S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 150–154 (2010) УДК 519.17, 512.54

MSC 20B15

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ЧАСТИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ $pG_2(5, 26)$

М. М. ИСАКОВА

Abstract. Possible orders and subgraphs of fixed points of automorphisms of partial geometry $pG_2(5, 26)$ are founded in work.

Keywords: graph, automorphisms, fixed point.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$.

Через $K_{n\times m}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядка m. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $p \times q$*-решеткой*, если $|X| = p$, $|Y| = q$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Пространство прямых S порядка (s, t) — это система инцидентности с множеством точек P и множеством блоков L, в которой любые две прямые инцидентны не более одной точке, любая точка инцидентна ровно $t + 1$ прямым, и любая прямая инцидентна ровно $s + 1$ точкам. При этом каждую прямую можно отождествить с множеством инцидентных ей точек и инцидентность становится обычным включением. Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат на прямой. *Точечный граф* геометрии S — это граф на

Isakova, M.M., On automorphisms of partial geometry $pG_2(5, 26)$.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00009).

Поступила 4 июня 2010 г., опубликована 2 августа 2010 г.

множестве точек P, в котором две точки смежны, если они различны и коллинеарны. Аналогично определяется граф прямых. Геометрию назовем *связной*, если связен ее точечный граф.

Пусть $a \in P, L \in L$ и $a \notin L$ (пара (a,L) называется *антифлагом*). Число точек из L, коллинеарных с a, обозначим через $f(a,L)$. Геометрия S называется *φ-однородной*, если $f(a,L)=0$ или φ для любого антифлага (a,L); S называется *сильно φ-однородной*, если $f(a,L)=\varphi$ для любого антифлага (a,L).

Сильно α-однородное частичное пространство прямых порядка (s,t) называется *α-частичной геометрией* и обозначается $pG_\alpha(s,t)$. Если $\alpha=1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t))$ сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α,s,t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

В работе [1] найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54).

Предложение. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(396,135,30,54)$, G — группа автоморфизмов графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G)$ содержится в $\{2,3,5,7,11,13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p\in\{2,3,11\}$;*

(2) *Ω является n-кликой, и либо $p=5$, $n=1$ и $\alpha_1(g)\in\{15,165,315\}$, либо $p=13$, $n=6$ и $\alpha_1(g)=0$, либо $p=2$, $n\in 4,6$ и $\alpha_1(g)-3n-12$ делится на 60;*

(3) *Ω является $3l$-кокликой, $p=3$, $\alpha_1(g)=9l+90r+42$, $r\in\{0,1,...,3\}$ и $l\le 14$;*

(4) *Ω — объединение $l\ge 2$ изолированных клик порядков $n_i\in\{2,4\}$ и $3|\Omega|-\alpha_1(g)+12$ делится на 60;*

(5) *$p=13$, либо $|\Omega|=32$ и $\alpha_1(g)=78$, либо $|\Omega|=45$ и $\alpha_1(g)=117$, либо $|\Omega|=58$ и $\alpha_1(g)=156$, либо $|\Omega|=71$ и $\alpha_1(g)=195$;*

(6) *$p=11$, либо $|\Omega|=66$ и $\alpha_1(g)=0$, либо $|\Omega|=77$ и $\alpha_1(g)=33$, либо $|\Omega|=88$ и $\alpha_1(g)=66$, либо $|\Omega|=99$ и $\alpha_1(g)=99$;*

(7) *$p=7$ и либо*

(i) $|\Omega|=116$ и $\alpha_1(g)=0$, либо

(ii) $|\Omega|=81$, $\alpha_1(g)=105$ и на $\Gamma-\Omega$ имеются 45 семиугольных $\langle g\rangle$-орбит, либо

(iii) $|\Omega|\in\{74,67,60,53,39,32\}$ и $\alpha_1(g)\in\{84,63,42,21,189,168\}$ соответственно, либо

(iv) $|\Omega|=46$ и $\alpha_1(g)\in\{0,210\}$;

