

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports  
<http://semr.math.nsc.ru>

Том 7, стр. 140–149 (2010)

УДК 514.772.22

MSC 53C42

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА УИЛЛМОРА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $\widetilde{SL}_2$

Д. А. БЕРДИНСКИЙ

**ABSTRACT.** We propose some generalization of the Willmore functional for closed surfaces in  $\widetilde{SL}_2$ . We discuss the relation between this functional and isoperimetric problem in  $\widetilde{SL}_2$ .

**Keywords:** Thorston's geometry, Willmore functional.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы рассматриваем функционал  $E(M)$  вида

$$(1) \quad E(M) = \frac{1}{4} \int_M \left( H^2 + \alpha \widehat{K} + \beta \right) d\mu,$$

где  $M$  — замкнутая поверхность, погруженная в универсальную накрывающую группы  $SL(2, \mathbb{R})$ , наделенную терстоновской метрикой,  $H$  — средняя кривизна,  $\widehat{K}$  — секционная кривизна касательной плоскости к поверхности,  $\alpha, \beta$  — константы и  $d\mu$  — элемент площади. Коэффициент  $\frac{1}{4}$  играет здесь роль нормирующего множителя. В §3 мы укажем константы  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функционал (1) обладает некоторыми важными свойствами, а именно при  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = -\frac{5}{16}$  функционал (1) равный

$$(2) \quad \frac{1}{4} \int_M \left( H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{5}{16} \right) d\mu$$

BERDINSKY, D.A., ON SOME GENERALIZATION OF THE WILLMORE FUNCTIONAL FOR SURFACES IN  $\widetilde{SL}_2$ .

© 2010 Бердинский Д.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН (проект № 46), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (№ гранта НШ-7256.2010.1).

Поступила 11 февраля 2010 г., опубликована 6 июля 2010 г.

принимает одно и то же значение на всех сферах вращения постоянной средней кривизны. Поскольку гипотетически эти сферы являются изопериметрическими профилями, то это указывает на возможную связь данного функционала с изопериметрической задачей в пространстве  $\widetilde{SL}_2$ .

Ограничив рассмотрение на класс поверхностей вращения, мы докажем, что сферы постоянной средней кривизны являются критическими точками этого функционала (теорема 2).

Полученные результаты являются аналогом результатов для поверхностей в  $Nil$ , полученных в [1].

Мотивом для исследования послужили результаты работ [2], [1]. В [2] Таймановым, исходя из связи представления Вейерштрасса и спектральной теории оператора Дирака [3, 4], было предложено обобщение функционала Уиллмора для замкнутых поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга  $Nil$ , наделенной терстоновской метрикой. В геометрических обозначениях этот функционал имеет вид

$$\frac{1}{4} \int_M \left( H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16} \right) d\mu$$

В [1] показано, что сферы постоянной средней кривизны в  $Nil$  являются критическими точками этого функционала относительно произвольных вариаций. Сузив рассмотрение на класс поверхностей вращения, в [1] доказывалось, что среди сфер вращения функционал достигает минимальное значение, равное  $\pi$ , в точности на сферах постоянной средней кривизны, а на торах вращения значение функционала ограничено снизу нулем (хотя, разумно предположить, что эта оценка может быть улучшена).

Предложенный в [1] аналог функционала Уиллмора для поверхностей в  $\widetilde{SL}_2$ , чье определение также опиралось на спектральную теорию, не обладает указанными выше свойствами и, в частности, варьируется на сферах постоянной средней кривизны. В данной статье мы указываем функционал (2), обладающий аналогичными оценками в классе поверхностей вращения в пространстве  $\widetilde{SL}_2$ .

Поверхности вращения постоянной средней кривизны в  $\widetilde{SL}_2$  описаны и классифицированы в [5]. Тем не менее в §2 мы проведем описание этих поверхностей в духе работ [6, 7]. Вычисления §2 мы используем при доказательстве теоремы 2.

## 2. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ В $\widetilde{SL}_2$

Описание поверхностей вращения постоянной средней кривизны сводится к рассмотрению решений соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [6], где описаны поверхности вращения постоянной средней кривизны в трехмерной группе Гейзенберга  $Nil$ ).

