S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 162–165 (2010) УДК 517.93

Краткие сообщения MSC 34C + 34D

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТУРЫ И ПРЕДЕЛЫ УСТОЙЧИВЫХ АВТОНОМНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Е. П. ВОЛОКИТИН, В. В. ИВАНОВ, В. М. ЧЕРЕСИЗ

Abstract. It is shown that every dynamical contour can serve as the dynamical limit of a Lyapunov stable motion of an autonomous system. If the contour consists entirely of stationary points, the contour can be the limit of an asymptotically stable motion.

Keywords: autonomous systems, ω-limit points, Lyapunov stability, asymptotic stability, dynamical contours, synchronous serpentine

Предельная динамика нестационарных автономных движений, обладающих той или иной устойчивостью, привлекает сегодня внимание многих исследователей. Целый ряд интересных аспектов этой тематики отражен, например, в монографии [1]. Здесь наша задача — дать ответы на два естественных вопроса о предельных множествах и предельном поведении автономных движений на плоскости, устойчивых в классическом смысле Ляпунова.

Динамическим контуром мы называем окружность S, на которой выбрано замкнутое множество F. Его элементы мы будем называть *неподвижными точками* контура. Пусть в окрестности S действует автономная система, причем, неподвижные точки контура вошли в число ее точек покоя, а компоненты связности множества $S \setminus F$ служат траекториями системы. Если для какого-то движения системы окружность S оказалась его ω-предельным множеством, контур мы будем считать *динамическим пределом* этого движения. Первый наш вопрос — может ли такое движение быть устойчивым?

Теорема 1. *Каждый динамический контур служит пределом устойчивого по Ляпунову движения некоторой бесконечно гладкой автономной системы.*

Volokitin, E. P., Ivanov, V. V., Cheresiz, V. M., Dynamical contours and limits of stable autonomous motions.

Представлена В. М. Гордиенко 17 августа 2010 г., опубликована 23 августа 2010 г.

Второй вопрос — можно ли контур представить как предел асимптотически устойчивого автономного движения? Как показано в [1], *все ω-предельные точки асимптотически устойчивого автономного движения неподвижны,* так что динамический контур, на котором есть движение, не может служить пределом асимптотически устойчивого решения автономной системы. Там же приведена и конкретная двумерная автономная система в надежде, что ее движения асимптотически устойчивы, а их предельным множеством служит окружность. Однако верные и симпатичные формулы решений, указанные в [1, стр. 123], ясно говорят, что движения, обладая устойчивостью по Ляпунову, асимптотической устойчивости не имеют. И это не случайно. Дело в том, что правая часть рассмотренной в [1] системы зависит лишь от полярного радиуса, т. е. речь идет о системе, коммутирующей с поворотами. Между тем, легко доказать, что *асимптотически устойчивое движение такой системы не может иметь более одной ω-предельной точки.* Таким образом, на второй наш вопрос в работе [1] ответа нет. Тем не менее, справедлива

Теорема 2. *Если все точки контура неподвижны, его можно представить как динамический предел асимптотически устойчивого движения бесконечно гладкой автономной системы.*

Теперь мы докажем две наши теоремы. Мы увидим, что можно в простой системе столь искусно изменить скорость движений вдоль ее траекторий, что получится новая система с нужными нам динамическими свойствами.

