$ подграф Ω содержит 15-коклику C и каждая вершина из $\Omega - C$ смежна с 2 вершинами из C, противоречие.

Если же $l=1$, то Ω — объединение изолированной точки e и точечного графа для $pG_2(2,t)$, t нечетно. Так как $[e]$ содержит $2(t+1)^2$ точек из $\Gamma-\Omega$, то $2(t+1)^2 \leq 32$, поэтому $t \leq 3$. Лемма и следствие доказаны.

Автор выражает признательность за ценные рекомендации своему научному руководителю чл.-корр. РАН А.А. Махневу.

Список литературы

[1] Махнев А.А., *О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k=2\mu$*. Матем. сборник, **191**: 7 (2000), 89–104.

[2] Brouwer A.E., Haemers W.H., *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra* Europ. J. Comb., **14** (1993), 397–407.

[3] Махнев А.А., *О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы*, Дискр. анализ и исслед. операций, **3**: 3 (1996), 71–83.

[4] Cameron P., *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambr. Univ. Press, 220 pp.

[5] Macay M., Siran J., *Search for properties of the missing Moore graph*, Linear Algebra and its Appl, 2009.

Константин Сергеевич Ефимов
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: kysulya_ne@mail.ru