S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 132–139 (2010) УДК 517.552

MSC 32A55

О НАХОЖДЕНИИ ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА БОХНЕРА—МАРТИНЕЛЛИ В СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

А.С. КАЦУНОВА

Abstract. It is derived that principal values v.p. and v.p.h. of the Bochner—Martinelli integral are equal.

Keywords: Bochner—Martinelli integral, principal value of integral, strictly pseudoconvex domains.

1. Введение

Пусть D – ограниченная строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ с границей ∂D класса $\mathcal{C}^3$, т.е.

$$D = \{z \in \Omega : \ \rho(z) < 0\},$$

где $\rho(z)$ – вещественнозначная строго плюрисубгармоническая функция класса $\mathcal{C}^3$ в некоторой окрестности Ω замыкания области $\overline{D}$ и такая, что $d\rho \neq 0$ на ∂D.

Известно (см., например, [5, теорема 3.10]), что в Ω существует барьерная гладкая функция $\Phi(\zeta, z)$ переменных $(\zeta, z) \in \Omega \times \Omega$ такая, что Φ голоморфна по $z \in \Omega$ при фиксированном $\zeta \in \Omega$,

$$2 \ \mathrm{Re} \ \Phi(\zeta, z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + \gamma \ |\zeta - z|^2$$

для некоторой константы $\gamma > 0$,

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(\zeta, z) \ (\zeta_k - z_k),$$

Katsunova, A.S., On principle values of Martinelli—Bochner integral in strictly pseudoconvex domains.

Поступила 30 октября 2009 г., опубликована 29 июня 2010 г.

где $P = (P_1, \dots, P_n)$ – гладкая вектор-функция переменных $(\zeta, z) \in \Omega \times \Omega$, голоморфная по $z \in \Omega$ при фиксированном $\zeta \in \Omega$.

Если функция $\rho(\zeta)$ является строго выпуклой, то $\Phi(\zeta, z)$ можно выбрать в виде

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_k} \ (\zeta_k - z_k).$$

Для заданной гладкой функции $\eta = \eta(\zeta, z) : \partial D \to \mathbb{C}^n$ такой, что $< \zeta - z, \eta > \neq 0$ для всех $z \in D$ и $\zeta \in \partial D$, где $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, определим форму Лере (см., например, [5])

$$w'(\eta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \eta_k \ d\eta[k],$$

где $d\eta[k]$ есть внешнее произведение дифференциалов $d\eta_1, \dots, d\eta_n$, в котором дифференциал $d\eta_k$ пропущен.

Выделим в $w'(\eta)$ слагаемые, не содержащие голоморфных дифференциалов $d\zeta_k$, dz_k и дифференциалов $d\overline{z}_k$. Их сумму обозначим через $w'_0(\eta)$. Тогда форма $w'_0(\eta)$ есть форма степени 0 по $d\overline{z}_1, \dots, d\overline{z}_n$ и степени $(n-1)$ по $d\overline{\zeta}_1, \dots, d\overline{\zeta}_n$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$ справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \cdot \frac{w'_0(P(\zeta, z) \wedge d\zeta}{(\Phi(\zeta, z))^n}, \quad z \in D, \tag{1}$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$.

Формула (1) является формулой Хенкина—Рамиреза, одной из реализаций формулы Коши—Фантаппье.

Определим главное значение сингулярного интеграла в смысле Керзмана—Стейна [6, 7] следующим образом:

$$v.p.h. \int\limits_{\partial D} u(\zeta) \cdot \frac{w'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{(\Phi(\zeta, z))^n} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus E_z(\varepsilon)} u(\zeta) \cdot \frac{w'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{(\Phi(\zeta, z))^n},$$

для интегрируемой на ∂D функции $u(\zeta)$ и точки $z \in \partial D$, где $E_z(\varepsilon) = \{\zeta \in \partial D : |\Phi(\zeta, z)| < \varepsilon\}$.

Оно отличается от обычного главного значения $v.p.$ по Коши тем, что из границы ∂D выбрасывается не обычный шар $B_z(\varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, а "эллипсоид" $E_z(\varepsilon)$, вытянутый вдоль комплексных касательных направлений.

