S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 100–110 (2010)

УДК 510.51

MSC 03C57

ОБ АВТОМАТНЫХ И РАЗРЕШИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКАХ

А. А. ГАВРЮШКИНА

Abstract. Let $\mathcal{A}$ be the class of automatic linear orderings, $\mathcal{AA}$ be the class of linear orderings which are computably categorical in the class of automatic presentation, $\mathcal{AD}$ be the class of linear orderings which are computably categorical in the class of decidable presentations. Obviously, $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{AD}$. Since all automatic structures are decidable, $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{AA}$, and one can easily see that $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A}$ is nonempty. We show that there exist a linear order $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{AA}$ such that $\mathcal{L}_1 \notin \mathcal{AD}$ and a linear order $\mathcal{L}_2 \in \mathcal{AD}$ such that $\mathcal{L}_2 \notin \mathcal{A}$. By this, the inclusions $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{AD}$ and $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{AA}$ are proper. In addition, we construct an example of a non–automatic linear order which is decidable in the language with the additional quantifier $\exists^{\infty}$.

Keywords: automatic structure, decidable structure, linear ordering, computable categoricity.

1. Введение

Теорию конструктивных моделей интересует как вопрос существования вычислимых моделей, так и вопрос единственности вычислимого представления. Под единственностью вычислимого представления модели подразумевается единственность представления с точностью до вычислимого изоморфизма. Исследование этого свойства модели, названного автоустойчивостью (вычислимой категоричностью), было начато А. И. Мальцвым. В дальнейшем исследование автоустойчивости моделей и более общего понятия алгоритмической размерности моделей продолжили такие математики, как С. С. Гончаров,

---

Gavryushkina, A. A., On Automatic and Decidable Linear Orderings.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-3606.2010.1).

Поступила 4 марта 2010 г., опубликована 20 апреля 2010 г.

А. Т. Нуртазин, Дж. Б. Реммел, Б. Хусаинов, Р. Шор и другие. Общие факты, касающиеся автоустойчивости в классе вычислимых и разрешимых представлений, можно найти в [1, 7, 12].

Среди вычислимых структур был выделен подкласс автоматных структур, являющихся простейшими с алгоритмической точки зрения. Под автоматной структурой подразумевается модель в конечной предикатной сигнатуре, основное множество и отношения которой распознаются набором конечных автоматов (автоматы, распознающие отношения, работают синхронно на n-ках слов). Исследование в этой области было инициированно А. Нероудом и Б. Хусаиновым [15]. В последнее время теория автоматных структур представляет одно из основных направлений исследований в области конструктивных моделей. Последние результаты, касающиеся автоматных структур, можно найти в работах [8, 13, 14, 19, 24], а также в обзорных статьях [16, 25].

Причиной столь пристального внимания к автоматным структурам послужил тот факт, что модели, обладающие автмоматным представлением, являются разрешимыми (см. например [15, 24]). Как и в случае с вычислимыми структурами возможность эффективного перехода от одного автоматного представления модели к другому автоматному представлению этой же модели является важным свойством модели. Здесь мы рассмотрим связь автоустойчивости в классе автоматных представлений с автоустойчивостью в классе разрешимых представлений. Этот вопрос интересен как в общем случае, так и для отдельных классов структур. В этой работе будет показано (на примере линейных порядков), что в общем случае два этих понятия не являются взаимосвязанными.

Автоматные структуры являются не только разрешимыми, но более того разрешимыми в языке, расширенном квантором «существует бесконечно много». Также здесь будет показано, что класс разрешимых в расширенном языке линейных порядков не совпадает с классом автоматных линейных порядков.

2. Обозначения и предварительные сведения

2.1. **Разрешимые модели.** В этом разделе будут описаны некоторые сведения из теории конструктивных моделей, при определении тех или иных понятий, в основном, мы будем следовать монографии [1].

Расширим сигнатуру σ модели $\mathcal{A}$ константами, соответствующими элементам основоного множества модели, полученную сигнатуру обозначим σ_A. *Диаграммой* модели $\mathcal{A}$ называется множество бескванторных предложений сигнатуры σ_A, истинных в $\mathcal{A}$, обозначим это множество через $D(\mathcal{A})$. *Полная диаграмма* модели $\mathcal{A}$ ($D^c(\mathcal{A})$) — множество всех предложений в расширенной константами сигнатуре σ_A, истинных в $\mathcal{A}$.

Дадим определения вычислимой (конструктивной) и разрешимой (сильно конструктивной) моделей в общем смысле, иными словами, не будем заострять внимание на том, какого рода носителями обладают эти модели, если носитель не является подмножеством натуральных чисел, тогда необходимо дополнительно предпологать наличие вычислимой нумерации.