(8) *$p=5$, $|\Omega|=5r+1$, $4\le r\le 19$ и $\alpha_1(g)+15r+15$ делится на 150;*

(9) *$p=3$, $|\Omega|=3l$, $\alpha_1(g)/18-(l+3)/2$ делится на 3 и $2\le l\le 24$ или $l\in\{27,33\}$;*

(10) *$p=2$, $|\Omega|=2l$, $l\ge 3$, $(\alpha_1(g)-12-6l)/30$ четно и либо $l\le 78$, либо $l=88$.*

Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами $(396,135,30,54)$ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_2(5,26)$. В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов частичной геометрии $pG_2(5,26)$.

Теорема. *Пусть* Γ *— точечный граф частичной геометрии* $pG_2(5,26)$, G *— группа автоморфизмов графа* Γ, g *— элемент простого порядка* p *из* G. *Если* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит геодезический* 2*-путь, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 7$, Ω *является частичной геометрией* $pG_2(5,5)$ *и* $\alpha_1(g) = 105$;

(2) $p = 5$, Ω *является частичной геометрией* $pG_2(5,6)$ *и либо* $\alpha_1(g) = 0$, *либо на* $\Gamma - \Omega$ *имеются* 60 *пятиугольных* $\langle g\rangle$*-орбит;*

(3) $p = 3$ *и* Ω *— либо частичная геометрия* $pG_2(5,t)$, $t \in \{2,5\}$, *либо частичная геометрия* $pG_2(2,2)$;

(4) $p = 2$, Ω *является частичной геометрией* $pG_2(5,t)$, $t \in \{2,6\}$ *или частичным пространством прямых порядка* $(4,t)$, t *четно.*

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (396, 135,30, 54). *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Γ *содержит регулярный подграф* Δ *степени* w *на* w *вершинах, то* $-27 \le d-(135-d)w/(396-w) \le 3$, *причем в случае равенства каждая вершина из* $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $(135-d)w/(396-w)$ *вершинами из* Δ;

(2) *порядок коклики в* Γ *не больше* 44, *порядок клики в* Γ *не больше* 6;

(3) *значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности* 44, *на элементе* $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *равно* $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/3)/10 + 22/5$, *и* $44 - \chi_2(g)$ *делится на* p.

Доказательство. Это лемма 1.3 из [1].

В леммах 2–7 предполагается, что Γ является точечным графом частичной геометрией $pG_2(5,26)$ и Ω содержит геодезический 2-путь abc.

Лемма 2. *Число* p *не равно* 13.

Доказательство. Пусть $p = 13$. По предложению либо $|\Omega| = 32$ и $\alpha_1(g) = 78$, либо $|\Omega| = 45$ и $\alpha_1(g) = 117$, либо $|\Omega| = 58$ и $\alpha_1(g) = 156$, либо $|\Omega| = 71$ и $\alpha_1(g) = 195$.

Подграф $[b]$ содержит по крайней мере две g-допустимых прямых. Поэтому $[b]$ содержит четырнадцать g-допустимых прямых, и все эти прямые попадают в Ω. Отсюда $|\Omega| = 71$ и Ω содержится в $b^\perp$. Теперь для любой вершины $a \in \Omega(b)$ подграф $[a]$ содержит четырнадцать g-допустимых прямых и Ω содержится в $a^\perp$, противоречие с тем, что Ω является 71-кликой.

Лемма 3. *Число* p *не равно* 11.

Доказательство. Пусть $p = 11$. По предложению либо $|\Omega| = 66$ и $\alpha_1(g) = 0$, либо $|\Omega| = 77$ и $\alpha_1(g) = 33$, либо $|\Omega| = 88$ и $\alpha_1(g) = 66$, либо $|\Omega| = 99$ и $\alpha_1(g) = 99$.