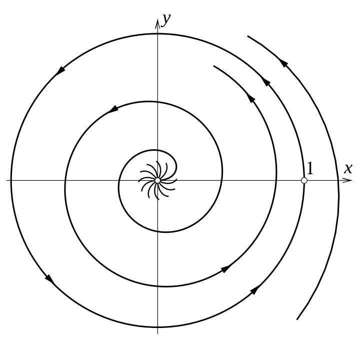

Рис 1. Предельный цикл

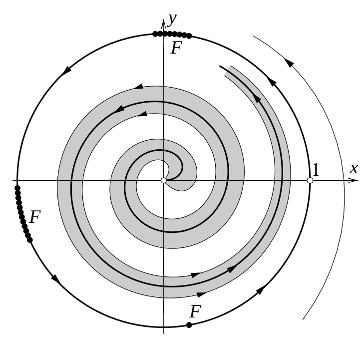

Рис. 2. Динамический контур

1. В качестве исходного «материала» для нашей конструкции мы возьмем систему на плоскости, которая в полярных координатах задается уравнениями $\dot{\varrho} = v(\varrho)$, $\dot{\varphi} = 1$, где $v(\varrho)$ означает бесконечно гладкую на полупрямой $\varrho > 0$ функцию, равную нулю в точке $\varrho = 1$, положительную на интервале $0 < \varrho < 1$ и отрицательную при $\varrho > 1$. Например, можно взять $v(\varrho) = 1 - \varrho$. Фазовый портрет системы, соответствующей этой функции, топологически правильный, но с метрической точки зрения художественно искаженный, изображен на рис. 1. Окружность S единичного радиуса с центром в начале координат представляет собой предельный цикл системы, на который наматываются все траектории, вращаясь при этом против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной единице. Все движения системы устойчивы по Ляпунову и для каждого из них его ω-предельным множеством служит упомянутая выше окружность.

Пусть $0 < a_0 < b_0 < 1$. Найдем решения $a = a(\varphi)$ и $b = b(\varphi)$ уравнения $\varrho' = v(\varrho)$, определенные для $\varphi \geq 0$ и равные a_0 и b_0 при $\varphi = 0$. Ясно, что всюду $a(\varphi) < b(\varphi)$, а также $b(\varphi) < a(\varphi + 2\pi)$, если это верно при $\varphi = 0$, что мы в дальнейшем будем предполагать. Таким образом, траектории, проходящие через точки с абсциссами a_0 и b_0, ограничивают некоторую область U в единичном круге, напоминающую улитку вроде той, что изображена на рис. 2. Мы обещаем, что движения вдоль траекторий, из которых соткана улитка U, не утратят устойчивости в результате преобразования, ожидающего нашу систему.

2. Выберем теперь на окружности S замкнутое множество F, интерпретируя его как 2π-периодическое и тоже замкнутое множество на прямой $\varrho = 1$ в плоскости полярных координат. Множество U в этой плоскости представляет собой бесконечную вправо полоску, заключенную между графиками функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$, стремящимися при $\varphi \to +\infty$ к прямой $\varrho = 1$.

Лемма. *Можно построить всюду заданную бесконечно гладкую функцию $\mu(\varrho, \varphi)$, имеющую период 2π по переменной φ, у которой значения не больше единицы и всюду положительны, кроме точек $(1, \varphi)$ множества F, где они равны нулю, и такую, что $\partial\mu/\partial\varrho = 0$ в области U.*

График декартовой версии функции $\mu(\varrho, \varphi)$ напоминает холмистый рельеф, где над улиткой U проложена дорога, вьющаяся подобно серпантину, у которой нигде нет наклона по ее ширине, а точнее — вдоль радиального направления. Когда аргумент близко подходит к окружности S, она становится узкой ленточкой, почти касающейся координатной плоскости около множества F, а если $F = S$, она вся плавно спускается до нулевого уровня. Построение функции $\mu(\varrho, \varphi)$ нетрудно провести в духе классической конструкции Хасслера Уитни, приводящей порой к экзотическим, но очень полезным объектам.

Пусть $h(\varrho)$ означает определенную для всех ϱ функцию, напоминающую ступеньку Хевисайда, но только бесконечно гладкую, которая равна нулю для $\varrho \leq 0$, единице, когда $\varrho \geq 1$, и принимает значения строго между 0 и 1 на интервале $0 < \varrho < 1$. Положим $g_k(\varphi) = h\left((\varphi - 2\pi k)/2\pi\right)$ для каждого натурального k и для всех значений φ. В полоске $a(\varphi) \leq \varrho \leq b(\varphi + 2\pi)$, где $\varphi \geq 0$, построим замечательную функцию

$$\lambda_k(\varrho, \varphi) = g_k(\varphi) + [g_k(\varphi + 2\pi) - g_k(\varphi)]\, h\left[\frac{\varrho - b(\varphi)}{a(\varphi + 2\pi) - b(\varphi)}\right].$$

Смысл ее прост — она описывает гладкий подъем за один виток с нулевого уровня до единичного, причем, всюду над улиткой высота не зависит от ϱ и для угла φ равна $g_k(\varphi)$. Как легко видеть, функция допускает 2π-периодическое по φ продолжение на полосу $a_0 \leq \varrho < 1$, бесконечно гладкое, как и она сама. Обозначая продолженную функцию прежним символом $\lambda_k(\varrho, \varphi)$, мы будем считать ее равной нулю при $\varrho < a_0$, учитывая, что она такова в полоске $a_0 \leq \varrho < b(2\pi k)$, и равной единице при $\varrho \geq 1$, какова она в полосе $a(2\pi(k+1)) \leq \varrho < 1$. Дальше нам нужен «финитный» вариант $\nu_k(\varrho, \varphi)$ нашей функции, который получается умножением $\lambda_k(\varrho, \varphi)$ на $1 - h(\varrho - 1)$ или, скажем, на $h(2 - \varrho)$.