Главное значение интеграла используется для получения формулы Сохоцкого—Племеля. В работах [6, 7] был рассмотрен интеграл Хенкина—Рамиреза. Было доказано, что главное значение $v.p.h.$ от функции $u = 1$ для интеграла Хенкина—Рамиреза равно $1/2$ и получен аналог формулы Сохоцкого—Племеля. В работе [3] было рассмотрено главное значение по Коши для интеграла Хенкина—Рамиреза от функции $u = 1$ и доказано, что оно равно 1. При разных определениях главного значения формула Сохоцкого—Племеля будет иметь различный вид.

Обозначим через $U(\zeta, z)$ ядро Бохнера—Мартинелли, т.е.

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{w'_0(\overline{\zeta} - \overline{z}) \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}},$$

где $w_0'(\overline{\zeta}-\overline{z}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)\ d\overline{\zeta}[k]$.

Известно [2, гл. 1], что

$$v.p.\int\limits_{\partial D} U(\zeta,z) = \frac{1}{2}, \quad z\in\partial D.$$

Целью работы является вычисление главного значения *v.p.h.* для данного ядра в строго псевдовыпуклых областях.

2. Основные результаты

Рассмотрим главное значение *v.p.h.* в смысле Керзмана—Стейна:

$$v.p.h.\int\limits_{\partial D} U(\zeta,z) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D\setminus E_z(\varepsilon)} U(\zeta,z),$$

для $z\in\partial D$ и $E_z(\varepsilon)=\{\zeta\in\partial D:\ |\Phi(\zeta,z)|<\varepsilon\}$.

Теорема 2. *При $n>1$ справедлива формула*

$$v.p.h.\int\limits_{\partial D} U(\zeta,z) = \frac{1}{2}, \quad z\in\partial D. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $D=\{z\in U:\ \rho(z)<0\}$ – строго псевдовыпуклая область. Для любой точки $\widetilde{\zeta}\in\partial D$ существует такое биголоморфное отображение некоторой окрестности $\widetilde{U}_{\widetilde{\zeta}}$ точки $\widetilde{\zeta}$ на некоторую окрестность нуля B в пространстве $\mathbb{C}^n_\eta$, что при этом отображении область $D\cap\widetilde{U}_{\widetilde{\zeta}}$ биголоморфно эквивалентна выпуклой области в $\mathbb{C}^n_\eta$, а обратное отображение переводит строго плюрисубгармоническую функцию $\rho(z)$ в строго выпуклую функцию.*

Лемма 1 есть лемма 10.2 в [1].

Лемма 2. *Ядро $U(\zeta,z)$ инвариантно относительно унитарных преобразований.*

Лемма 2 есть лемма 2.7 в [2].

Доказательство теоремы. Из леммы 1 получаем, что существует биголоморфное отображение $\zeta=\varphi(\eta)$ на некоторую окрестность нуля со свойствами, перечисленными в лемме 1. Делая унитарное преобразование, можно считать (см. [4]), что ∂D касается гиперплоскости $\mathrm{Im}\ \zeta_n=0$ в точке $z=0$. Тогда уравнение ∂D будет локально представимо в виде

$$\mathrm{Im}\ \zeta_n = \sum_{j,k=1}^{n-1}(\lambda_{jk}\zeta_j\zeta_k + \overline{\lambda}_{jk}\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k) + \sum_{j,k=1}^{n-1} g_{jk}\zeta_j\overline{\zeta}_k + o(|\zeta|^2),$$

а ядро $U(\zeta,z)$ перейдет в $U(\zeta,0)$ (согласно лемме 2).

После замены координат $\zeta\mapsto\hat{\zeta}$, где

$$\hat{\zeta}_1=\zeta_1,\ \ldots,\ \hat{\zeta}_{n-1}=\zeta_{n-1},\ \hat{\zeta}_n=\zeta_n-2i\sum_{j,k=1}^{n-1}\lambda_{jk}\zeta_j\zeta_k,$$

∂D примет вид

$$\mathrm{Im}\ \hat{\zeta}_n = \sum_{j,k=1}^{n-1} g_{jk}\hat{\zeta}_j\overline{\hat{\zeta}}_k + o(|\zeta|^2),$$

а ядро Бохнера—Мартинелли примет вид $U(\hat{\zeta} + o(|\zeta|^2), 0)$.

Так как строгая псевдовыпуклость влечет положительную определенность квадратичной формы

$$\sum_{j,k=1}^{n-1} g_{jk}\hat{\zeta}_j\overline{\hat{\zeta}}_k,$$

то, используя унитарные преобразования и растяжения по первым $n-1$ координатам, можно добиться, чтобы ∂D задавалась в виде

$$\mathrm{Im}\ \zeta_n = |\zeta'|^2 + o(|\zeta|^2),$$

где $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$.