Пространство  $\widetilde{SL}_2$  можно представить как произведение  $D^2(2) \times \mathbb{R}$  наделенное метрикой [8, 9]:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right)^2} + \left( dz - \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right)}(ydx - xdy) \right)^2,$$

где  $x^2 + y^2 < 4$  и  $z \in \mathbb{R}$ .

Представим метрику в цилиндрических координатах  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ . Тогда

$$(3) \quad ds^2 = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}r^2)^2} dr^2 + \frac{r^2 (1 + \frac{1}{4}r^2)}{(1 - \frac{1}{4}r^2)^2} d\theta^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{1}{4}r^2} d\theta dz + dz^2$$

Можно заметить, что группа  $S^1$  действует на  $\widetilde{SL}_2$  вращениями  $\theta \mapsto \theta + \text{const}$  вокруг оси  $z$ . Ясно, что эти вращения являются изометриями. Факторпространство  $\widetilde{SL}_2/S^1$  есть полуплоскость  $B = \{(u, v) | u = r \geq 0, v = z\}$  с метрикой

$$(4) \quad d\tilde{s}^2 = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}u^2)^2} du^2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}u^2} dv^2,$$

так что проекция  $\widetilde{SL}_2 \rightarrow \widetilde{SL}_2/S^1$  является римановой субмерсией.

Пусть  $\Sigma$  является поверхностью вращения (т.е. поверхностью инвариантной относительно вращения вокруг оси  $z$ ), и пусть  $\gamma(s)$  — кривая, которая есть образ  $\Sigma$  при отображении проекции на полуплоскость  $B$  и  $s$  — натуральный параметр на кривой. Теорема о редукции [7] дает соотношение между средней кривизной поверхности  $\Sigma$  и геодезической кривизной кривой  $\gamma$ . Следующий результат является частным случаем более общего результата теоремы о редукции [7].

**Теорема 1.** Пусть  $H$  — средняя кривизна в точке  $P$  поверхности  $\Sigma$  и пусть  $k$  — значение геодезической кривизны  $\gamma$  в точке  $Q$  (образ точки  $P$  при проектировании на полуплоскость  $B$ ). Пусть  $n$  — вектор нормали к кривой  $\gamma$  в точке  $Q$  и пусть  $\mu$  — длина вектора  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  касательного к орбите вращения. Тогда

$$2H = k - \frac{\partial}{\partial n} \ln \mu$$

*Доказательство.* Пусть  $\nabla$  — связность Леви-Чевиты в  $\widetilde{SL}_2$ , а  $\widetilde{\nabla}$  — связность Леви-Чевиты в факторпространстве  $B$ . Тогда геодезическая кривизна  $k = \langle \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, n \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, N \rangle$ , где  $\dot{\gamma}$  — горизонтальное поднятие  $\dot{\gamma}$  и  $N$  — горизонтальное поднятие вектора нормали  $n$ , более того  $N$  является нормальным вектором к поверхности  $\Sigma$ . Последнее равенство вытекает из следующего предложения [10]

**Предложение 1.** Если  $[X, Y] = 0$ , то  $\langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle$ .

Таким образом, справедливо

$$2H = k + \frac{1}{\mu^2} \langle \nabla_{\partial \theta} \partial \theta, N \rangle.$$

Следуя формуле Кошуля [10]

$$2 \langle \nabla_{\partial \theta} \partial \theta, N \rangle = -N \langle \partial \theta, \partial \theta \rangle - 2 \langle \partial \theta, [\partial \theta, N] \rangle,$$

но  $[\partial \theta, N] = 0$  и тогда  $\langle \nabla_{\partial \theta} \partial \theta, N \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial N} \mu^2 = -\mu \frac{\partial \mu}{\partial n}$ . Теорема доказана.

Прямыми вычислениями проверяется следующая лемма [7], [11].

