S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 122–131 (2010) УДК 519.62
MSC 65L05

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА

О.Б. АРУШАНЯН, Н.И. ВОЛЧЕНСКОВА, С.Ф. ЗАЛЕТКИН

Abstract. An approximate method to solve the Cauchy problem for normal and canonical systems of second-order ordinary differential equations is proposed. The method is based on orthogonal expansions of the solution and its derivative in shifted series of Chebyshev polynomials of the first kind at the integration step. The corresponding equations are constructed for the approximate values of Chebyshev coefficients in the right-hand side of the system under study. An iterative process for solving these equations is described and some sufficient conditions of its convergence are considered. Several error estimates for the Chebyshev coefficients and for the solution are given with respect to the size of the integration step.

Keywords: ordinary differential equations, numerical methods.

1. Введение

В работе дается построение метода приближенного решения задачи Коши для нормальной системы M обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \le x \le x_0 + X, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

и задачи Коши для канонической системы второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \le x \le x_0 + X, \tag{3}$$

Arushanyan, O.B., Volchenskova, N.I., Zaletkin, S.F., Approximate solution of ordinary differential equations using Chebyshev series.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10–01–00297-а и 10–01–91219-ст-а).

Поступила 20 декабря 2009 г., опубликована 29 июня 2010 г.

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

$$y'(x_0) = y'_0. \tag{5}$$

Метод основан на разложении правой части системы, взятой на решении задачи, на частичном сегменте $[x_0, x_0 + h]$, $h < X$, в ряд Фурье по ортогональным многочленам Чебышева первого рода. Частичная сумма этого ряда принимается в качестве многочлена, аппроксимирующего правую часть $f\big(x, y(x)\big)$ уравнения (1) (соответственно $f\big(x, y(x), y'(x)\big)$ для уравнения (3)). Вычисление коэффициентов разложения выполняется по квадратурной формуле Маркова. Этот подход отличается от известного способа нахождения коэффициентов посредством линейных рекуррентных соотношений [1–4], предназначенного, как правило, для интегрирования линейных дифференциальных уравнений и имеющего ряд ограничений и трудности в практическом применении.

Мы будем использовать систему смещенных многочленов Чебышева $T_i^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$ и смещенный ряд Чебышева

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\varphi]\, T_i^*(x) \tag{6}$$

для функции $\varphi(x) \in L_2\big(0, 1; 1/\sqrt{x(1-x)}\big)$, где

$$a_i^*[\varphi] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, \varphi(x)\, T_i^*(x)\, dx, \tag{7}$$

символ $\sum{}'$ определен формулой $\displaystyle\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2} a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$, $m \geq l$. Будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения имеет нужное число непрерывных частных производных, обеспечивающих справедливость приводимых оценок для погрешности рассматриваемого метода.

2. Разложение решения задачи Коши в ряд Чебышева

Зададим число $h < X$ и рассмотрим на частичном сегменте $[x_0, x_0{+}h]$ задачу Коши (1), (2). Приведем соотношения, связывающие коэффициенты Чебышева решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемого как функция переменной α, $0 \leq \alpha \leq 1$, с коэффициентами Чебышева функции $\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big)$:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\big), \quad i > 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2} a_1^*[\Phi]\Big) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2 - 1}\, a_j^*[\Phi]. \tag{9}$$

Из сделанного предположения о гладкости правой части следует равномерная сходимость всех рассматриваемых рядов. Заметим, что если $a_i^*[\Phi] = 0$, $i \geq k + 1$, то $a_i^*[y] = 0$, $i \geq k + 2$.

Из приведенных соотношений видно, что для практического применения ортогонального разложения решения $y(x_0 + \alpha h) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big]\, T_i^*(\alpha)$ необходимо иметь значения коэффициентов Чебышева $a_i^*[\Phi]$ правой части: $\Phi(\alpha) =$

$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\Phi]\, T_i^*(\alpha)$. Поэтому наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы дать способ определения коэффициентов $a_i^*[\Phi]$. Для этого мы перейдем к выводу уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения коэффициентов Чебышева правой части, и к описанию алгоритма их решения.