Подграф $[b]$ содержит пять или шестнадцать g-допустимых прямых, и все эти прямые попадают в Ω. Если $[b]$ содержит шестнадцать g-допустимых прямых, то $|\Omega(b) \cap [a]| = 19$ и $[a]$ содержит шестнадцать g-допустимых прямых. Противоречие с тем, что $|\Omega| \ge 81 + 61$. Значит $[b]$ содержит пять g-допустимых прямых, и Ω является частичной геометрией $pG_2(5,4)$. Противоречие с тем, что $2 \cdot 8$ не делит $5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5$.

Лемма 4. *Если* $p = 7$, *то* Ω *является частичной геометрией* $pG_2(5,5)$.

Доказательство. Пусть $p = 7$. По предложению либо
(i) $|\Omega| = 116$ и $\alpha_1(g) = 0$, либо

(ii) $|\Omega|=81$, $\alpha_1(g)=105$ и на $\Gamma-\Omega$ имеются 45 семиугольных $\langle g\rangle$-орбит, либо
(iii) $|\Omega|\in\{74,67,60,53,39,32\}$ и $\alpha_1(g)\in\{84,63,42,21,189,168\}$ соответственно, либо
(iv) $|\Omega|=46$ и $\alpha_1(g)\in\{0,210\}$.

Так как число прямых частичной геометрией $pG_2(5,26)$ сравнимо с 4 по модулю 7, то g фиксирует не менее 4 прямых. Далее, $[b]$ содержит 6, 13, 20 или 27 прямых, допускающих g, и все эти прямые попадают в Ω. Из действия g на $[a]\cap[b]-\Omega$ следует, что $[a]$ содержит столько же g-допустимых прямых, сколько и $[b]$. Поэтому Ω является частичной геометрией $pG_2(5,t)$, $|\Omega|=3(5t+2)$ и $t=5$.

Наконец, $\chi_2(g)=(81-\alpha_1(g)/3)/10+22$ и $\alpha_1(g)=105$.

Лемма 5. *Если $p=5$, то Ω является частичной геометрией $pG_2(5,6)$ и либо $\alpha_1(g)=0$, либо на $\Gamma-\Omega$ имеются 60 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит.*

Доказательство. Пусть $p=5$. Тогда по предложению либо Ω является 1-кликой и $\alpha_1(g)\in\{15,165,315\}$, либо $|\Omega|=5r+1$, $4\le r\le 19$ и $\alpha_1(g)+15r+15$ делится на 150.

Заметим, что g-допустимая прямая либо попадает в Ω, либо содержит единственную точку из Ω. Из действия g на $[a]\cap[b]$ следует, что $\Omega(a)$ содержит столько же прямых, сколько и $\Omega(b)$. Поэтому Ω является частичной геометрией $pG_2(5,t)$, $r=3t+1$ и $t\in\{2,6,8,14,16\}$. С другой стороны, $[c]$ содержит по ребру на каждой прямой из $a^\perp$, пересекающей Ω по $\{a\}$, поэтому $26-t$ делится на 5 и $t\in\{6,16\}$.

Пусть Ω является частичной геометрией $pG_2(5,16)$. Тогда $d=85, w=246$ и по лемме 1 имеем $85-50\cdot 246/150=3$, поэтому каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна точно с 82 вершинами из Ω, противоречие.

Значит, Ω является частичной геометрией $pG_2(5,6)$. Тогда $\chi_2(g)=14-\alpha_1(g)/30$ и либо $\alpha_1(g)=0$, либо на $\Gamma-\Omega$ имеются 60 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит.

Лемма 6. *Если $p=3$, то Ω — либо частичная геометрия $pG_2(5,t)$, $t\in\{2,5\}$, либо частичная геометрия $pG_2(2,2)$.*

Доказательство. Пусть $p=3$. По предложению $|\Omega|=3l$, $\alpha_1(g)/18-(l+3)/2$ делится на 3 и $2\le l\le 24$ или $l\in\{27,33\}$.

Заметим, что g-допустимая прямая содержит 0, 3 или 6 точек из Ω. Далее, $|L\cap\Omega|=|M\cap\Omega|$ для любых g-допустимых прямых L,M, пересекающих Ω. Поэтому Ω — либо частичная геометрия $pG_2(5,t)$, $t\in\{1,2,4,5\}$, либо частичная геометрия $pG_2(2,t)$, $t\le 24$ или $t=26$.