Определение 1. *Модель $\mathcal{A} = (A, \sigma)$ называется вычислимой (разрешимой), если $D(\mathcal{A})$ ($D^c(\mathcal{A})$) вычислима.*

Формула Φ принадлежит множеству Σ_1, если $\Phi(\overline{x})$ эквивалентна формуле вида $(\exists\overline{y})\Psi(\overline{x},\overline{y})$, где $\Psi(\overline{x},\overline{y})$ бескванторная. Будем говорить, что модель $\mathcal{A}$ *1-разрешима*, если множество $D^c_1(\mathcal{A}) = \{\Phi \mid \Phi \in D^c(\mathcal{A})$ и $\Phi \in \Sigma_1\}$ вычислимо.

Под теорией подразумевается множество предложений замкнутых относительно выводимости. Элементарную теорию модели $\mathcal{A}$ будем обозначать через $Th(\mathcal{A})$. Напомним, что *n-типом* теории T называется максимальное совместное с T множество формул от n переменных. Будем говорить, что n-тип p реализуется в модели $\mathcal{A} \models T$, если существует кортеж $\overline{a} \in A$ такой, что $\mathcal{A} \models \Phi(\overline{a})$ для всех $\Phi(\overline{x}) \in p$, кортеж $\overline{a}$ будем называть реализацией типа p в $\mathcal{A}$. Будем называть n-тип p теории T *главным*, если существует формула $\Phi(\overline{x}) \in p$ такая, что для любой формулы $\Psi(\overline{x}) \in p$ выполнено $T \vdash (\forall\overline{x})(\Phi(\overline{x}) \to \Psi(\overline{x}))$, такую формулу $\Phi(\overline{x})$ будем называть *главной формулой* типа p. Модель $\mathcal{A}$ теории T называется *простой*, если она элементарно вкладывается в любую модель $\mathcal{A}_1$ теории T. Очевидно, что главные типы реализуются во всех моделях теории T, также известно, что простая модель реализует только главные типы. Скажем еще, что любая главная формула $\Phi(\overline{x})$ теории T является *полной* формулой этой теории, то есть для любой формулы $\Psi(\overline{x})$ выполнено либо $T \vdash (\forall\overline{x})(\Phi(\overline{x}) \to \Psi(\overline{x}))$, либо $T \vdash (\forall\overline{x})(\Phi(\overline{x}) \to \neg\Psi(\overline{x}))$. Модель $\mathcal{A}$ называется *атомной*, если на каждом кортеже этой модели выполняется некоторая полная формула теории $Th(\mathcal{A})$. Счётная атомная модель является простой.

Пусть $\mathcal{A}$ — модель с основным множеством A и $X \subset A$, тогда $(\mathcal{A}, c_x)_{x\in X}$ — модель, полученная из $\mathcal{A}$ добавлением констант для элементов множества X. Пусть α — некоторый кардинал, тогда модель $\mathcal{A}$ называется *α-насыщенной*, если для любого множества $X \subset A$, такого, что $|X| < \alpha$, в $\mathcal{A}$ реализуется любой тип теории $Th((\mathcal{A}, c_x)_{x\in X})$. α-насыщенная модель мощности α называется *насыщенной*. Напомним, что насыщенная модель мощности α некоторой полной теории единственна с точностью до изоморфизма. Приведём еще один факт из классической теории моделей.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — модель сигнатуры σ с основным множеством A, $|\sigma| \leq \alpha$ и $\omega \leq |A| \leq 2^\alpha$, тогда существует α^+-насыщенное элементарное расширение $\mathcal{B}$ модели $\mathcal{A}$ мощности 2^α (α^+ — наименьший кардинал больший α).*

Доказательства всех упомянутых результатов из теории моделей можно найти, например, в [3].

Пусть γ — гёделевская нумерация формул натуральными числами. Будем говорить, что множество формул p вычислимо(вычислимо перечислимо), если множество гёделевских номеров этих формул $\gamma(p)$ вычислимо (вычислимо перчислимо). Пусть S — семейство вычислимо перечислимых типов. Тогда каждому типу $p \in S$ соответствует вычислимо перечислимое множество и семейство S можно рассматривать как семейство вычислимо перечислимых множеств. Будем говорить, что семейство типов S вычислимо, если существует вычислимая нумерация $\nu\colon \mathbb{N} \to S$, то есть множество $\{(n, \gamma(\Phi)) \mid \Phi \in \nu(n)\}$ вычислимо перечислимо. Иными словами, мы можем эффективно занумеровать типы из семейства S и по номеру типа находить номер функции, эффективно перечисляющей формулы этого типа.