Таким образом, вместо D можно рассматривать

$$D' = \left\{\zeta :\ |\zeta'|^2 - \mathrm{Im}\ \zeta_n < 0\right\},$$

а, отбрасывая бесконечно малые величины в ядре Бохнера—Мартинелли, рассматривать ядро $U(b\zeta, 0)$, где $b\zeta = (b_1\zeta_1, \ldots, b_{n-1}\zeta_{n-1}, b_n\zeta_n),\ b_n = 1$.

Остается проверить, что

$$v.p.h. \int\limits_{\partial D'} U(b\zeta, 0) = \frac{1}{2}.$$

По определению

$$v.p.h. \int\limits_{\partial D'} U(b\zeta, 0) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D'\setminus E_0(\varepsilon)} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{w_0'(b\zeta, 0)\wedge d(b\zeta)}{|b\zeta|^{2n}},$$

где $E_0(\varepsilon) = \{\zeta \in \partial D :\ |\Phi(\zeta, 0)| < \varepsilon\}$.

Поскольку

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_k}\ (\zeta_k - z_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\zeta_k}\ (\zeta_k - z_k) - \frac{\zeta_n - z_n}{2i},$$

то $|\Phi(\zeta, 0)| = |-\frac{1}{2i}\overline{\zeta_n}| = \frac{1}{2}\ |\zeta_n|$, а

$$v.p.h. \int\limits_{\partial D'} U(b\zeta, 0) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D'\setminus\{|\zeta_n|<2\varepsilon\}} U(b\zeta, 0).$$

Обозначив $\Gamma_\varepsilon = \partial D' \setminus \{|\zeta_n| < 2\varepsilon\}$, получим

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} U(b\zeta, 0) = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon \bigcup(\{|\zeta_n|=2\varepsilon\}\bigcap D')} U(b\zeta, 0) - \int\limits_{\{|\zeta_n|=2\varepsilon\}\bigcap D'} U(b\zeta, 0).$$

В силу того, что поверхность $\Gamma_\varepsilon \bigcup (\{|\zeta_n| = 2\varepsilon\} \bigcap D')$ – есть граница области, и замкнутости ядра $U(\zeta, 0)$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon \bigcup\{|\zeta_n|=2\varepsilon\}} U(b\zeta, 0) = 0.$$

То есть
$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} U(b\zeta,0)=\int\limits_{\{|\zeta_n|=2\varepsilon\}\bigcap D'} U(b\zeta,0).$$
Последнее верно в силу того, что ориентацию поверхности мы должны изменить на противоположную при вычислении интеграла для области $\{|\zeta_n|<2\varepsilon\}$.

$$\int\limits_{\{|\zeta_n|=2\varepsilon\}\bigcap D'} U(b\zeta,0)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\{|\zeta_n|=2\varepsilon\}\bigcap\left\{|\zeta'|^2-\mathrm{Im}(\zeta_n)<0\right\}}\frac{w_0'(\overline{b\zeta})\wedge d(b\zeta)}{|b\zeta|^{2n}},$$

где $w_0'(\overline{b\zeta})=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\ \overline{b_j\zeta_j}\ d(\overline{b[j]\zeta[j]})$.

Выразим $d\overline{\zeta}_n$ через $d\zeta_n$, пользуясь равенством $|\zeta_n|=2\varepsilon$, т.е. $\zeta_n\ d\overline{\zeta}_n+\overline{\zeta}_n\ d\zeta_n=0$. Учитывая свойства внешнего произведения, получим
$$U(b\zeta,0)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}\ \overline{\zeta_n}\ d(\overline{b[n]\zeta[n]})\wedge d(b\zeta)}{|b\zeta|^{2n}}.$$

Запишем ζ_n в виде $\zeta_n=\mathrm{Re}\ \zeta_n+i\cdot\mathrm{Im}\ \zeta_n=x+i\cdot y$. Тогда преобразованный интеграл имеет вид
$$\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\varepsilon^2,\\ y>0}}\ \int\limits_{|\zeta'|^2<y}\frac{\overline{\zeta_n}\ d(\overline{b[n]\zeta[n]})\wedge d(b\zeta)}{|b\zeta|^{2n}}.$$

Вычислим внутренний интеграл
$$(-1)^{n-1}\int\limits_{|\zeta'|^2<y}\frac{d(\overline{b[n]\zeta[n]})\wedge d(b[n]\zeta[n])}{|b\zeta|^{2n}}=(-1)^{n-1}\int\limits_{|\zeta'|^2<y}\frac{d(\overline{b'\zeta'})\wedge d(b'\zeta')}{\left(|b'\zeta'|^2+|\zeta_n|^2\right)^n},$$
где $b'\zeta'=(b_1\zeta_1,\dots,\ b_{n-1}\zeta_{n-1})$.