Рассмотрим сумму Чебышева порядка k функции $\Phi(\alpha)$

$$S_k(\alpha, \Phi) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\Phi]\, T_i^*(\alpha). \tag{10}$$

Вычислим коэффициенты $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, входящие в (10), по квадратурной формуле Маркова [5] с одним наперед заданным узлом $\alpha = 0$, числом нефиксированных узлов k и весовой функцией $1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Пусть многочлен $J_k(\alpha)$ представляет полученную таким образом частичную сумму

$$J_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[J_k]\, T_i^*(\alpha), \tag{11}$$

где

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \Phi(\alpha_j)\, T_i^*(\alpha_j), \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = \frac{1 + \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}}{2}. \tag{12}$$

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ многочленом $J_k(\alpha)$. Тогда погрешность аппроксимации будет состоять из остаточного члена $r_k(\alpha, \Phi)$ ряда и ошибок в приближенных значениях коэффициентов Чебышева:

$$\Phi(\alpha) - J_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{13}$$

Здесь

$$R_i = R(\Phi\, T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^{l} \Phi^{(2k+1-l)}(\eta) T_i^{*(l)}(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1.$$

Используя оценки для остатков ряда Чебышева и квадратурной формулы Маркова, можно показать, что суммарная погрешность (13) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$.

Пусть

$$U(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + h \int_0^{\alpha} J_k(\xi) d\xi, \quad \tilde{\Phi}(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, U(x_0 + \alpha h)\big). \tag{14}$$

Определим числа $a_i^*[\tilde{J}_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и многочлен $\tilde{J}_k(\alpha)$ по формулам

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j), \quad \tilde{J}_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\tilde{J}_k] T_i^*(\alpha). \tag{15}$$

Значения правой части $\tilde{\Phi}(\alpha_j)$ в (15) зависят от функции $U(x_0 + \alpha h)$, а эта последняя зависит от коэффициентов Чебышева $a_i^*[J_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0 + \alpha h)$ дифференциального уравнения (1), а следовательно, и функция

$\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[J_k]$ в (11), (12) являются неизвестными величинами. Будем предполагать, что коэффициенты Чебышева функции

$$U(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[U] T_i^*(\alpha) \tag{16}$$

вычисляются с помощью соотношений (8), (9), в левых частях которых надо y заменить на U, а в правых частях необходимо $a_l^*[\Phi]$ поменять на $a_l^*[\tilde{J}_k]$ из (15). Поэтому соотношения (15) являются уравнениями относительно коэффициентов Чебышева $a_i^*[\tilde{J}_k]$.

Рассматривая $U(x_0+\alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0+\alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]$ и обозначая $x_j^0 = x_0 + \alpha_j h$, запишем уравнения (15) для $i = 0, 1, \ldots, k$ в виде

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\Big(x_j^0, U\big(x_j^0; a_0^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)\Big)\, T_i^*(\alpha_j). \tag{17}$$

3. Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Чебышева

Подставляя в (17) вместо $a_i^*[\tilde{J}_k]$ точные значения коэффициентов Чебышева функции $\Phi(\alpha)$, получим

$$a_i^*[\Phi] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\Big(x_j^0, U\big(x_j^0; a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big)\Big) T_i^*(\alpha_j) + \rho_i. \tag{18}$$

Левая часть равенства (18) принимает значение $a_i^*[J_k] + R_i$, сумма в правой части (18) равна $a_i^*[J_k] + O(h^{k+2})$ для уравнения $y' = f(x,y)$ и равна $a_i^*[J_k]$ для уравнения $y' = f(x)$. Заметим, что $R_i = O(h^{2k+1-i})$ при $h \to 0$. Таким образом, невязка, которая при этом получается, будет иметь порядок

для уравнения $y' = f(x,y)$: $\rho_i = O(h^{2k+1-i}) + O(h^{k+2})$, т.е.

$$\rho_k = O(h^{k+1}), \quad \rho_i = O(h^{k+2}), \quad 0 \le i \le k-1, \tag{19}$$