Заметим, что у разрешимой теории каждый главный тип вычислим. Сформулируем полезное для нас следствие теоремы Гончарова и Перетятькина о разрешимости однородных моделей:

Теорема 2 (Гончаров, Перетятькин, см. [1, 2, 6, 7]). *Если разрешимая теория T имеет простую модель, то она разрешима тогда и только тогда, когда семейство всех главных типов теории T вычислимо.*

2.2. **Автоматные модели.** Пусть Σ — конечный алфавит и $\perp \notin \Sigma$, обозначим через $\Sigma_\perp$ алфавит $\Sigma \cup \{\perp\}$.

Определение 2. *Назовём конволюцией кортежа $(\omega_1, ..., \omega_n) \in (\Sigma^*)^n$ кортеж $(\omega_1, ..., \omega_n)_\perp \in (\Sigma_\perp^*)^n$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\perp$ к правым концам слов ω_i таким образом, чтобы длины всех слов стали одинаковыми.*

Конволюция отношения $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ — это отношение $R_\perp \subseteq (\Sigma_\perp^*)^n$, полученное как множество конволюций всех кортежей отношения R.

Определение 3. *Структура (модель) $(A, R_1, ..., R_k)$ называется автоматной над алфавитом Σ, если ее носитель $A \subseteq \Sigma^*$ и конволюции всех отношений $R_i \subseteq (\Sigma_\perp^*)^{n_i}$ распознаются некоторыми конечными автоматами над алфавитом Σ.*

Можно считать, что в автоматах, распозанющих конволюции отношений, переходы осуществляются по n-мерным символам.

Расширим язык логики первого порядка, добавив новый квантор $\exists^\infty$, трактуемый как «существует бесконечно много». Очевидным образом вводятся определения полной диаграммы модели в расширенном языке и разрешимой в расширенном языке модели. Доказательство следующей теоремы можно найти в [15, 24, 9].

Теорема 3 (Ходгсон, Нероуд-Хусаинов, Блюменсат-Градел, Рубин-Стефан–Хусаинов). *Существует алгоритм, который равномерно по данной автоматной структуре $\mathcal{A}$ и отношению R, определимому в $\mathcal{A}$ формулой сигнатуры σ_A в расширенном квантором $\exists^\infty$ языке, строит автомат, распознающий $R_\perp$. Следовательно, $\mathcal{A}$ разрешима в расширенном квантором $\exists^\infty$ языке.*

Далее приведём лемму, которая утверждает, что отношения, определимые в автоматной структуре, имеют ограниченый рост. Эта лемма служит инструментом для доказательства неавтоматности моделей.

Определение 4. *Назовём отношение $R \subset A^{k+l}$ локально конечным, если для любого кортежа $\overline{x} \in A^k$ существует лишь конечное число кортежей $\overline{y} \in A^l$ таких, что $R(\overline{x}, \overline{y})$.*

Лемма 1 (см. [24]). *Если $R \subset A^{k+l}$ автоматное локально конечное отношение, тогда существует константа c такая, что для любых $\overline{x} \in A^k$ и $\overline{y} \in A^l$, для которых $R(\overline{x}, \overline{y})$, выполненно:*

$$\max_{y \in \overline{y}} |y| \leq \max_{x \in \overline{x}} |x| + c$$

2.3. **Автоустойчивость и линейные порядки.** Пусть $\mathcal{C}$ — класс моделей, обладающих определенными алгоритмическими свойствами, назовём $\mathcal{C}$-*представлением* модели $\mathcal{A}$ модель $\mathcal{B}$, принадлежащую классу $\mathcal{C}$, такую, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Например, если взять в качестве класса $\mathcal{C}$ класс автоматных моделей, то автомтным представлением модели $\mathcal{A}$ будет автоматная над некоторым алфавитом модель $\mathcal{B}$ (если она существует) изоморфная $\mathcal{A}$.

Определение 5. *Модель называется автоустойчивой (вычислимо категоричной) в классе* $\mathcal{C}$*-представлений, если любые два* $\mathcal{C}$*-представления данной модели вычислимо изоморфны.*

Ниже приведём критерий Нуртазина автоустойчивости простой модели в упрощённой нужным для нас образом формулировке.

Теорема 4 (Нуртазин, см. [4, 7]). *Если полная теория T имеет разрешимую простую модель, то она является автоустойчивой в классе разрешимых представлений тогда и только тогда, когда семейство главных формул теории T вычислимо.*

Под линейными порядками будем подразумевать модели в сигнатуре одного бинарного отношения, удовлетворяющего аксиомам линейного порядка. Будем использовать обозначение $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$.

Будем обозначать порядок типа натуральных чисел через ω, типа отрицательных целых чисел — ω^*, типа целых чисел — ζ, типа рациональных чисел — η, конечный линейный порядок — $\mathbf{n}$ (n — число элементов в нем).