**Лемма 1.** Рассмотрим метрику  $d\tilde{s}^2 = \widetilde{g}_{11} du^2 + \widetilde{g}_{22} dv^2$ . Тогда касательный вектор к кривой  $\gamma(s)$  равен  $\dot{\gamma} = \{\dot{u}, \dot{v}\} = \left\{ \frac{\cos \sigma}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{\sin \sigma}{\sqrt{g_{22}}} \right\}$  и вектор нормали к

кривой  $\gamma(s)$  равен  $n = \left\{ -\frac{\sin \sigma}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{\cos \sigma}{\sqrt{g_{22}}} \right\}$ , где  $\sigma$  — угол между  $\dot{\gamma}$  и направлением  $\frac{\partial}{\partial u}$ . Кроме того, геодезическая кривизна равна

$$k = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} ((\widetilde{g_{22}})_u \dot{v} - (\widetilde{g_{11}})_v \dot{u}) + \dot{\sigma}$$

В нашем случае, ввиду (4), получим

$$(5) \quad k = -\frac{u(1 - \frac{1}{4}u^2)}{4(1 + \frac{1}{4}u^2)} \sin \sigma + \dot{\sigma}$$

Более того,  $n = \left\{ -(1 - \frac{u^2}{4}) \sin \sigma, \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \cos \sigma \right\}$  и из (3) выводим, что

$$\mu^2 = \langle \partial\theta, \partial\theta \rangle = \frac{u^2(1 + \frac{1}{4}u^2)}{(1 - \frac{1}{4}u^2)^2},$$

таким образом

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \mu = -\sin \sigma \left( \frac{1}{u} + \frac{u}{4} \right) - \sin \sigma \frac{u(1 - \frac{1}{4}u^2)}{4(1 + \frac{1}{4}u^2)}$$

И окончательно, из теоремы 1 получим

$$(6) \quad 2H = \dot{\sigma} + \left( \frac{1}{u} + \frac{u}{4} \right) \sin \sigma$$

Поэтому профиль  $\gamma(s) = (u(s), v(s))$  ( $s$  — натуральный параметр) поверхности вращения постоянной средней кривизны удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{u} = (1 - \frac{1}{4}u^2) \cos \sigma \\ \dot{v} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \sin \sigma \\ \dot{\sigma} = 2H - \left( \frac{1}{u} + \frac{u}{4} \right) \sin \sigma \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$(8) \quad J = \frac{u}{1 - \frac{u^2}{4}} (\sin \sigma - Hu)$$

является первым интегралом системы (7). Из (7) видно, что нам следует выделять случаи, когда  $H = 0$ ,  $0 < H < \frac{1}{2}$ ,  $H = \frac{1}{2}$  и  $H > \frac{1}{2}$ .

Для каждого  $H$  будем рассматривать функцию

$$(9) \quad F(k, u) = \frac{u}{1 - \frac{u^2}{4}} (k - Hu),$$

где  $k \in [-1, 1]$ , и  $u \in (0, 2)$ .

Из анализа функции  $F(k, u)$  легко определяется поведение решений системы (7).

Заметим также, что сдвиг вдоль оси  $v$  и отражение относительно прямой  $v = const$  переводит решение (7) в решение (7).

- (1) Пусть  $H = 0$ . Если  $J = 0$ , то из (8) следует  $\sin \sigma = 0$ , что соответствует горизонтальной плоскости.

Так как  $|k| \leq 1$ , функция  $F(k, u)$  удовлетворяет неравенству  $\frac{u}{1-\frac{u^2}{4}} \geq F(k, u) \geq -\frac{u}{1-\frac{u^2}{4}}$ . При  $k > 0$ ,  $F_k(u) = F(k, u)$  — монотонно возрастающая функция, причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = \infty$ . Аналогично, при  $k < 0$ ,  $F_k(u)$  — монотонно убывающая функция, причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ .

Пусть  $J > 0$ . Рассмотрим начальные данные  $u(0) = u_m$  (где  $u_m$  — решение уравнения  $\frac{u}{1-\frac{u^2}{4}} = J$ ),  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = \frac{\pi}{2}$ . Очевидно из (7) следует, что  $\dot{\sigma}(0) < 0$ , функция  $\sigma(s)$  убывает при  $s \geq 0$  и стремится к нулю при  $s \rightarrow \infty$ . Функция  $u(s) \geq u_m$  и  $u(s)$  — возрастающая функция при  $s > 0$ , причем  $u \rightarrow 2$  при  $s \rightarrow \infty$ . Функция  $v(s)$  возрастает при  $s > 0$  и имеет конечный предел при  $s \rightarrow \infty$ . Действительно, из (7) и (8) вытекает, что  $\frac{dv}{du} = J \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}u^2}}{u \cos \sigma}$ , но  $\lim_{u \rightarrow 2} \sigma = 0$ , поэтому интеграл  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$  сходится. Отражением относительно оси  $v = 0$ , получаем полный профиль поверхности. Тем самым, получается ограниченная по высоте поверхность, напоминающая катеноид (см. рис. 1). Случай  $J < 0$  просто соответствует обходу профиля в обратном направлении.

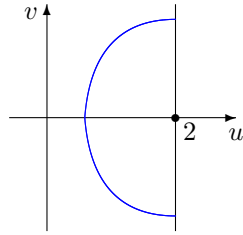


Рис. 1.

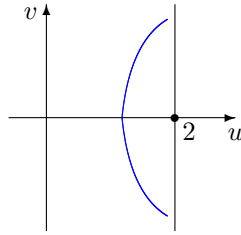


Рис. 2.

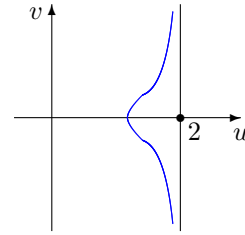


Рис. 3.

- (2) Пусть  $0 < H < \frac{1}{2}$ . Нетрудно проверить, что при  $k \geq 2H$  функция  $F_k(u) = F(k, u)$  монотонно возрастает. Если  $k > 2H$ , то  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = \infty$ , и для  $k = 2H$  предел  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = 2H$ . При  $0 < k < 2H$ , функция  $F_k(u)$  возрастает на интервале  $(0, u_0)$  для некоторого  $u_0 \in (0, 2)$ , имеет в  $u_0$  максимум и монотонно убывает на интервале  $(u_0, 2)$ , причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ . При  $k \leq 0$  функция  $F_k(u)$  монотонно убывает на всем интервале  $(0, 2)$ , так что  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ . В зависимости от значения интеграла  $J$ , получаем следующие возможные случаи.

Пусть  $J \geq 2H$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$ , где  $u_m$  — решение уравнения  $F(1, u) = J$  (такое решение, очевидно, существует и единственно),  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = \frac{\pi}{2}$ . Нетрудно видеть, что  $\dot{\sigma}(0) < 0$  и  $\sigma(s)$  продолжает монотонно возрастать при  $s > 0$ , причем  $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = \arcsin 2H$ . Координатная функция  $u(s)$  монотонно возрастает при  $s > 0$  и  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 2$ . Ясно, что функция  $v(s)$  монотонно возрастает и

$\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \infty$ , ввиду расходимости интеграла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ . Получим неограниченную по высоте поверхность, напоминающую катеноид (см. рис. 2).

Пусть  $0 < J < 2H$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$ , где  $u_m$  — решение уравнения  $F(1, u) = J$ ,  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = \frac{\pi}{2}$ . Нетрудно заметить, что  $\dot{\sigma}(0) < 0$  и  $\sigma(s)$  монотонно убывает до некоторого  $\sigma_0$  (где  $0 < \sigma_0 < \arcsin 2H$ ), а после монотонно возрастает, причем  $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = \arcsin 2H$ . Координатная функция  $u(s)$  монотонно возрастает при  $s > 0$  и  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 2$ . Ясно, что функция  $v(s)$  монотонно

возрастает и  $\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \infty$ , ввиду расходимости интеграла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ .

Получим неограниченную по высоте поверхность, напоминающую катеноид (см. рис. 3).