Для его нахождения введем полярные координаты $b_j\zeta_j=r_j\cdot e^{i\varphi_j}$, где $r_j>0$, $0\leqslant\varphi_j\leqslant 2\pi,\ \ j=\overline{1,n-1}$.

Тогда $d(\overline{b'\zeta'})\wedge d(b'\zeta')=(-2i)^{n-1}r_1\cdot\ldots\cdot r_{n-1}\ \ dr_1\wedge\ldots\wedge dr_{n-1}\wedge d\varphi_1\wedge\ldots\wedge d\varphi_{n-1}$.
$$(-1)^{n-1}\int\limits_{|\zeta'|^2<y}\frac{d(\overline{b'\zeta'})\wedge d(b'\zeta')}{\left(|b'\zeta'|^2+|\zeta_n|^2\right)^n}=$$
$$=(2i)^{n-1}\int\limits_{\frac{r_1^2}{b_1^2}+\ldots+\frac{r_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}<y}\frac{r_1\cdot\ \ldots\ \cdot r_{n-1}\ dr_1\ldots dr_{n-1}}{\left(r_1^2+\ldots+r_{n-1}^2+4\varepsilon^2\right)^n}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_1\ldots\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}=$$
$$=(2i)^{n-1}\cdot(2\pi)^{n-1}\int\limits_{\frac{r_1^2}{b_1^2}+\ldots+\frac{r_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}<y}\frac{r_1\cdot\ \ldots\ \cdot r_{n-1}\ dr_1\ldots dr_{n-1}}{\left(r_1^2+\ldots+r_{n-1}^2+4\varepsilon^2\right)^n}.$$

Сделаем подстановку $r_j^2=t_jy,\ t_j\geq 0,\ j=\overline{1,n-1}$, тогда $r_j\ dr_j=\frac{y}{2}\ dt_j$. Значит,
$$(-1)^{n-1}\int\limits_{|\zeta'|^2<y}\frac{d(\overline{b'\zeta'})\wedge d(b'\zeta')}{\left(|b'\zeta'|^2+|\zeta_n|^2\right)^n}=\frac{(2\pi i)^{n-1}}{y}\int\limits_{\frac{t_1}{b_1^2}+\ldots+\frac{t_{n-1}}{b_{n-1}^2}<1}\frac{dt_1\ldots dt_{n-1}}{(t_1+\ldots+t_{n-1}+4\varepsilon^2)^n}=$$

$$= \frac{(2\pi i)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y^{n-1}}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 y + 4\varepsilon^2)}.$$

Таким образом, получим

$$\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\varepsilon^2,\\ y>0}} \int\limits_{|\zeta'|^2<y} \frac{\overline{\zeta_n}\ d(\overline{b[n]\zeta[n]}) \wedge d(b\zeta)}{|b\zeta|^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\varepsilon^2,\\ y>0}} \frac{y^{n-1}}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 y + 4\varepsilon^2)} \cdot \overline{\zeta_n}\ d\zeta_n.$$

Рассмотрим отдельно

$$\overline{\zeta_n}\, d\zeta_n = (x-iy)(dx+idy) = xdx+ydy+i(xdy-ydx) = i\left(xdy + \frac{y^2}{x}dy\right) = \frac{i}{x}\cdot 4\varepsilon^2\, dy.$$

Это верно, так как $x^2+y^2=4\varepsilon^2$ или $dx = -\frac{y}{x}\ dy$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\varepsilon^2,\\ y>0}} \frac{y^{n-1}}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 y + 4\varepsilon^2)} \cdot \overline{\zeta_n}\ d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\varepsilon^2,\\ y>0}} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 y + 4\varepsilon^2)} \cdot \frac{y^{n-1}\ dy}{x}.$$