Будем называть линейный порядок $\mathcal{L}$ *плотным*, если для любых $x, y \in L$ из того, что $x < y$, следует, что существует $z \in L$ такое, что $x < z < y$. Порядки $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ и η являются плотными. Будем называть линейный порядок *разреженным*, если он не содержит бесконечного плотного подпорядка.

Пусть $\mathcal{L} = (L, \leq)$ — линейный порядок, определим отношение непосредственного следования на элементах из L как $x \lhd y \leftrightharpoons (x < y) \,\&\, \neg(\exists z)(x < z < y)$. Если $x \lhd y$, то x называется *предшественником* y, а y *последователем* x. Линейный порядок называется *дискретным*, если любой его элемент имеет как последователя, так и предшественника. Заметим, что теория дискретных линейных порядков T_D является полной, любой дискретный линейный порядок представим в виде $\zeta \times \alpha$ для произвольного линейного порядка α. Если добавить условие наличия наименьшего и (или) наибольшего элементов в дискретном линейном порядке, которые единственные не имеют предшественника и последователя соответственно, то теория бесконечных линейных порядков с наибольшим и (или) наименьшим элементами тоже является полной. Любой бесконечный дискретный порядок с наибольшим и наименьшим (только с наименьшим, только с наибольшим) элементами представим в виде $\omega + \zeta \times \alpha + \omega^*$ ($\omega + \zeta \times \alpha$, $\zeta \times \alpha + \omega^*$) для произвольного порядка α.

Введём отношение эквивалентности на элементах линейного порядка $\mathcal{L}$, будем говорить, что x и y эквивалентны, если между ними лишь конечное число элементов. Профакторизовав $\mathcal{L}$ по этому отношению эквивалентности, получим вновь линейный порядок. Эту процедуру конденсирования можно продолжить по всем счетным ординалам. Тогда FC-рангом порядка $\mathcal{L}$ будет называться наименьший ординал α такой, что после α-конденсирования из $\mathcal{L}$ получается либо $\mathbf{1}$, либо η. Более формальное определение можно найти в [23].

В общем случае полная характеризация автоматных линейных порядков не найдена. Однако автоматные ординалы описаны полностью:

Теорема 5 (Деломе, [10, 24]). *Ординал α имеет автоматное представление тогда и только тогда, когда $\alpha < \omega^\omega$.*

Эта теорема (в одну сторону) была обобщена Б. Хусаиновым, С. Рубиным и Ф. Стефаном для линейных порядков.

Теорема 6 (см. [17, 24]). *Если $\mathcal{L}$ — автоматный линейный порядок, то $\mathcal{L}$ имеет конечный FC-ранг.*

Из области разрешимых линейных порядков нам потребуется теорема:

Теорема 7 (Лангфорд, см. [11, 18]). *Дискретный линейный порядок разрешим тогда и только тогда, когда он 1-разрешим.*

Приведём ниже результаты связанные с автоустойчивостью линейных порядков в различных классах представлений.

Теорема 8 (Реммел, см. [11, 22]). *Линейный порядок автоустойчив в классе вычислимых представлений тогда и только тогда, когда он имеет порядковый тип $\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i+\eta)+k_{n+1}$, где k_i — конечные инетрвалы для $i \leq n+1$.*

Теорема 9 (Мозес, см. [11, 20, 21]). *Линейный порядок автоустойчив в классе 1-разрешимых представлений тогда и только тогда, когда он имеет порядковый тип $\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i+g_i)+k_{n+1}$, где k_i — конечные инетрвалы для $i \leq n+1$, а $g_i \in \{\omega, \omega^*, \zeta\} \cup \{d \times \eta \mid d \in \mathbb{N}\}$ для $i \leq n$.*

Для автоустойчивости линейных порядков в классе автоматных представлений автором были получены следующие результаты:

Теорема 10. *Все автоматные ординалы автоустойчивы в классе автоматных представлений.*

Теорема 11. *Автоматные разреженные линейные порядки FC-ранга, не превосходящего 2, автоустойчивы в классе автоматных представлений.*

Их доказательства можно найти в [5].

3. Автоматные и разрешимые в расширенном языке линейные порядки

Теорема 12. *Существует линейный порядок разрешимый в расширенном квантором $\exists^\infty$ языке, не являющийся автоматным.*

Доказательство. Линейный порядок $\mathcal{L} = \mathbf{1}+\zeta+\mathbf{2}+\zeta+\ldots+\zeta+\mathbf{p_n}+\zeta+\ldots$, где p_n — простое число с номером n, обладает разрешимым в расширенном языке представлением, но не является автоматным.