Пусть  $J = 0$ . Тогда  $\sin \sigma = Hu$ ,  $\lim_{u \rightarrow 2} \sigma = \arcsin 2H$  и  $\lim_{u \rightarrow 2} v = \infty$ , ввиду расходимости интеграла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ . Получаем неограниченную по высоте поверхность гомеоморфную диску (см. рис. 4).

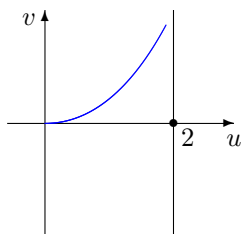


Рис. 4.

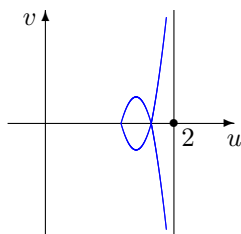


Рис. 5.

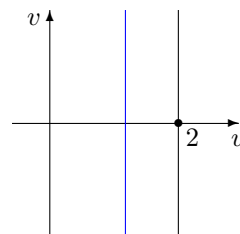


Рис. 6.

Пусть  $J < 0$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$  (где  $u_m$  решение уравнения  $F(-1, u) = J$ ),  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = -\frac{\pi}{2}$ . Легко видеть, что  $\dot{\sigma}(0) > 0$  и  $\sigma(s)$  монотонно возрастает при  $s > 0$ , при этом  $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma = \arcsin 2H$ . Очевидно  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 2$  и  $\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \infty$ , ввиду расходимости

интеграла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ . Отражением относительно оси  $v = 0$ , получаем полный профиль поверхности (см. рис. 5).

- (3) Пусть  $H = \frac{1}{2}$ . Если  $k = 1$ , то  $F_k(u)$  монотонно возрастает, причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = 1$ . Если  $1 > k > 0$ , то  $F_k(u)$  возрастает на интервале  $(0, u_0)$  для некоторого  $u_0 \in (0, 2)$ , имеет в  $u_0$  максимум и монотонно убывает на интервале  $(u_0, 2)$ , причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ . Если  $k \leq 0$ , то  $F_k(u)$  монотонно убывает на всем интервале  $(0, 2)$  и  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ . Заметим, что решения (7) существуют лишь при значениях интеграла  $J$  строго меньших 1.

Пусть  $0 < J < 1$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$  (где  $u_m$  решение уравнения  $F(1, u) = J$ ),  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = \frac{\pi}{2}$ . Легко видеть, что  $\dot{\sigma}(0) < 0$  и  $\sigma(s)$  монотонно убывает до некоторого  $\sigma_0$  (где  $0 < \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$ ), а после монотонно возрастает, причем  $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = \frac{\pi}{2}$ . Координатная функция  $u(s)$  монотонно возрастает при  $s > 0$  и  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 2$ . Ясно,

что функция  $v(s)$  монотонно возрастает и  $\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \infty$ , ввиду расходимости интеграла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ . В итоге профиль имеет то же поведение как для случая  $0 < H < \frac{1}{2}, 0 < J < 2H$  (см. рис. 3) с тем отличием, что  $\lim_{u \rightarrow 2} \sigma = \frac{\pi}{2}$ .

Пусть  $J = 0$ . Тогда  $\sin \sigma = u$ ,  $\lim_{u \rightarrow 2} \sigma = \frac{\pi}{2}$  и  $\lim_{u \rightarrow 2} v = \infty$ , ввиду расходимости интеграла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ . Полученный профиль имеет то же поведение как для случая  $0 < H < \frac{1}{2}, J = 0$  (см. рис. 4) с тем отличием, что  $\lim_{u \rightarrow 2} \sigma = \frac{\pi}{2}$ .

Пусть  $J < 0$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$  (где  $u_m$  решение уравнения  $F(-1, u) = J$ ),  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = -\frac{\pi}{2}$ . Легко видеть, что  $\dot{\sigma}(0) > 0$  и  $\sigma(s)$  монотонно возрастает при  $s > 0$ , при этом  $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma = \frac{\pi}{2}$ . Очевидно  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 2$  и  $\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = \infty$ , ввиду расходимости интеграла

ла  $\int_{u=u_m}^{u=2} \frac{dv}{du} du$ . Получим профиль имеющий то же поведение как для случая  $0 < H < \frac{1}{2}, J < 0$  (см. рис. 5) с тем отличием, что  $\lim_{u \rightarrow 2} \sigma = \frac{\pi}{2}$ .