Введем полярную систему координат

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ R = 2\varepsilon,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\varepsilon^2,\\ y>0}} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 y + 4\varepsilon^2)} \cdot \frac{y^{n-1}\ dy}{x} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 \cdot 2\varepsilon\sin t + 4\varepsilon^2)} \cdot (2\varepsilon \sin t)^{n-1}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sin^{n-1} t \cdot \prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 \cdot \sin t + 2\varepsilon)}\ dt.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$ под знаком интеграла (это можно делать, т. к. подынтегральная функция равномерно ограничена).

$$v.p.h. \int\limits_{\partial D'} U(b\zeta, 0) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sin^{n-1} t \cdot \prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 \cdot \sin t + 2\varepsilon)}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sin^{n-1} t \cdot \prod_{k=1}^{n-1} b_k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k^2 \cdot \sin t)}\ dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi dt = \frac{1}{2}.$$

Формула (2) доказана.

$\square$

Для $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ рассмотрим интеграл (типа) Бохнера—Мартинелли

$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D.$$

Следствие 1. *Пусть $n > 1$. Если функция f удовлетворяет на ∂D условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$, (т.е. $f \in \mathcal{C}^\alpha(\partial D)$), то интеграл Бохнера—Мартинелли F^+ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $F^+ \in \mathcal{C}^\beta(\overline{D})$ для некоторого β, $0 < \beta \leqslant \alpha$, а интеграл F^- непрерывно продолжается на $\mathbb{C}^n \backslash D$ и $F^- \in \mathcal{C}^\beta(\mathbb{C}^n \backslash D)$. Кроме того, выполняются формулы Сохоцкого—Племеля*

$$F^+(z) = \tfrac{f(z)}{2} + v.p.h. \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z),$$
$$F^-(z) = -\tfrac{f(z)}{2} + v.p.h. \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \in \partial D.$$

Доказательство. Как показано в [7], для точек $\zeta, z \in \partial D$ верно

$$C_1|\Phi(\zeta, z)| \leqslant |\zeta - z| \leqslant C_2\sqrt{|\Phi(\zeta, z)|}.$$

Это означает, что функция f, удовлетворяющая условию Гельдера относительно евклидовой метрики $|\zeta - z|$, удовлетворяет условию Гельдера относительно метрики $|\Phi(\zeta, z)|$, но с другим меньшим положительным показателем.

Рассмотрим интеграл

$$\Psi(z) = \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z))U(\zeta, z).$$

Этот интеграл является функцией, удовлетворяющей условию Гельдера относительно метрики $|\Phi(\zeta, z)|$ в области $\overline{D}$ (для метрики $|\zeta - z|$ это доказано в [6, теорема 1], для данной метрики доказательство аналогично).

$$v.p.h. \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z) = \int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z))U(\zeta, z) + \frac{f(z)}{2} = \Psi(z) + \frac{f(z)}{2}$$

(по теореме 2). Так как функция Φ непрерывна в окрестности ∂D, то $\Psi(z) = F^+(z) - f(z)$, т.е.

$$F^+(z) = \frac{f(z)}{2} + v.p.h. \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z).$$

С другой стороны, $\Psi(z) = F^-(z)$, таким образом,

$$F^-(z) = -\frac{f(z)}{2} + v.p.h. \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z). \qquad \square$$

Список литературы

[1] Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1979.

[2] А.М. Кытманов, *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его приложения*, Наука, Новосибирск, 1992.

[3] А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, *О главном значении по Коши особого интеграла Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях пространства* $\mathbb{C}^n$, Сибирский математический журнал, **46**: 3 (2005), 625–633.

[4] М. Билз, Ч. Фефферман, Р. Гроссман, *Строго псевдовыпуклые области в* $\mathbb{C}^n$, Мир, Москва, 1987.

[5] Г.М. Хенкин, *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **7** (1985), 23–124.

[6] W. Alt, *Singuläre integrale mit gemischten homogenitäten auf mannigrfaltigkeiten und anwendungen in der funktionentheorie*, Math. Z., **137** (1974), 227–256.

[7] N. Kerzman, E.M. Stein, *The Szegö kernel in terms of Cauchy—Fantappié kernels*, Duke Math. J., **45**: 2 (1978), 197–224.

Анастасия Сергеевна Кацунова
Сибирский федеральный университет,
ул. ак. Киренского 26
660074, Красноярск, Россия
E-mail address: askatsunova@gmail.com