Докажем, что этот порядок не является автоматным. Предположим, напротив, что данный линейный порядок является автоматным. Так как одноместное отношение $\zeta(x)$, истинное на элементах, принадлежащих интервалам типа ζ, двухместное отношение $c(x,y)$, истинное на элементах, между которыми лишь конечное число элементов, и двухместное отношение $x \lhd\lhd y$, истинное на элементах, принадлежащих соседним конечным интервалам, являются формульно определимыми в расширенном языке:

$$c(x,y) \leftrightharpoons (x<y)\,\&\,\neg(\exists^\infty z)(x<z<y);$$

$$\zeta(x) \leftrightharpoons (\exists^\infty y)c(x,y)\,\&\,(\exists^\infty y)c(y,x);$$

$$x \lhd\lhd y \leftrightharpoons (x<y)\,\&\,\neg c(x,y)\,\&\,(\forall z)((x<z<y) \rightarrow (c(x,z) \vee \zeta(z) \vee c(z,y))),$$

то из теоремы 3 следует, что эти отношения распознаются конечными автоматами.

Пусть отношение $x \lhd \lhd y$ распознается конечным автоматом над алфавитом Σ и $|\Sigma| = c$. Так как $\lhd\lhd$ является локально конечным, то по лемме 1 существует константа a такая, что если $x \lhd \lhd y$, то $|y| \leq |x| + a$. Пусть $b - 1$ — длина слова, соответствующего первому элементу из первого конечного интервала. Тогда длина слов в n-том конечном интервале не должна превосходить $b - 1 + an$. Слов длины, не превосходящей $b - 1 + an$, не более чем $c^{b-1+an+1}$. Получили, что $p_n \leq c^{an+b}$, что неверно.

Покажем, что линейный порядок $\mathcal{L}$ обладает разрешимым представлением. Для этого докажем следующие 3 леммы:

Лемма 2. *Теория $T = Th(\mathcal{L})$ является разрешимой.*

Доказательство. $T = Th(\mathcal{L})$ — полная вычислимо перечислимо аксиоматизируемая теория и, следовательно, разрешимая. Докажем аксиоматизируемость, для этого введём отношения:

$dis(x, y) \leftrightharpoons (x < y) \,\&\, (\exists z)(x < z < y) \,\&\, \neg(\exists z)(x \lhd z) \,\&\, \neg(\exists z)(z \lhd y) \&$ $(\forall z)((x < z < y) \to (\exists z_1, z_2)(z_1 \lhd z \lhd z_2))$ — интервал (x, y) не пустой и является дискретным без концов.

$disend(x, y) \leftrightharpoons (x < y) \,\&\, (\exists z)(x \lhd z) \,\&\, (\exists z)(z \lhd y) \,\&\, (\forall z)((x < z < y) \to$ $(\exists z_1, z_2)(z_1 \lhd z \lhd z_2))$ — интервал $[x, y]$ является дискретным с левым и правым концом.

$maxdisend(x, y) \leftrightharpoons disend(x, y) \,\&\, (\forall z)((z < x) \to \neg disend(z, y)) \& (\forall z)((y < z) \to \neg disend(x, z))$ — интервал $[x, y]$ является максимальным дискретным интвалом с левым и правым концом.

Итак, выпишем список аксиом Ax:

(1) T_L — аксиомы линейного порядка.

(2) Счетное число аксиом:

$(\exists x, y)\zeta_0(x, y)$, где $\zeta_0(x, y) \leftrightharpoons dis(x, y) \,\&\, (\forall z)(x \leq z)$;

$(\exists x, y)\mathbf{2}(x, y)$, где $\mathbf{2}(x, y) \leftrightharpoons (x \lhd y) \,\&\, (\exists z)\zeta_0(z, x)$;

$(\exists x, y)\zeta_1(x, y)$, где $\zeta_1(x, y) \leftrightharpoons dis(x, y) \,\&\, (\exists z)\mathbf{2}(z, x)$;

$(\exists x, y)\mathbf{3}(x, y)$, где $\mathbf{3}(x, y) \leftrightharpoons (x < y) \,\&\, (\exists z)(x \lhd z \lhd y) \,\&\, (\exists z)\zeta_1(z, x)$;

...

$(\exists x, y)\zeta_n(x, y)$, где $\zeta_n(x, y) \leftrightharpoons dis(x, y) \,\&\, (\exists z)\mathbf{p_{n-1}}(z, x)$;

$(\exists x, y)\mathbf{p_n}(x, y)$, где $\mathbf{p_n}(x, y) \leftrightharpoons (x < y) \,\&\, (\exists z_1, \ldots, z_{p_n-2})(x \lhd z_1 \lhd \ldots \lhd z_{p_{n-2}} \lhd y) \,\&\, (\exists z)\zeta_{n-1}(z, x)$;

...

(3) Аксиома $(\forall x)((\exists y)(y < x) \to (\exists z)((x \lhd z) \vee (z \lhd x)))$, утверждающая отсутствие плотных подинтервалов.