Для каждого номера $k \geq 1$ выберем теперь $\varepsilon_k > 0$ настолько маленьким, чтобы функция $\varepsilon_k\, \nu_k(\varrho, \varphi)$, как и все ее частные производные до порядка k, по абсолютной величине были всюду меньше 2^{-k}. Мы не только можем, но и будем считать, что сумма всех ε_k равна единице. Пусть ν означает сумму ряда из функций $\varepsilon_k\, \nu_k$. Подберем, наконец, бесконечно гладкую 2π-периодическую «стоп-функцию» $s(\varphi)$ со значениями между 0 и 1, равную единице в точках φ множества F и только в них. Ясно, что функция $\mu(\varrho,\varphi) = 1 - s(\varphi)\nu(\varrho,\varphi)$ в полной мере подходит для описанной в лемме роли «синхронного серпантина».

3. Умножим на μ правую часть нашей системы. Новая система имеет те же траектории, что и прежняя, кроме окружности S, если на ней появились остановки. Функция $\mu(\varrho,\varphi)$ в области U не зависит от ϱ. Пусть $f(\varphi)$ означает ее сужение на U. Таким образом, внутри нашей сохранившей «инвариантность» улитки U новая система имеет вид $\dot\varrho = v(\varrho)f(\varphi),\ \ \dot\varphi = f(\varphi)$. Рассмотрим два ее решения (ϱ,φ) и (ϱ_*,φ_*), которые начинаются при $t = 0$ внутри U.

В силу автономности уравнения, описывающего изменение полярного угла, функции φ и φ_* отличаются лишь сдвигом. Например, если $\varphi_*(0) \geq \varphi(0)$, найдется такое $\tau \geq 0$, что $\varphi_*(t) = \varphi(t+\tau)$ для всех $t \geq 0$. В таком случае разность $\varphi_*(t) - \varphi(t)$, равную $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$, можно представить как $\dot\varphi(\sigma)\tau = f(\varphi(\sigma))\tau$, где точка σ расположена между t и $t+\tau$, а поскольку $0 \leq f \leq 1$, величина этой разности не превосходит τ. Если же $F = S$, функция $f(\varphi)$ и вовсе стремится к нулю при $\varphi \to +\infty$, а вслед за ней и $\varphi_*(t) - \varphi(t) \to 0$, когда $t \to +\infty$.

По аналогичным причинам ϱ_* как функция угла φ представляет собой сдвиг функции ϱ на некоторую «фазу» ψ. При этом ϱ как функция переменной $t \geq 0$ равна $\varrho(\varphi(t))$, а значение $\varrho_*(\varphi_*(t))$ функции ϱ_* в момент t можно записать в виде $\varrho(\varphi(t) + \psi(t))$, где $\psi(t) = \varphi(t+\tau) - \varphi(t) + \psi$. Отсюда прямо следует, что разность $\varrho_*(t) - \varrho(t)$, кроме того, что она стремится к нулю при $t \to +\infty$, по модулю ни в какой момент $t \geq 0$ не превосходит $c\,(\tau + |\psi|)$, где c означает максимум функции v на отрезке от наименьшего из значений $\varrho(0)$ и $\varrho_*(0)$ до 1.

Поскольку сдвиги τ и ψ тем меньше, чем меньше разность между начальными значениями наших решений в момент $t = 0$, сказанное выше означает устойчивость по Ляпунову всех решений, которые начинаются строго внутри улитки U, а если $F = S$, эти решения еще и асимптотически устойчивы.

Работа выполнена в рамках междисциплинарного интеграционного проекта № 107, поддержанного Сибирским отделением Российской академии наук.

Список литературы

[1] О. В. Дружинина, *Методы анализа устойчивости и динамической прочности траекторий нелинейных дифференциальных систем*, 2008, ВЦ РАН, Москва, 200 с.

Евгений Павлович Волокитин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: volok@math.nsc.ru

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru

Владимир Михайлович Чересиз
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: fzagirova@yandex.ru