для уравнения $y' = f(x)$:

$$\rho_i = O(h^{2k+1-i}), \quad 0 \le i \le k. \tag{20}$$

Обозначим $\delta_i = a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{J}_k]$, $i = 0, 1, \ldots k$, и вычтем из (18) уравнение (17) (для сокращения записи аргумент U функции f и коэффициенты Чебышева в качестве аргументов функции U указывать не будем):

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1} \sum_{m=0}^{k} \left[\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_j^0)}{\partial y} \frac{\partial U(x_j^0)}{\partial a_m^*[\Phi]} T_i^*(\alpha_j) \right] \delta_m + \rho_i.$$

Скалярная матрица $\dfrac{\partial U(x_j^0)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ порядка M содержит множитель h (см. (8), (9)). Поэтому последнее равенство может быть представлено в виде

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1} \sum_{m=0}^{k} h Q_{im} \delta_m + \rho_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{21}$$

где Q_{im} — квадратные матрицы порядка M, зависящие от i и m. Из (19)–(21) следует, что погрешность δ_i имеет следующий порядок относительно h:

для уравнения $y' = f(x,y)$: $\delta_k = O(h^{k+1})$, $\quad \delta_i = O(h^{k+2})$, $\quad 0 \le i \le k-1$;
для уравнения $y' = f(x)$: $\delta_i = O(h^{2k+1-i})$, $\quad 0 \le i \le k$.

4. Итерационный процесс определения коэффициентов Чебышева

Теперь применим метод последовательных приближений для решения системы уравнений (17). Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышева $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, полагая здесь $\nu = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Определим ν-е приближение коэффициентов Чебышева $a_i^*[U]$ решения U по формулам (8) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$ и (9) для $i = 0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U] = \frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\big), \quad i = 1, 2, \ldots, k+1, \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}a_0^{*(\nu)}[U] = y_0 + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - \frac{1}{2}a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\Big) - \frac{h}{2}\sum_{j=2}^{k}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]. \tag{23}$$

Входящие в формулу (22) коэффициенты Чебышева $a_l^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ при $l \ge k+1$ полагаются равными нулю.

По найденным значениям коэффициентов Чебышева $a_i^{*(\nu)}[U]$ вычисляем ν-е приближение

$$U^{(\nu)}(x_j^0) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^{*(\nu)}[U]T_i^*(\alpha_j), \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{24}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (1):

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0)\big), \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{25}$$

Теперь находим $(\nu+1)$-е приближение коэффициентов Чебышева правой части дифференциального уравнения (1) с помощью соотношений

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}'\tilde{\Phi}(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j) = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}' f\big(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0)\big)T_i^*(\alpha_j). \tag{26}$$

Дальнейшие приближения для $a_i^{*(\nu)}[U]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, вычисляются по такой же схеме с использованием формул (22)–(26) для $\nu = 1, 2, \ldots$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на единицу. При этом порядок точности приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями $y(x_j^0) - U^{(\nu)}(x_j^0)$ и $a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения, равный порядку точности формулы $y(x) \approx U(x_0 + \alpha h)$, в которой U определяется по (11), (12), (14). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения $U(x_j^0)$, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов $a_i^*[y]$, $i = 0, 1, \ldots, k+1$, и $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu + 1$:

$$a_i^*[y] = a_i^{*(\nu+1)}[U], \quad a_i^*[\Phi] = a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k]. \tag{27}$$

5. Сходимость итерационного процесса

Рассмотрим условия сходимости последовательных приближений (26), (24).

Уравнения (17), которым удовлетворяют коэффициенты Чебышева $a_i^*[\tilde{J}_k]$, запишем в виде

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \varphi_i\big(a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

где $\varphi_i\big(a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)$ — правая часть (17). Обозначим l-ю компоненту вектор-функции φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, $i, m = 0, 1, \ldots, k$, $l, n = 1, 2, \ldots, M$ (для сокращения записи коэффициенты Чебышева $a_0^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]$ в качестве аргументов функции U указывать не будем):

$$\frac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f_l\big(x_j^0, U(x_j^0)\big)}{\partial y_n} \frac{\partial U_n(x_j^0)}{\partial a_{nm}} T_i^*(\alpha_j).$$

При выводе выражения производной мы учли, что каждая компонента вектора U зависит только от одноименной компоненты вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$. Из (8), (9) следует, что $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h)$. Поэтому, выбрав малую величину шага интегрирования h, можно обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода итераций (26), (24). Если ввести в рассмотрение матрицу Q, составленную из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей найденных выше частных производных $\max\left|\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, то достаточным условием для сходимости итераций является условие, что какая-нибудь норма матрицы Q меньше единицы [6, 7]. Таким образом, при значениях шага интегрирования, когда это достаточное условие выполнено, последовательные приближения $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, определяемые по (26), (24), будут при $\nu \to \infty$ сходиться к решению уравнения (17).