(4) Аксиома $(\forall x, y)(disend(x, y) \to (\exists x_1, y_1)((x_1 \leq x < y \leq y_1) \,\&\, (dis(x_1, y_1) \vee maxdisend(x_1, y_1)))$, утверждающая, что каждый дискретный интервал с левым и правым концом может быть расширен или до максимального дискретного интервала с левым и правым концом, или до дискретного интервала без концов.

(5) Аксиома $(\forall x, y)(dis(x, y) \to (\exists z)maxdisend(y, z))$, утверждающая, что за каждым дискретным интервалом без концов непосредственно следуте максимальный дискретный интервал с левым и правым концом.

(6) Аксиома $(\forall x, y)((dis(x, y) \,\&\, \neg\zeta_0(x, y)) \to (\exists z)maxdisend(z, x))$, утверждающая, что каждому дискретному интервалу без концов (кроме первого) непосредственно предшествует максимальный дискретный интервал с левым и правым концом.

(7) Аксиома $(\forall x, y)(maxdisend(x, y) \to (\exists z)dis(y, z))$, утверждающая, что за каждым максимальным дискретным интервалом с левым и правым концом непосредственно следует дискретный интервал без концов.
(8) Аксиома $(\forall x, y)(maxdisend(x, y) \to (\exists z)dis(z, x))$, утверждающая, что каждому максимальному дискретному интервалу с левым и правым концом непосредственно предшествует дискретный интервал без концов.
(9) И аксиомы $(\forall x_1, \ldots, x_n)(((x_1 \lhd \ldots \lhd x_n) \,\&\, maxdisend(x_1, x_n)) \to (\forall y_1, z)(((x_n < y_1) \,\&\, maxdisend(y_1, z)) \to (\exists y_2, \ldots, y_n)(y_1 \lhd y_2 \lhd \ldots \lhd y_n < z)))$ для всех $n \geq 2$. Эти аксиомы говорят о том, что размер конечных максимальных дискретных интервалов с левым и правым концом возрастает.

Очевидно, что $\mathcal{L} \models Ax$. Пусть $\mathcal{L}_1 \models Ax$, тогда $\mathcal{L}_1 = \mathbf{1} + \sum\limits_{n\in\omega}(\mathcal{D}_n + \mathbf{p_n}) + \sum\limits_{n\in\zeta\times\alpha}(\mathcal{D}_n + \mathcal{D}_n^E)$, где α — некоторый линейный порядок, $\mathcal{D}_n$ — произвольные дискретные линейные порядки без концов, при $n \in \omega$ или $n \in \alpha \times \zeta$, и $\mathcal{D}_n^E$ — произвольные бесконечные дискретные линейные порядки с левым и правым концом, при $n \in \alpha \times \zeta$.

Покажем, что модели $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ элементарно эквивалентны.

Пусть $\mathcal{L}^*$ — насыщенная модель мощности ω_1 для некоторого счётного линейного порядка $\mathcal{L}' \models Ax$, являющаяся его элементарным расширением, в предположении континуум гипотезы в силу теоремы 1 такая модель существует. Из $\mathcal{L}_1 \models Ax$ и, следовательно, $\mathcal{L}^* \models Ax$ следует, что $\mathcal{L}^* = \mathbf{1} + \sum\limits_{n\in\omega}(\mathcal{D}_n^* + \mathbf{p_n}) + \sum\limits_{n\in\zeta\times\alpha^*}(\mathcal{D}_n^* + (D_n^E)^*)$, для некоторых $\mathcal{D}_n^*, \alpha^*, (D_n^E)^*$.

Утверждается, что

(1) для всех $n \in \omega$ и $n \in \alpha^*$ линейные порядки $\mathcal{D}_n^* = (D_n^*, \leq_{\restriction D_n^*})$ являются насыщенными дискретными линейными порядками без концов мощности ω_1;
(2) для всех $n \in \alpha^*$ линейные порядки $(D_n^E)^* = ((D_n^E)^*, \leq_{\restriction (D_n^E)^*})$ являются насыщенными дискретными линейными порядками с левым и правым концом мощности ω_1;
(3) $\omega + \zeta \times \alpha^* \cong (A, \leq_{\restriction A})$, где $A = \{a \mid \mathcal{L}^* \models (\exists x)maxdis(a, x)\}$, является насыщенным дискретным линейным порядком с левым концом мощности ω_1.

Приведём доказательство пункта 3, как наиболее сложного. Доказательства остальных пунктов аналогичны.