- (4) Пусть  $H > \frac{1}{2}$ . Функция  $F(k, u)$  имеет следующее поведение. При  $1 \geq k > 0$  функция  $F_k(u) = F(k, u)$  монотонно возрастает на интервале  $(0, u_0)$  (для некоторого  $u_0 \in (0, 2)$ ), имеет в  $u_0$  максимум и убывает на интервале  $(u_0, 2)$ , причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ . При  $k \leq 0$ , функция  $F_k(u)$  монотонно убывает, причем  $\lim_{u \rightarrow 2} F_k(u) = -\infty$ . Нетрудно заметить, что  $F(k, u) \leq F(1, u_C) = J_M$ , где  $u_C = 2(2H - \sqrt{4H^2 - 1})$  и  $J_M = 2H - \sqrt{4H^2 - 1}$ . Значит решения (7) существуют лишь при значениях интеграла  $J \leq J_M$ .

Пусть  $J = J_M$ . Тогда получим цилиндр  $u = 2(2H - \sqrt{4H^2 - 1})$  и  $\sigma = \frac{\pi}{2}$  (см. рис. 6).

Пусть  $0 < J < J_M$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$  (где  $u_m$  — меньшее из решений уравнения  $J = F(1, u)$ , которых, как видно, два),  $v(0) = 0$ ,  $\sigma(0) = \frac{\pi}{2}$ . Нетрудно проверить, что  $\dot{\sigma}(0) < 0$ . Кроме того, найдется такое  $s_0 > 0$ , что  $\sigma(s)$  монотонно убывает на интервале  $(0, s_0)$ , достигает в  $s_0$  минимума  $\sigma(s_0) > 0$ , и монотонно возрастает на интервале  $(s_0, s_1)$  для некоторого  $s_1 > s_0$ , причем  $\sigma(s_1) = \frac{\pi}{2}$ . Координатная функция  $u(s)$  монотонно возрастает на интервале  $(0, s_1)$ , причем  $u(s_1) = U_M$  является вторым корнем уравнения  $J = F(1, u)$ . Ясно, что  $u_m \leq u \leq U_M$ . Функция  $v(s)$  монотонно растет на всем интервале  $(0, s_1)$ . Отражениями и сдвигами получаем полный профиль напоминающей андулоид (см. рис. 7).

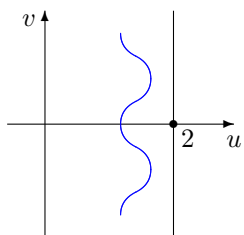


Рис. 7.

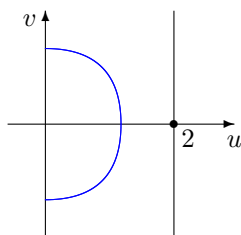


Рис. 8.

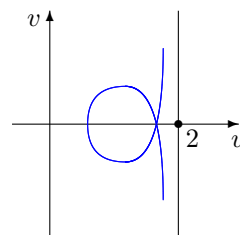


Рис. 9.

Пусть  $J = 0$ . Тогда  $\sin \sigma = Hu$ , откуда следует что  $\sigma = \frac{\pi}{2}$  при  $u = \frac{1}{H} < 2$ . Профиль подходит к оси  $z$  под прямым углом, и в итоге поверхность вращения гомеоморфна сфере (см. рис. 8).