6. Приближенное вычисление решения задачи Коши на шаге интегрирования

По найденным значениям (27) коэффициентов Чебышева $a_i^*[y]$ частичная сумма ряда

$$U(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha)$$

даст приближение решения $y(x_0 + \alpha h)$ задачи Коши (1), (2) на $[x_0, x_0 + h]$; в частности,

$$y(x_0 + h) = y(x_1) \approx U(x_1) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y].$$

Погрешность приближенного значения решения $U(x_0 + h)$ есть $O(h^{k+2})$.

Для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3)–(5) коэффициенты Чебышева решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемого как функция переменной α, $0 \le \alpha \le 1$, связаны с коэффициентами Чебышева правой части системы $\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big)$ следующими соотношениями:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi] - 2ia_i^*[\Phi] + (i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}\,, \quad i > 2,$$

$$a_2^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h^2}{96}\big(3a_0^*[\Phi] - 4a_2^*[\Phi] + a_4^*[\Phi]\big),$$

$$a_1^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{2}\left[y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{3}{4}a_1^*[\Phi] + \frac{1}{4}a_3^*[\Phi]\Big) - \frac{h}{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^*[\Phi]\right],$$

$$\frac{1}{2}a_0^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{2}y_0' + \frac{h^2}{32}\big(3a_0^*[\Phi] - 2a_1^*[\Phi] + a_2^*[\Phi]\big) - \\ - \frac{h^2}{4}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^*[\Phi] + \frac{h^2}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j(j+2)}\,\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}\,.$$

Подобным же образом выражаются коэффициенты Чебышева производной решения $y'(x_0 + \alpha h)$, $0 \le \alpha \le 1$:

$$a_i^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\big), \quad i \ne 0,$$

$$\frac{1}{2}a_0^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = y_0' + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\right) - \frac{h}{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^*[\Phi].$$

Частичные суммы рядов Чебышева

$$U'(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y']T_i^*(\alpha), \quad U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha)$$

представляют приближения производной $y'(x_0 + \alpha h)$ и решения $y(x_0 + \alpha h)$ задачи Коши (3)–(5) в любой точке $x = x_0 + \alpha h$, $0 \le \alpha \le 1$. В частности,

$$y'(x_0{+}h) = y'(x_1) \approx U'(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y'], \quad y(x_0{+}h) = y(x_1) \approx U(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a_i^*[y].$$

Погрешность приближенного значения производной $U'(x_0 + h)$ есть $O(h^{k+2})$, а погрешность приближенного значения решения $U(x_0 + h)$ — $O(h^{k+3})$.

Так как коэффициенты Чебышева $a_i^*[\Phi]$ определяются с помощью приведенного выше итерационного процесса приближенно, то указанные здесь оценки погрешности решения и производной справедливы тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ имеют достаточный для этого порядок относительно h. Возникающие в (16) вычислительные погрешности при суммировании являются несущественными и незначительно влияют на результат, поскольку для суммирования с помощью коэффициентов Чебышева применен алгоритм, сравнимый по числу арифметических операций со схемой Горнера, а коэффициенты Чебышева достаточно быстро стремятся к нулю.

7. Пример

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1'' = -y_1 - \frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 1.5,$$

$$y_2'' = -y_2 + \frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = -0.5.$$

Точное решение $y_1(x) = \sin x + \sqrt{x+1}$, $y_2(x) = \cos x - \sqrt{x+1}$ системы содержит периодическую составляющую и возрастающую (или убывающую) составляющую. Задача решалась описанным в статье методом рядов Чебышева на интервале $[0, X]$. При этом задавалось разбиение интервала на девять частичных сегментов длиной h; на каждом сегменте решение представлялось в виде частичной суммы ряда Чебышева. Вычисления проводились с 16 значащими цифрами.