Итак, пусть $\mathcal{A} = (A, \leq_{\restriction A})$. Рассмотрим счётное множество X ($X \subset A$) и некоторый n-тип p теории $Th((\mathcal{A}, c_i)_{i\in X})$. Будем считать, что $n = 1$. Пусть $\Phi(x)$ — формула типа p в пренексной нормальной форме, заменим в ней (поочередно, начиная с самого внутреннего) каждое вхождение $(\exists y)\Psi(y)$ на $(\exists y)((\exists z)\, maxdis(y, z) \,\&\, \Psi(y))$, и каждое вхождение $(\forall y)\Psi(y)$ на $(\forall y)((\exists z)maxdis(y, z) \to \Psi(y))$, после такого преобразования получим формулу $\Phi'(x)$. Рассмотрим множество формул $p_1 = \{\Phi'(x) \,\&\, (\exists z)maxdis(x, z) \mid \Phi(x) \in p\}$, оно является совместным с $Th((\mathcal{L}^*, c_i)_{i\in X})$ и, следовательно, может быть расширено до типа теории $Th((\mathcal{L}^*, c_i)_{i\in X})$. Пусть a реализация этого типа, тогда

$\mathcal{L}^* \models (\exists x) maxdis(a,x)$ и, следовательно, $a \in A$ и элемент a реализует тип p в $(\mathcal{A}, c_i)_{i \in X}$. Случай с $n > 1$ рассматривается аналогично.

Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{L}_1$ является счётным, иначе возьмём его счётную элементарную подмодель. Рассмотрим элементарное расширение порядка $\mathcal{L}$ до насыщенного порядка $\mathcal{L}^*$ мощности ω_1 и элементарное расширение порядка $\mathcal{L}_1$ до насыщенного порядка $\mathcal{L}_1^*$ мощности ω_1, из доказанного выше вытекает, что $\mathcal{L}^* \cong \mathcal{L}_1^*$. Тогда из $\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_1^*$ и $\mathcal{L}^* \cong \mathcal{L}_1^*$ следует, что $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_1$

Итак, модели $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ элементарно эквивалентны и, следовательно, теория $T_{Ax} = \{\Phi \mid Ax \vdash \Phi\}$ является полной и совпадает с $T = Th(\mathcal{L})$.

□

Лемма 3. *$\mathcal{L}$ — простая модель теории $T = Th(\mathcal{L})$.*

Доказательство. На каждой n-ке порядка $\mathcal{L}$ реализуется некоторая полная формула, следовательно, модель $\mathcal{L}$ — атомная и, будучи счётной, является простой. □

Лемма 4. *Семейство главных типов теории T вычислимо.*

Доказательство. Пусть $\Phi(\overline{x})$ главная формула для n-типа p. Тогда Φ говорит о том, к какому типу интервала принадлежит каждый $x_i \in \overline{x}$, для $i \leq n$ (имеются ввиду интервалы, определяемые формулами $\zeta_0, \mathbf{2}, \zeta_1, \ldots$), для конечных интервалов указывается точное расположение этого элемента и если для некоторого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ лежат в одном интервале, то дополнительно указывается их расположение друг относительно друга и точное количество элементов между ними. Несложно показать, что существует вычислимая нумерация всех главных формул и, следовательно, существует вычислимая нумерация всех главных типов. Таким образом, семество главных типов теории T вычислимо. □

Из предыдущих лемм и теоремы 2 следует, что порядок $\mathcal{L}$ обладает разрешимым представлением.

Осталось показать, что данный линейный порядок обладает разрешимым в расширенном языке представлением. В модели $\mathcal{L}$ формула $(\exists^\infty x)\Phi(x)$ истинна тогда и только тогда, когда истинна формула $(\forall y)(\exists x)((x > y) \,\&\, \Phi(x)) \vee (\exists y)(\forall z)((z < y) \to (\exists x)((z < x < y) \,\&\, \Phi(x))) \vee (\exists y)(\forall z)((y < z) \to (\exists x)((y < x < z) \,\&\, \Phi(x)))$. Поэтому из разрешимости $\mathcal{L}$ следует разрешимость $\mathcal{L}$ в расширенном языке. □

4. Автоустойчивость в классе автоматных и в классе разрешимых представлений

Пусть $\mathcal{A}$ — класс автоматных линейных порядков, $\mathcal{AA}$ — класс автоустойчивых в классе автоматных представлений линейных порядков, $\mathcal{AD}$ — класс автоустойчивых в классе разрешимых представлений линейных порядков. Очевидно, что $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{AD}$ и $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A}$ не пусто, так как в нем лежат как минимум все конечные линейные порядки. Так как, в силу теоремы 3, автоматное представление модели является разрешимым, то получаем включение $\mathcal{AD} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{AA}$. В этой главе будет показано, что два этих включения являются строгими.