Пусть  $J < 0$ . Возьмем начальные данные  $u(0) = u_m$  (где  $u_m$  — решение уравнения  $F(-1, u) = J$ ),  $v(0) = 0$  и  $\sigma(0) = -\frac{\pi}{2}$ . Нетрудно видеть, что  $u_m \leq u \leq u_M$  (где  $u_M$  — решение уравнения  $F(1, u) = J$ ) и  $\dot{\sigma} > \delta > 0$ . В качестве параметра на кривой можно рассматривать  $\sigma$ . Осталось заметить, что при прохождении  $\sigma$  интервала  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  координатная функция  $v$  изменяется на некоторое положительное значение. Действительно, легко видеть, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{d\sigma} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \sin \sigma}{2H - (\frac{1}{u} + \frac{u}{4}) \sin \sigma} d\sigma + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} \sin \sigma}{2H - (\frac{1}{u} + \frac{u}{4}) \sin \sigma} d\sigma > 0.$$

Отражениями и сдвигами получаем полный профиль поверхности, напоминающей нодоид (см. рис. 9).

### 3. ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ ТИПА УИЛЛМОРА

Определим функционал  $E(M)$  на замкнутой поверхности  $M$ , погруженной в  $\widetilde{SL}_2$  как

$$(10) \quad E(M) = \frac{1}{4} \int_M \left( H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{5}{16} \right) d\mu,$$

где  $\widehat{K}$  — секционная кривизна касательной плоскости,  $d\mu$  — элемент площади.

В пространстве  $\widetilde{SL}_2$  секционная кривизна плоскости имеет вид (см. например [9], где выписана формула для тензора кривизны)

$$(11) \quad \widehat{K} = \frac{1}{4} - 2n_3^2,$$

где  $n_3$  — скалярное произведение нормали  $n$  к плоскости и вектора  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

Подставим выражение для  $\widehat{K}$  в подынтегральное выражение (10). Тогда

$$(12) \quad E(M) = \frac{1}{4} \int_M \left( H^2 - \frac{1}{2} n_3^2 - \frac{1}{4} \right) d\mu$$

Рассмотрим функционал  $E(M)$  на классе замкнутых поверхностей вращения. Пусть  $\gamma(s) = (u(s), v(s))$  — проекция поверхности вращения на



полуплоскость  $B = \{(u, v) | u = r \geq 0, v = z\}$  с метрикой (4),  $s$  — натуральный параметр на кривой.

Пусть по-прежнему  $\sigma$  — угол между  $\frac{d\gamma}{ds}$  и  $\frac{\partial}{\partial u}$ . При проекции на полуплоскость  $B$ , вектор нормали к поверхности отображается в вектор нормали  $\left(-\left(1 - \frac{u^2}{4}\right) \sin \sigma, \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \cos \sigma\right)$  к кривой  $\gamma$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  отображается в  $\frac{\partial}{\partial v}$ . Вектор нормали к поверхности, очевидно, ортогонален к орбите вращения, и так как отображение проекции  $\widetilde{SL}_2$  на  $B$  является римановой субмерсией,  $n_3$  совпадает со скалярным произведением вектора нормали к кривой и  $\frac{\partial}{\partial v}$ . Поэтому,

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{u^2}{4}}} \cos \sigma.$$

Ввиду (7),  $H = \frac{1}{2} \left(\dot{\sigma} + \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{4}\right) \sin \sigma\right)$ . Представим выражение для  $H^2$  в следующем виде

$$H^2 = \frac{1}{4} \left(\dot{\sigma} + \sin \sigma \left(\frac{u}{4} - \frac{1}{u}\right)\right)^2 + \left(\frac{\dot{\sigma} \sin \sigma}{u} + \frac{1}{4} \sin^2 \sigma\right)$$

Заметим, что  $\dot{\sigma} + \sin \sigma \left(\frac{u}{4} - \frac{1}{u}\right) = 0$ , если и только если поверхность является сферой постоянной средней кривизны. Действительно, так как  $\dot{\sigma} = 2H - \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{4}\right) \sin \sigma$  (7), равенство  $\dot{\sigma} + \sin \sigma \left(\frac{u}{4} - \frac{1}{u}\right) = 0$  справедливо, тогда и только тогда когда  $H = \sin \sigma u$ . Постоянство средней кривизны очевидно вытекает из равенства  $\dot{\sigma} + \sin \sigma \left(\frac{u}{4} - \frac{1}{u}\right) = 0$ , и  $\dot{u} = \left(1 - \frac{1}{4}u^2\right) \cos \sigma$  (7). Напомним, что из равенства  $\sin \sigma = Hu$ , при  $H > \frac{1}{2}$ , следует что поверхность сфера, а при  $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$  поверхность уже некомпактна и гомеоморфна открытому диску.