Так как $[c]$ содержит по ребру на каждой прямой из $a^\perp$, пересекающей Ω по $\{a\}$, то $26-t$ делится на 3.

Пусть Ω является частичной геометрией $pG_2(2,t)$. Тогда $d=2t+2, w=3t+3$ и по лемме 1 имеем $2t+2-(133-2t)(3t+3)/(393-3t)\le 3$, поэтому $129(t+1)/(131-t)\le 3$ и $t=2$.

Лемма 7. *Пусть $p=2$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *Ω является частичной геометрией $pG_2(5,t)$, $t\in\{2,6\}$;*

(2) *Ω является частичным пространством прямых порядка $(4,t)$, t четно.*

Доказательство. Пусть $p=2$. По предложению $|\Omega|=2l$, $l\ge 3$, $(\alpha_1(g)-12-6l)/30$ четно и либо $l\le 78$, либо $l=88$.

Заметим, что g-допустимая прямая содержит 0, 2, 4 или 6 точек из Ω. Для любой вершины $x \in \Omega$ и любых g-допустимых прямых L, M из $x^{\perp}$, пересекающих $\Omega(x)$, получим $|L \cap \Omega| = |M \cap \Omega|$. Однако для прямой N, не продящей через x, возможно включение $N \cap [x] \subset \Gamma - \Omega$.

Таким образом, любая связная компонента Δ графа Ω, содержащая геодезический 2-путь, является частичным пространством прямых порядка (s, t), $s \in \{4, 6\}$, t четно.

В случае $s = 6$ имеем $\Delta = \Omega$ и Ω является частичной геометрией $pG_2(5, t)$, $t \in \{2, 6, 8\}$.

Допустим, что Ω является частичной геометрией $pG_2(5, 8)$. Ввиду леммы 1 каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 42 верштнами из Ω, поэтому $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_2(g) = 17$, противоречие с тем, что $44 - \chi_2(g)$ делится на 2.

Если $s = 2$, то Δ является $(t + 2)$-кликой.

Пусть $s = 4$. Если L — прямая, содержащая 4 точки из $\Omega - \Delta$ и вершины u, u^g, то $[u] \cap [u^g]$ содержит Δ. Без ограничения общности, $a, b, c \in \Delta$. Если L и M — две прямые из $b^{\perp}$, пересекают Δ по 4-кликам, то $\{u, u^g\} \cup (L \cap \Delta)$ и $\{u, u^g\} \cup (M \cap \Delta)$ — две 6-клики, пересекающиеся по трем точкам u, u^g, b, противоречие. Значит, в случае $\Delta \neq \Omega$ подграф $\Omega - \Delta$ является объединением изолированных клик порядков 2 и 4.

Заметим, что число прямых, пересекающих Δ по 4 точкам, равно $(t+1)|\Delta|/4$ и $|\Delta| \geq 1 + 3(t + 1) + 3(t + 1)3t/(2t + 2) = 15t/2 + 4$. Отсюда $|\Delta| \geq 20$ и число прямых, пересекающих Δ по 4 точкам, не меньше 15. В частности, $\Omega - \Delta$ не содержит 4-клик.

Пусть N является 2-кликой $\{e, f\}$ из $\Omega - \Delta$. Тогда $l = 2$, $|\Delta| = 20$ и число прямых, пересекающих Δ по 4 точкам, равно 15. Поэтому $[e] \cap [f]$ совпадает с объединением 15 ребер из $\Gamma - \Delta$, лежащих на прямых, пересекающих Δ по 4 точкам. Противоречие с тем, что прямая, проходящая через e, f пересекает по ребру одну из указанных прямых.

Значит, $\Delta = \Omega$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Список литературы

[1] Исакова М.М., Махнев А.А., *Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54)*, Труды 8 Межд. школы-конференции по теории групп. Нальчик 2010, 94–100.

Мариана Малиловна Исакова
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: isakova2206@mail.ru