Таблица 1

No.	X	h	Количество верных десятичных знаков для $y_1(X)$ и $y_2(X)$					
			Метод рядов Чебышева, $k=5$		Метод Штермера		Неявный метод Рунге–Кутта	
1	0.09	0.01	16	16	11	11	16	16
2	0.18	0.02	15	15	10	10	14	14
3	0.36	0.04	14	14	8	8	12	12
4	0.72	0.08	12	12	6	6	11	11
5	0.9	0.1	12	12	6	6	10	10
6	1.8	0.2	10	10	4	4	9	9
7	3.6	0.4	9	9	3	5	8	7
8	7.2	0.8	7	7	2	2	5	5
9	9.0	1.0	6	6	1	1	4	4

Таблица 2

No.	X	h	Количество верных десятичных знаков для $y_1(X)$ и $y_2(X)$				
			Метод рядов Чебышева, $k=30$		Метод Штермера	Неявный метод Рунге–Кутта	
10	17.0	2.0	15	15	—	2	2
11	25.5	3.0	14	14	—	0	1
12	34.0	4.0	15	14	—	0	0
13	42.5	5.0	14	13	—	—	0
14	51.0	6.0	13	13	—	1	—
15	59.5	7.0	12	12	—	0	—
16	68.0	8.0	12	12	—	0	0
17	85.0	10.0	11	11	—	0	0
18	127.5	15.0	10	11	—	—	—

Различные значения X, h и k, а также количество верных десятичных знаков в приближенных значениях обеих компонент решения $y_1(X)$ и $y_2(X)$, вычисленных в конце интервала X, приведены в табл. 1 и 2. В этих таблицах даны также результаты, полученные методом Штермера пятого порядка типа предиктор-корректор и неявным трехстадийным методом Рунге–Кутта шестого порядка с постоянным шагом, равным диаметру указанного разбиения интервала интегрирования. Прочерк в табл. 2 означает, что при указанных в ней значениях h либо не может быть получено приближение с удовлетворительной точностью, либо вычисленное значение вообще не имеет ни одной верной цифры.

Из таблиц следует, что при одних и тех же значениях h метод рядов Чебышева дает на несколько порядков более высокую точность по сравнению с методом Штермера и неявным методом Рунге–Кутта и обеспечивает вычисление приближенного решения с высокой точностью при тех шагах h, с которыми эти методы не справляются.

Многочисленные тестовые расчеты, в том числе и приведенные в табл. 1 и 2, свидетельствуют об устойчивости описанного метода при решении нежестких задач. Применение метода к жестким задачам (к задаче Протеро–Робинсона и другим жестким задачам учебного характера) показало, что область устойчивости метода зависит от числа k членов ряда, используемых для аппроксимации решения. Во-первых, интервал устойчивости (пересечение области устойчивости с действительной осью комплексной плоскости $z = \lambda h$) конечен; во-вторых, с увеличением k этот интервал растет и превосходит интервалы устойчивости явных методов Рунге–Кутта, методов типа Адамса и неявных методов Рунге–Кутта, исключая А-устойчивые. Более детальное изучение областей устойчивости метода является предметом отдельной самостоятельной работы.

Список литературы

[1] К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*, Физматгиз, Москва, 1961.

[2] В.К. Дзядык, *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*, Наукова Думка, Киев, 1988.

[3] С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, Москва, 1983.

[4] Р.В. Хемминг, *Численные методы для научных работников и инженеров*, Наука, Москва, 1972.

[5] И.П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*, Изд-во С.-Петербург. ун-та, СПб., 1998.

[6] И.С. Березин, Н.П. Жидков, *Методы вычислений*, Физматгиз, Москва, 1962.

[7] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, *Численные методы*, БИНОМ, Москва, 2007.

Олег Багратович Арушанян
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: arush@srcc.msu.ru

Надежда Ивановна Волченскова
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: nad1946@mail.ru

Сергей Федорович Залеткин
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: iraz@srcc.msu.ru