Окончательно выводим, что для замкнутой поверхности вращения  $M$ , функционал  $E(M)$  равен

$$(13) \quad \begin{aligned} E(M) &= \frac{2\pi}{16} \int_0^L \left(\dot{\sigma} + \sin \sigma \left(\frac{u}{4} - \frac{1}{u}\right)\right)^2 \frac{u\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}}{1 - \frac{u^2}{4}} ds + \\ &+ \frac{2\pi}{4} \int_0^L \left(\frac{\dot{\sigma} \sin \sigma}{u} + \frac{1}{4} \sin^2 \sigma - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{4}} \cos^2 \sigma - \frac{1}{4}\right) \frac{u\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}}{1 - \frac{u^2}{4}} ds, \end{aligned}$$

где  $L$  — длина профиля поверхности вращения.

Первое слагаемое в (13) больше либо равно нулю, при этом равенство нулю достигается лишь для сфер постоянной средней кривизны. Оценим второе слагаемое

$$(14) \quad \frac{2\pi}{4} \int_0^L \left(\frac{\dot{\sigma} \sin \sigma}{u} + \frac{1}{4} \sin^2 \sigma - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{4}} \cos^2 \sigma - \frac{1}{4}\right) \frac{u\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}}{1 - \frac{u^2}{4}} ds$$

Воспользовавшись соотношением  $\cos \sigma = \frac{\dot{u}}{1 - \frac{u^2}{4}}$  (7), прямым образом выводится, что подынтегральное выражение в (14) равно

$$-\frac{\ddot{u}\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}}{\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^2} - \frac{\dot{u}^2 u}{\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^3} \left( \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{u^2}{4}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} \right),$$

и что, как нетрудно проверить, совпадает с производной  $\frac{d}{ds} \left[ -\frac{\dot{u}\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}}{1 - \frac{u^2}{4}} \right]$ .

Значит, второе слагаемое в (13) равно нулю для замкнутой кривой профиля. Если профиль подходит к оси  $u = 0$  в обоих концах  $s = 0$  и  $s = L$  перпендикулярно, то второе слагаемое в (13) равно  $\pi$ , так как можем положить, что  $u(0) = u(L) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = 1$  и  $\dot{u}(L) = -1$ .

Тем самым, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *На сферах вращения функционал (10) больше либо равен  $\pi$  и минимум достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны. На торах вращения функционал (10) принимает значения большие нуля.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бердинский Д. А., Тайманов И. А., *Поверхности вращения в группе Гейзенберга и спектральное обобщение функционала Уиллмора*, Сиб. мат. журн. **48**: 3 (2007), 496–511.
- [2] Бердинский Д. А., Тайманов И. А., *Поверхности в трехмерных группах Ли*, Сиб. мат. журн. **46**: 6 (2005), 1248–1264.
- [3] Taimanov, I.A., *Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179** (1997), 133–151.
- [4] Тайманов И.А., *Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в  $R^3$* , Функциональный анализ и его прил., **32**: 4 (1998), 49–62.
- [5] Carlos Espinoza, *Rotational and parabolic surfaces in  $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}, \tau)$  and applications*, Available at <http://arxiv.org/abs/0911.2213>
- [6] Tomter P., *Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **54**: 1 (1993), 485–495.
- [7] Figueroa, C., Mercuri, F., Pedrosa, R., *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*, Ann. Math. Pura Appl., **177** (1999), 173–194.
- [8] Scott P., *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc., **15**: 5 (1983), 401–487.
- [9] Daniel B., *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv., **82** (2007), 87–131.
- [10] Бурало Ю.Д., Залгаллер В.А., *Введение в риманову геометрию*, 1994.
- [11] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1976.

ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ БЕРДИНСКИЙ  
 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
 ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
 НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
 УЛ. ПИРОГОВА 2,  
 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
 E-mail address: berdinsky@gmail.com