Теорема 13. *Существует линеный порядок, не являющийся автоустойчивым в классе разрешимых представлений, но являющийся автоустойчивым в классе автоматных представлений.*

Доказательство. Примером такого порядка может служить, например, $\zeta \times \zeta$. Из теоремы 11 следует, что порядок $\zeta \times \zeta$ автоустойчив в классе автоматных представлений. А неавтоустойчивость в классе разрешимых представлений следует из теорем 7 и 9. □

Теорема 14. *Существует автоустойчивый в классе разрешимых представлений линейный порядок, не являющийся автоматным.*

Доказательство. Примером такого порядка служит $\mathcal{L} = \mathbf{1} + \eta + \mathbf{2} + \eta + \mathbf{3} + \eta + \ldots + \eta + \mathbf{p_n} + \eta + \ldots$, где p_n — простое число с номером n.

Неавтоматность этого порядка доказывается так же как и в теореме 12. Аналогично доказательству теоремы 12 доказывается, что $T = Th(\mathcal{L})$ — разрешима, обладает простой моделью, которой является $\mathcal{L}$, и что семейство главных типов совместных с T вычислимо. Тогда из теоремы 2 и теоремы 4 будет следовать разрешимость порядка $\mathcal{L}$ и его автоустойчивость в классе автоматных представлений. □

Список литературы

[1] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Новосибирск, Научная книга, 1999.

[2] С.С. Гончаров, *Сильная конструктивизируемость однородных моделей*, Алгебра и логика, **17**:4 (1978), 363–388.

[3] Г. Кейслер, Ч.Ч. Чен, *Теория моделей*, Москва, Мир, 1977.

[4] А.Т. Нуртазин, *Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства*, Алгебра и логика, **13**:3 (1974), 311–323.

[5] А.А. Ревенко, *Автоустойчивость автоматных представлений ординалов и линейных порядков низкого ранга*, Вестник НГУ, серия Математика, **8**:4 (2008), 76–88.

[6] М.Г. Перетятькин, *Критерий сильной конструктивизируемости однородной модели*, Алгебра и логика, **17**:4 (1978), 436–454.

[7] C.J. Ash, J.F. Knight, *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **144**, Elsevier, 2000.

[8] V. Barany, *Automatic Presentations of Infinite Structures*, PhD Thesis, RWTH Aachen, 2007.

[9] A. Blumensath, E. Grädel, *Finite presentations of infinite structures: Automata and Interpretations*, Theory of Computing Systems, **37** (2004), 641–674.

[10] C. Delhomme, *Non-automaticity of* ω^ω, 2001, manuscript.

[11] R.G. Downey, *Computability Theory and Linear Orderings*, Handbook of Recursive Mathematics, vol. 2, chapter 14, 823–976, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **139**, Elsevier, 1998.

[12] S. S. Goncharov, *Autostable Models and Algorithmic Dimentions*, Handbook of Recursive Mathematics, vol. 1, chapter 6, 261–287, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **138**, Elsevier, 1998.

[13] B. Khoussainov, M. Minnes, *Model Theoretic Complexity of Automatic Structures*, Lecture Notes in Computer Science, **4978** (2008), 514–525.

[14] B. Khoussainov, M. Minnes and J. Liu, *Unary Automatic Graph*, Mathematical Structures in Computer Sciens, **19**:1 (2008), 533–152.

[15] B. Khoussainov, A. Nerode, *Automatic Presentations of Structures*, Lecture Notes in Computer Science, **960** (1995), 367–392.

[16] B. Khoussainov, A. Nerode, *Open Questions in the Theory of Automatic Structures*, Bulleten of EATCS, **94** (2008), 181–204.

[17] B. Khoussainov, S. Rubin, F. Stephan, *Automatic Linear Orders and Trees*, ACM Transactions on Computational Logic, **6**:4 (2005), 675–700.
[18] C.H. Langford, *Theorems on Deducibility*, Annals of Mathematics, **28**:2 (1927), 459–471.
[19] M. Minnes, *Computability and complexity properties of automatic structures and their applications*, PhD Thesis, Cornell University, 2008.
[20] M. Moses, *Recursive Properties of Isomorphism Types*, PhD Thesis, Monash University, Clayton, Victoria, Australia, 1983.
[21] M. Moses, *Recursive Linear Orderings with Recursive Successivities*, Annals of Pure and Appleing Logic, **27** (1984), 253–264.
[22] J. B. Remmel, *Recursively Categorical Linear Orderings*, Proceedings of American Mathematical Society, **83** (1981), 387–391.
[23] J.G. Rosenstein, *Linear Orderings*, Academic Press, 1982.
[24] S. Rubin, *Automatic Structures*, PhD Thesis, The University of Auckland, New Zealand, 2004.
[25] S. Rubin, *Survey of automatic structures*, The Bulletin of Symbolic Logic, **14**:2 (2008), 169–200.

Александра Анатольевна Гаврюшкина
Новосибирский государственный университет.,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: a.a.revenko@gmail.com